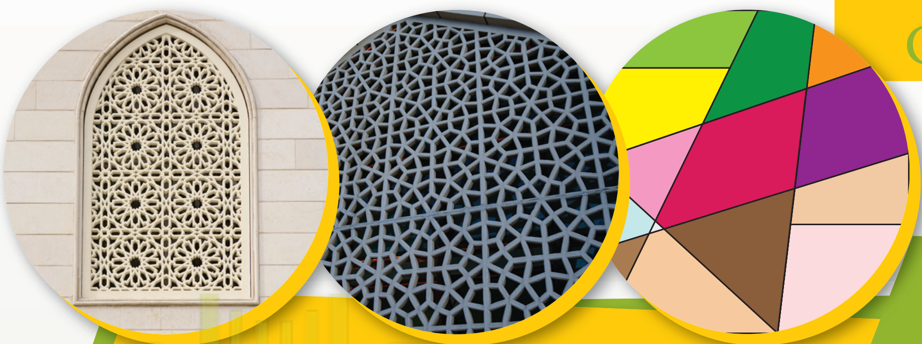
الوحدة الثامنة

الأشكال الرباعية
Quadrilaterals

تصاميم هندسية
Geometric Designs



مشروع الوحدة :
(تصميم هندسي)

عمليات التصميم الهندسي هي مجموعة من الخطوات التي تتم من أجل إخراج منتج جديد أو نظام جديد .

خطة العمل :

- توظيف أشكال رباعية لتكوين تصاميم هندسية متنافسة ومميزة .

خطوات تنفيذ المشروع :

- في تصميمك ارسم أشكالًا رباعية (مستخدمًا شبكة المربعات ، أدوات هندسية) .
- ضمِّن في تصميمك كل أنواع متوازيات الأضلاع (مستطيل ، معين ، مربع) .
- حدد الأشكال الرباعية المستخدمة في التصميم ، وحلِّل خواصها من حيث (التطابق ، والتماثل ، ... إلخ) بإكمال الجدول.
- استخدم أكثر عدد ممكن من الأشكال الرباعية لتكوّن التصميم .

اسم الشكل الرباعي	خواص			تماثل	
	الأضلاع	الزوايا	الأقطار	حول محور	حول نقطة

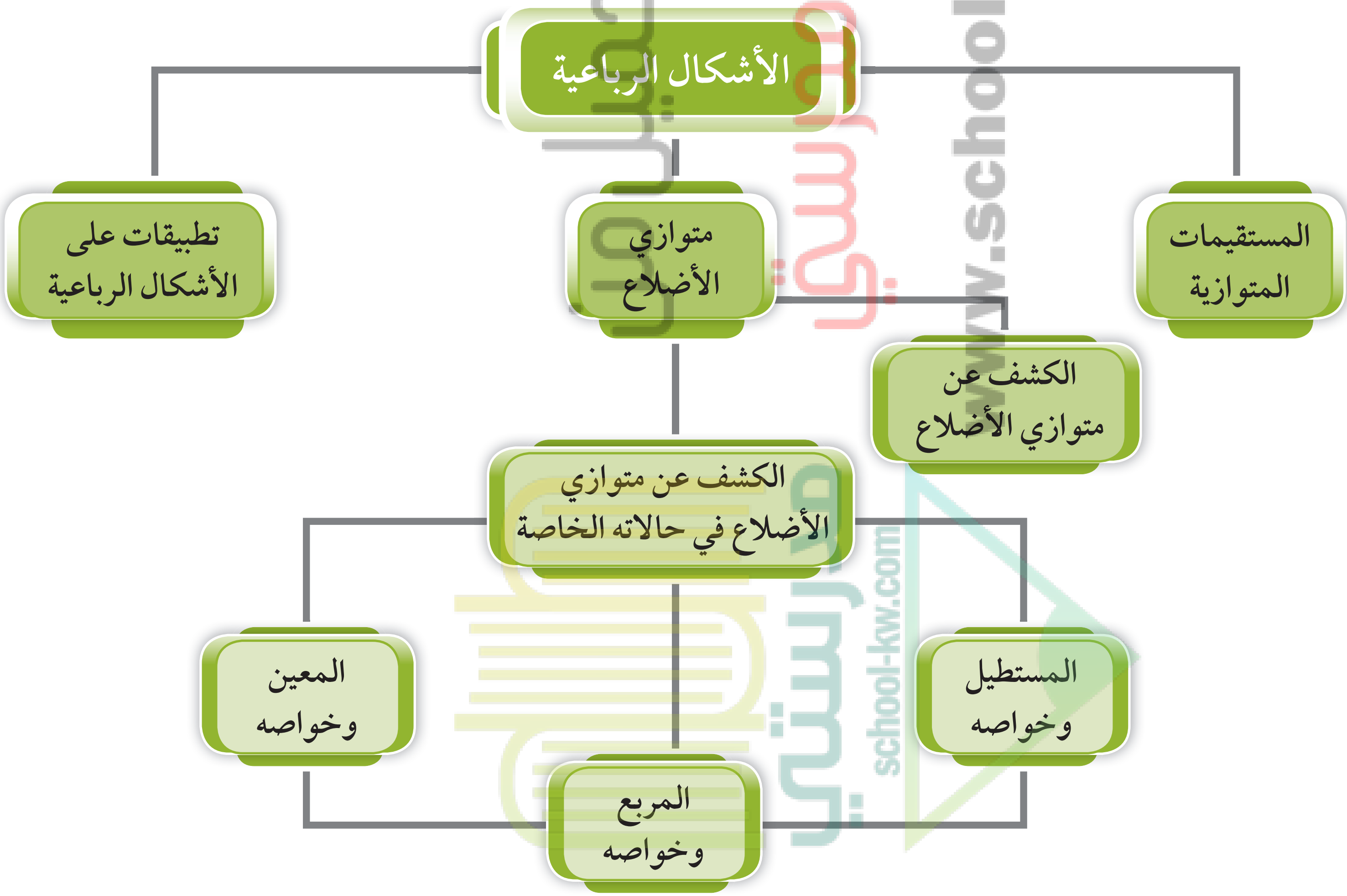
علاقات وتواصل :

- المجموعة الواحدة تصمم عدة تصاميم هندسية ويتم اختيار الأفضل .

عرض العمل :

- كل مجموعة تعرض التصميم النهائي مع الجدول المستخدم .

مخطَّط تنظيمي للوحدة الثامنة

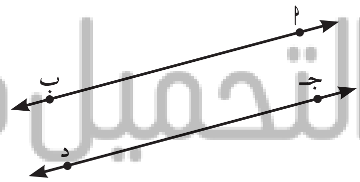


٨-١ المستقيمات المتوازية
Parallel Lines

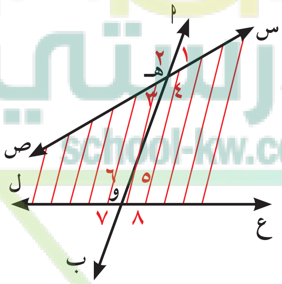
العبارات والمفردات :
متوازٍ Parallel
زوايا متبادلة Alternate Angles
زوايا متناظرة Corresponding Angles
زوايا متحالفة Allied Angles

سوف تتعلّم : العلاقة بين الزوايا الناتجة من قطع مستقيم لمستقيمين متوازيين .

تسمّى الخطوط المستقيمة التي تقع في مستوى واحد ولا تتقاطع أبدًا **بالخطوط المتوازية** .

الرسم	تقرأ	تكتب بالرموز
	المستقيم (ا ب) يوازي المستقيم (جـ د)	$\overleftrightarrow{\text{ا ب}}$ // $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$

نشاط :



أكمل ما يلي : عندما يقطع مستقيم مستقيمين

تنتج زوايا عددها ٨

من هذه الزوايا زوايا متبادلة وزوايا متناظرة ، متحالفة ، متقابلة بالرأس ، متجاورة

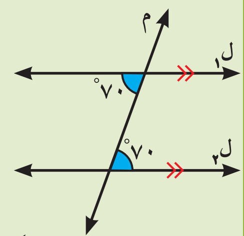
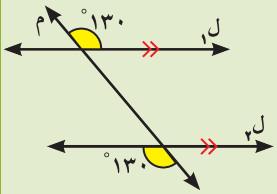
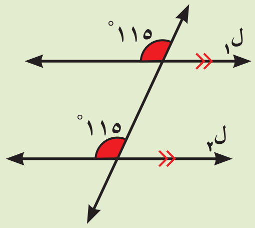
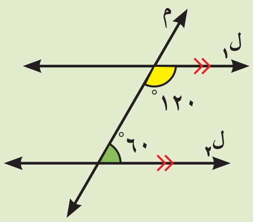
أكمل الجدول التالي مستعينًا بالشكل المرسوم :

أزواج من الزوايا المتبادلة	داخليًا	٤ ، ٦ — ٣ ، ٥
	خارجيًا	٢ ، ٨ — ١ ، ٧
أزواج من الزوايا المتناظرة		١ ، ٥ — ٤ ، ٨ — ٣ ، ٧ — ٢ ، ٦
أزواج من الزوايا المتحالفة		٤ ، ٥ — ٣ ، ٦
أزواج من الزوايا المتقابلة بالرأس		١ ، ٣ — ٢ ، ٤ — ٥ ، ٧ — ٦ ، ٨
أزواج من الزوايا المتجاورة		١ ، ٢ — ١ ، ٤ — ٤ ، ٣ — ٢ ، ٣ ٥ ، ٦ — ٥ ، ٨ — ٨ ، ٧ — ٦ ، ٧

معلومات مفيدة :
– في صناعة النسيج تكون الخيوط متوازية ومتعامدة على النول .

تذكر أنَّ :
- الزاويتان المتكاملتان مجموع قياسهما ١٨٠°
- الزاويتان المتتامتان مجموع قياسهما ٩٠°

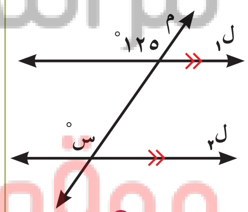
ربط الأفكار : إذا قطع مستقيم مستقيمين متوازيين ، فإنَّ :

كل زاويتين متبادلتين متطابقتان		كل زاويتين متناظرتين متطابقتان	كل زاويتين متحالفتين متكاملتان
			
زوايا متبادلة داخليًّا	زوايا متبادلة خارجيًّا		

تذكر أنَّ :
- الزاويتان المتجاورتان على خط مستقيم واحد متكاملتان .
- الزاويتان المتقابلتان بالرأس متطابقتان .

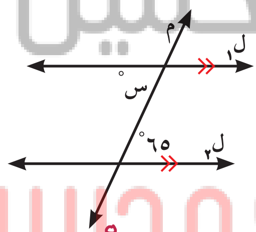
تدرّب (١) :

في كلّ من الأشكال التالية أوجد قيمة (س°) مع ذكر السبب.



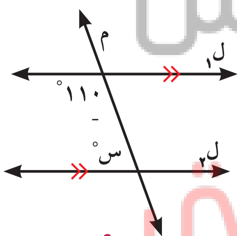
١٢٥°

بالتناظر والتوازي



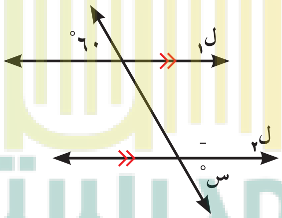
٦٥°

بالتبادل والتوازي



٧٠°

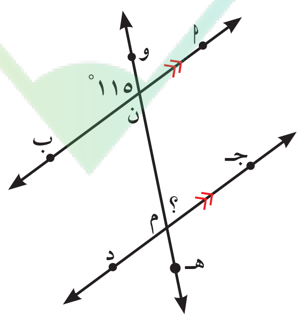
بالتحالف والتوازي



٦٠°

متبادلتان خارجاً مع التوازي

تدرّب (٢) :



في الشكل المقابل : $\overleftrightarrow{أب}$ // $\overleftrightarrow{جـ د}$ ، $\overleftrightarrow{و هـ}$ قاطع لهما

في ن ، م على الترتيب ، ق (و $\hat{ن}$ ب) = ١١٥° .

فأكمل لتوجد بالبرهان ق (جـ $\hat{م}$ ن) .

المعطيات : (١) $\overleftrightarrow{أب}$ // $\overleftrightarrow{جـ د}$ ، $\overleftrightarrow{وهـ}$ قاطع لهما

(٢) ق (و $\hat{ن}$ ب) = ١١٥°

المطلوب : إيجاد ق (جـ $\hat{م}$ ن)

البرهان : ∵ $\overleftrightarrow{أب}$ // $\overleftrightarrow{جـ د}$ ، $\overleftrightarrow{وهـ}$ قاطع لهما (معطى)

∴ ق (و $\hat{ن}$ ب) = ١١٥° (معطى)

∴ ق (ن $\hat{م}$ د) = ق (و $\hat{ن}$ ب) = ١١٥° (بالتوازي والتناظر)

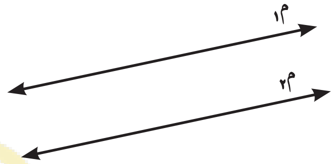
∴ ق (جـ $\hat{م}$ ن) = ١٨٠° − ١١٥° = ٦٥° لأنَّ جـ $\hat{م}$ ن ، ن $\hat{م}$ د متجاورتان على مستقيم

فكِّر وناقِش

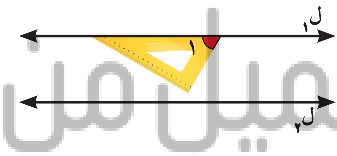
قال عبد الكريم : أستطيع حل تدرب (٢) السابق بطرق أخرى مختلفة ، فهل توافقه الرأي ؟ فسّر إجابتك . نعم ، مثلاً ب نَ م = ٦٥° بالتجاور على مستقيم مع ونَ ب ، ب نَ م = جـ مَ ن بالتبادل والتوازي

نشاط (٢) :

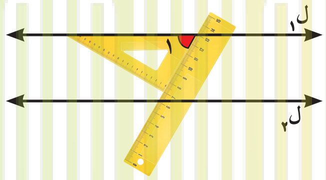
باستخدام المسطرة والمثلث القائم تحقق من صحة توازي المستقيمين م١ ، م٢ متبعًا الخطوات الأربع .



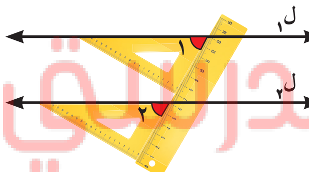
الخطوة الأولى :



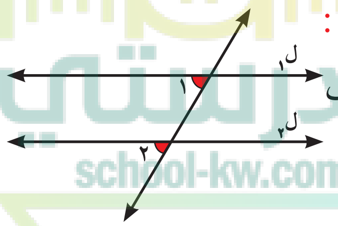
الخطوة الثانية :



الخطوة الثالثة : حرك المثلث إلى الأسفل



الخطوة الرابعة : ماذا تلاحظ على $\hat{1}$ ، $\hat{2}$



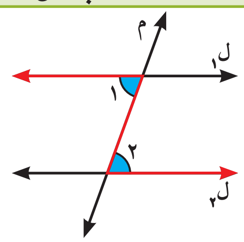
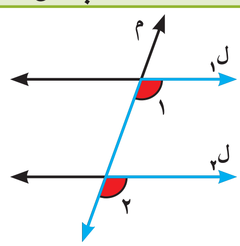
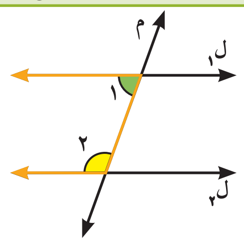
نتيجة : إذا قطع مستقيم مستقيمين في المستوى وتوفرت أحد الشروط التالية :

(١) زاويتان متبادلتان متطابقتان .

(٢) زاويتان متناظرتين متطابقتان .

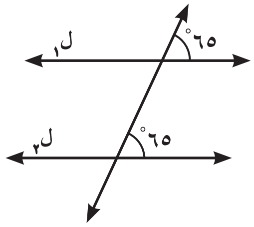
(٣) زاويتان متحالفتان متكاملتان.

فإن المستقيمين يكونان متوازيين .

إذا قطع مستقيم مستقيمين في المستوى وكان :		
الزاويتان المتبادلتان ١ ، ٢ متطابقتان	الزاويتان المتناظرتان ١ ، ٢ متطابقتان	الزاويتان المتحالفتان ١ ، ٢ متكاملتان
		
فإنَّ $\overleftrightarrow{ل_1}$ // $\overleftrightarrow{ل_2}$	فإنَّ $\overleftrightarrow{ل_1}$ // $\overleftrightarrow{ل_2}$	فإنَّ $\overleftrightarrow{ل_1}$ // $\overleftrightarrow{ل_2}$

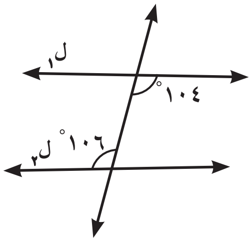
تدرّب (٣) :

في أي من الأشكال التالية يكون المستقيمان ل١ ، ل٢ متوازيين ؟ وضّح ذلك .



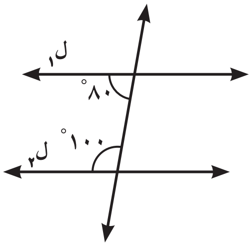
∵ الزاويتان المتناظرتان متطابقتان

∴ ل١ // ل٢



∵ الزاويتان المتبادلتان غير متطابقتين

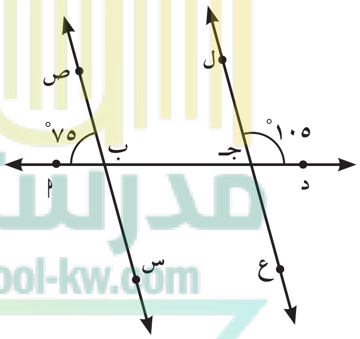
∴ ل١ ، ل٢ غير متوازيتين



∵ الزاويتان المتحالفتان متكاملتان

∴ ل١ // ل٢

مثال :



في الشكل المقابل أد قاطع للمستقيمين

س ص ، ع ل في ب ، جـ على الترتيب ،

ق (أ ب̂ ص) = ٧٥° ، ق (ل جـ̂ د) = ١٠٥° ،

برهن أنَّ س ص // ع ل .

