الإمـــارات
THE EMIRATES

Alpha
Education Center

# ملخص

مع الحل

## [ الاسئلة المقترحة من الوزارة ]

لمادة

الحل

الحل

# الرياضيات

## الصف الثاني عشر متقدم

## الفصل الدراسي الثاني

2022/2021

اسم الطالب : ..............................................................

الحل

المدرســـــة : ..............................................................

مع تمنياتي لكم بالنجاح والتفوق

**إعداد : محمد عمر الخطيب**

Khateebacademy.com

# الوحدة الرابعة : تطبيقات الاشتقاق /// الدرس الأول : التقريبات الخطية وطريقة نيوتن

## قواعد الاشتقاق (مراجعة من الفصل الأول)

| المشتقة | الدالة | # | المشتقة | الدالة | # |
|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{1}{x}$ | $\ln x$ | 15 | $0$ | $c$ | 1 |
| $\frac{f'}{f \times \ln a}$ | $\log_a(f)$ | 16 | $nx^{n-1}$ | $x^n$ | 2 |
| $\cos x$ | $\sin x$ | 17 | $f' \pm g'$ | $f \pm g$ | 3 |
| $-\sin x$ | $\cos x$ | 18 | $c \times f'$ | $c \times f$ | 4 |
| $\sec^2 x$ | $\tan x$ | 19 | $f \times g' + g \times f'$ | $f \times g$ | 5 |
| $-\csc^2 x$ | $\cot x$ | 20 | $\frac{g \times f' - f \times g'}{g^2}$ | $\frac{f}{g}$ | 6 |
| $\sec x \tan x$ | $\sec x$ | 21 | $\frac{-c \times g'}{g^2}$ | $\frac{c}{g}$ | 7 |
| $-\csc x \cot x$ | $\csc x$ | 22 | $\frac{f'}{2\sqrt{f}}$ | $\sqrt{f}$ | 8 |
| $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $\sin^{-1} x$ | 23 | $n(f)^{n-1} \times f'$ | $(f)^n$ | 9 |
| $\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $\cos^{-1} x$ | 24 | $f'(g(x)) \times g'(x)$ | $(f \circ g)(x)$ | 10 |
| $\frac{1}{1+x^2}$ | $\tan^{-1} x$ | 25 | $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$ | $y = f(u)$<br>$u = g(x)$ | 11 |
| $\frac{-1}{1+x^2}$ | $\cot^{-1} x$ | 26 | $\frac{1}{f'(g(x))}$ | $g = f^{-1}(x)$ | 12 |
| $\frac{1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2-1}}$ | $\sec^{-1} x$ | 27 | $a^f \times f' \times \ln a$ | $a^f$ | 13 |
| $\frac{-1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2-1}}$ | $\csc^{-1} x$ | 28 | $e^f \times f'$ | $e^f$ | 14 |

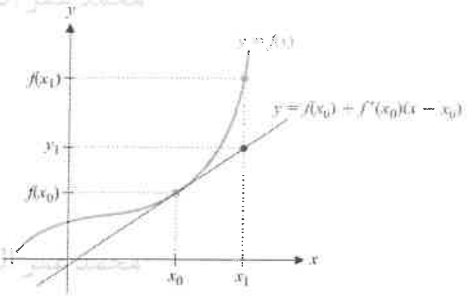
# التقريبات الخطية

من اهم تطبيقات التفاضل اننا نستطيع تقريب اي دالة قابلة للاشتقاق بدالة خطية عند نقطة معينة وهذا ما يسمى بالتقريب الخطي للدالة.

التقريب الخطي (المماس) للدالة $f(x)$ عند $x = x_0$

هو الدالة

$$L(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,\Delta x$$
$$= f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0)$$



**(1)** اوجد التقريب الخطي للدالة $f(x) = \sqrt{x}$ عند $x_0 = 1$ ثم اوجد قيمة تقريبية للعدد $\sqrt{1.2}$

اوجد التقريب الخطي للعدد $\sqrt{1.2}$

$f(x) = \sqrt{x}\ ,\ x_0 = 1$

$f(1) = 1$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$f'(1) = \frac{1}{2}$

$\sqrt{1.2} = \sqrt{x}$

$x_1 = 1.2$

$$L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$
$$= f(1) + f'(1)(x-1)$$
$$= 1 + \frac{1}{2}(x-1)$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x .$$

$$\sqrt{1.2} \approx L(1.2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1.2)$$
$$= 1.1 \quad \#$$

