اختبر نفسك (3)
Check yourself (2)

Mathematics الرياضيات

الصف الثاني عشر متقدم
الفصل الثاني
2024-2023

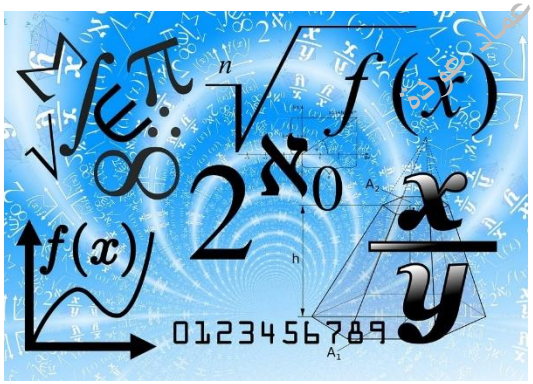
Lesson 4-5 (Concavity and the Second Derivative Test)

according to the previous exam

مراجعة الدرس الخامس (التقعر واختبار المشتقة الثانية)
من الوحدة الرابعة اعتمادا على
الاختبارات السابقة

الأستاذ عماد عودة

عماد عودة



اسم الطالب: -

Q1: - Find the inflection point of

السؤال (1) اوجد نقاط الانعطاف ل

$$f(x) = x^4 + 12x^3 - x$$

a) $(-6, f(-6)), (0, f(0))$

b) $(-6, f(-6)), (6, f(6))$

c) $(6, f(6)), (0, f(0))$

d) $(-6, f(-6)), (0, f(0)), (6, f(6))$

$f'(x) = 4x^3 + 36x^2 - 1$

$f''(x) = 12x^2 + 72x = 0$

$12x(x + 6) = 0$

$x = 0 \quad or \quad x = -6$

f'' : $+ + \; | \; - - - \; | \; + +$ (at -6 and 0)

f : $\cup \; \cap \; \cup$

Q2: - Find the inflection point of

السؤال (2) اوجد نقاط الانعطاف ل

$$f(x) = 2x^3 + 9x^2 - 24x - 10 \; is$$

a) $\left(-\frac{3}{2}, \frac{79}{2}\right)$

b) $\left(\frac{3}{2}, \frac{79}{2}\right)$

c) $(-3, 79)$

d) $\left(-\frac{3}{2}, -79\right)$

$f'(x) = 6x^2 + 18x - 24$

$f''(x) = 12x + 18 = 0$

$12x = -18 \Rightarrow x = \frac{-18}{12}$

$x = -\frac{3}{2}$

$- - - \; | \; + + +$ (at $-\frac{3}{2}$)

نقطة الانعطاف هي $\left(\frac{-3}{2}, f\left(\frac{-3}{2}\right)\right) = \left(\frac{-3}{2}, \frac{79}{2}\right)$

Q3: - Find the inflection point of

السؤال (3) اوجد نقاط الانعطاف ل

$$f(x) = \tan^{-1}(x^2)$$

a) $\left(-\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, f\left(-\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)\right), \left(\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, f\left(\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)\right)$

b) $(2, f(2))$

c) $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)$

d) $\left(-\frac{1}{3}, f\left(-\frac{1}{3}\right)\right), \left(\frac{1}{3}, f\left(\frac{1}{3}\right)\right)$

$f'(x) = \frac{2x}{1 + (x^2)^2} = \frac{2x}{1 + x^4}$

$f''(x) = \frac{2(1 + x^4) - 2x(4x^3)}{(1 + x^4)} = 0$

$= \frac{2 + 2x^4 - x^4}{(1 + x^4)^2} = \frac{2 - 6x^4}{(1 + x^4)^2} = 0$

مستقيل = صفر

$2 - 6x^4 = 0 \Rightarrow -6x^4 = -2 \Rightarrow x^4 = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$

$- - - \; | \; + + + \; | \; - -$ (at $-\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$ and $\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$)

$\cap \; \cup \; \cap$

Q4: - Determine where the graph of the function $f(x)$ is concave up.