الحلّ :

المعطيات : (١) أد قاطع للمستقيمين س ص ، ع ل .

(٢) ق (أ ب̂ ص) = ٧٥° ، ق (ل جـ̂ د) = ١٠٥°

المطلوب : إثبات أنَّ س ص // ع ل

البرهان : ∵ ق (ل جـ̂ د) = ١٠٥° (معطى)

∴ ق (ب جـ̂ ل) = ١٨٠° − ١٠٥° = ٧٥° (بالتجاور على مستقيم واحد)

∵ ق (أ ب̂ ص) = ٧٥° (معطى)

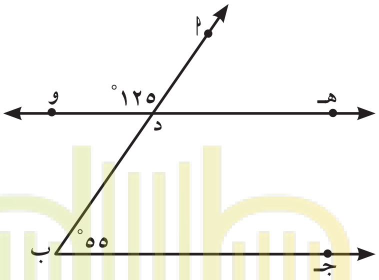
∵ ق (أ ب̂ ص) = ق (ب جـ̂ ل) = ٧٥° (وهما في وضع تناظر)

∴ س ص // ع ل

فكِّر وناقِش

قالت نور : أستطيع حل المثال السابق بطرق أخرى ، هل توافقها الرأي ، فسر إجابتك .

تدرّب (٤) :



في الشكل المقابل : ق (أ د̂ و) = ١٢٥° ،

ق (د ب̂ جـ) = ٥٥° ، أثبت أنَّ $\overleftrightarrow{\text{هـ و}}$ // $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$

المعطيات : (١) ق (أ د̂ و) = ١٢٥°

(٢) ق (د ب̂ جـ) = ٥٥°

المطلوب : إثبات أنَّ $\overleftrightarrow{\text{هـ و}}$ // $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$

البرهان : ∵ ق (أ د̂ و) = ١٢٥° (معطى)

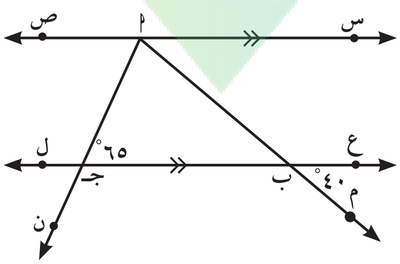
∴ ق (هـ د̂ ب) = ١٢٥° (زاويتان متقابلتان بالرأس) .

∵ ق (هـ د̂ ب) + ق (د ب̂ جـ) = ١٢٥° + ٥٥° = ١٨٠° (وهما متحالفتان)

∴ $\overleftrightarrow{\text{هـ و}}$ // $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$

هل يوجد لتدرب (٤) حلول أخرى لإثبات صحة التوازي ؟ وضح ذلك.

تمــرَّنْ :



١ في الشكل المقابل $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ // $\overleftrightarrow{\text{ع ل}}$ ،

ق (ع ب̂ م) = ٤٠° ، ق (أ جـ̂ ب) = ٦٥°

أوجد بالبرهان كلًّا من :

ق (ص أ̂ جـ) ، ق (س أ̂ ب) ، ق (جـ أ̂ ب)

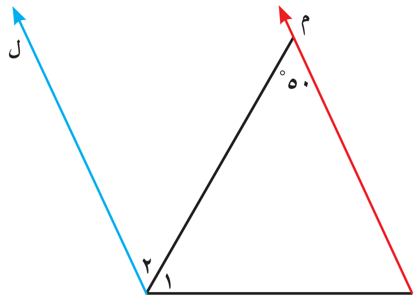
ق (ص أ̂ جـ) = ق (أ جـ̂ ب) = ٦٥° بالتبادل والتوازي

ق (أ ب̂ جـ) = ق (ع ب̂ م) = ٤٠ زاويتان متقابلتان بالرأس

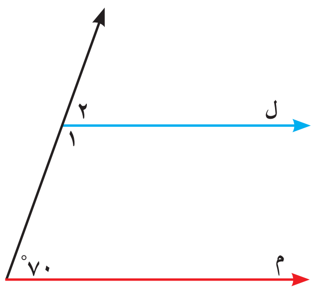
ق (س أ̂ ب) = ق (أ ب̂ جـ) = ٤٠ بالتبادل والتوازي

ق (جـ أ̂ ب) = ١٨٠° − (٦٥° + ٤٠°) = ٧٥° مجموع قياسات زوايا المثلث ١٨٠°

٢ في الشكل (أ) ، (ب) ضع قياسًا من عندك لإحدى الزاويتين ١ ، ٢ أو كلتيهما لتجعل ل ، م متوازيين .



(أ)

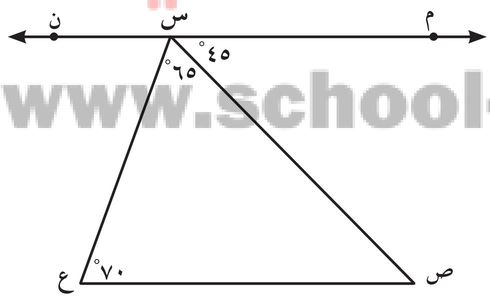


(ب)

ق(٢̂) = ٥٠°
ق(١̂) = اجابات متعددة

ق(١̂) = ١١٠° بالتحالف والتوازي
ق(٢̂) = ٧٠° بالتناظر والتوازي

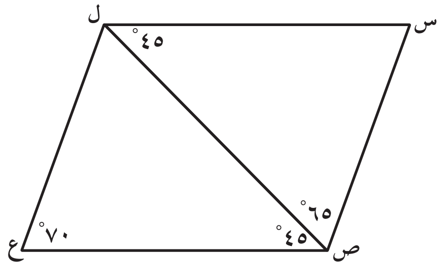
٣ في الشكل المقابل وحسب البيانات المحددة عليه ،
أثبت أنَّ م ن // ص ع .



ق(س ص̂ ع) = ١٨٠° − (٦٥° + ٧٠°) = ٤٥° مجموع قياسات زوايا المثلث ١٨٠°
ق(س ص̂ ع) = ق(م س̂ ص) = ٤٥° بالتبادل والتوازي
إذاً م ن // ص ع

٤ في الشكل المقابل وحسب البيانات المدونة عليه ،

برهن أن $\overline{\text{س ل}}$ // $\overline{\text{ص ع}}$ ، $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ل ع}}$.



ق(س ل̂ ع) = ق(ل ص̂ ع) = ٤٥° هما في وضع تبادل وتوازي

إذاً $\overline{\text{س ل}}$ // $\overline{\text{ص ع}}$

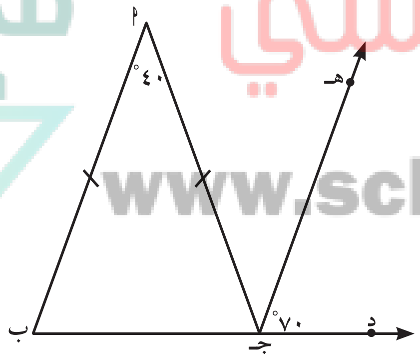
△ ل ص ع فيه : ق(ص ل̂ ع) = ١٨٠° − ١١٥° = ٦٥° مجموع قياسات زوايا المثلث ١٨٠.

ق(س ص̂ ل) = ق(ع ل̂ ص) = ٦٥° هما في وضع تبادل

$\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ل ع}}$

٥ في الشكل المقابل وحسب البيانات المحددة عليه ،

أثبت أن $\overleftarrow{\text{جـ هـ}}$ // $\overline{\text{ب ا}}$.



△ ا ب جـ متطابق الضلعين

ق(ا ب̂ جـ) = ق(ا جـ̂ ب) = (١٨٠° − ٤٠°) ÷ ٢ = ٧٠°

ق(ا ب̂ جـ) = ق(هـ جـ̂ د) = ٧٠° هما في وضع تناظر وتوازي

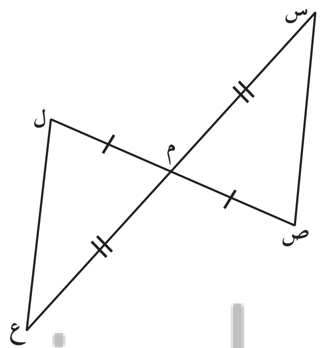
$\overleftrightarrow{\text{جـ هـ}}$ // $\overleftrightarrow{\text{ب ا}}$

٦ في الشكل المقابل وحسب البيانات المحددة عليه ،

أثبت أنَّ :

(١) Δ س م ص $\cong$ Δ ع م ل

(٢) $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ع ل}}$



Δ س م ص ، Δ ع م ل فيهما

$\overline{\text{س م}} \cong \overline{\text{ع م}}$ معطى

$\overline{\text{ص م}} \cong \overline{\text{ل م}}$ معطى

ق(س م̂ ص) = ق(ع م̂ ل) بالتقابل بالرأس

$\therefore$ Δ س م ص $\cong$ Δ ع م ل بحالة (ض ، ز ، ض)

من تطابق المثلثين نستنتج

ق(س̂) = ق(ع̂) وهما في وضع تبادل

$\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ع ل}}$

٨-٢ متوازي الأضلاع وخواصه
Parallelogram and its Properties

العبارات والمفردات :

متوازي الأضلاع
Parallelogram

زاويتان متقابلتان
Opposite Angles

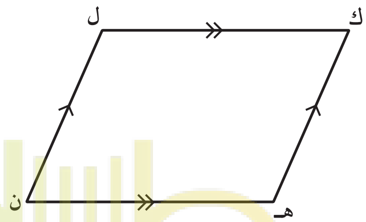
زاويتان متتاليتان
Consecutive Angles

سوف تتعلّم : خواص متوازي الأضلاع .

تعلمت سابقًا : أنَّ متوازي الأضلاع هو شكل رُباعي فيه كل ضلعين متقابلين متوازيان .

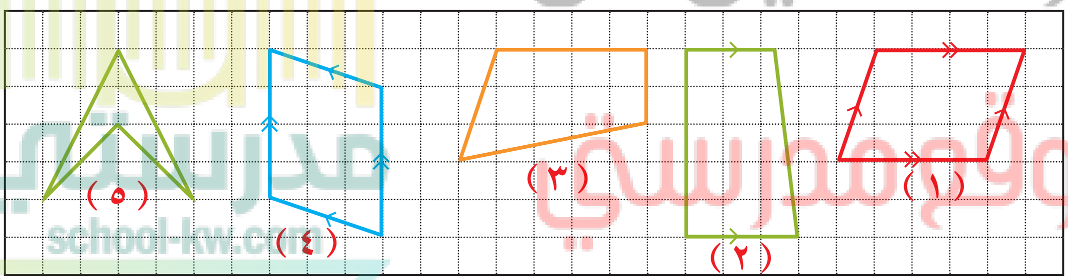
ك ل ن هـ متوازي أضلاع وعلى ذلك :

$\overline{\text{ك ل}}$ // $\overline{\text{هـ ن}}$ ، $\overline{\text{هـ ك}}$ // $\overline{\text{ن ل}}$



نشاط :

لاحظ العلامات المستخدمة في الأشكال التالية (علامات التوازي) . أيّهما يمثل متوازي أضلاع ؟ ولماذا ؟



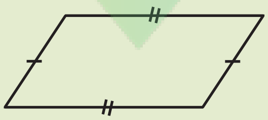
كل ضلعين متقابلين متوازيان

معلومات مفيدة :

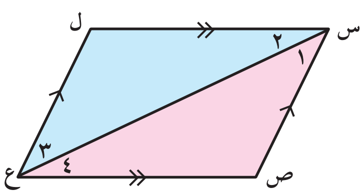
معظم الأشكال التي تراها في الجسور الحديدية هي على شكل متوازي الأضلاع .

الخاصية الأولى :

في متوازي الأضلاع كل ضلعين متقابلين متطابقان .



سوف نثبت الخاصية كما يلي :



المعطيات : (١) س ص ع ل متوازي أضلاع

المطلوب : إثبات أنَّ : (١) $\overline{\text{س ص}} \cong \overline{\text{ل ع}}$ ،

(٢) $\overline{\text{س ل}} \cong \overline{\text{صع}}$

البرهان : لإثبات ذلك نبحث عن مثلثين متطابقين .

وليكن Δ س ص ع ، Δ ع ل س فيهما :

(١) ق ($\hat{١}$) = ق ($\hat{٣}$) (بالتبادل والتوازي)

(٢) ق ($\hat{٤}$) = ق ($\hat{٢}$) (بالتبادل والتوازي)

(٣) $\overline{\text{س ع}}$ (قطر متوازي الأضلاع (ضلع مشترك))

$\Leftarrow$ ∴ Δ س ص ع $\cong$ Δ ع ل س

حالة التطابق هي (ز . ض . ز)

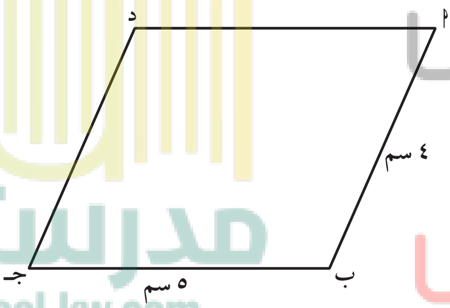
ينتج من التطابق أنَّ : $\overline{\text{س ص}}$ $\cong$ $\overline{\text{ع ل}}$ ، $\overline{\text{س ل}}$ $\cong$ $\overline{\text{ص ع}}$

∴ كل ضلعين متقابلين في متوازي الأضلاع متطابقان .

تذكَّرْ أنَّ :
محيط الشكل (المضلع) الهندسي هو مجموع أطوال أضلاعه.

تدرّب (١) :

في الشكل المقابل متوازي أضلاع .



أوجد محيط متوازي الأضلاع :

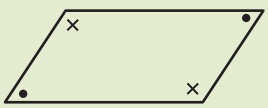
لإيجاد المحيط نوجد باقي أطوال أضلاع متوازي الأضلاع :

د جـ = ٤ سم السبب : كل ضلعين متقابلين متطابقين

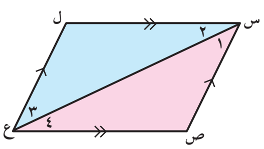
أ د = ٥ سم السبب : كل ضلعين متقابلين متطابقين

محيط متوازي الأضلاع = ١٨ سم

الخاصية الثانية :
في متوازي الأضلاع كل زاويتين متقابلتين متطابقتان .



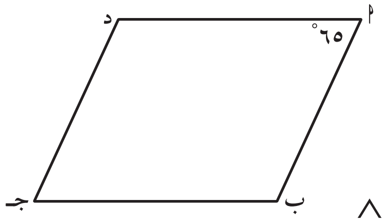
وسوف نثبت الخاصية الثانية كما في برهان الخاصية الأولى :



ينتج من التطابق أنَّ : $\hat{\text{ص}}$ $\cong$ $\hat{\text{ل}}$

∵ ق ($\hat{١}$) + ق ($\hat{٢}$) = ق ($\hat{٣}$) + ق ($\hat{٤}$) ومنه نجد أنَّ $\hat{\text{س}}$ $\cong$ $\hat{\text{ع}}$

∴ كل زاويتين متقابلتين في متوازي الأضلاع متطابقتان .



تدرّب (٢) :

أ ب جـ د متوازي أضلاع . ق (أ̂) = ٦٥°

أوجد ق (ب̂) ، ق (جـ̂) ، ق (د̂)

المعطيات : (١) أ ب جـ د متوازي أضلاع ، (٢) ق (أ̂) = ٦٥°

المطلوب : إيجاد قياس ..(ب̂).. ، ..(جـ̂).. ، ..(د̂)..

البرهان : ∵ أ ب جـ د متوازي أضلاع (معطى)

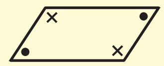
∴ ق (ب̂) = ١٨٠° − (..٦٥°..) = ..١١٥°.. (لأنَّ كل زاويتين متتاليتين ..متكاملتان..)

∴ ق (جـ̂) = ..ق(أ̂).. = ..٦٥°.. (لأنَّ كل زاويتين ..متقابلتين متطابقتين..)

ق (د̂) = ..ق(ب̂).. = ..١١٥°.. (لأنَّ كل زاويتين متقابلتين ..متطابقتين..)

تذكَّرْ أنَّ :

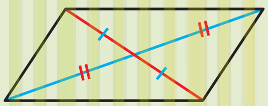
– في متوازي الأضلاع كل زاويتين متتاليتين متكاملتان .

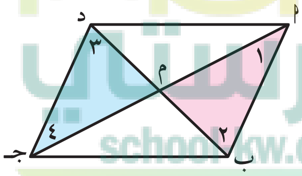


– مجموع قياسات الزوايا الداخلة لمتوازي الأضلاع تساوي ٣٦٠°

الخاصية الثالثة :

في متوازي الأضلاع القطران ينصف كل منهما الآخر .





سوف نثبت الخاصية كما يلي :

المعطيات : (١) أ ب جـ د متوازي أضلاع تقاطع قطريه في م

المطلوب : إثبات أنَّ : (١) م منتصف $\overline{\text{أ جـ}}$ ، (٢) م منتصف $\overline{\text{ب د}}$.

البرهان : لإثبات ذلك نبحث عن مثلثين متطابقين .