---

**(2)** اوجد التقريب الخطي للدالة $f(x) = (x+1)^{1/3}$ عند $x_0 = 0$ ثم اوجد قيمة تقريبية للعدد $\sqrt[3]{1.2}$

اوجد التقريب الخطي للعدد $\sqrt[3]{1.2}$

$f(x) = (x+1)^{1/3}\ ,\ x_0 = 0$

$f(0) = 1$

$f'(x) = \frac{1}{3}(x+1)^{-2/3} .$

$f'(0) = \frac{1}{3}$

$\sqrt[3]{1.2} = (x+1)^{1/3}$

$x_1 = 0.2$

$$L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$
$$= f(0) + f'(0)(x-0)$$
$$= 1 + \frac{1}{3}(x)$$
$$= 1 + \frac{1}{3}x$$

$$\sqrt[3]{1.2} \approx L(0.2) = 1 + \frac{1}{3}(0.2)$$
$$= 1.066 \quad \#$$

(1) اوجد التقريب الخطي للدالة $f(x)=\sqrt{2x+9}$ عند $x_0=0$ ثم اوجد قيمة تقريبية للعدد $\sqrt{8.8}$

اوجد التقريب الخطي للعدد $\sqrt{8.8}$

$f(x) = \sqrt{2x+9}$ ,, $x_0 = 0$

$f(0) = 3$ .

$f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x+9}}$ .

$f'(0) = \frac{1}{3}$

$\sqrt{8.8} = \sqrt{2x+9}$.

$8.8 = 2x+9$

$-0.2 = 2x$.

$x_1 = -0.1$

$L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$

$= f(0) + f'(0)\,(x-0)$

$= 3 + \frac{1}{3}\,(x)$

$= 3 + \frac{1}{3}x$

$\sqrt{8.8} = L(-0.1) = 3 + \frac{1}{3}(-0.1)$

$= 3 - \frac{1}{30}$

$= \frac{89}{3} = 2.967$. #

---

(2) اوجد التقريب الخطي للدالة $f(x)=\frac{2}{x}$ عند $x=1$ ثم اوجد قيمة تقريبية للعدد $\frac{2}{0.99}$

اوجد التقريب الخطي للعدد $\frac{2}{0.99}$

$f(x) = \frac{2}{x}$ , $x_0 = 1$

$f(1) = 2$

$f'(x) = \frac{-2}{x^2}$ .

$f'(1) = -2$

$\frac{2}{0.99} = \frac{2}{x}$

$x_1 = 0.99$.

$L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$

$= f(1) + f'(1)\,(x-1)$

$= 2 + -2\,(x-1)$

$= 2 - 2x + 2$

$= 4 - 2x$ .

$\frac{2}{0.99} \approx L(0.99) = 4 - 2(0.99)$

$= 2.02$ #

**(1)** اوجد التقريب الخطي للدالة $f(x)=\sin 3x$ عند $x_0=0$ ثم اوجد قيمة تقريبية للعدد $\sin(0.3)$

اوجد التقريب الخطي للعدد $\sin(0.3)$

$f(x) = \sin 3x \quad , \quad x_0 = 0$

$f(0) = 0$

$f'(x) = 3\cos 3x.$

$f'(0) = 3.$

$\sin 0.3 = \sin 3x$

$0.3 = 3x$

$x_1 = 0.1$

$L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

$= f(0) + f'(0)(x - 0)$

$= 0 + 3(x.)$

$= 3x.$

$\sin 0.3 \approx L(0.1) = 3(0.1)$

$= 0.3$ #

---

**(2)** اوجد التقريب الخطي للدالة $f(x)=\sin x$ عند $x_0=\pi$ ثم اوجد قيمة تقريبية للعدد $\sin(3)$

اوجد التقريب الخطي للعدد $\sin(3)$

$f(x) = \sin x \quad , \quad x_0 = \pi$

$f(\pi) = \sin\pi = 0$

$f'(x) = \cos x.$

$f'(\pi) = \cos\pi = -1.$

$\sin 3 = \sin x$

$x_1 = 3.$

$L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

$= f(\pi) + f'(\pi)(x - \pi)$

$= 0 + -1(x - \pi)$

$= \pi - x$

$\sin 3 \approx L(3) = \pi - 3$

$= 0.14.$

# الوحدة الرابعة : تطبيقات الاشتقاق /// الدرس الثاني: الصيغ غير المعرفة (قاعدة لوبيتال)

## قاعدة لوبيتال

اذا كانت $g, f$ دوال قابلة للاشتقاق في جوار النقطة $c$ حيث $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{0}{0}$ او $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\infty}{\infty}$

فان

اشتق

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

اوجد قيمة النهايات التالية

(1) $\lim_{x\to -2}\frac{x+2}{x^2-4}$ $\left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to -2}\frac{1}{2x} = \frac{1}{2(-2)} = \frac{-1}{4}$ #

(2) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$ $\left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 2}\frac{2x}{2x-3} = \frac{4}{1} = 4$ #

(3) $\lim_{x\to \infty}\frac{3x^2+2}{x^2-4}$ $\left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to \infty}\frac{6x}{2x} = \frac{6}{2} = 3$ #

(4) $\lim_{x\to -\infty}\frac{x+1}{x^2+4x+3}$ $\left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to -\infty}\frac{1}{2x} = 0$

تذكر.

