

Unit 6-Systems of Equations and Matrices

الوحدة 6- أنظمة المعادلات والمصفوفات

Lesson6-3 Solving Linear Systems using Inverses and Cramer's Rule

الدرس 3-6 حل الأنظمة الخطية باستخدام المعكوسات وقاعدة كرامر

- I. حل أنظمة المعادلات الخطية باستخدام المصفوفات العكسية (معكوس المصفوفة).
- II. حل أنظمة المعادلات الخطية باستخدام قاعدة كرامر.

نواتج التعلم

■ قاعدة كرامر

■ نظام مربع

Cramer's Rule

Square system

المفردات الجديدة

Alef
EDUCATION

منصة ألف: الدروس 97 و 80

مراجعة بعض المفاهيم الضرورية:

المفهوم الأساسي محدد المصفوفة 2×2

مُحدّد المصفوفة 2×2 هو $\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

المفهوم الأساسي معكوس المصفوفة 2×2

افتراض $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ يكون للمصفوفة معكوس فقط إن كان $\det(A) = ad - bc \neq 0$

وهو $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

المفهوم الأساسي محدد المصفوفة 3×3

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

$$= (a \cdot e \cdot i + b \cdot f \cdot g + c \cdot d \cdot h) - (c \cdot e \cdot g + a \cdot f \cdot h + b \cdot d \cdot i)$$

• أكتب المصفوفة الموسعة $\left[A \mid \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right]$.

• أجرِ عمليات الصف الأولية على المصفوفة الموسعة لخفض المصفوفة إلى صورة مستوى الصف المخفض.

• قرر إن كانت A قابلة للعكس.

✓ إذا أمكن خفض A إلى المصفوفة المحايدة $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. فإن A^{-1} هي المصفوفة الموجودة على يمين للمصفوفة الموسعة المحولة.

✓ إذا لم يتمكن من خفض A إلى المصفوفة المحايدة $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. فإن A هي مصفوفة منفردة.

أولاً: استخدام المصفوفات العكسية

إذا تساوى عدد المعادلات مع المتغيرات في نظام المعادلات الخطية، فإن مصفوفة المعاملات الخاصة به تكون مربعة ويُقال حينئذ إن النظام **نظام مربع**. وإذا كانت مصفوفة المعاملات المربعة هذه قابلة للعكس، فحينئذ يكون للنظام حل وحيد.

المفهوم الأساسي الأنظمة الخطية المربعة القابلة للعكس

لنفرض أن A هو مصفوفة المعاملات لنظام مكون من n من المعادلات الخطية في n من المتغيرات تحدها المعادلة $AX = B$ حيث X هو مصفوفة المتغيرات و B هو مصفوفة الثوابت.

إذا كانت A قابلة للعكس يكون لنظام المعادلات حل وحيد تحده المعادلة $X = A^{-1} \cdot B$.

مثال (1): إيجاد حل نظام 2×2 باستخدام المصفوفة العكسية

تمرين موجه (1)

1A. $6x + y = -8$
 $-4x - 5y = -12$

	الصورة المصفوفية $A \cdot X = B$
	محدد المصفوفة A
	معكوس المصفوفة A
	عملية الضرب وحل النظام

1B. $-3x + 9y = 36$
 $7x - 8y = -19$

الصورة المصفوفية
 $A \cdot X = B$

محدد المصفوفة A

معكوس المصفوفة A

عملية الضرب
 وحل النظام

ملرسة الخليل بن أحمد - الحلقة الثالثة بينين

تمارين الكتاب صفحة 384+385

1) $5x - 2y = 11$
 $-4x + 7y = 2$

استخدم المصفوفة العكسية لحل نظام المعادلات، إن أمكن.

الصورة المصفوفية
 $A \cdot X = B$

محدد المصفوفة A

معكوس المصفوفة A

عملية الضرب
 وحل النظام

3) $-3x + 5y = 33$
 $2x - 4y = -26$

الصورة المصفوفية
 $A \cdot X = B$

محدد المصفوفة A

معكوس المصفوفة A

عملية الضرب
 وحل النظام

لحل نظام معادلات 3×3 باستخدام المصفوفة العكسية، استخدم الحاسبة.

مثال (2) من الحياة اليومية إيجاد حل نظام 3×3 باستخدام المصفوفة العكسية

5) $2x + y - z = -13$
 $3x + 2y - 4z = -36$
 $x + 6y - 3z = 12$

الصورة المصفوفية
 $A \cdot X = B$

محدد المصفوفة A

معكوس المصفوفة A

عملية الضرب
 وحل النظام

$$x + 2y - z = 2$$

7)

$$2x - y + 3z = 4$$

$$3x + y + 2z = 6$$

الصورة المصفوفية

$$A \cdot X = B$$

محدد المصفوفة A معكوس المصفوفة A عملية الضرب
وحل النظام

تمرين موجه (2)