وليكن △ أ م ب ، △ جـ م د فيهما :

(١) ق (١̂) = ق (٤̂) (بالتبادل والتوازي)

(٢) ق (٢̂) = ق (٣̂) (بالتبادل والتوازي)

(٣) أ ب = د جـ (من خواص متوازي الأضلاع)

⟸ ∴ △ أ م ب ≅ △ جـ م د

حالة التطابق هي (ز . ض . ز)

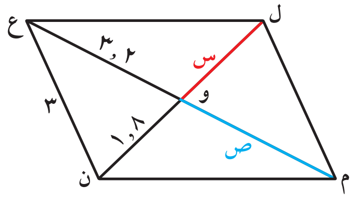
وينتج أنَّ : م أ = م جـ (أي أن : م منتصف $\overline{\text{أ جـ}}$) ،

م ب = م د (أي أن : م منتصف $\overline{\text{ب د}}$)

نستنتج أنَّ : القطرين $\overline{\text{أ جـ}}$ ، $\overline{\text{ب د}}$ ينصف كلّ منهما الآخر .

∴ في متوازي الأضلاع القطران ينصف كلّ منهما الآخر .

تدرّب (٣) :



ل م ن ع متوازي أضلاع تقاطع قطريه في و .

أوجد : (١) س ، ص . (٢) محيط المثلث ل م و

∵ الشكل ل م ن ع متوازي اضلاع (معطى)

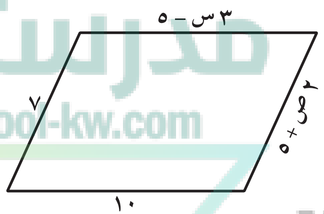
∴ القطران ينصف كل منهما الآخر

∴ س = و ن = ١,٨ وحدة طول ،

وبالمثل ص = و ع = ٣,٢ وحدة طول

∴ محيط Δ ل م و = ١,٨ + ١,٨ + ٣,٢ + ٣,٢ = ٨ وحدة طول

تدرّب (٤) :



في متوازي الأضلاع المقابل ،

أوجد قيمة كلٍّ من س ، ص .

من خواص متوازي الأضلاع كل ضلعين متقابلين متطابقان

فيكون : $\boxed{\text{٣ س − ٥ = ١٠}}$

٣ س = ١٠ + ٥

٣ س = ١٥

س = ٥

بالمثل : $\boxed{\text{٢ ص + ٥ = ٧}}$

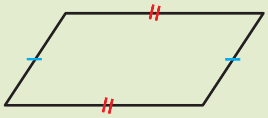
٢ص = ٧ − ٥

٢ص = ٢

ص = ١

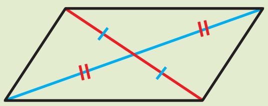
مما سبق : تحققنا من صحة خواص متوازي الأضلاع وهي :

(١) في متوازي الأضلاع كل ضلعين متقابلين متطابقان



(٢) في متوازي الأضلاع كل زاويتين متقابلتين متطابقتان

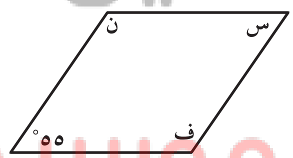
(٣) في متوازي الأضلاع القطران ينصف كلّ منهما الآخر



تمـــرَّنْ :

١ أوجد قيمة كلٍّ من س ، ف ، ن في متوازيات الأضلاع التالية :

أ

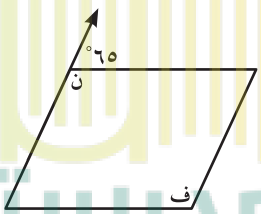


س = ٥٥°

ف = ن = ١٨٠ - ٥٥

= ١٢٥°

ب



ن = ف = ١٨٠ - ٦٥

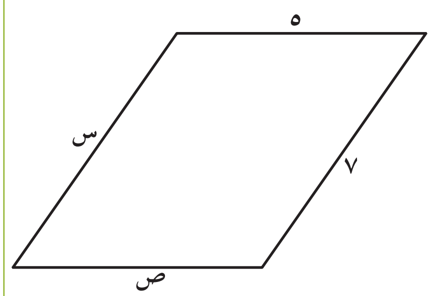
= ١١٥°

٢ TIMSS 2019 إذا كان أ ب جـ د متوازي أضلاع وكان الفرق بين أي زاويتين غير متقابلتين ٤٠°،
فما هو قياس الزاوية الصغرى لمتوازي الأضلاع؟

٧٠°

٣ أوجد الأطوال المجهولة في متوازيات الأضلاع التالية :

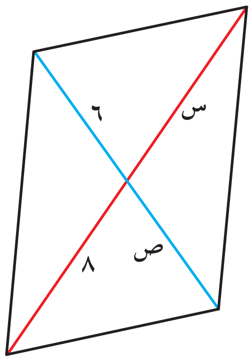
أ



س = ٧

ص = ٥

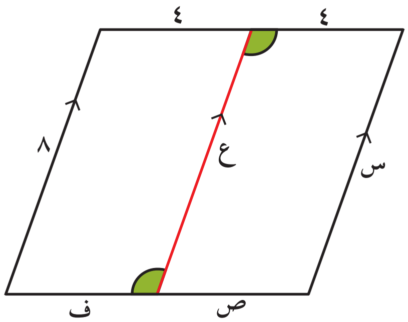
ب



س = ٨

ص = ٦

جـ



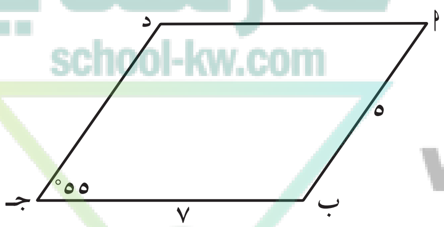
س = ٨

ص = ٤

ع = ٨

ف = ٤

٤ أ ب جـ د متوازي أضلاع فيه أ ب = ٥ وحدة طول ، ب جـ = ٧ وحدة طول ، ق ($\hat{\text{جـ}}$) = ٥٥° ، أوجد ما يلي مع ذكر السبب :



أ د = ب جـ = ٧ السبب : كل ضلعين متقابلين متطابقين

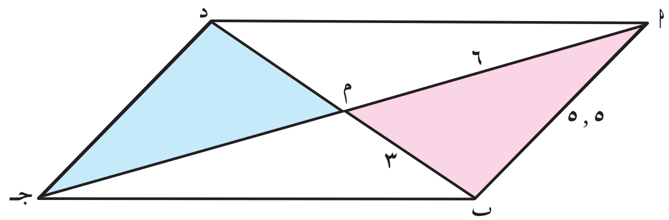
د جـ = أ ب = ٥ السبب : كل ضلعين متقابلين متطابقين

ق ($\hat{\text{أ}}$) = ق ($\hat{\text{جـ}}$) = ٥٥° السبب : كل زاويتين متقابلتان متطابقتان

ق ($\hat{\text{ب}}$) = ١٨٠° − ٥٥° = ١٢٥° السبب : كل زاويتين متقابلتان متكاملتان

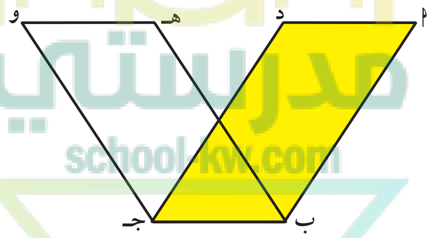
ق ($\hat{\text{د}}$) = ق ($\hat{\text{ب}}$) = ١٢٥° السبب : كل زاويتين متقابلتان متطابقتان

٥ أ ب جـ د متوازي أضلاع تقاطع قطريه في م ، أب = ٥,٥ وحدة طول ،
أم = ٦ وحدة طول ، ب م = ٣ وحدة طول . احسب محيط ∆ د م جـ .



د م = م ب = ٣ وحدة طول السبب : القطران ينصف كل منهما الآخر
م جـ = م أ = ٦ وحدة طول السبب : القطران ينصف كل منهما الآخر
د جـ = أب = ٥,٥ وحدة طول السبب : ضلعان متقابلان متطابقان
∴ محيط ∆ د م جـ = ١٤,٥ وحدة طول

٦ أ ب جـ د ، هـ ب جـ و متوازيا أضلاع ،
أثبت أن : أ د = هـ و



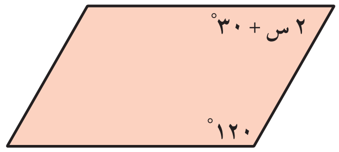
أد = ب جـ ضلعان متقابلان متطابقان في متوازي الاضلاع أ ب جـ د

هـ و = ب جـ ضلعان متقابلان متطابقان في متوازي الاضلاع هـ ب جـ و

اذاً أ د = هـ و من خواص المساواة

٧ أمامك متوازيات أضلاع ، أوجد قيمة س في كل مما يلي :

أ



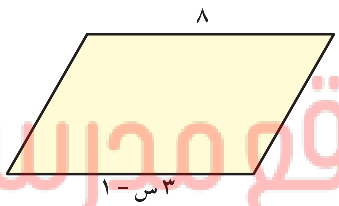
٢ س + ٣٠° = ١٨٠° – ١٢٠°

٢ س = ٦٠° – ٣٠°

$\frac{\text{٢ س}}{٢} = \frac{٣٠°}{٢}$

س = ١٥°

ب



٣ س – ١ = ٨

٣ س = ٨ + ١

$\frac{\text{٣ س}}{٣} = \frac{٩}{٣}$

س = ٣

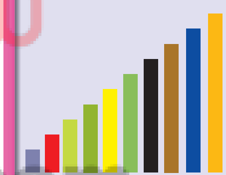
٨-٣ حالات الكشف عن متوازي الأضلاع

Conditions For a Quadrilateral To be a Parallelogram

سوف تتعلّم : متى يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع ؟

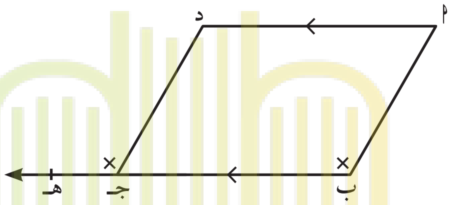
معلومات مفيدة :
يستخدم صانعو الدراجات الهوائية فكرة متوازي الأضلاع في تصميم الهيكل المعدني لها .

اللوازم :
أعواد كويزنير



نشاط (١) :

تعلمت سابقًا أنَّ الشكل الرباعي الذي فيه كل ضلعين متقابلين متوازيان يسمى متوازي أضلاع . وظف ما سبق لحل النشاط التالي :



١ ∵ أد // بجـ (١) (معطى)

∵ ق (ب̂) = ق (دجـهـ̂) (معطى)

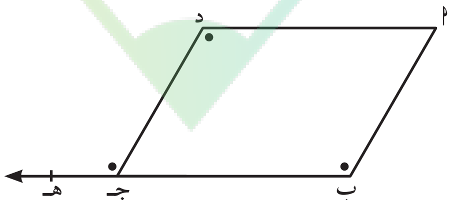
وهما في وضع تناظر

∴ أب // دجـ (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أنَّ الشكل الرباعي أ ب جـ د متوازي أضلاع

لأنَّ فيه كل ضلعين متقابلين متوازيين

يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع إذا كان فيه كل ضلعان متقابلان متوازيان .



٢ ∵ ق (ب̂) = ق (دجـهـ̂)

وهما في وضع تناظر

∴ أب // دجـ (١)

∵ ق (د̂) = ق (دجـهـ̂) وهما في وضع تبادل

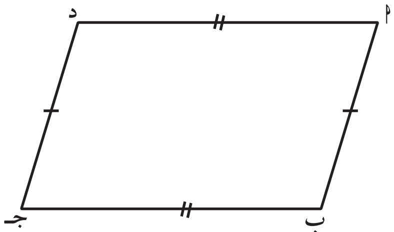
∴ أد // بجـ (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أنَّ الشكل الرباعي أ ب جـ د متوازي اضلاع

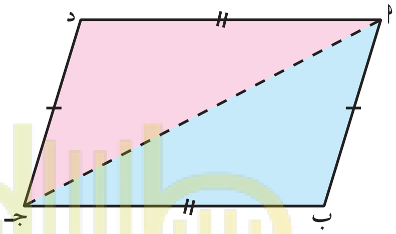
لأنَّ فيه كل ضلعين متقابلين متوازين

وسوف ندرس الأربع حالات للكشف عن متوازي الأضلاع .

الحالة الأولى : لإثبات أنَّ الشكل الرباعي متوازي أضلاع .



سنتحقق معًا بأنَّ الشكل الرباعي الذي فيه كل ضلعين متقابلين متطابقان كحد أدنى من المعطيات تكفي لنقول إنَّ الشكل الرباعي متوازي أضلاع .



المعطيات : (١) ﺃ ب جـ د شكل رباعي

(٢) ﺃ ب ≅ د جـ ، ﺃ د ≅ ب جـ

المطلوب : إثبات أنَّ ﺃ ب جـ د متوازي أضلاع

العمل : نرسم ﺃ جـ قطرًا في الشكل

البرهان : (نبحث عن زوايا (متبادلة – متناظرة – متخالفة) تؤدي إلى التوازي من خلال تطابق مثلثين) .

Δ ﺃ ب جـ ، Δ ﺃ د جـ فيهما :

(١) ﺃ ب ≅ د جـ (معطى)

(٢) جـ ب ≅ ﺃ د (معطى)

(٣) ﺃ جـ ضلع مشترك (عملًا)

⟸ ∴ Δ ﺃ ب جـ ≅ Δ جـ د ﺃ (ض . ض . ض)

وينتج من التطابق أنَّ : ب ﺃ̂ جـ ≅ د جـ̂ ﺃ (وهما في وضع تبادل) ، ∴ ﺃ ب // جـ د ،

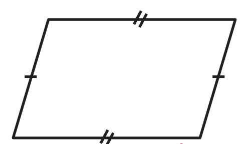
ﺃ جـ̂ ب ≅ د ﺃ̂ جـ (وهما في وضع تبادل) ، ∴ ب جـ // ﺃ د

مما سبق ينتج أنَّ ﺃ ب جـ د متوازي أضلاع .

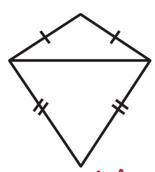
الحالة الأولى : إذا كان في الشكل الرباعي كل ضلعين متقابلين متطابقين فإنَّ الشكل يكون متوازي أضلاع .

تدرّب (١) :

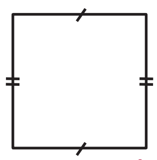
أي من الأشكال الرباعية التالية وحسب البيانات المدونة عليها يمكن أن تكون متوازي أضلاع ؟ ولماذا ؟

أ 

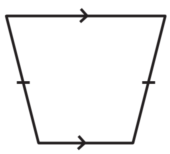
نعم
كل ضلعين متقابلين متطابقين

ب 

لا

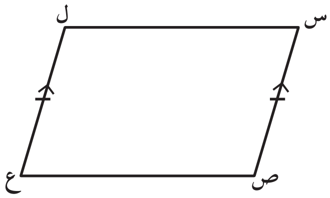
جـ 

نعم
كل ضلعين متقابلين متطابقين

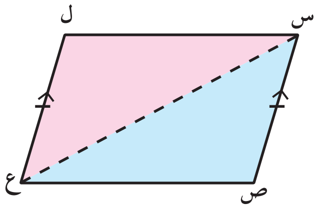
د 

لا

الحالة الثانية : لإثبات أنَّ الشكل الرباعي متوازي أضلاع .



هل المعطيات في الشكل المقابل تكفي لأن يكون الشكل الرباعي س ص ع ل متوازي أضلاع ؟



المعطيات : (١) س ص ع ل شكل رباعي

(٢) س ص ≅ ل ع ، س ص // ل ع

المطلوب : إثبات أنَّ س ص ع ل متوازي أضلاع

العمل : نرسم س ع قطرًا في الشكل

البرهان : (نبحث عن مثلثين يضم أحدهما س ص ، س ع والآخر يضم ل ع ، س ع ونثبت تطابقهما) .

Δ س ص ع ، Δ ع ل س فيهما :

(١) س ص ≅ ل ع (فرضًا)

(٢) ص س̂ ع ≅ ل ع̂ س (بالتبادل والتوازي)

(٣) س ع ضلع مشترك (عملًا)

∴ Δ س ص ع ≅ Δ ع ل س (ض . ز . ض)

وينتج من التطابق أنَّ : س ع̂ ص ≅ ع س̂ ل (وهما في وضع تبادل)

∴ ل س // ص ع (١) ، ∵ س ص // ع ل (معطى) (٢)

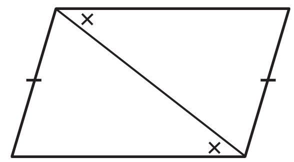
∴ من (١) ، (٢) ينتج أنَّ س ص ع ل متوازي أضلاع .

وعلى ذلك نقول : نعم المعطيات في الشكل تكفي لأن يكون الشكل الرباعي س ص ع ل متوازي أضلاع .

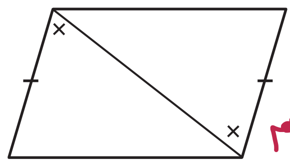
الحالة الثانية : إذا كان في الشكل الرباعي ضلعان متقابلان متطابقان ومتوازيان فإنَّ الشكل يكون متوازي أضلاع .

تدرّب (٢) :

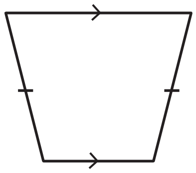
أي من الأشكال الرباعية التالية وحسب البيانات المدونة عليها يمكن أن تكون متوازي أضلاع ؟

١ 

لا

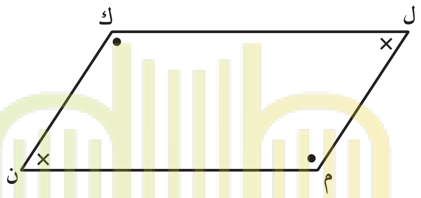
٢ 

نعم
ضلعان متقابلان
متطابقان ومتوازيان

٣ 

لا

الحالة الثالثة : لإثبات أنَّ الشكل الرباعي متوازي أضلاع .