السؤال (4) حدد اين يكون التمثيل البياني للدالة $f(x)$ مقعرا لأعلى

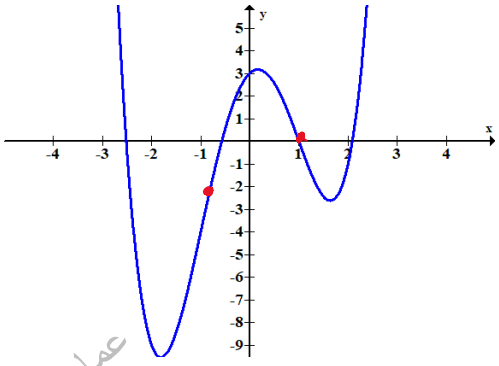
$$f(x) = x^4 - 6x^2 + 2x + 3$$

a) $(-\infty, -1)$

b) $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

c) $(1,1)$

d) $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$



عماد عودة

Q5: - Determine where the graph of the function $f(x)$ is concave up.

السؤال (5) حدد اين يكون التمثيل البياني للدالة $f(x)$ مقعرا لأعلى

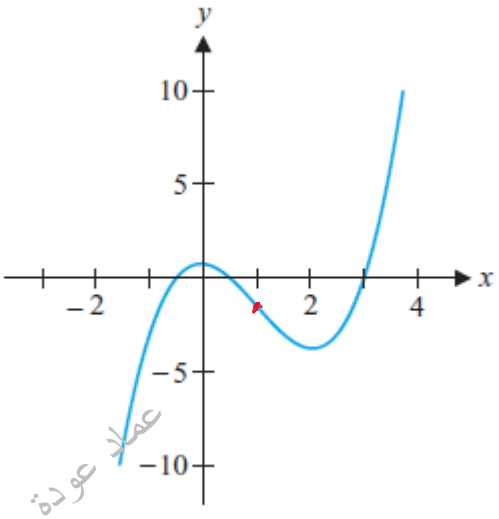
a) $(-\infty, 1)$

b) $(1, \infty)$

c) $(2, \infty)$

d) $(3, \infty)$

ماد عودة



عماد عودة

Q6: - which one of the following is correct for $f(x)$.

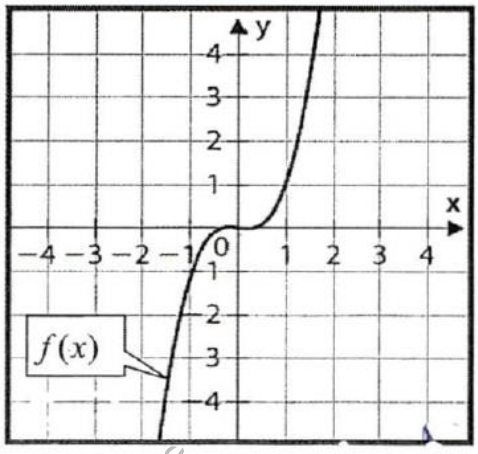
السؤال (6) أي مما يلي يعتبر صحيحا للدالة $f(x)$

a) Concave upward $(-0.5,0.5)$
Concave downward $(-\infty,0) \cup (1,\infty)$

b) concave upward $(-1,1)$
Concave downward $(-\infty,-1) \cup (1,\infty)$

c) Concave upward $(0,1)$
Concave downward $(-\infty,0) \cup (1,\infty)$

d) Concave upward $(0,\infty)$
Concave downward $(-\infty,0)$



عماد عودة

Q7: - Suppose f is a polynomial function such that

$$f'(-3) = 0\,, f''(-3) = -25$$

السؤال (7) لتكن f دالة حدودية بحيث

a) $f(-3)$ *is local maximum.*

b) $f(-3)$ *is local minimum*

c) $f(-3)$ *is absolute maximum.*

d) $f(-3) is absolute minimum.$

عماد عودة

$f'(-3)=0$ نقطة حرجة $\quad f''(-3)<0$ max

Q8: - what is the coordinate of inflection point where the function change from concave down to concave upward