الصناعة خلال ثلاثة أعوام متتالية، أنتج مصنع لتجميع السيارات إجمالي 720,000 سيارة. فإذا كان عدد السيارات التي أنتجت في العام الثاني تزيد عن العام الأول بعدد 50,000 سيارة، وكان عدد السيارات التي أنتجت في العام الثالث تزيد عن الثاني بعدد 80,000، فكم عدد السيارات التي أنتجت في كل عام؟

(9) التنزيل قامت هداية بتنزيل بعض البرامج على مشغل الوسائط المحمول الخاص بها. وبشكل عام. تستهلك مسرحية هزلية مدتها 30 دقيقة مساحة 0.3 جيجا بايت من الذاكرة. ويستهلك برنامج حوار مدته ساعة 0.6 جيجا بايت وفيلم مدته ساعتان يستهلك 1.2 جيجا بايت. وقامت هداية بتنزيل 9 برامج بمجموع 5.4 جيجا بايت. فإذا كانت قامت بتنزيل عدد مسرحيات هزلية يزيد عن عدد الأفلام بمقدار اثنين. فكم عدد كل نوع قامت بتنزيله؟

ثانياً: استخدام قاعدة كرامر

استخدام قاعدة كرامر طريقة أخرى لحل الأنظمة المربعة تعرف باسم قاعدة كرامر. وفيها تستخدم المحددات بدلاً من تقليل الصفوف أو المصفوفات العكسية معكوس المصفوفات).

المفهوم الأساسي قاعدة كرامر

لنفرض أن A هو مصفوفة المعاملات لنظام مكون من n من المعادلات الخطية في n من المتغيرات تحدها المعادلة $AX = B$

إذا كانت $\det(A) \neq 0$ فإن الحل الوحيد لنظام المعادلات تعبر عنه بـ

$$x = \frac{|A_x|}{|A|}$$

$|A|$ محدد مصفوفة المعاملات

$$y = \frac{|A_y|}{|A|}$$

$|A_x|$ محدد مصفوفة المعاملات مع استبدال عمود x بالثوابت

$|A_y|$ محدد مصفوفة المعاملات مع استبدال عمود y بالثوابت

$$z = \frac{|A_z|}{|A|}$$

$|A_z|$ محدد مصفوفة المعاملات مع استبدال عمود z بالثوابت

إذا كانت $\det(A) = 0$ فإن النظام إما ليس لها حل أو لها عدد لا نهائي من الحلول.

مثال (3): استخدام قاعدة كرامر لحل نظام 2×2

استخدم قاعدة كرامر لإيجاد حل نظام المعادلات الخطية، إن جد حل وحيد.

تمرين موجه (3)

$$3A. \quad \begin{aligned} 2x - y &= 4 \\ 5x - 3y &= -6 \end{aligned}$$

	محدد مصفوفة المعاملات
	محدد مصفوفة المعاملات مع استبدال عمود x بالثوابت
	محدد مصفوفة المعاملات مع استبدال عمود y بالثوابت
	حل النظام

$$3B. \quad \begin{aligned} -9x + 3y &= 8 \\ 2x - y &= -3 \end{aligned}$$

	محدد مصفوفة المعاملات
	محدد مصفوفة المعاملات مع استبدال عمود x بالثوابت
	محدد مصفوفة المعاملات مع استبدال عمود y بالثوابت
	حل النظام

$$3C. \quad \begin{aligned} 12x - 9y &= -5 \\ 4x - 3y &= 11 \end{aligned}$$

	محدد مصفوفة المعاملات
	محدد مصفوفة المعاملات مع استبدال عمود x بالثوابت
	محدد مصفوفة المعاملات مع استبدال عمود y بالثوابت
	حل النظام

استخدم قاعدة كرامر لإيجاد حل نظام المعادلات الخطية، إن جد حل وحيد.

11)
$$\begin{aligned} -3x + y &= 4 \\ 2x + y &= -6 \end{aligned}$$

محدد مصفوفة المعاملات

محدد مصفوفة المعاملات مع
استبدال عمود x بالثوابت

محدد مصفوفة المعاملات مع
استبدال عمود y بالثوابت

حل النظام

ملف رسالة الخليل بن أحمد - الحلقة الثالثة بينين

13)
$$\begin{aligned} 5x + 4y &= 7 \\ -x - 4y &= -3 \end{aligned}$$

محدد مصفوفة المعاملات

محدد مصفوفة المعاملات مع
استبدال عمود x بالثوابت

محدد مصفوفة المعاملات مع
استبدال عمود y بالثوابت

حل النظام

مثال (4): استخدام قاعدة كرامر لحل نظام 3×3

استخدم قاعدة كرامر لإيجاد حل نظام المعادلات الخطية، إن جد حل وحيد.