هل المعطيات في الشكل المقابل تكفي لأن يكون الشكل الرباعي ل م ن ك متوازي أضلاع ؟

المعطيات : (١) ل م ن ك شكل رباعي

(٢) ق (لَ̂) = ق (نَ̂) ، ق (مَ̂) = ق (كَ̂)

المطلوب : إثبات أنَّ ل م ن ك متوازي أضلاع

البرهان : ∵ مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعي يساوي ٣٦٠°

∴ ق (لَ̂) + ق (نَ̂) + ق (مَ̂) + ق (كَ̂) = ٣٦٠°

ولكن ق (لَ̂) = ق (نَ̂) ، ق (مَ̂) = ق (كَ̂) (فرضًا)

∴ ٢ ق (لَ̂) + ٢ ق (مَ̂) = ٣٦٠° (بالقسمة على ٢)

∴ ق (لَ̂) + ق (مَ̂) = ١٨٠° (لَ̂ ، مَ̂ متكاملتان)

∵ لَ̂ ، مَ̂ متحالفتان وفي جهة واحدة من القاطع $\overline{\text{ل م}}$.

∴ $\overline{\text{ل ك}}$ // $\overline{\text{م ن}}$ (١)

وبالطريقة نفسها يمكننا إثبات أنَّ $\overline{\text{ل م}}$ // $\overline{\text{ك ن}}$ (٢) (بتطبيق الخطوات السابقة على مَ̂ ، نَ̂)

∴ من (١) ، (٢) ينتج أنَّ ل م ن ك متوازي أضلاع .

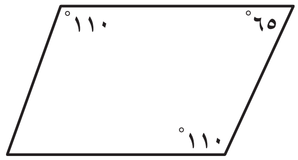
وعلى ذلك نقول : نعم المعطيات في الشكل تكفي لأن يكون الشكل الرباعي ل م ن ك متوازي أضلاع .

الحالة الثالثة : إذا كان في الشكل الرباعي كل زاويتين متقابلتين متطابقتين فإنَّ الشكل يكون متوازي أضلاع .

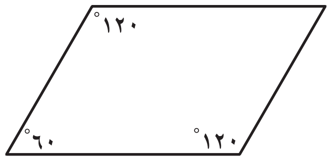
لاحظ أنَّ : الشكل الرباعي يكون متوازي أضلاع إذا كانت كل زاويتين متتاليتين (متحالفتين) فيه متكاملتين .

تدرّب (٣) :

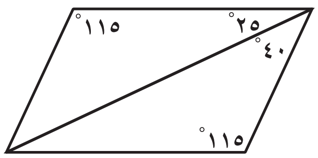
أي من الأشكال الرباعية التالية وحسب البيانات المدونة عليها يمكن أن تكون متوازي أضلاع :

١


لا

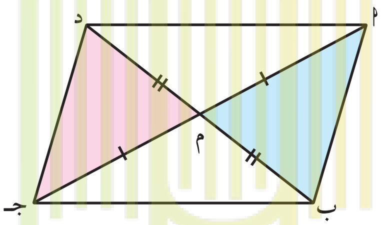
٢


نعم

٣


نعم

الحالة الرابعة : لإثبات أنَّ الشكل الرباعي متوازي أضلاع.



هل المعطيات في الشكل المقابل تكفي لأن يكون الشكل الرباعي أ ب جـ د متوازي أضلاع ؟

المعطيات : (١) أ ب جـ د شكل رباعي

(٢) أ م = جـ م ، ب م = د م

المطلوب : إثبات أنَّ أ ب جـ د متوازي أضلاع .

البرهان : (نبحث عن مثلثين يضم أحدهما م أ ، م ب والآخر يضم م جـ ، م د ونثبت تطابقهما).

∆ أ ب م ، ∆ جـ د م فيهما :

(١) أ م = جـ م (فرضًا)

(٢) ب م = د م (فرضًا)

(٣) ق (أ م^ ب) = ق (جـ م^ د) بالتقابل بالرأس

⟸ ∴ ∆ أ م ب ≅ ∆ جـ م د (ض . ز . ض)

وينتج من التطابق أنَّ :

ق (ب أ^ م) = ق (د جـ^ م) (وهما في وضع تبادل) ، ∴ أ ب // جـ د (١)

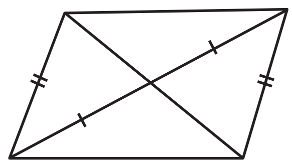
وبنفس الطريقة يمكن من تطابق المثلثين أ م د ، جـ م ب نثبت أنَّ أ د // جـ ب (٢)

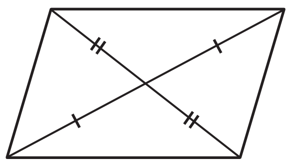
∴ من (١) ، (٢) ينتج أنَّ ، أ ب جـ د متوازي أضلاع .

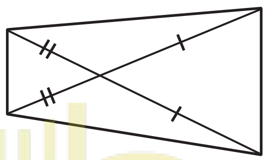
الحالة الرابعة : إذا كان في الشكل الرباعي القطران ينصف كلّ منهما الآخر فإنَّ الشكل يكون متوازي أضلاع .

تدرّب (٤) :

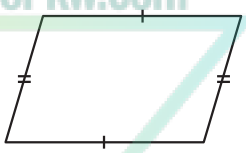
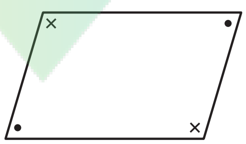
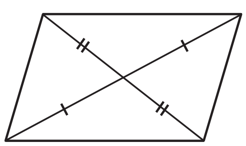
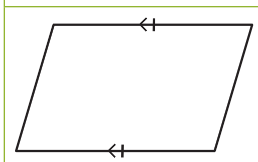
أي من الأشكال الرباعية التالية حسب البيانات المدونة عليها يمكن أن تكون متوازي أضلاع ؟

أ

كلا

ب

نعم

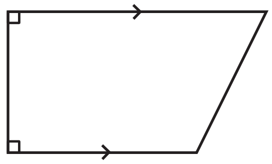
جـ

كلا

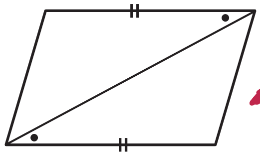
مما سبق نجد أنَّه : يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع إذا توفرت أحد الشروط التالية :

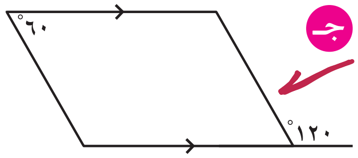
١ كل ضلعين متقابلين متوازيين (من التعريف) .	
٢ كل ضلعين متقابلين متطابقين .	
٣ كل زاويتين متقابلتين متطابقتين .	
٤ القطران ينصف كل منها الآخر .	
٥ ضلعان متقابلان متطابقان ومتوازيان .	

تدرّب (٥) :

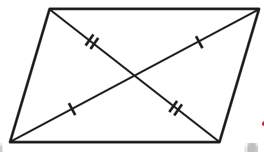
ضع علامة (✓) أسفل الشكل الذي يمثل متوازي أضلاع وفق المعطيات المبينة عليه مع ذكر السبب :

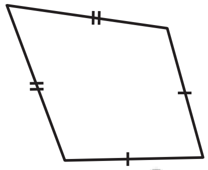
أ


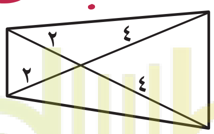
ب

✓
ضلعان متقابلان متطابقان ومتوازيان

جـ


✓
كل زاويتين متقابلتين متطابقتان

د

✓
القطران ينصف كل منهما الآخر

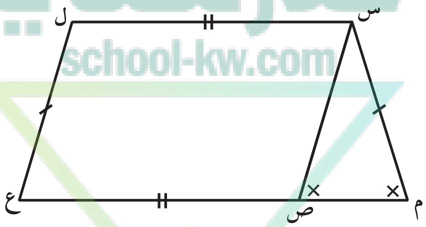
هـ


و


مثال (١) : إذا كان س ل = ص ع ، س م = ل ع ، $\hat{م} \cong$ س $\hat{ص}$ م ،

برهن أنَّ الشكل الرباعي س ص ع ل متوازي أضلاع .

الحلّ :



المعطيات : (١) س ل = ص ع

(٢) س م = ل ع

(٣) $\hat{م} \cong$ س $\hat{ص}$ م

المطلوب : إثبات أنَّ الشكل الرباعي س ص ع ل متوازي أضلاع

البرهان : في Δ س م ص ، $\hat{م} \cong$ س $\hat{ص}$ م (فرضًا)

∴ Δ س م ص متطابق الضلعين فيه س م = س ص

∵ س م = ل ع (فرضًا) ،

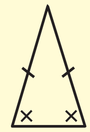
∴ س ص = ل ع من خواص المساواة (١)

∵ س ل = ص ع (فرضًا) (٢)

∴ من (١) ، (٢) ينتج أنَّ :

س ص ع ل متوازي أضلاع لأنَّه شكل رباعي فيه (كل ضلعين متقابلين متطابقان)

تذكَّرْ أنَّ :
إذا كان المثلث متطابق الضلعين ، فإن زاويتي القاعدة فيه متطابقتان ، والعكس صحيح .

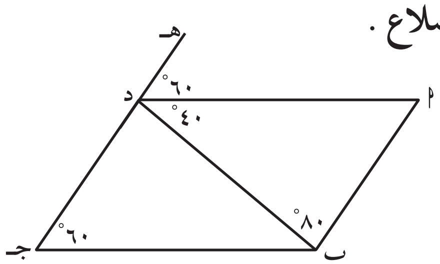


تذكَّرْ أنَّ :
خواص المساواة :
إذا كان أ ، ب ، جـ أعداد نسبية
وكان أ = ب فإن :
أ + جـ = ب + جـ
أ − جـ = ب − جـ
أ × جـ = ب × جـ
أ ÷ جـ = ب ÷ جـ
جـ ≠ ٠

ملاحظة :
إذا كان أ = ب ، ب = جـ
فإن أ = جـ

تدرّب (٦) :

برهن على أنَّ الشكل الرباعي أ ب جـ د متوازي أضلاع .



المعطيات : أ ب جـ د شكل رباعي ،

(١) ق (أ د̂ هـ) = ق (جـ̂) = ٦٠°

(٢) ق (أ ب̂ د) = ٨٠°

(٣) ق (أ د̂ ب) = ٤٠°

المطلوب : إثبات أنَّ الشكل الرباعي أ ب جـ د متوازي أضلاع .

البرهان : ق (أ د̂ هـ) = ق (جـ̂) = ٦٠° (وهما في وضع تناظر)

∴ أ د // ب جـ (١)

في Δ أ ب د ، ق (أ̂) = ١٨٠° − (٨٠° + ٤٠°)

= ١٨٠° − ١٢٠° = ٦٠° لأنَّ مجموع قياسات زوايا المثلث ١٨٠°

∵ ق (أ د̂ هـ) = ق (أ̂) = ٦٠° (وهما في وضع تبادل)

∴ أ ب // د جـ (٢)

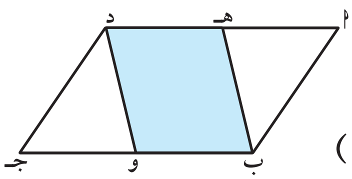
∴ من (١) ، (٢) ينتج أن :

أ ب جـ د متوازي أضلاع لأنَّه (شكل رباعي فيه كل ضلعين متقابلين متوازيان)

• فكر في طرق أخرى للحل .

مثال (٢) : إذا كان أ ب جـ د متوازي أضلاع فيه هـ منتصف أ د ، و منتصف ب جـ

برهن أنَّ الشكل الرباعي هـ ب و د متوازي أضلاع .



المعطيات : أ ب جـ د متوازي أضلاع ،

(١) أ هـ = هـ د (هـ منتصف أ د)

(٢) ب و = و جـ (و منتصف ب جـ)

المطلوب : إثبات أنَّ الشكل الرباعي هـ ب و د متوازي أضلاع .

الحلّ :

البرهان : ∵ ﺃ ب جـ د متوازي أضلاع (فرضًا)

∴ ﺃ د = ب جـ (من خواص متوازي الأضلاع)

∴ $\frac{1}{2}$ ﺃ د = $\frac{1}{2}$ ب جـ (من خواص المساواة)

∵ هـ منتصف $\overline{\text{ﺃ د}}$ ، و منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$ (فرضًا)

∴ هـ د = ب و (١)

∵ $\overline{\text{ﺃ د}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ (من خواص متوازي الأضلاع)

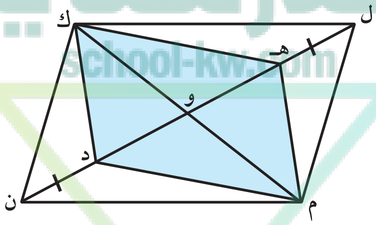
∵ هـ ∈ $\overline{\text{ﺃ د}}$ ، و ∈ $\overline{\text{ب جـ}}$

∴ $\overline{\text{هـ د}}$ // $\overline{\text{ب و}}$ (٢)

∴ من (١) ، (٢) ينتج أنَّ ﺃ ب جـ د متوازي أضلاع .

(شكل رباعي فيه ضلعان متقابلان متطابقان ومتوازيان)

تدرّب (٧) :



إذا كان ل م ن ك متوازي أضلاع تقاطع قطريه في و ، ل هـ = ن د ،

برهن أنَّ الشكل الرباعي هـ م د ك متوازي أضلاع .

المعطيات : ل م ن ك متوازي أضلاع ، ل هـ = ...د ن....

المطلوب : إثبات أنَّ الشكل الرباعي هـ م د ك متوازي أضلاع .

البرهان : ∵ ل م ن ك متوازي أضلاع (فرضًا)

∴ م و = ...و ك.... (من خواص متوازي الأضلاع) (١)

∴ ....ل و.... = و ن (من خواص متوازي الأضلاع)

∵ ل هـ = ن د (معطى)

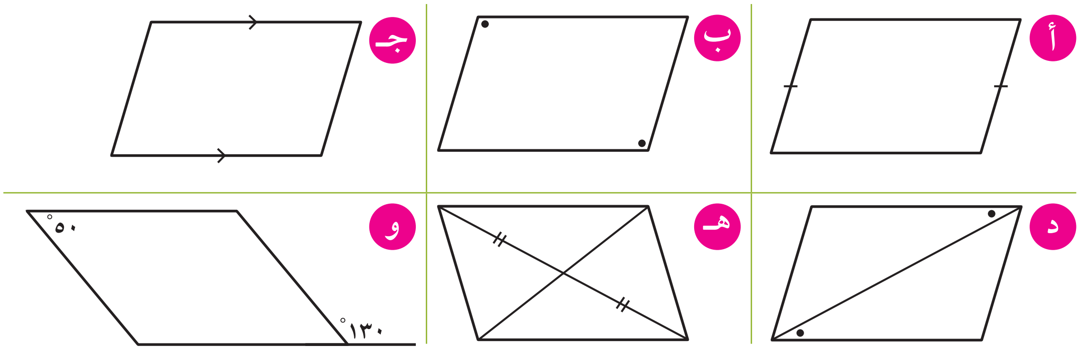
∴ ل و − ل هـ = و ن − د ن (من خواص المساواة)

∴ هـ و = ...و د.... (٢)

∴ من (١) ، (٢) ينتج أنَّ هـ م د ك متوازي أضلاع (....القطران ينصف كل منهما الآخر....)

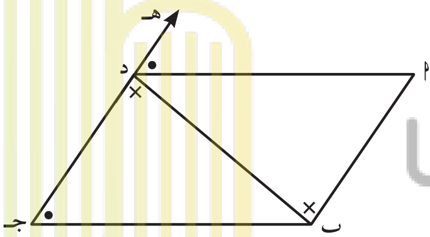
تمـــرَّنْ :

١ أضف معطى واحدًا فقط من عندك يجعل كلًّا من الأشكال التالية متوازي أضلاع :



٢ من البيانات على الشكل المقابل :

أثبت أنَّ ﺃ ب جـ د متوازي أضلاع .



ق(ﺃ هـ^د) = ق(جـ^) هما في وضع تناظر وتوازي

ﺃد // ب جـ ——— (١)

ق(جـ د^ب) = ق(ﺃ ب^د) هما في وضع تبادل وتوازي

ب ﺃ // جـ د ——— (٢)

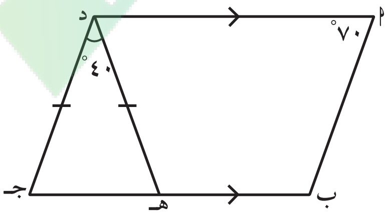
من (١) و (٢) الشكل ﺃ ب جـ د متوازي أضلاع كل ضلعين متقابلان متوازيان

٣ في الشكل المقابل : ﺃد // ب جـ

د هـ = د جـ ، ق (ﺃ^) = ٧٠° ،

ق (هـ د^ جـ) = ٤٠° ، برهن أنَّ

الشكل الرباعي ﺃ ب جـ د متوازي أضلاع .



ﺃد // ب جـ معطى

ق(ﺃ^) = ٧٠° معطى

ق(ب^) = ١٨٠° − ٧٠° = ١١٠° زاويتان متحالفتان متكاملتان

△ د هـ جـ متطابق الضلعين

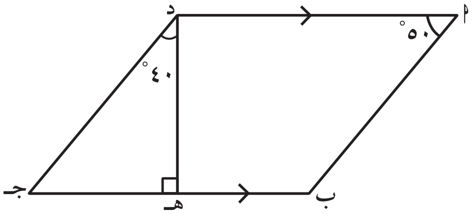
ق(هـ د^جـ) = ٤٠° معطى

ق(د هـ^جـ) = ق(جـ^) = (١٨٠° − ٤٠°) ÷ ٢ = ٧٠°

ﺃب // د جـ

الشكل ﺃ ب جـ د متوازي أضلاع لأن كل ضلعين متقابلين متوازيين

٤ إذا كان أ ب جـ د شكل رباعي فيه $\overline{أد} \parallel \overline{ب جـ}$ ،



$\overline{د هـ} \perp \overline{ب جـ}$ ، ق ($\hat{أ}$) = ٥٠°

ق (هـ $\hat{د}$ جـ) = ٤٠° ، فبرهن أنَّ

الشكل أ ب جـ د متوازي أضلاع .