السؤال (8) اوجد احداثي نقطة الانعطاف التي يغير عندها منحنى الدالة من تقعره من تقعر الى الأسفل الى تقعر الى الأعلى

$$f(x) = \cos x - \sin x \quad for\ 0 \le x \le 2\pi$$

a) $\frac{\pi}{4}$

b) $\frac{3\pi}{4}$

c) $\frac{5\pi}{4}$

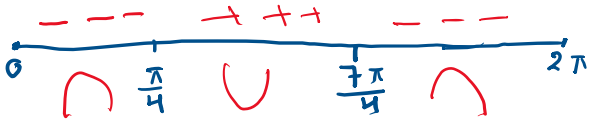
d) $\frac{7\pi}{4}$

عماد عودة

$f'(x) = -\sin x - \cos x$

$f''(x) = -\cos x + \sin x = 0 \Rightarrow \cos x = \sin x$

$x = \frac{\pi}{4}$ or $x = \frac{7\pi}{4}$



Q9: -Find the interval where $f(x)$ will be concave upward If

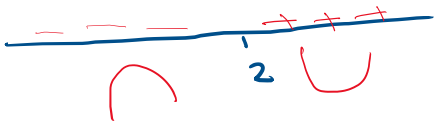
السؤال (9) اوجد فترات التقعر للأعلى إذا علمت ان

$$f'(x) = x^2 - 4x - 5\,,$$

$f''(x) = 2x - 4 = 0$

$2x = 4$

$x = 2$



a) $(-\infty, 2)$

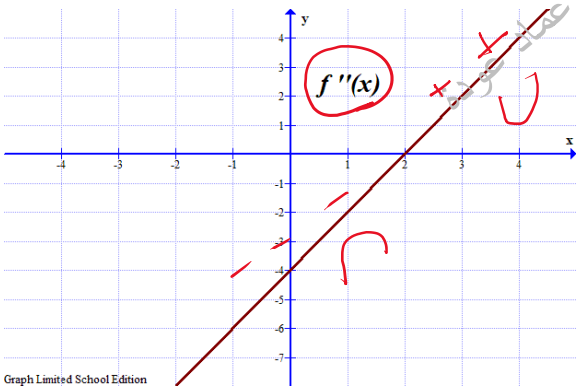
b) $(2, \infty)$

c) $(-\infty, -1) \cup (5, \infty)$

d) $(-\infty, -1) \cup (2, \infty)$

Q10: - The graph represents $f''(x)$ Find the interval where $f(x)$ will be concave upward

السؤال (10) اعتمد على الرسم البياني الذي يمثل $f''(x)$ اوجد فترات التقعر للأعلى



a) $(-\infty, 2)$

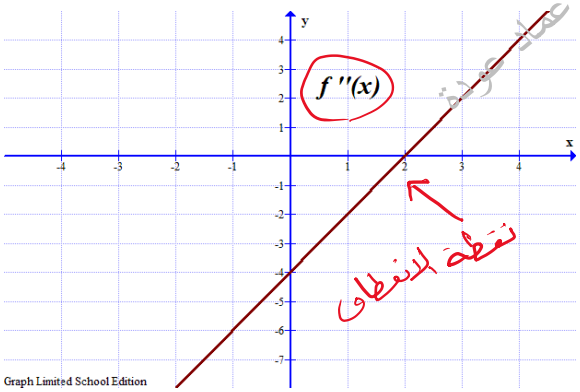
b) $(2, \infty)$

c) $(-\infty, \infty)$

d) $\emptyset$

Q11: - The graph represents $f''(x)$
Find the inflection point

السؤال (11) اعتمد على الرسم البياني الذي يمثل $f''(x)$
اوجد نقاط الانعطاف



a) $(2,0)$

b) $(-4,0)$

c) $(2, f(2))$

d) $(-4, f(-4))$

Q12: - If the graph of $f(x)$ has inflection point at (1,-2) find the value of a and b

السؤال (12) إذا كان الرسم البياني للدالة $f(x)$ نقطة انعطاف عند **(1, -2)** اوجد قيمة كل من **a** و b

$f(x) = ax^3 - 6x^2 + bx - 7$

$f(1) = -2$

$f''(1) = 0$

$f'(x) = 3ax^2 - 12x + b$

$f''(x) = 6ax - 12$

$f(1) = a(1)^3 - 6(1)^2 + b(1) - 7 = -2$

$a - 6 + b - 7 = -2$

$a + b - 13 = -2$

$a + b = 11$

$f''(1) = 6a(1) - 12 = 0$

$6a = 12$

$a = 2$

$\Rightarrow a + b = 11 \Rightarrow 2 + b = 11 \Rightarrow b = 9$

a) $a = 2, b = -9$

b) $a = -2, b = 9$

c) $a = -2, b = -9$

d) $a = 2, b = 9$

Q13: - Determine the intervals where the graph of the given function is concave up and concave down and identify inflection points.