$\frac{\text{عدد} \neq 0}{\infty} \to 0.$

(5) $\lim_{t\to 0}\frac{e^{2t}-1}{t}$ $\left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{t\to 0}\frac{2e^{2t}}{1} = \frac{2}{1} = 2$ #

(6) $\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{e^{3t}-1}$ $\left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{t\to 0}\frac{\cos t}{3e^{3t}} = \frac{1}{3}$ #

اوجد قيمة النهايات التالية

(1) $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^2}$ $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2x^2} = 0. \#$$

---

(2) $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2\sqrt{x}}{x}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$$

---

(3) $\lim_{t\to1} \frac{\ln(\ln t)}{\ln t}$

سنأخذ النهاية من الطرفين

$$\lim_{t\to1^+} \frac{\ln(\ln t)}{\ln t}$$

$$= \lim_{t\to1^+} \ln(\ln t) \cdot \frac{1}{\ln t}$$

$$= -\infty \cdot \infty$$

$$= -\infty.$$

$$\lim_{t\to1^-} \frac{\ln(\ln t)}{\ln t}$$

نعلم أن $\lim_{t\to1^-} \ln t$ تكون قيمة سالبة.

لذلك تكون النهاية غير معرفة. ( غير موجودة )

**اوجد قيمة النهايات التالية**

(1) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\cot x}$ $\left(\frac{-\infty}{\infty}\right).$

$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}.$

$x \to 0^+$

$\cot x \to \infty.$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\csc^2 x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{\sin^2 v}}$$

$$= \lim_{x\to 0} -\frac{\sin^2 x}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} -\sin x \cdot \frac{\sin x}{x} = 0 \cdot 1 = 0 \ \#$$

---

(2) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{\ln x}$

$$= \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} \cdot \frac{1}{\ln x}$$

$$= 0 \cdot 0$$

$$= 0$$

لأن

$\lim_{x\to 0^+} \ln x \to -\infty.$

$\frac{1}{-\infty} \to 0.$

# الوحدة الرابعة: تطبيقات الاشتقاق /// الدرس الثالث: القيم العظمى والصغرى

## الاعداد (القيم) الحرجة

يعرف العدد الحرج للدالة $f$ بانها النقطة $c$ في مجال الدالة $f$ والتي تكون عندها

اما: $f'(x)=0$ او $f'(x)$ غير موجودة

ملاحظة ( ممكن ان تكون احدى اطراف الفترة المغلقة اذا حققت احد الشروط السابقة )

## القيم القصوى (المطلقة) تحليلاً

(1) ايجاد جميع النقاط الحرجة في الفترة المغلقة المعرفة عليها الدالة

(2) ايجاد قيمة الدالة عند النقاط الحرجة واطراف الفترة المغلقة.

(3) تكون اكبر هذه القيم عظمى مطلقة وتكون اصغر هذه القيم صغرى مطلقة.

اختبار القيم

**(1)** اوجد القيم القصوى (المطلقة) للدالة: $f(x)=x^3-3x+1$ على الفترة $[0,2]$ وبين نوعها

$f'(x) = 3x^2 - 3.$

$f'(x) = 0$

$3x^2 - 3 = 0$

$x = -1 , 1$

الاعداد الحرجة فقط

$x = 1$

لان $x = -1$ خارج المجال

اختبار القيم

$f(0) = 1$

$f(2) = 3$

$f(1) = -1$

عظمى مطلقة 3 عند $x = 2$

صغرى مطلقة -1 عند $x=1$

**(1)** اوجد القيم القصوى (المطلقة) للدالة : $f(x)=x^3-3x+1$ على الفترة $[-3,2]$ وبين نوعها

$f'(x)=3x^2-3$

$f'(x)=0$

$\Rightarrow 3x^2-3=0$

$x=-1,1$

الاعداد الحرجة هي

$x=-1,1$

$f(-3)=-17$ صغرى مطلقة

$f(2)=3$

$f(-1)=3$

عظمى مطلقة

$f(1)=-1$

---

**(2)** اوجد القيم القصوى (المطلقة) للدالة : $f(x)=x^4-8x^2+2$ على الفترة $[-3,1]$ وبين نوعها

$f'(x)=4x^3-16x$

$f'(x)=0$

$4x^3-16x=0$

$4x(x^2-4)=0$

$x=0,\ x=\pm 2$

$x=0,-2$ الاعداد الحرجة

$f(-1)=-5$

$f(3)=11$ عظمى مطلقة

$f(0)=2$

$f(-2)=-14$ صغرى مطلقة

---

**(3)** اوجد القيم القصوى (المطلقة) للدالة : $f(x)=x^4-8x^2+2$ على الفترة $[-1,3]$ وبين نوعها

$f'(x)=4x^3-16x$

$f'(x)=0$

$4x^3-16x=0$

$4x(x^2-4)=0$

$x=0,\ x=\pm 2$

الاعداد الحرجة

$x=0,2$

$f(-1)=-5$

$f(3)=11$ عظمى مطلقة

$f(0)=2$

$f(2)=-14$ صغرى مطلقة

# الوحدة الرابعة: تطبيقات الاشتقاق /// الدرس الرابع: الدوال المتزايدة والمتناقصة

## القيم القصوى المحلية: اختبار المشتقة الاولى للقيم القصوى المحلية

(1) اوجد الاعداد الحرجة للدالة $f(x)=x^3-3x^2+6x$ ثم اوجد القيم القصوى المحلية وبين نوعها.