أد // ب جـ　　معطى

ق($\hat{أ}$) = ٥٠°　　معطى

ق($\hat{ب}$) = ١٨٠° − ٥٠° = ١٣٠° زاويتين متتاليتين متكاملتان

△ د هـ جـ القائم الزاوية في هـ فيه :

د هـ ⊥ ب جـ　　معطى

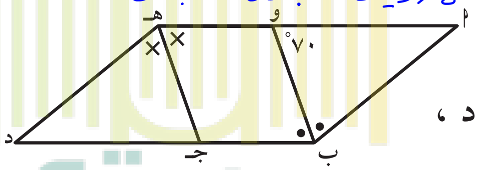
ق(هـ $\hat{د}$ جـ) = ٤٠°　　معطى

ق($\hat{جـ}$) = ١٨٠° − (٩٠° + ٤٠°) = ٥٠°　مجموع قياسات زوايا المثلث ١٨٠°

ق(أ $\hat{د}$ جـ) = ٣٦٠° − (٥٠° + ١٣٠° + ٥٠°) = ١٣٠°　مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعي ٣٦٠°

الشكل أ ب جـ د متوازي أضلاع لأن فيه كل زاويتان متقابلتان متطابقتان

٥ إذا كان أ ب د هـ متوازي أضلاع ،



$\overleftarrow{ب و}$ منصف أ $\hat{ب}$ د ، $\overleftarrow{هـ جـ}$ منصف أ $\hat{هـ}$ د ،

ق (أ $\hat{و}$ ب) = ٧٠° ، فبرهن أنَّ

الشكل الرباعي و ب جـ هـ متوازي أضلاع .

الشكل أ ب جـ د متوازي أضلاع　　معطى

ق(أ $\hat{ب}$ د) = ق(أ $\hat{هـ}$ د)

ب و منصف أ $\hat{ب}$ د ، أيضاً هـ جـ منصف أ $\hat{هـ}$ د　　معطى

ق(و $\hat{ب}$ جـ) = ق(و $\hat{ب}$ جـ) = ٧٠°　بالتبادل والتوازي

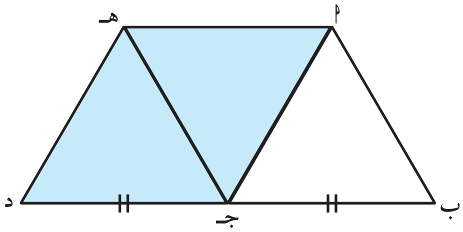
الشكل و ب جـ هـ فيه :

ق(ب $\hat{و}$ هـ) = ١٨٠° − ٧٠° = ١١٠°　بالتجاور على مستقيم

ومنه : ق(ب $\hat{جـ}$ هـ) = ٣٦٠° − (٧٠° + ٧٠° + ١١٠°) = ١١٠°　مجموع قياسات الشكل الرباعي ٣٦٠°

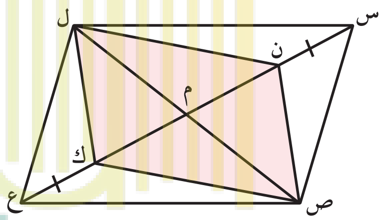
الشكل و ب جـ هـ متوازي أضلاع لأن كل زاويتان متقابلتان متطابقتان

٦ إذا كان أ ب جـ هـ متوازي أضلاع ،
ب جـ = جـ د ، فبرهن أنَّ الشكل
الرباعي أ جـ د هـ متوازي أضلاع .



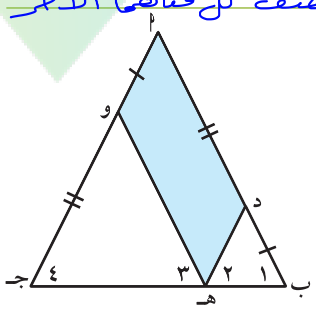
الشكل أ ب جـ هـ متوازي اضلاع
ب جـ = أ هـ من خواص متوازي الاضلاع
ب جـ = جـ د معطى
ب جـ = جـ د = أ هـ من خواص المساواة
ب جـ // أ هـ من خواص متوازي الاضلاع
ب ، جـ ، د على استقامة واحدة
جـ د // أ هـ
اذاً الشكل أ جـ د هـ متوازي اضلاع لأن كل ضلعان متقابلان متوازيان

٧ إذا كان ن ص ك ل متوازي أضلاع
تقاطع قطريه في م ، س ن = ك ع ، فأثبت
أنَّ الشكل س ص ع ل متوازي أضلاع .



الشكل ن ص ك ل متوازي اضلاع
م نقطة تقاطع قطريه
م ص = م ل
م ن = م ك
س ن = ع ك
م ن + ن س = م ك + ك ع ⇐ م س = م ع
الشكل متوازي اضلاع لأن قطراه ينصف كل منهما الآخر

٨ في الشكل المقابل : ق ($\hat{١}$) = ق ($\hat{٢}$)
ق ($\hat{٣}$) = ق ($\hat{٤}$) ، أ د = و جـ ، أ و = د ب
برهن أنَّ أ د هـ و متوازي أضلاع .



△ د ب هـ فيه
ق ($\hat{١}$) = ق ($\hat{٢}$) معطى
د ب = د هـ مثلث متطابق الضلعين
د ب = أ و
د هـ = أ و من خواص المساواة
المثلث و هـ جـ فيه : ق ($\hat{٣}$) = ق ($\hat{٤}$) معطى
و هـ = و جـ مثلث متطابق الضلعين
و جـ = أ د
و هـ = أ د
الشكل متوازي اضلاع لان كل ضلعين متقابلين متطابقين

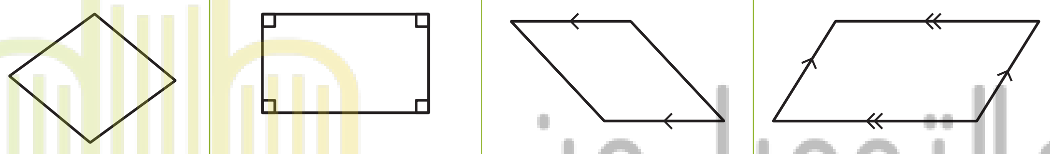
٨-٤ المستطيل (خواصه والكشف عنه)
Exploring Rectangle and his Properties

سوف تتعلّم : خواص المستطيل والشروط التي يكون فيها متوازي الأضلاع مستطيلًا .

نشاط (١) :

تأمل الأشكال الأربعة التالية :

(١)　　(٢)　　(٣)　　(٤)



أ اذكر أوجه الشبه والاختلاف بين الشكل (جـ) والأشكال الأخرى :

الشكل	(١)	(٢)	(٤)
أوجه الشبه	كل ضلعين متقابلين متوازيين	ضلعان متوازيان	
أوجه الاختلاف	زوايا ه قائمة	زوايا ه قائمة	زوايا ه قائمة

تذكَّرْ أنَّ :
- زوايا المستطيل قوائم .
- أقطاره متطابقة .

ب يسمى الشكل (٣) ......مستطيل......

جـ .... هو شكل رباعي زواياه الأربع قوائم .

هل المستطيل متوازي أضلاع ؟ لمعرفة ذلك :

لاحظ أنَّ : س ص ع ل مستطيل

(شكل رباعي زواياه الأربع قوائم) فيه :

∵ ق ($\hat{\text{س}}$) = ق ($\hat{\text{ص}}$) = ٩٠° **(وهما زاويتان في وضع تحالف ومتكاملتان)**

∴ $\overline{\text{س ل}}$ // $\overline{\text{ص ع}}$ ،

كذلك ∵ ق ($\hat{\text{س}}$) = ق ($\hat{\text{ل}}$) = ٩٠° **(وهما زاويتان في وضع تحالف ومتكاملتان)**

∴ $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ل ع}}$ ،

نستنتج مما سبق أنَّ : المستطيل يكون متوازي أضلاع .

فكّر وناقِش

هل يمكن إثبات أنَّ المستطيل متوازي أضلاع بطريقة أخرى ؟ وضّح ذلك .

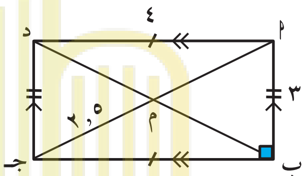
الآن يمكن أن نعطي تعريفًا بسيطًا للمستطيل :

المستطيل هو متوازي أضلاع إحدى زواياه قائمة وله جميع خواص متوازي الأضلاع .

تدرّب (١) :

أ ب جـ د مستطيل فيه : ق (ب̂) = ٩٠° ،

أ ب = ٣ ، أ د = ٤ ، م جـ = ٢,٥



أكمل ما يلي :

١ د جـ = ٣ لأن الضلعين المتقابلين متطابقان

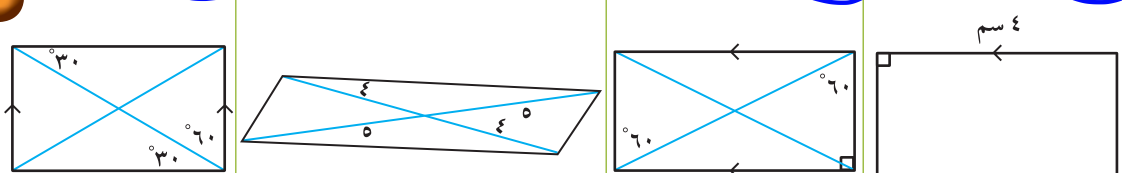
٢ أ جـ = ٥ لأن القطران ينصف كل منهما الآخر

٣ ق (د̂) = ٩٠° لأن الزوايا قائمة

٤ ق (جـ̂) = ٩٠° لأن الزوايا قائمة

تدرّب (٢) :

استخدم المعطيات (موظفًا التعريف) التي على الأشكال لتبين أيًّا منها تمثل مستطيلًا .



تذكَّرْ أنَّ :

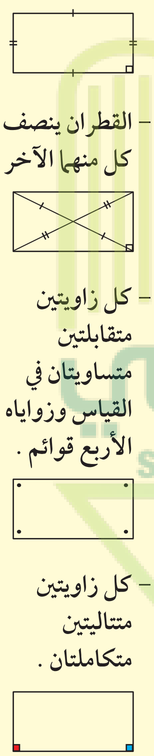
للمستطيل الخواص التالية :

١ – كل ضلعين متقابلين متطابقان .

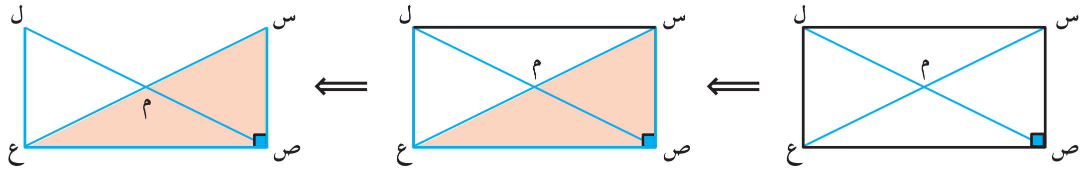
٢ – القطران ينصف كل منهما الآخر .

٣ – كل زاويتين متقابلتين متساويتان في القياس وزواياه الأربع قوائم .

٤ – كل زاويتين متتاليتين متكاملتان .



مثال (١) : سنبحث الآن ما إذا كان للمستطيل خواص أخرى خاصة به غير أنَّ زواياه قائمة ، وسوف نبيِّن أنَّ قطري المستطيل متطابقان .



المعطيات : (١) س ص ع ل مستطيل

(٢) $\overline{\text{س ع}}$ ، $\overline{\text{ص ل}}$ قطران في المستطيل

المطلوب : إثبات أن س ع = ص ل

البرهان : سنبحث عن مثلثين في المستطيل س ص ع ل يحتويان على قطريه ، وسوف نبيِّن أنَّ هذين المثلثين متطابقان.

Δ س ص ع ، Δ ل ع ص فيهما :

(١) س ص = ل ع (من خواص المستطيل)

(٢) $\overline{\text{ص ع}}$ (ضلع مشترك)

(٣) ق ($\hat{\text{ص}}$) = ق ($\hat{\text{ع}}$) (من خواص المستطيل)

⟸ Δ س ص ع ≅ Δ ل ع ص (ض . ز . ض)

وينتج من التطابق $\overline{\text{س ع}}$ ≅ $\overline{\text{ص ل}}$

نستنتج مما سبق أنَّ : قطري المستطيل متطابقان

فكِّر وناقِش

المستطيل متناظر (متماثل) حول نقطة تقاطع قطريه . فسّر ذلك .

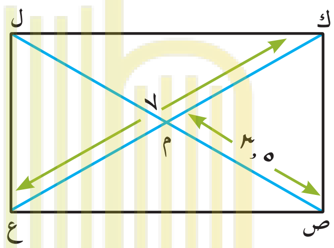
الكشف عن المستطيل

مما سبق نقول إنَّ متوازي الأضلاع يكون مستطيلًا إذا توفرت فيه أحد الشروط التالية :

(١) إحدى زواياه قائمة .

(٢) قطراه متطابقان .

تدرّب (٣) :



ك ص ع ل متوازي أضلاع فيه : ك ع = ٧ وحدة طول ،
ص م = ٣,٥ وحدة طول .

أثبت أنَّ : ك ص ع ل مستطيل

المعطيات : (١) ك ص ع ل متوازي أضلاع
(٢) ك ع = ٧ وحدة طول ، ص م = ٣,٥ وحدة طول

المطلوب : إثبات أنَّ ك ص ع ل مستطيل

البرهان : ∵ ك ص ع ل متوازي اضلاع (معطى)

∴ ص م = م ل = ٣,٥ ، القطران ينصف كل منهما الأخر

∴ ص ل = ٧

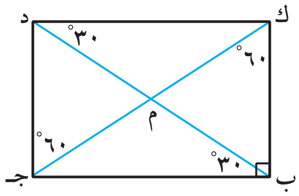
∴ ك ع = ص ل = ٧ ، القطران متطابقان

∴ الشكل ك ص ع ل مستطيل لأنَّ

ك ص ع ل شكل متوازي أضلاع فيه القطران متطابقان

تذكَّر أنَّ :
إذا توازى مستقيمان وقطعهما مستقيم ثالث فإنَّ :
– الزوايا المتبادلة متساوية في القياس .

تدرّب (٤) :



في الشكل المقابل أثبت أنَّ : ك ب جـ د مستطيل .

∴ ق (ك $\hat{د}$ ب) = ق (د $\hat{ب}$ جـ) (وهما في وضع تبادل)

∴ $\overline{كد}$ // $\overline{بجـ}$ (١)

∴ ق (ب $\hat{ك}$ جـ) = ق (د $\hat{جـ}$ ك) (وهما في وضع تبادل)

∴ $\overline{كب}$ // $\overline{دجـ}$ (٢)

∴ من (١) ، (٢) الشكل متوازي أضلاع ولكن

ق (ك $\hat{ب}$ جـ) = ٩٠°

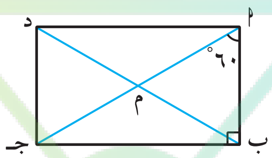
∴ الشكل المستطيل لأنّه متوازي أضلاع إحدى زواياه قائمة

فكِّر وناقِش

يرى المتعلّم بدر أنَّ جميع متوازيات الأضلاع هي مستطيلات ، ولكن المتعلّم أمير يرى أنَّ متوازيات الأضلاع مستطيلات إذا توافرت فيها شروط معينة . ما رأيك ؟

فسّر إجابتك . رأي أمير صحيح

تمــرَّنْ :



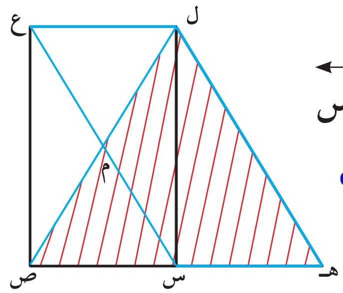
١ أ ب جـ د مستطيل فيه : ق (ب $\hat{أ}$ جـ) = ٦٠°

احسب ق (د $\hat{ب}$ جـ) .

ق (د $\hat{ب}$ جـ) = ٩٠° − ٦٠° = ٣٠°

بما أن ق (ب $\hat{أ}$ جـ) = ق (أ $\hat{ب}$ د) = ٦٠°

٢ س ص ع ل مستطيل ، هـ س ع ل متوازي أضلاع



أثبت أنَّ : Δ ل ص هـ متطابق الضلعين ، هـ ∈ ص س

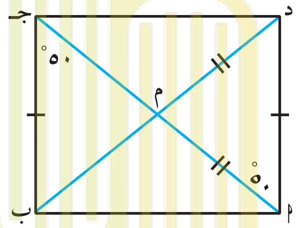
ل ص = ع س القطران متطابقان في المستطيل

ل هـ = ع س ضلعان متقابلان في متوازي الأضلاع

اذاً ل ص = ل هـ

Δ ل ص هـ متطابق الضلعين

٣ أ ب جـ د شكل رباعي يتقاطع قطراه في م



أ د = ب جـ ، م د = م أ ،

ق (د $\hat{أ}$ جـ) = ق (ب $\hat{جـ}$ أ) = ٥٠°

أثبت أنَّ : أ ب جـ د مستطيل ، ثم أوجد ق (ب $\hat{أ}$ جـ) .