السؤال (12) حدد فترات التقعر للأعلى وفترات التقعر للأسفل ثم حدد نقاط الانعطاف في كل من الدوال التالية

1) $f(x) = x^4 - 6x^2 + 2x + 3$

$f'(x) = 4x^3 - 12x + 2$

$f''(x) = 12x^2 - 12 = 0$

$12(x^2 - 1) = 0$

$x = 1 \quad x = -1$

$f''(x)$: + + | − − − | + + +

$\cup \quad -1 \quad \cap \quad 1 \quad \cup$

Concave upward $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

concave downward $(-1, 1)$

inflection Points $(-1, f(-1))$, $(1, f(1))$

عماد عودة

2) $f(x) = x + \frac{1}{x} = x + x^{-1}$ $\quad x \neq 0$

$f'(x) = 1 - x^{-2}$

$f''(x) = 2x^{-3}$

$\frac{2}{x^3} = 0 \Rightarrow$ No solution

− − − | + + + →

$\cap \quad 0 \quad \cup$

Concave downward $(-\infty, 0)$

concave upward $(0, \infty)$

No inflection point at $x = 0$

not in domain

3) $f(x) = \tan^{-1}(x^2)$

$$f'(x) = \frac{2x}{1+(x^2)^2} = \frac{2x}{1+x^4}$$

$$f''(x) = \frac{2(1+x^4) - 2x(4x^3)}{(1+x^4)} = 0$$

$$= \frac{2+2x^4-x^4}{(1+x^4)^2} = \frac{2-6x^4}{(1+x^4)^2} = 0$$

$2-6x^4=0 \Rightarrow -6x^4=-2 \Rightarrow x^4=\frac{1}{3} \Rightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$

$- - -\ \ +\ +\ +\ \ - -$

$\cap \quad -\frac{1}{\sqrt[4]{3}} \quad \cup \quad \frac{1}{\sqrt[4]{3}} \quad \cap$

Concave downward $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt[4]{3}}) \cup (\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, \infty)$

Concave upward $(-\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, \frac{1}{\sqrt[4]{3}})$

عماد عودة

4) $f(x) = xe^{-4x}$

$f'(x) = 1\,e^{-4x} + x(-4e^{-4x})$

$f'(x) = e^{-4x} - 4xe^{-4x}$

$f''(x) = -4e^{-4x} - (4e^{-4x} + 4x(-4e^{-4x}))$

$= -4e^{-4x} - 4e^{-4x} - 16xe^{-4x} = -8e^{-4x} + 16xe^{-4x} = 0$

$8e^{-4x}(-1+2x) = 0$

$x = \frac{1}{2}$

$+\ +\ +\ \ -\ -\ -$

$\cup \quad \frac{1}{2} \quad \cap$

Concave upward $(-\infty, \frac{1}{2})$

Concave downward $(\frac{1}{2}, \infty)$

Inflection Point $(\frac{1}{2}, f(\frac{1}{2}))$

Q14: - Find all critical numbers and use the Second Derivative Test to determine all local extrema.

السؤال (14) استخدم اختبار المشتقة الثانية لإيجاد القيم القصوى المحلية وحدد نوع كل منها

1) $f(x) = x^4 - 8x^2 + 10$

$f'(x) = 4x^3 - 16x = 0$

$4x(x^2-4) = 0 \Rightarrow x = 0 \ , \ x = 2 \ , \ x = -2$ critical Point

$f''(x) = 12x^2 - 16$

$f'(-2) = 32 > 0$ min

$f(0) = -16 < 0$ max

$f(2) = 32 > 0$ min

2) $f(x) = xe^{-x}$

$f'(x) = 1e^{-x} + x(-1e^{-x}) = (e^{-x} - xe^{-x}) = 0 \Rightarrow e^{-x}(1-x) = 0$

critical $x = 1$

$f''(x) = -e^{-x} - (1e^{-x} + (-xe^{-x})) = -e^{-x} - e^{-x} + xe^{-x} = -2e^{-x} + xe^{-x}$

$f''(1) = -36 < 0$ max

3) $f(x) = \frac{x^2-1}{x} = x - x^{-1}$

$f'(x) = 1 + x^{-2} = 1 + \frac{1}{x^2} = 0$

مستحيل

لا يوجد نقاط حرجة

لا $x = 0$ لست في المجال

عماد عودة