$f'(x) = 3x^2-6x+6$

$f'(x) = 0$

$3x^2-6x+6=0$

لا يوجد

لايوجد اعداد حرجة

لايوجد قيم قصوى محلية.

(2) اوجد الاعداد الحرجة للدالة $f(x)=-x^3+3x^2-3x$ ثم اوجد القيم القصوى المحلية وبين نوعها.

$f'(x) = -3x^2+6x-3$

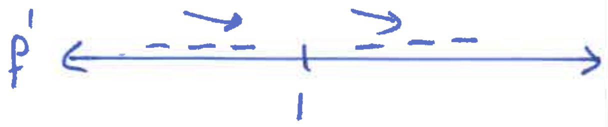
$f'(x) = 0$

$-3x^2+6x-3=0$

$x=1$

الاعداد الحرجة $x=1$

اختبار المشتقة الاولى.



لا يوجد قيم قصوى محلية.

عند $x=1$ مماس افقي.

(3) اوجد الاعداد الحرجة للدالة: $f(x)=x^4-2x^2+1$ ثم اوجد القيم القصوى المحلية وبين نوعها.

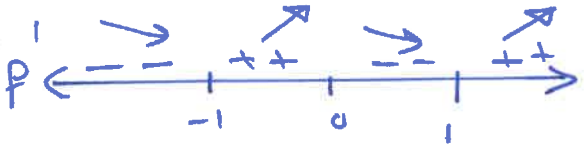
$f'(x) = 4x^3-4x$

$f'(x)=0$

$4x(x^2-1)=0$

$x=0, \pm 1$

الاعداد الحرجة هي $0, \pm 1$



عظمى محلية عند $x=0$.

صغرى محلية عند $x=\pm 1$

(1) اوجد الاعداد الحرجة للدالة: $f(x)=x^4-3x^3+2$ ثم اوجد القيم القصوى المحلية وبين نوعها.

$f'(x) = 4x^3 - 9x^2$

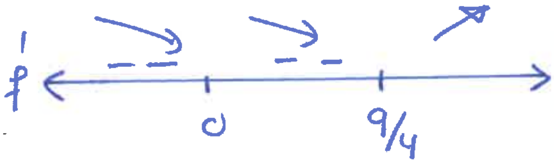
$f'(x) = 0$

$4x^3 - 9x^2 = 0$

$x^2(4x - 9) = 0$

$x = 0 , x = \frac{9}{4}$.

الاعداد الحرجة هي $\frac{9}{4} , 0$.



صغرى محلية عند $x = \frac{9}{4}$

لا يوجد عظمى محلية.

عند $x = 0$ مماس افقي

---

(1) اوجد الاعداد الحرجة للدالة $f(x)=e^{x^2-1}$ ثم اوجد القيم القصوى المحلية وبين نوعها.

$f'(x) = e^{x^2-1} \cdot 2x.$

$f'(x) = \frac{2x}{e^{x^2-1}}$

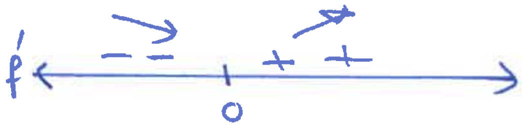
$f'(x) = 0 \Rightarrow$ البسط $= 0.$

$\Rightarrow x = 0$

$f'(x)$ غ.م $\Rightarrow e^{x^2-1} = 0$

لا يوجد حل

الاعداد الحرجة $x = 0$



صغرى محلية عند $x = 0$

---

(2) اوجد الاعداد الحرجة للدالة $f(x)=xe^{-2x}$ ثم اوجد القيم القصوى المحلية. وبين نوعها

الضرب

$f'(x) = 1 \cdot e^{-2x} + x\, e^{-x}(-2)$

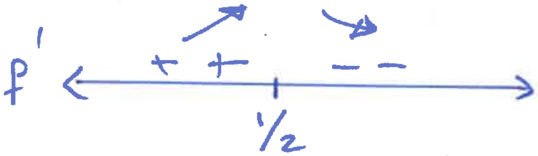
$= e^{-2x}(1 - 2x)$

$= \frac{1-2x}{e^{2x}}.$

$f'(x) = 0 \Rightarrow$ البسط $= 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

$f'(x)$ غ.م $\Rightarrow$ المقام $= 0 \Rightarrow$ لا يوجد حل

الاعداد الحرجة هي $x = \frac{1}{2}$



عظمى محلية عند $x = 1/2$

(1) اوجد الاعداد الحرجة للدالة $f(x)=x^2e^{-x}$ ثم اوجد القيم القصوى المحلية وبين نوعها.