ق(د $\hat{أ}$ ب) = ق(ب $\hat{جـ}$ أ) = ٥٠° زاويتان متبادلتان

اذاً أ د // ب جـ كذلك أ د ≅ ب جـ

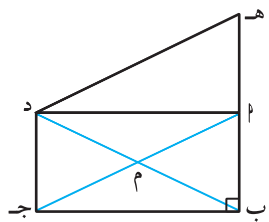
اذاً أ ب جـ د متوازي اضلاع

ولكن م أ = م د اذاً القطران متساويان

أ ب جـ د مستطيل

ق(ب $\hat{أ}$ د) = ٩٠° − ٥٠° = ٤٠°

٤ هـ أ جـ د متوازي أضلاع ، ق (أ $\hat{ب}$ جـ) = ٩٠° ،



أ د // ب جـ ، هـ ، أ ، ب على استقامة واحدة .

أثبت أنَّ : أ ب جـ د مستطيل .

الشكل هـ أ جـ د متوازي اضلاع

هـ أ // د جـ اذاً هـ ، أ ، ب على استقامة واحدة

أ ب // د جـ —— ①

أ د // ب جـ —— ②

من ① و ② الشكل أ ب جـ د متوازي اضلاع

ق(ب) = ٩٠° ⟸ الشكل أ ب جـ د مستطيل احدى زواياه قائمة

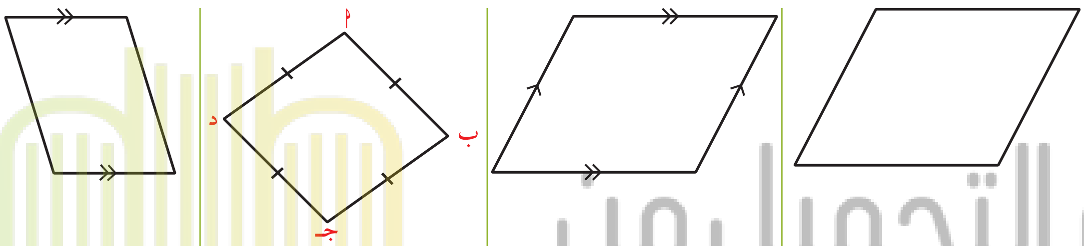
٨-٥ المعين (خواصه والكشف عنه)
Exploring Rhombus and his Properties

سوف تتعلّم : خواص المعين والشروط التي يكون فيها متوازي الأضلاع معينًا .

نشاط :

> **تذكر أنَّ :**
> المعين هو شكل رباعي أضلاعه الأربعة متطابقة .

١ في الأشكال الرباعية التالية ، بم يتميز الشكل (٣) عن الأشكال الأخرى :



شكل (١) شكل (٢) شكل (٣) شكل (٤)

يتميز الشكل الرباعي (٣) بوجود أ ب = ب جـ = جـ د = د أ

٢ ماذا نسمي الشكل (٣) ؟ معين

هل المعين متوازي أضلاع؟ لمعرفة ذلك لاحظ أنَّ :

أ ب = د جـ (فرضًا) (١)

أ د = ب جـ (فرضًا) (٢)

∴ من (١) ، (٢) نستنتج أنَّ كل ضلعين متقابلين متطابقان .

∴ الشكل أ ب جـ د متوازي أضلاع .

∴ المعين أ ب جـ د متوازي أضلاع وله جميع خواص متوازي الأضلاع .

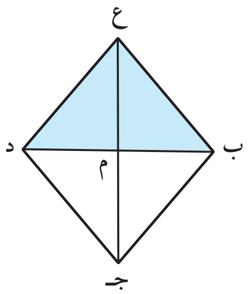
> **تذكر أنَّ :**
> خواص متوازي الأضلاع هي كالتالي :
> ١ - كل ضلعين متقابلين متطابقان .
> ٢ - كل زاويتين متقابلتين متطابقتان .
> ٣ - كل زاويتين متتاليتين متكاملتان .
> ٤ - القطران ينصف كل منهما الآخر .

سنبحث الآن ما إذا كان للمعين خواص أخرى وسوف نبيِّن أنَّ :

١ المعين قطراه متعامدان .

٢ كل قطر في المعين ينصف زاويتين متقابلتين فيه .

ع ب جـ د معين تقاطع قطريه في م



أثبت أنَّ القطرين متعامدان $\overline{\text{ع جـ}} \perp \overline{\text{ب د}}$.

المعطيات : ع ب جـ د معين ، م منتصف القطرين .

المطلوب : إثبات أنَّ القطرين متعامدان .

البرهان : لإثبات أنَّ القطرين متعامدان سوف نبحث عن مثلثين يحويان $\overline{\text{ع جـ}}$ ، $\overline{\text{ب د}}$ (أو جزءًا منهما) .

نأخذ المثلثين : Δ ع م ب ، Δ ع م د فيهما :

(١) $\overline{\text{ع ب}} \cong \overline{\text{ع د}}$ (من خواص المعين)

(٢) $\overline{\text{ع م}}$ (ضلع مشترك)

(٣) $\overline{\text{ب م}} \cong \overline{\text{د م}}$ (من خواص المعين)

$\Leftarrow$ $\therefore$ Δ ع م ب $\cong$ Δ ع م د بحالة (ض . ض . ض)

ومنه نجد أنَّ ق (ع $\hat{\text{م}}$ ب) = ق (ع $\hat{\text{م}}$ د) = $\frac{١٨٠^\circ}{٢}$ = ٩٠° (بالتجاور على مستقيم واحد)

$\therefore$ القطران متعامدان $\overline{\text{ع جـ}} \perp \overline{\text{ب د}}$ $\Longleftarrow$ قطرا المعين متعامدان .

كذلك ينتج من التطابق : $\because$ ق (ب $\hat{\text{ع}}$ م) = ق (د $\hat{\text{ع}}$ م)

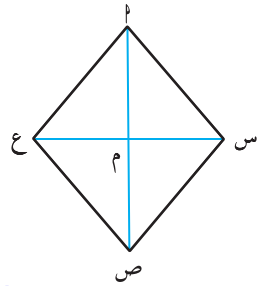
$\therefore$ $\overrightarrow{\text{ع م}}$ منصف (ب $\hat{\text{ع}}$ د)

بالمثل نقوم بمطابقة بقية المثلثات لنستنتج أنَّ :

كل قطر في المعين ينصف زاويتين متقابلتين فيه .

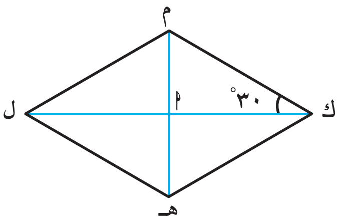
تدرّب (١) :

في الأشكال التالية معينات ، أوجد المطلوب مع ذكر السبب :



ق (س م^ أ) = ٩٠°

السبب : القطران متعامدان



ق (م ك^ هـ) = ٦٠°

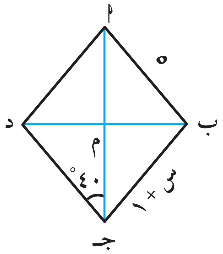
السبب : القطر ينصف الزاوية

ق (م ل^ هـ) = ٦٠°

السبب : زاويتان متقابلتان

ق (ل هـ^ ك) = ١٢٠°

السبب : قياس زاويتين متتاليتين ١٨٠°



طول $\overline{\text{ب جـ}}$ = ٥

السبب : اضلاع المعين متطابقة

أوجد قيمة س :

س + ١ = ٥

س = ٤

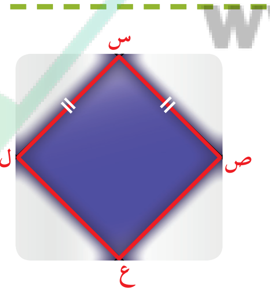
محيط المعين = ٢٠

الكشف عند المعين

معلومات مفيدة :

يستخدم البناؤون الأشكال الهندسية ، كالمربعات ، المستطيلات ، المثلثات ... إلخ في تنفيذ الفسيفساء .

ما الشروط التي تجعل متوازي الأضلاع معينًا ؟



الشكل س ص ع ل متوازي أضلاع فيه :

أولًا : $\overline{\text{س ص}} \cong \overline{\text{س ل}}$

أكمل ما يلي :

∵ س ص ع ل متوازي أضلاع فإن :

$\overline{\text{س ص}} \cong \overline{\text{ع ل}}$ (كل ضلعين متقابلين في متوازي الأضلاع متطابقان)

$\overline{\text{س ل}} \cong \overline{\text{ص ع}}$ (كل ضلعين متقابلين في متوازي الأضلاع متطابقان)

∵ $\overline{\text{س ص}} \cong \overline{\text{س ل}}$ (معطى)

∴ س ص = س ل = ل ع = ع ص (من خواص المساواة)

∴ س ص ع ل شكل رباعي أضلاعه الأربعة متطابقة فهو معين.

نلاحظ أنَّ : يكون متوازي الأضلاع معينًا إذا تطابق فيه ضلعان مجاوران .

ثانيًا : $\overline{\text{س ع}} \perp \overline{\text{ص ل}}$

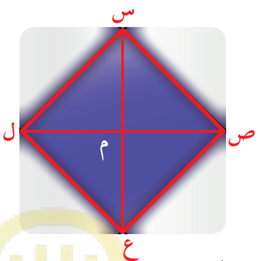
Δ س م ص ، Δ س م ل فيهما :

$\overline{\text{س م}}$ (ضلع مشترك)

ص م = ل م (قطرا متوازي الأضلاع متناصفان)

ق (س $\hat{\text{م}}$ ص) = ق (س $\hat{\text{م}}$ ل) = 90° (فرضًا)

$\Leftarrow$ ∴ Δ س م ص $\cong$ Δ س م ل بحالة (ض . ز . ض)



∴ $\overline{\text{س ص}} \cong \overline{\text{س ل}}$

∵ س ص ع ل متوازي أضلاع

∴ س ص = ص ع = ع ل = س ل

∴ س ص ع ل شكل رباعي فيه أضلاعه الأربعة متطابقة فهو معين .

نلاحظ أنّ : يكون متوازي الأضلاع معين إذا تعامد قطراه .

مما سبق نلاحظ أنَّه يكون متوازي الأضلاع معينًا إذا توفر فيه أحد الشرطين التاليين :

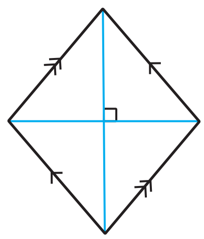
(١) إذا تطابق ضلعان متجاوران فيه .

(٢) إذا تعامد قطراه .

تدرّب (٢) :

أي الأشكال التالية يمثل معينًا مع ذكر السبب ؟

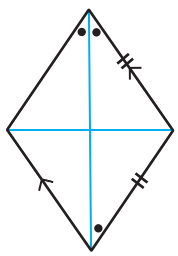
أ



نعم

متوازي اضلاع وتعامد قطراه

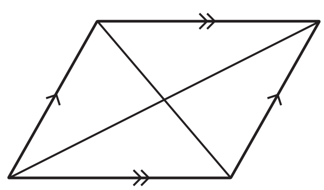
ب



نعم

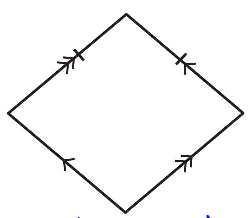
لان متوازي الاضلاع فيه ضلعان متجاوران متطابقان

جـ



✗

د



نعم

لان متوازي الاضلاع فيه ضلعان متجاوران متطابقان

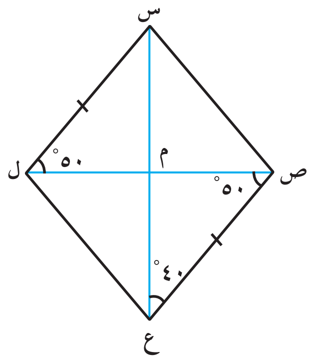
تدرّب (٣) :

في الشكل المقابل :

ق (س $\hat{ل}$ ص) = ق (ع $\hat{ص}$ ل) = ٥٠°،

ق (ص $\hat{ع}$ س) = ٤٠° ، س ل = ص ع .

أثبت أنَّ الشكل الرباعي س ص ع ل معين .



المعطيات :

(١) س ل = ص ع

(٢) ق (س $\hat{ل}$ ص) = ق (ع $\hat{ص}$ ل) = ٥٠°

(٣) ق (ص $\hat{ع}$ س) = ٤٠°

المطلوب : إثبات أنَّ الشكل س ص ع ل معين

البرهان :

∵ س ل = ص ع (فرضًا) (١)

∵ ق (س $\hat{ل}$ ص) = ق (ع $\hat{ص}$ ل) = ٥٠° (وهما في وضع تبادل)

∴ $\overline{س ل}$ // $\overline{ص ع}$ (٢)

∴ من (١) ، (٢) يكون الشكل الرباعي س ص ع ل متوازي أضلاع لأنَّ فيه ضلعين متقابلين متوازيين ، متطابقين (٣)

في Δ ص م ع فيه :

∵ ق (ع $\hat{ص}$ م) = ٥٠ (فرضًا) ، ∵ ق (ص $\hat{ع}$ م) = ٤٠° (فرضًا)

∴ ق (ص $\hat{م}$ ع) = ١٨٠° − (٤٠° + ٥٠°) = ٩٠°

ومنه نستنتج أن : $\overline{س ع}$ ⊥ $\overline{ص ل}$ (مجموع قياسات زوايا المثلث يساوي ١٨٠°)

∴ القطران متعامدان (٤)

∴ من (٣) ، (٤) الشكل س ص ع ل متوازي الأضلاع قطراه متعامدان .

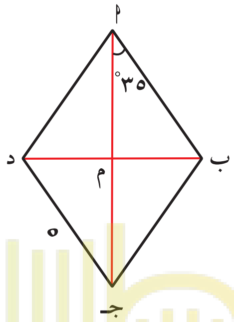
∴ الشكل س ص ع ل معين .

> **تذكر أنَّ :**
> – الرمز ⊥ هو رمز عمودي على .
> – الرمز // هو رمز موازٍ لِـ .
> – مجموع قياسات زوايا المثلث يساوي ١٨٠° .

فكِّر وناقِش

يستطيع خالد أنَّ يذكر الحالات التي يكون فيها متوازي أضلاع معينًا . فهل تستطيع أن تتحدى خالد بإعطاء أمثلة لكل حالة .

تمـــرَّنْ :



١ أ ب جـ د معين تقاطع قطريه في م ، ق (ب أ̂ جـ) = ٣٥° ،
جـ د = ٥ وحدة طول .

أ احسب قياسات زوايا المعين .

ق(ب أ̂ د) = ق(ب جـ̂ د) = ٧٠°

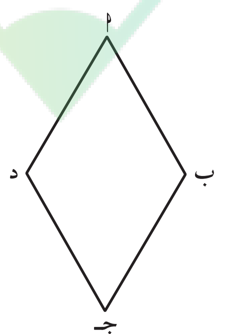
ق(أ ب̂ جـ) = ق(أ د̂ جـ) = ١١٠°

ب أوجد طول ب جـ .

ب جـ = ٥ وحدة طول

جـ أوجد قياس أ م̂ ب .

ق(أ م̂ ب) = ٩٠°



٢ أ ب جـ د معين طول قطره ب د يساوي طول ضلعه .
أوجد قياسات زوايا المعين أ ب جـ د الأربع .

△ أ ب د متطابق الاضلاع

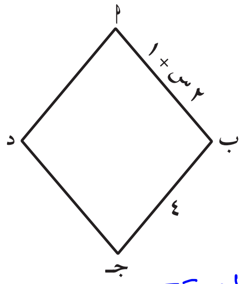
ق(ب أ̂ د) = ٦٠°

أ ب جـ د معين

ق(ب أ̂ د) = ق(ب جـ̂ د) = ٦٠°

ق(أ ب̂ جـ) = ق(أ د̂ جـ) = ١٢٠°

٣ أ ب جـ د معين ، أ ب = ٢ س + ١ وحدة طول ،
ب جـ = ٤ وحدة طول . أوجد قيمة س .



أ ب جـ د معين

أ ب = ب جـ = جـ د = أ د اضلاع المعين متطابقة

أ ب = ب جـ

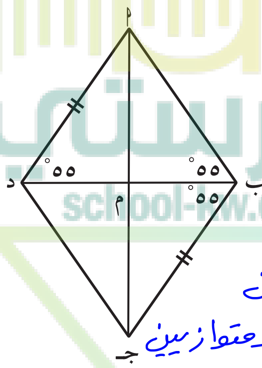
٢س + ١ = ٤

٢س = ٤ − ١

٢س = ٣

س = $\frac{٣}{٢}$

٤ في الشكل أمامك ، أثبت أنَّ أ ب جـ د معين .



أ د = ب جـ معطى

ق(أ د̂ ب) = ق(جـ ب̂ د) = ٥٥° هما في وضع تبادل

أ د // ب جـ

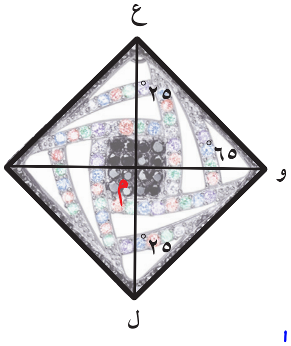
من ① و ② أ ب جـ د متوازي اضلاع لأن فيه ضلعين متقابلين متطابقين ومتوازيين

△ أ ب د فيه : ق(أ ب̂ د) = ق(أ د̂ ب) = ٥٥° معطى

أ ب = أ د

أ ب جـ د معين لأنه متوازي اضلاع فيه ضلعان متجاوران متطابقان

٥ يستعمل مصممو المجوهرات أشكالًا هندسية في تصميماتهم للحصول على أشكال جذابة ومميزة تخصهم .
الصورة المقابلة لقطعة ألماس تبدو رُباعية الشكل .