تمرين موجه (3)

$$\begin{aligned}
 4A. \quad & 8x + 12y - 24z = -40 \\
 & 3x - 8y + 12z = 23 \\
 & 2x + 3y - 6z = -10
 \end{aligned}$$

محدد مصفوفة المعاملات

محدد مصفوفة المعاملات مع
استبدال عمود x بالثوابتمحدد مصفوفة المعاملات مع
استبدال عمود y بالثوابتمحدد مصفوفة المعاملات مع
استبدال عمود z بالثوابت

حل النظام

$$\begin{aligned}
 4B. \quad & -2x + 4y - z = -3 \\
 & 3x + y + 2z = 6 \\
 & x - 3y = 1
 \end{aligned}$$

محدد مصفوفة المعاملات

محدد مصفوفة المعاملات مع
استبدال عمود x بالثوابتمحدد مصفوفة المعاملات مع
استبدال عمود y بالثوابتمحدد مصفوفة المعاملات مع
استبدال عمود z بالثوابت

حل النظام

استخدم قاعدة كرامر لإيجاد حل نظام المعادلات الخطية، إن جد حل وحيد.

$$\begin{aligned} 2x - y + z &= 1 \\ x + 2y - 4z &= 3 \\ 4x + 3y - 7z &= -8 \end{aligned}$$

15)

محدد مصفوفة المعاملات

محدد مصفوفة المعاملات مع
استبدال عمود x بالثوابت

محدد مصفوفة المعاملات مع
استبدال عمود y بالثوابت

محدد مصفوفة المعاملات مع
استبدال عمود z بالثوابت

حل النظام

ملرسلة الخليل بن أحمد - الحلقة الثالثة بينين

$$\begin{aligned} x + 2y &= 12 \\ 3y - 4z &= 25 \\ x + 6y + z &= 20 \end{aligned}$$

17)

محدد مصفوفة المعاملات

محدد مصفوفة المعاملات مع
استبدال عمود x بالثوابت

محدد مصفوفة المعاملات مع
استبدال عمود y بالثوابت

محدد مصفوفة المعاملات مع
استبدال عمود z بالثوابت

حل النظام



(19) رحلة بالسيارة توقفت ميسون مرتين خلال رحلة على الطريق للتزود بالوقود. موضح بالأسفل سعر البنزين لكل محطة. وقد اشترت ميسون إجمالي 33.5 L وأنفقت 134.28 AED. استخدم قاعدة كرامر لتحديد عدد لترات البنزين التي اشترتها ميسون مقابل 3.96 AED للتر.



(20) تخطيط جماعي تخطط لجنة إعادة لم شمل دفعة التخرج لاستقبال 400 ضيف في اجتماع لم الشمل العاشر لها. ويمكن للضيوف اختيار واحد من بين ثلاث اختيارات من الحلوى الموضحة بالأسفل. ويجب أن يستغرق الطاهي القائم على إعداد الحلوى 5 دقائق لكل فطيرة و 8 دقائق لكل كعكة، و 21 دقيقة لكل كعكة جبن. وكانت التكلفة الإجمالية لأصناف الحلوى 1170 AED، كما أمضى الطاهي 45 ساعة بالضبط في إعدادها. استخدم قاعدة كرامر لتحديد عدد الأطباق التي تم إعدادها من كل نوع من الحلوى.

(21) هواتف قامت كل من نهلة ونسرين ونورا بمراجعة أنظمة الهاتف الخاصة بهم. دفعت نهلة 52.90 AED مقابل 30 دقيقة إضافية من الألعاب، و 12 دقيقة من المكالمات و 40 رسالة نصية. ودفعت نسرين 48.07 AED مقابل 18 دقيقة من الألعاب، و 15 دقيقة من المكالمات و 55 رسالة نصية ودفعت نورا 13.64 AED فقط مقابل 6 دقائق من الألعاب، و 7 دقائق من المكالمات. فإذا كان جميعهم يستخدمون النظام نفسه، فجد تكلفة كل خدمة.

حل كل معادلة مصفوفيه

(22)
$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

(24)
$$\begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 8 \\ 12 & 6 \end{bmatrix}$$

أوجد قيم n بحيث لا يمكن حل النظام الذي تعبر عنه المصفوفة الموسعة المعطاة باستخدام المصفوفة العكسية

$$(31) \left[\begin{array}{cc|c} n & -8 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{array} \right]$$

$$(32) \left[\begin{array}{cc|c} 3 & n & 4 \\ n & 2 & -5 \end{array} \right]$$

$$(33) \left[\begin{array}{cc|c} -5 & -9 & 3 \\ n & n & 11 \end{array} \right]$$

$$(34) \left[\begin{array}{cc|c} n & -n & 0 \\ 7 & n & -8 \end{array} \right]$$

تحليل الخطأ تحاول عائشة ورنا حل النظام أدناه باستخدام قاعدة

كرامر. فهل إجابة أي منهما صواب؟ اشرح استنتاجك. $2x + 7y = 10$

$$6x + 21y = 30$$

رنا

النظام له حل واحد
ولكن لا يمكن إيجاد
باستخدام قاعدة كرامر.

عائشة

النظام ليس له حل لأن
محدد مصفوفة المعامل
يساوي صفراً.