$f'(x) = 2x\,e^{-x} + x^2\,e^{-x}(-1)$

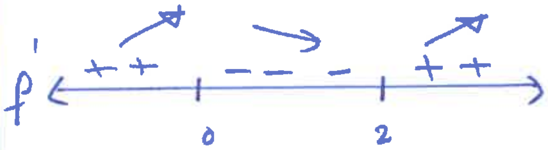
$= e^{-x}(2x-x^2)$

$= \dfrac{2x-x^2}{e^x}.$

$f'(x)=0 \Rightarrow 2x-x^2=0 \Rightarrow x=0,2$

$f'(x)$ غ.م $\Rightarrow e^x=0$ لايوجد حل

الاعداد الحرجة هي $x=0,2$



صغرى محلية عند $x=2$

عظمى محلية عند $x=0$

(2) اوجد الاعداد الحرجة للدالة $f(x)=(x^2+x+0.45)e^{-2x}$ ثم اوجد القيم القصوى المحلية وبين نوعها.

$f'(x) = (2x+1)e^{-2x} + (x^2+x+0.45)\,e^{-2x}(-2)$

$= e^{-2x}\left[2x+1-2x^2-2x-0.9\right]$

$= e^{-2x}\left[-2x^2+0.1\right]$

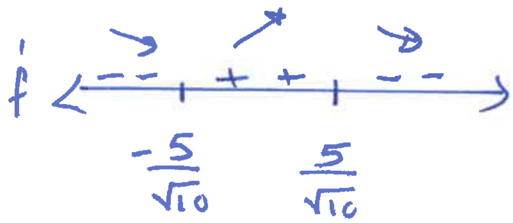
$= \dfrac{0.1-2x^2}{e^{2x}},$

$f'(x)=0 \Rightarrow 0.1-2x^2=0$

$x = \dfrac{-\sqrt5}{10}$ و $\dfrac{\sqrt5}{10}$

$f'(x)$ غ.م $\Rightarrow e^{2x}=0$ لايوجد حل

الاعداد الحرجة $x=\pm\dfrac{\sqrt5}{10}$

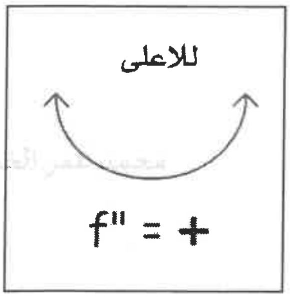


عظمى محلية عند $x=\dfrac{\sqrt{5}}{10}$

صغرى محلية عند $x=-\dfrac{5}{\sqrt{10}}$

## التقعر

الرسم البياني للدالة $y = f(x)$ يكون مقعراً للاعلى على الفترة المفتوحة $I$

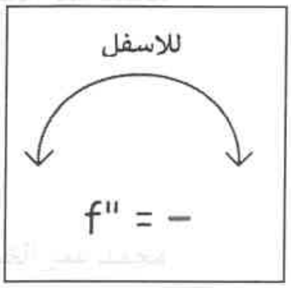


(1) اذا كان منحنى الدالة يقع فوق جميع مماسته.

او (2) اذا كان $y' = f'(x)$ دالة متزايدة على الفترة المفتوحة $I$.

او (3) اذا كان $\underline{f''(x) > 0}$ على الفترة المفتوحة $I$.

الرسم البياني للدالة $y = f(x)$ يكون مقعراً للاسفل على الفترة المفتوحة $I$



(1) اذا كان منحنى الدالة يقع تحت جميع مماسته.

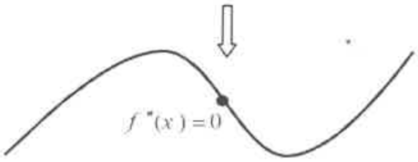
او (2) اذا كان $y' = f'(x)$ دالة متناقصة على الفترة المفتوحة $I$.

او (3) اذا كان $\underline{f''(x) < 0}$ على الفترة المفتوحة $I$.

## نقطة الانعطاف

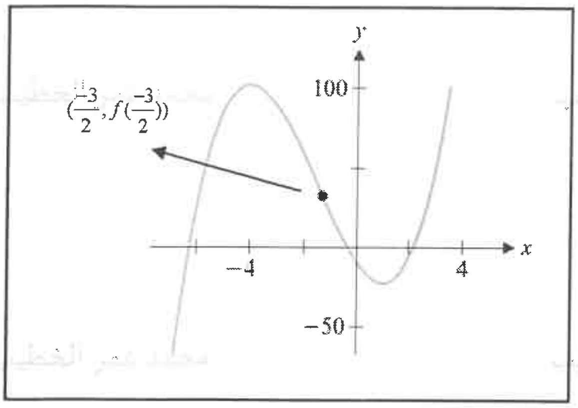
اذا كانت $f(x)$ دالة متصلة على الفترة المفتوحة $(a,b)$ والتمثيل البياني يغير اتجاه التقعر عند النقطة $c \in (a,b)$ فأن النقطة $(c, f(c))$ تسمى نقطة انعطاف.