الشكل ع و ل هـ فيه :

$\overleftarrow{\text{ع ل}}$ منصف لكل من (و ع^ هـ) و (و ل^ هـ)

ق (و ع^ م) = ق (و ل^ م) = ٢٥°، ق (ع و^ م) = ٦٥° .

أثبت أنَّ الشكل الرباعي ع و ل هـ معين .

ع ل منصف للزاويتين (و ع^ هـ)، (و ل^ هـ) معطى

ق (و ع^ م) = ق (هـ ل^ م) = ٢٥°

هما في وضع تبادل وتوازي

ع و // هـ ل

ق (هـ ع^ م) = ق (و ل^ م) = ٢٥° هما في وضع تبادل

و ل // ع هـ

الشكل ع و ل هـ متوازي اضلاع لأن فيه كل ضلعين متقابلين متوازيين

△ و ع ل فيه : ق (و ع^ ل) = ق (و ل^ ع) = ٢٥°

و ع = و ل

الشكل ع و ل هـ معين لأن متوازي اضلاع فيه ضلعان متجاوران متطابقان

٨-٦ المربع (خواصه والكشف عنه)
Exploring Square and his Properties

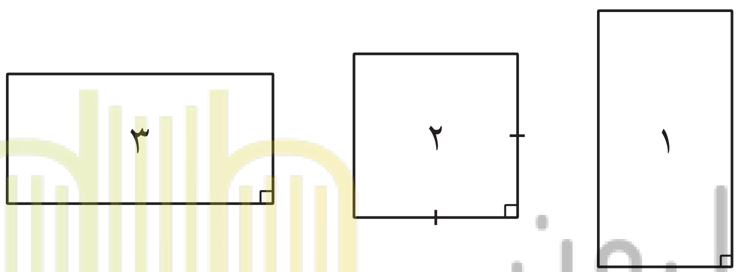
سوف تتعلّم : خواص المربع والشروط التي يكون فيها متوازي الأضلاع مربعًا .

تذكر أنَّ :
خواص المستطيل :
١ – له جميع خواص متوازي الأضلاع .
٢ – القطران متطابقان .
٣ – زواياه الأربع قوائم .

نشاط (١) :

لديك مجموعتان من الأشكال الرباعية :

مجموعة (١)
مستطيلات

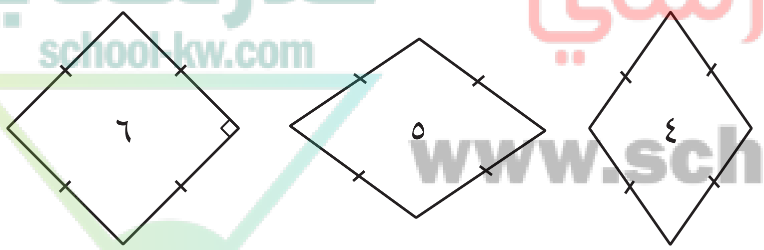


• الأشكال (١) ، (٢) ، (٣) كل منها يمثل مستطيلًا ، إلا أنَّ الشكل رقم (٢) يتميز بـ ضلعان متجاوران متطابقان ونسمي هذا الشكل مربع .

المربع هو مستطيل فيه ضلعان متجاوران متطابقان (متساويان في الطول) .

تذكر أنَّ :
خواص المعين :
١ – له جميع خواص متوازي الأضلاع .
٢ – القطران متعامدان .
٣ – الأضلاع متطابقة .
٤ – القطران ينصف كلّ منهما زواياه المتقابلة .

مجموعة (٢)
معينات



• الأشكال (٤) ، (٥) ، (٦) كل منها يمثل معينًا ، إلا أنَّ الشكل رقم (٦) يتميز بـأنَّ إحدى زواياه قياسها ٩٠° .

نسمي هذا المعين والذي إحدى زواياه = ٩٠° بالمربع .

المربع هو معين قياس إحدى زواياه ٩٠° .

تذكر أنَّ :
خواص متوازي الأضلاع
١ – كل ضلعين متقابلين متطابقان .
٢ – كل زاويتين متقابلتين متطابقتان .
٣ – القطران ينصف كلّ منهما الآخر .

نلاحظ ممّا سبق أنَّ :

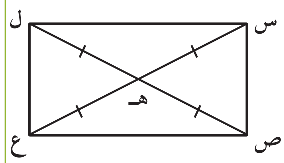
للمربع كل خواص المستطيل وكل خواص المعين .

فكِّر وناقِش

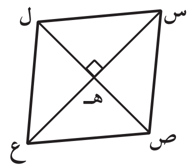
هل المربع متوازي أضلاع ؟ فسر ذلك . نعم لأن المربع فيه كل ضلعين متقابلين متوازيين

تدرّب (١) :

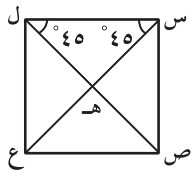
إذا كان س ص ع ل متوازي أضلاع ، فضع علامة (✓) أسفل الشكل الذي يمثل مربعًا مع ذكر السبب :



☐



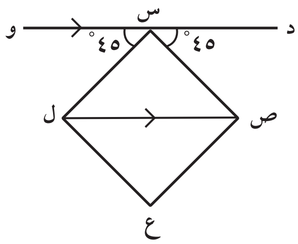
☐



☑ ✓

س هـ = هـ ل

ق(∠س هـ ل) = ٩٠°



☑ ✓

ق(∠ل س ص) = ٩٠°

س ص = س ل

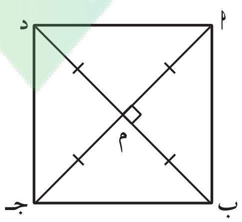
الكشف عن المربع

ما الشروط التي يجب أن يحققها متوازي الأضلاع ليكون مربعًا ؟

إذا كان في متوازي الأضلاع القطران متطابقان ومتعامدان ، فإنَّ متوازي الأضلاع هو **مربع** .

في الشكل المقابل أ ب جـ د متوازي أضلاع

أثبت أنَّ : أ ب جـ د مربع .

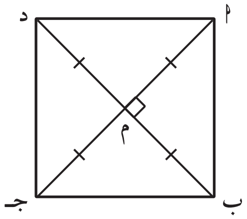


المعطيات :

أ ب جـ د متوازي أضلاع ، $\overline{\text{أ جـ}} \perp \overline{\text{ب د}}$ ، أ جـ = ب د

المطلوب : إثبات أنَّ أ ب جـ د مربع

خطوات البرهان كالتالي :



الحالة الأولى :

∵ ا ب جـ د متوازي أضلاع فيه :

ا جـ = ب د (قطراه متطابقان)

∴ ا ب جـ د مستطيل (١)

من تطابق Δ ا م ب ، Δ ا م د (ض . ز . ض) ⟸ ا ب = ا د (ضلعان متجاوران متطابقان) (٢)

∴ من (١) ، (٢) ا ب جـ د مربع

الحالة الثانية :

∵ ا ب جـ د متوازي أضلاع فيه :

$\overline{\text{ا جـ}}$ ⊥ $\overline{\text{ب د}}$ (قطراه متعامدان)

∴ ا ب جـ د معين (١)

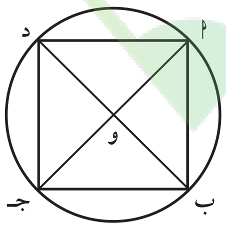
∵ Δ ا م ب قائم ومتطابق الضلعين (م ا = م ب) ⟸ ق (م $\hat{\text{ا}}$ ب) = ٤٥° ،

بالمثل ق (م $\hat{\text{ا}}$ د) = ٤٥° (قطرا المعين ينصفان زواياه)

∴ ق (ب $\hat{\text{ا}}$ د) = ٩٠° (قياس إحدى الزوايا قائمة) (٢)

∴ من (١) ، (٢) ا ب جـ د مربع

تدرّب (٢) :



في الشكل المقابل $\overline{\text{ا جـ}}$ ، $\overline{\text{ب د}}$ قطران في دائرة مركزها و ، $\overline{\text{ا جـ}}$ ⊥ $\overline{\text{ب د}}$. أثبت أنَّ ا ب جـ د مربع .

المعطيات : (١) و مركز الدائرة ، (٢) $\overline{\text{ا جـ}}$ ⊥ ب د

المطلوب : إثبات أنَّ ا ب جـ د مربع

البرهان : ∵ و مركز الدائرة

∴ ا و = ب و = جـ و = د و

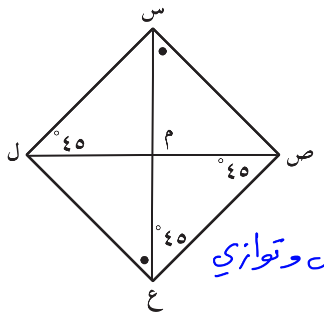
∴ ا جـ = ب د ، القطران متطابقان (١)

ولكن $\overline{\text{ا جـ}}$ ⊥ ب د (٢)

∴ من (١) ، (٢) ، (٣) ا ب جـ د مربع

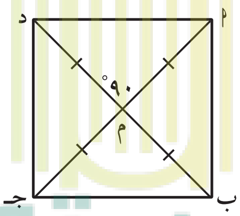
تمــرَّنْ :

١ باستخدام المعطيات في الرسم أثبت أنَّ :
س ص ع ل مربع الشكل .



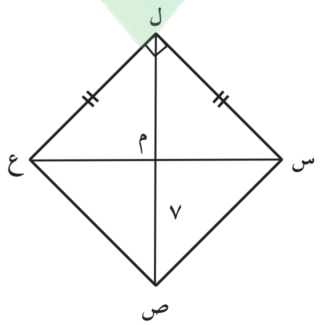
ق(ص س ع) = ق(ل ع س) هما في وضع تبادل وتوازي
س ص // ل ع
ق(ع ص ل) = ق(س ل ص) = ٤٥° هما في وضع تبادل وتوازي
ص ع // س ل
ينتج ان س ص ع ل متوازي اضلاع لأن شكل رباعي فيه كل ضلعان متقابلان متوازيان
△ ص م ع فيه : ق(ص م ع) = ١٨٠° − (٤٥° + ٤٥°) = ٩٠°
س ع ⊥ ص ل
ص م = م ع
⟸ س ص ع ل مربع لأنه متوازي اضلاع فيه قطران متعامدان ومتطابقان

٢ مستعينًا بالمعطيات على الرسم أثبت أنَّ الشكل مربع .



أ م = م جـ ، ب م = م د
أ ب جـ د متوازي اضلاع لأن القطران ينصف كل منهما الآخر
ق(أ م د) = ٩٠°
أ جـ ⊥ ب د القطران متعامدان
أ م = م جـ = ب م = م د
أ جـ = ب د القطران متطابقان
ينتج ان أ ب جـ د مربع لأنه متوازي اضلاع فيه قطران متطابقان ومتعامدان

٣ في الشكل المقابل ل س ص ع مربع فيه : ل م = ٣ ب + ٤ ،
ع م = ٢ جـ − ١ ، م ص = ٧ . أوجد قيمة كلٍّ من ب ، جـ .



٣ ب + ٤ = ٧	٢ جـ − ١ = ٧
٣ ب = ٧ − ٤	٢ جـ = ٧ + ١
٣ ب = ٣	٢ جـ = ٨
ب = ١	جـ = ٤

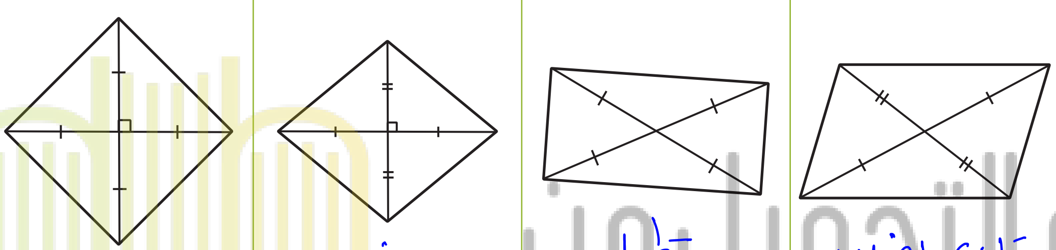
٨-٧ تطبيقات (حل مسائل على الأشكال الرباعية)
Applications (Problem Solving on Quadrilaterals)

سوف تتعلّم : حل مسائل على الأشكال الرباعية .

تذكر أنَّ :
يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع إذا كان :
- فيه كل ضلعين متقابلين متوازيان .
- فيه ضلعان متقابلان متوازيان ومتطابقان .
- فيه كل ضلعين متقابلين متطابقان .
- فيه القطران ينصف كل منهما الآخر .
- فيه كل زاويتين متقابلتين متطابقتان .

نشاط :

حدّد أيًّا من الأشكال الرباعية التالية (متوازي أضلاع – مستطيل – معين – مربع) :

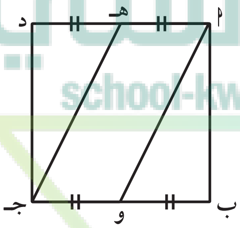


متوازي أضلاع .... مستطيل .... معين .... مربع

تدرّب (١) :

أ ب جـ د مربع ، هـ منتصف $\overline{أ د}$ ، و منتصف $\overline{ب جـ}$

أثبت أنَّ : أ و جـ هـ متوازي أضلاع و منتصف ب جـ



المعطيات : أ ب جـ د مربع ، هـ منتصف أ د

المطلوب : إثبات أنَّ : أ و جـ هـ متوازي أضلاع

البرهان :

أ ب جـ د ....مربع........ (معطى)

∴ أ د = ب جـ (أطوال أضلاع المربع ....متطابقة....)

∵ هـ ....منتصف.... $\overline{أ د}$ (معطى) ، ∴ أ هـ = $\frac{١}{٢}$ ....أ د....

∵ و ....منتصف.... $\overline{ب جـ}$ (معطى) ، ∴ و جـ = $\frac{١}{٢}$ ....ب جـ....

∴ أ هـ = ...و جـ.... (من خواص المساواة) (١)

∵ $\overline{أ د}$ // ....ب جـ.... (من خواص المربع)

∴ $\overline{أ هـ}$ // ....و جـ.... (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أنَّ :

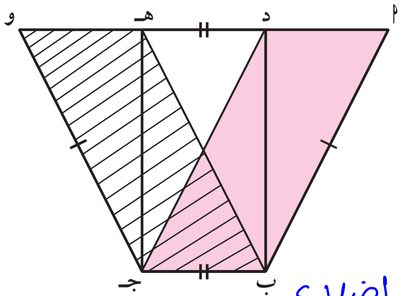
الشكل أ و جـ هـ ....متوازي أضلاع.... (لأنَّه شكل رباعي فيه ضلعان ....متطابقان ومتوازيان....)

تذكر أنَّ :

يكون متوازي الأضلاع مستطيلًا إذا كان :

١ - إحدى زواياه قائمة (قياسها ٩٠°) .

٢ - القطران متساويان في الطول .



تدرّب (٢) :

ٵ ب جـ د ، هـ ب جـ و متوازيا أضلاع .

د ، هـ ∈ ٵو بحيث د هـ = ب جـ ، ٵ ب = و جـ

أثبت أنَّ : د ب جـ هـ مستطيل .

المعطيات : ٵ ب جـ د ، هـ ب جـ و متوازيا اضلاع ، د هـ = ب جـ
ٵ ب = و جـ

المطلوب : إثبات أنَّ : د ب جـ هـ مستطيل

البرهان :

∵ ٵ ب جـ د ، هـ ب جـ و متوازيا اضلاع (معطى)

∴ ٵ د // ب جـ ، هـ و // ب جـ (من خواص متوازي الإضلاع)

∵ د ، هـ ∈ ٵ و (معطى)

∴ د هـ // ب جـ (١)

د هـ = ب جـ (معطى) (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أنَّ :

د ب جـ هـ متوازي اضلاع (لأنَّه شكل رباعي فيه ضلعان متقابلان متوازيان متطابقان) (٣)

∵ ٵ ب = د جـ ، و جـ = هـ ب (من خواص متوازي الأضلاع)

∵ ٵ ب = و جـ (معطى)

∴ ٵ ب = د جـ = ب هـ = و جـ (من خواص المساواة)

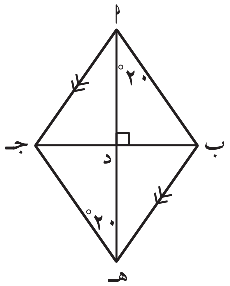
∴ د جـ = هـ ب ، ∴ القطران متطابقان (٤)

من (٣) ، (٤) ينتج أنَّ :

الشكل د ب جـ هـ مستطيل (لأنَّه متوازي أضلاع فيه قطران متطابقان)

> **تذكر أنَّ :**
> يكون متوازي الأضلاع معينًا إذا كان :
> ١ – فيه ضلعان متجاوران متطابقان .
> ٢ – القطران متعامدان .

تدرّب (٣) :



في الشكل المقابل ، أثبت أنَّ : أ ب هـ جـ معين .

المعطيات : (١) أجـ // ب هـ ، (٢) أ هـ ⊥ ب جـ

(٣) ق (ب أ هـ) = ق (أ هـ جـ) = ٢٠°

المطلوب : إثبات أن أ ب هـ جـ معين

البرهان : أجـ // ب هـ ، .... (١)

∵ ق (ب أ هـ) = ق (أ هـ جـ) (وهما في وضع تبادل)

∴ أب // جـ هـ (٢)

∴ من (١) ، (٢) الشكل أ ب هـ جـ متوازي أضلاع

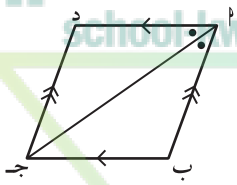
∴ الشكل أ ب هـ جـ معين لأنّه متوازي أضلاع قطراه متعامدان

تمـــرَّنْ :

> **تذكر أنَّ :**
> يكون متوازي الأضلاع مربعًا إذا كان :
> ١ – إحدى زواياه قائمة وفيه ضلعان متجاوران متطابقان .
> ٢ – إحدى زواياه قائمة وقطراه متعامدان .
> ٣ – القطران متساويان في الطول ومتعامدان .