ملاحظة: اذا كانت الدالة غير متصلة عند $x = c$ فانها لا تعتبر نقطة انقلاب (انعطاف)



## فترات التقعر للدالة (بيانياً)

(1)اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة $f$ في الاجابة عن الأسئلة التالية



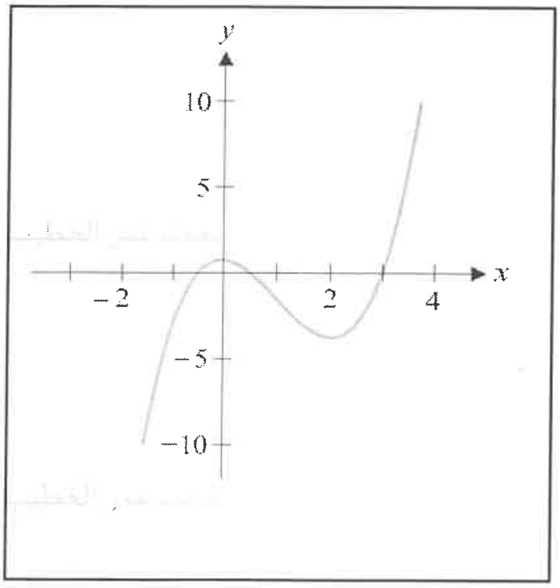
(أ) فترة التقعر للاسفل هي $(-\infty, \frac{-3}{2})$

(ب) فترة التقعر للاعلى هي $(\frac{3}{2}, \infty)$

(ج) نقطة الانقلاب هي $(\frac{-3}{2}, f(\frac{-3}{2}))$.

---

(2)اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة $f$ في الاجابة عن الأسئلة التالية



(أ) اوجد الاعداد الحرجة للدالة 0 و 2

(ب) اوجد فترة التناقص للدالة (0 و 2)

(ج) اوجد فترات التزايد للدالة $(-\infty, 0)$ و $(2, \infty)$

(د) اوجد القيم القصوى المحلية وبين نوعها.

عظمى محلية عند $x = 0$

صغرى محلية عند $x = 2$

(هـ) اوجد فترة التقعر للاسفل. $(-\infty$ و $-1)$

(و) اوجد فترات التقعر للاعلى. $(1$ و $\infty)$

(ي) اوجد نقاط الانعطاف للدالة $(1$ و $-1)$

# فترات التقعر للدالة (تحليلياً)

(1) ايجاد جميع النقاط التي تجعل المشتقة الثانية تساوي صفر او غير موجودة وتعينها على خط الاعداد.

(2) دراسة اشارة المشتقة الثانية $f''$.

(3) تحديد سلوك الدالة $f$ من خلال اشارة الدالة $f''$.

أ) اذا كانت اشارة الدالة $f''$ موجبة ( + )على فترة فان الدالة $f$ تكون مقعرة للاعلى على هذه الفترة.

ب) اذا كانت اشارة الدالة $f''$ سالبة ( - )على فترة فان الدالة $f$ تكون مقعرة للاسفل على هذه الفترة.

**(1) اوجد فترات التقعر للاعلى وفترات التقعر للاسفل و نقاط الانعطاف للدالة**

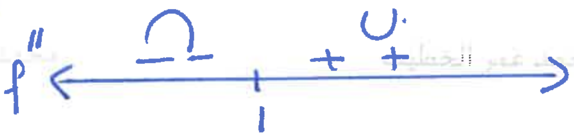
$$f(x)=x^3-3x^2+4x-1$$

$f'(x) = 3x^2-6x+4$

$f''(x) = 6x-6$

$f''(x) = 0$

$6x-6=0 \Rightarrow x=1$



للاسفل $(-\infty ,1)$

للاعلى $(1, \infty)$

نقطة الإنعطاف $(1,1)$

**(2) اوجد فترات التقعر للاعلى وفترات التقعر للاسفل و نقاط الانعطاف للدالة**

$$f(x)=x^4-6x^2+2x+3$$

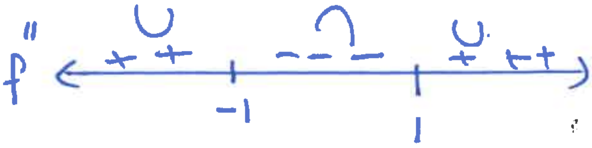
$f'(x) = 4x^3-12x+2$

$f''(x) = 12x^2-12$

$f''(x) = 0$

$12x^2-12=0$

$x=-1 \ , \ x=1$



للاعلى $(-\infty,-1) , (1,\infty)$

للاسفل $(-1,1)$

نقاط الإنعطاف هي

$(-1,-4) \ , \ (1,0)$

(1) اوجد فترات التقعر للاعلى وفترات التقعر للاسفل و نقاط الانعطاف للدالة

$$f(x)=x+\frac{1}{x} = x + x^{-1}$$

$D = R/\{0\}$.

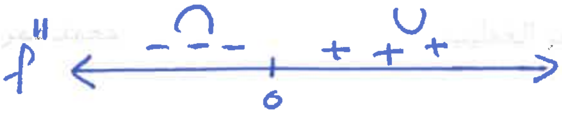
$f'(x) = 1 - x^{-2}$.

$f''(x) = 2x^{-3}$.

$= \frac{2}{x^3}$.

$f''(x) = 0$ لايوجد حل

$f''(x)$ م.غ $\Rightarrow x = 0$



$(-\infty, 0)$ للاسفل

$(0, \infty)$ للاعلى

لايوجد نقاط انعطاف

(2) اوجد فترات التقعر للاعلى وفترات التقعر للاسفل و نقاط الانعطاف للدالة

$$f(x)=x+3(1-x)^{1/3}$$

$f'(x) = 1 + (1-x)^{-2/3}$.

$f''(x) = -\frac{2}{3}(1-x)^{-5/3}$.

$= \frac{-2}{3(1-x)^{5/3}}$.

$f''(x) = 0 \Rightarrow$ لايوجد حل

$f''(x)$ م.غ $\rightarrow x = 1$

$(-\infty, 1)$ للاسفل

$(1, \infty)$ للاعلى

$(1, 1)$ نقطة الانعطاف

(3) اوجد فترات التقعر للاعلى وفترات التقعر للاسفل و نقاط الانعطاف للدالة

$$f(x)=\sin x-\cos x$$

$f'(x) = \cos x + \sin x$

$f''(x) = -\sin x + \cos x$.

$f''(x) = 0$

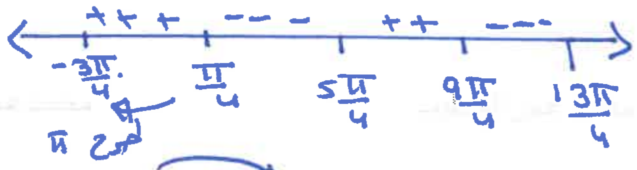
$-\sin x + \cos x = 0$

$-\sin x = -\cos x$

بالقسمة ع $-\cos x$.

$\tan x = 1$

$$x \left\langle \frac{\pi}{4} \right. \begin{matrix} Q_1 \rightarrow \frac{\pi}{4} \\ Q_3 \rightarrow \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}. \end{matrix}$$



$\left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right) \pm 2n\pi$. للاسفل

$\left(\frac{5\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}\right) \pm 2n\pi$. للاعلى

نقاط الانعطاف

$x = \frac{\pi}{4} + n\pi$. $n \in Z$.

# الوحدة الرابعة : تطبيقات الاشتقاق /// الدرس السادس : رسم المنحنيات

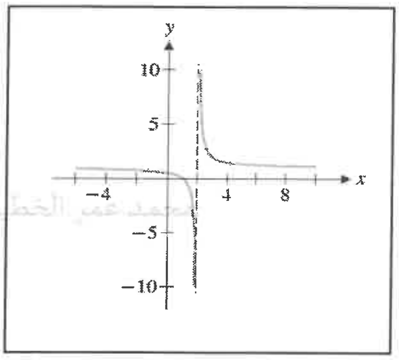
## خطوط التقارب للدوال النسبية

$$f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}$$

(1) يجب كتابة الدالة النسبية في ابسط صورة قبل ايجاد خطوط التقارب واذا تم اختصار احد العوامل وليكن $x-a$ واختفى من المقام فان للدالة فجوة عند $x=a$ وليس خط تقارب رأسي

$x-a$ عامل غير مكرر

(2) يكون للدالة النسبية خطوط تقارب رأسية عند اصفار المقام وتكون معادلتة $x=a$



(3) يكون للدالة النسبية خطوط تقارب افقية اذا كانت درجة البسط اصغر من او تساوي درجة المقام وتكون معادلتة $y=a$

(4) يكون للدالة النسبية خط تقارب مائل اذا كانت درجة البسط اكبر من درجة المقام . وتكون معادلتة $y=a\,x+b$ ونستخدم القسمة المطولة او القسمة التركيبية لايجادة