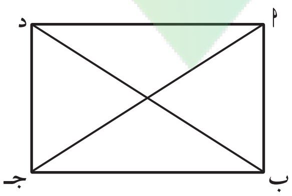
١ اكتب اسم الشكل في كل مما يلي حسب المعطيات على الرسم :

أ أ ب جـ د متوازي أضلاع فيه أجـ ينصف أ .



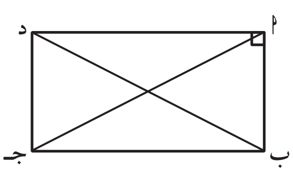
معين

ب أ ب جـ د متوازي أضلاع فيه أ جـ = ب د .



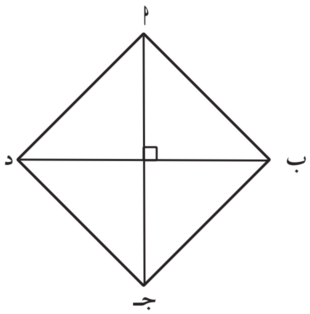
مستطيل

جـ أ ب جـ د متوازي أضلاع فيه ق (أ) = ٩٠° .



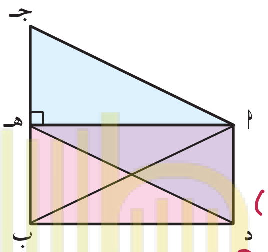
مستطيل

د ا ب جـ د متوازي أضلاع فيه $\overline{\text{اجـ}} \perp \overline{\text{ب د}}$ ،
اجـ = ب د



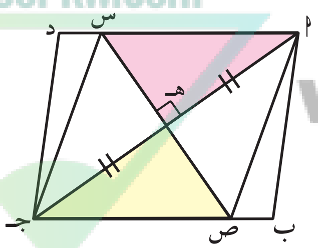
مربع

٢ في الشكل ا ب جـ مثلث متطابق الضلعين ،
ا د هـ جـ متوازي أضلاع ، $\overline{\text{اهـ}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$.
أثبت أنَّ : الشكل ا د ب هـ مستطيل .



△ ا ب جـ متطابق الضلعين فيه : اهـ ⊥ ب جـ (معطى)
هـ ب = هـ جـ ، ا د هـ جـ متوازي اضلاع ، ا د = جـ هـ
اذاً ينتج ان ا د = هـ ب ، ا د // جـ هـ من خواص متوازي الاضلاع
ب ∈ جـ هـ ، ا د // ب هـ اذاً الشكل ا د ب جـ متوازي اضلاع
△ ا ب جـ متطابق الضلعين ا جـ = ا ب ، ا د هـ جـ متوازي الاضلاع
ا جـ = د هـ اذاً ا ب = د هـ القطران متطابقان
الشكل ا د ب هـ مستطيل

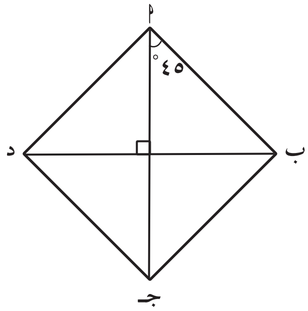
٣ ا ب جـ د متوازي أضلاع ، $\overline{\text{س ص}} \perp \overline{\text{اجـ}}$ ،
هـ منتصف $\overline{\text{اجـ}}$ ، س ∈ $\overline{\text{اد}}$ ، ص ∈ $\overline{\text{ب جـ}}$.
أثبت أنَّ : الشكل ا ص جـ س معين .



△ ا هـ س ، △ جـ هـ ص فيهما
ا هـ = جـ هـ
ق(ا هـ^ س) = ق(جـ هـ^ ص) = ٩٠
ق(س ا^ هـ) = ق(ص جـ هـ) بالتبادل والتوازي
△ ا هـ س ≅ △ جـ هـ ص بحالة (ز ، ض ، ز)
ينتج ان ا س = ص جـ (١)
س ∈ اد ، ص ∈ ب جـ
ا س // ص جـ (٢)
من (١) ، (٢) ينتج ان ا ص جـ س متوازي اضلاع (٣)
س ص ⊥ ا هـ (٤)
من (٣) ، (٤) ينتج ان ا ص جـ س معيناً

٤ أ ب جـ د معين فيه ق (ب $\hat{أ}$ جـ) = ٤٥°

أثبت أنَّ : الشكل أ ب جـ د مربع .



أ ب جـ د معين

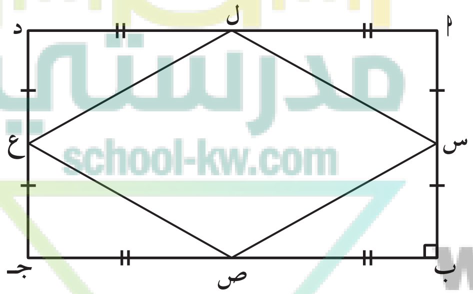
$\overleftarrow{\text{أجـ}}$ ينصف الزاوية د أ ب

ق (د $\hat{أ}$ ب) = ٩٠

أ ب جـ د مربع

٥ أ ب جـ د مستطيل فيه س ، ص ، ع ، ل منتصفات أضلاعه $\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overline{\text{جـ د}}$ ، $\overline{\text{د أ}}$ على الترتيب .

أثبت أنَّ س ص ع ل معين .

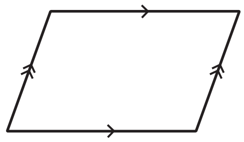
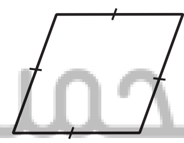
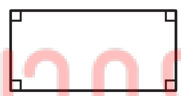
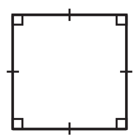
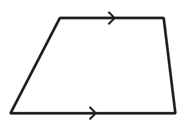


باستخدام تطابق المثلثات أ ل س

ب س ص ، جـ ص ع ، د ع ل نجد ان س ل = ل ع = ع ص = ص س

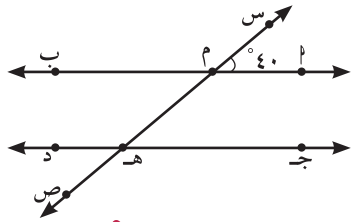
اذاً ل س ص ع معين

الأشكال الرباعية

اسم الشكل	رسم الشكل	تعريف الشكل	خواص الشكل
متوازي الأضلاع		هو شكل رباعي فيه كل ضلعين متقابلين متوازيان .	– الأضلاع المتقابلة متطابقة . – يتقاطع القطران في منتصفهما . – نقطة تقاطع قطريه هي مركز تناظر له . – كل زاويتين متقابلتين متساويتان في القياس . – كل زاويتين متتاليتين متكاملتان .
المعيّن		هو متوازي أضلاع له ضلعان متجاوران متطابقان .	– أضلاعه الأربعة متطابقة . – القطران متعامدان وينصف كل منهما الآخر . – كل قطر ينصف زاويتين متقابلتين فيه .
المستطيل		هو متوازي أضلاع له زاوية قائمة .	– زواياه الأربع قائمة . – قطراه متطابقان ويتقاطعان في منتصفهما .
المربع		– هو متوازي أضلاع له ضلعان متجاوران متطابقان وزاوية قائمة. – هو معيّن له زاوية قائمة . – هو مستطيل له ضلعان متجاوران متطابقان .	– قطراه متطابقان ومتعامدان ويتقاطعان في منتصفهما . – زواياه الأربع قائمة وأضلاعه متطابقة . – قطر المربع يصنع مع كل ضلع من أضلاع المربع زاوية قياسها ٤٥° .
شبه المنحرف		هو شكل رباعي فيه ضلعان فقط متقابلان متوازيان .	

٨-٨ مراجعة الوحدة الثامنة
Revision Unit Eight

١ في الشكل المقابل إذا كان $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ // $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ قاطع لهما في م ، هـ على الترتيب ،
ق (أ مˆ س) = ٤٠° ، أوجد مع ذكر السبب :

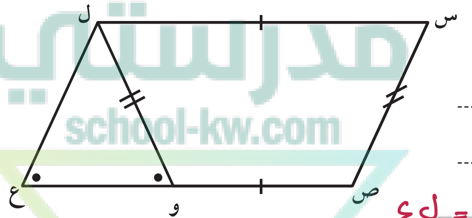


أ ق (جـ هˆـ م) ٤٠° السبب : بالتناظر والتوازي مع أ مˆ س

ب ق (جـ هˆـ ص) ١٤٠° السبب : بالتجاور على مستقيم مع جـ هˆ م

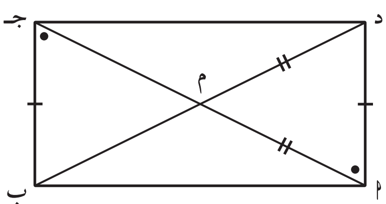
جـ ق (م هˆـ د) ١٤٠° السبب : بالتقابل بالرأس مع جـ هˆ ص

٢ أثبت أنَّ : الشكل س ص ع ل متوازي أضلاع .

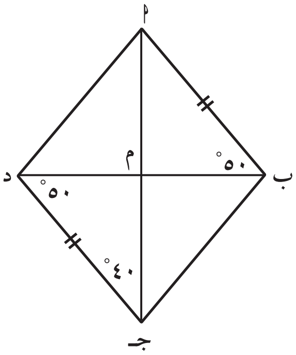


△ ل و ع فيه ق (ل وˆ ع) = ق (عˆ)
△ ل و ع متطابق الضلعين
ل و = ل ع ، س ص = ل و إذاً س ص = ل ع
وبما أن س ل = ص ع (معطى)
الشكل س ص ع ل فيه كل ضلعين متقابلين متطابقين
الشكل س ص ع ل متوازي أضلاع

٣ أثبت أنَّ : الشكل أ ب جـ د مستطيل .



ق (د أˆ جـ) = ق (ب جˆ م) في وضع تبادل وتوازي
أ د // جـ ب
أ د = جـ ب
إذاً أ د ، جـ ب ضلعان متقابلان متوازيان ومتطابقان
الشكل أ ب جـ د متوازي أضلاع
م نقطة تقاطع قطريه (القطران ينصف كل منهما الآخر)
د م = م ب أ م = م جـ
م د = م أ د ب = أ جـ القطران متطابقان
الشكل أ ب جـ د مستطيل



٤ أثبت أنَّ : الشكل أ ب جـ د معين .

ق(أ ب̂ د) = ق(جـ د̂ ب) = ٥٠° في وضع تبادل وتوازي

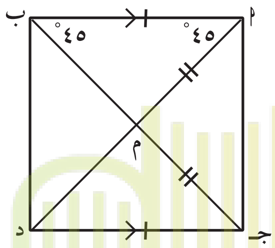
أ ب // د جـ ، أ ب = د جـ { ضلعان متقابلان متوازيان ومتطابقان

الشكل أ ب جـ د متوازي اضلاع

ق(م جـ̂ د) = ٤٠° ، ق(م د̂ جـ) = ٥٠°

ق(د م̂ جـ) = ١٨٠° − (٤٠° + ٥٠°) = ٩٠°

∴ أ جـ ⊥ ب د ، القطران متعامدان ⟸ الشكل أ ب جـ د معين



٥ أثبت أنَّ : الشكل أ ب د جـ مربع .

أ ب = جـ د ، أ ب // جـ د { ضلعان متقابلان متوازيان

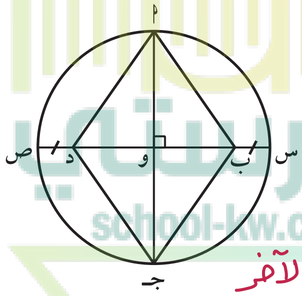
الشكل أ ب جـ د متوازي اضلاع

في Δ م أ ب : ق(م أ̂ ب) = ق(م ب̂ أ) = ٤٥° مثلث متطابق الضلعين

ق(أ م̂ ب) = ١٨٠° − (٤٥° + ٤٥°) = ٩٠°

م أ ⊥ ب م ⟸ أ د ⊥ ب جـ (القطران متعامدان) ⟸ Δ م أ ب متطابق الضلعين

م أ = م ب ∴ أ ب = ب جـ القطران متطابقان ⟸ الشكل أ ب د جـ مربع



٦ في الشكل المقابل : و مركز الدائرة ،

أثبت أنَّ الشكل : أ ب جـ د معين .

من خواص الدائرة انصاف الاقطار متطابقة

و أ ≅ و جـ ، و س ≅ و ص ∴ س ب = د ص

س و − س ب = و ص − د ص ⟸ و ب = و د ، و أ = و جـ ∴ { القطران ينصف كل منهما الآخر

الشكل أ ب جـ د متوازي اضلاع

أ جـ ⊥ ب د (القطران متعامدان) إذاً أ ب جـ د معين

٧ تهتم شركات الإلكترونيات الحديثة في تصميماتها على الأشكال الهندسية المتنوعة . ففي الصورة أمامك شاشة لجهاز التلفاز رُباعية الشكل .

الشكل الرباعي أ ب جـ د فيه :

ق(١̂) = ق(٢̂) = ق(٣̂) ، ب جـ = أ د .

أثبت أنَّ الشكل أ ب جـ د مستطيل .

ق(١̂) = ق(٢̂) وهما في وضع تبادل وتوازي

أ د // ب جـ ، أ د = ب جـ { ضلعان متقابلان متوازيان ومتطابقان

الشكل أ ب جـ د متوازي اضلاع

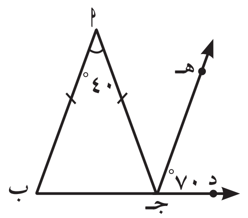
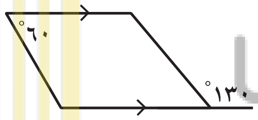
ق(٣̂) = ق(٢̂) في Δ م ب جـ

م ب = م جـ م نقطة تقاطع القطرين ⟸ الشكل أ ب جـ د مستطيل

ب د = أ جـ أي ان القطران متطابقان

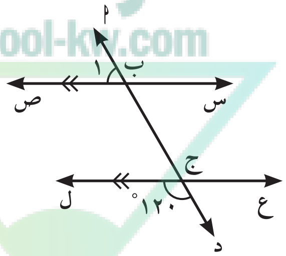
اِختبار الوحدة الثامنة

أوّلًا : في البنود (١-٤) ظلّل (أ) إذا كانت العبارة صحيحة ، وظلّل (ب) إذا كانت العبارة غير صحيحة .

١ المربع هو معين قطراه متطابقان .	أ	ب
٢ في الشكل المرسوم $\overline{بأ} \parallel \overleftarrow{جـهـ}$ 	أ	ب
٣ الشكل المقابل يمثل مستطيلًا 	أ	ب
٤ الشكل الرباعي المرسوم يمثل متوازي أضلاع 	أ	ب

ثانيًا: لكلّ بند من البنود التالية أربعة اختيارات واحد فقط منها صحيح ، ظلّل الدائرة الدالّة على الإجابة الصحيحة :

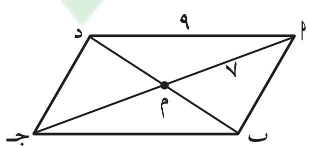
٥ في الشكل المقابل ق($\hat{1}$) يساوي :



أ ٦٠° ب ١٢٠°

جـ ١٨٠° د ٣٦٠°

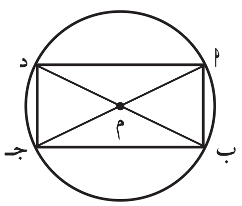
٦ في متوازي الأضلاع المرسوم ، أجـ =



أ ٧ وحدة طول ب ٣ وحدة طول

جـ ١٤ وحدة طول د ٩ وحدة طول

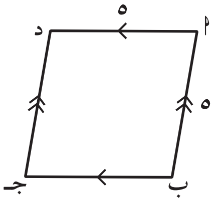
٧ الشكل المقابل يمثل دائرة مركزها م فإنَّ الشكل أ ب جـ د هو :



أ مربع ب مستطيل

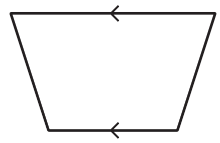
جـ معين د شبه منحرف

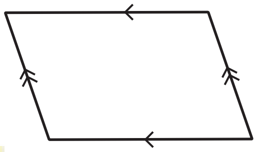
٨ في الشكل المقابل أ ب جـ د يمثل :

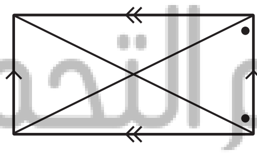


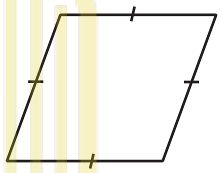
أ معين
ب مستطيل
جـ مربع
د شبه منحرف

٩ الشكل الذي يمثل مستطيلًا هو :

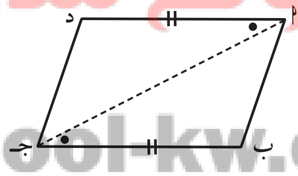
أ


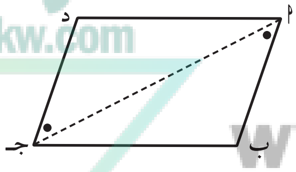
ب


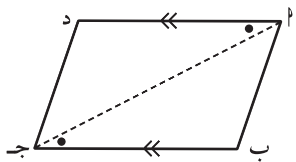
جـ


د


١٠ الشكل الذي يمثل متوازي أضلاع فيما يلي هو :

أ


ب


جـ


د