لا يجوز ان يكون للدالة خط تقارب افقي ومائل في نفس الوقت

### ملاحظات لرسم الدوال النسبية

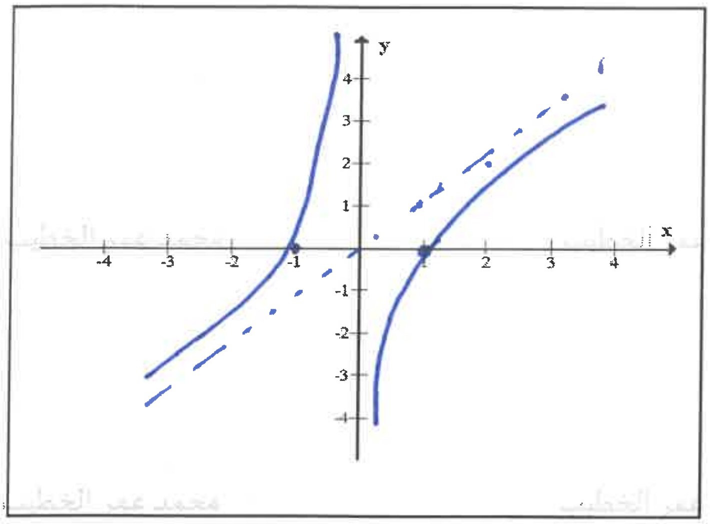
المميزات المهمة .......... تحليل الدالة

نقاط التقاطع مع المحاور

خطوط التقارب والفجوات

اشارة الدالة الاصلية

**(1)** ارسم منحنى الدالة $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x}$



$D = R / \{0\}.$

خطوط التقارب الرأسية $x=0$

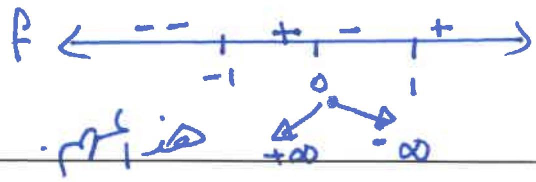
خطوط التقارب الافقية لا يوجد

خطوط التقارب المائلة $y=x$.

$$\begin{array}{r|l} & x \\ \hline x & x^2-1 \\ & \ominus x^2 \\ \hline & -1 \end{array}$$

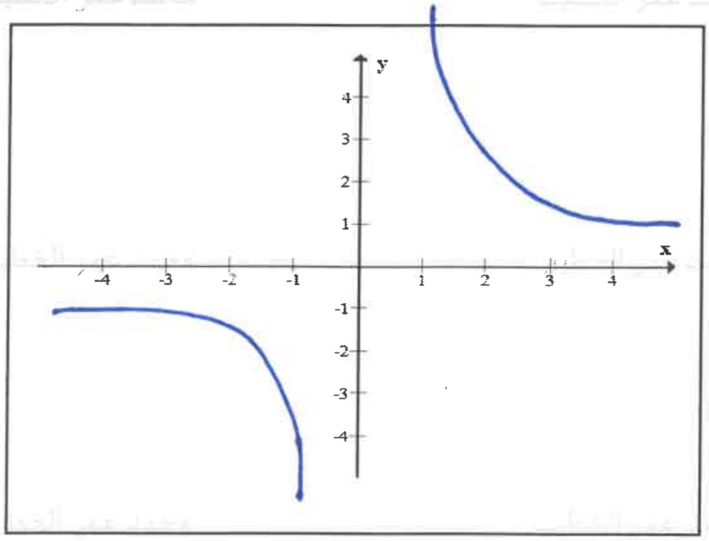
اصفار الدالة $x=\pm1$ (اصفار البسط)

اشارة الدالة $f$ (الاصلية) عليها اصفار البسط، المقام



هذا مهم.

**(2)** ارسم منحنى الدالة $f(x)=\dfrac{x^2+4}{x^3}$



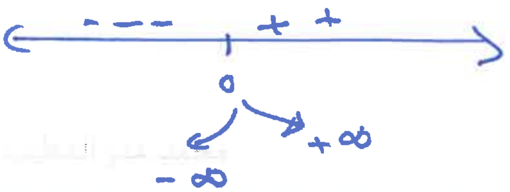
$D = R / \{0\}$

الرأسية $x=0$

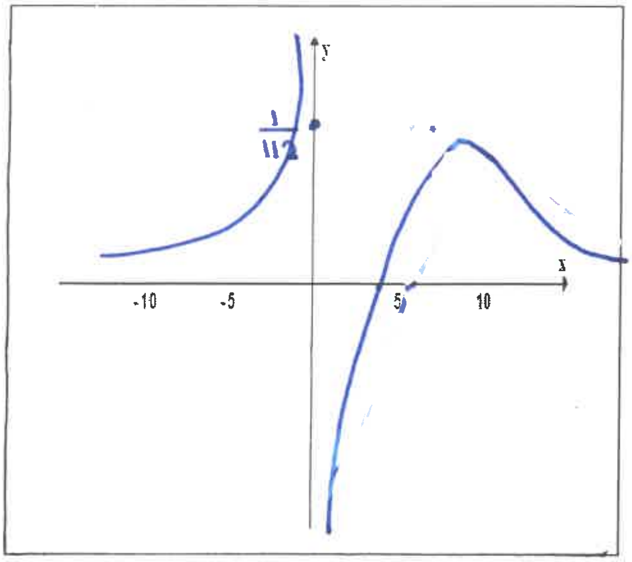
الافقية $y=0$

اصفار الدالة (لا يوجد)

اشارة $f$



(1) ارسم منحنى الدالة $f(x)=\dfrac{x-4}{x^3}$



الرأسية $x=0$

الافقيه $y=0$

اصفار البسط $x=4$ .

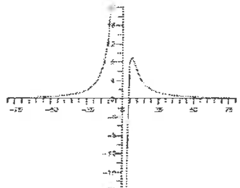
اشاره الداله $f$: $++$ | $--$ | ; $0$, $4$

$\infty \leftarrow 0 \rightarrow -\infty$

$$f'(x)=\frac{1\cdot x^3-(x-4)3x^2}{x^6}$$

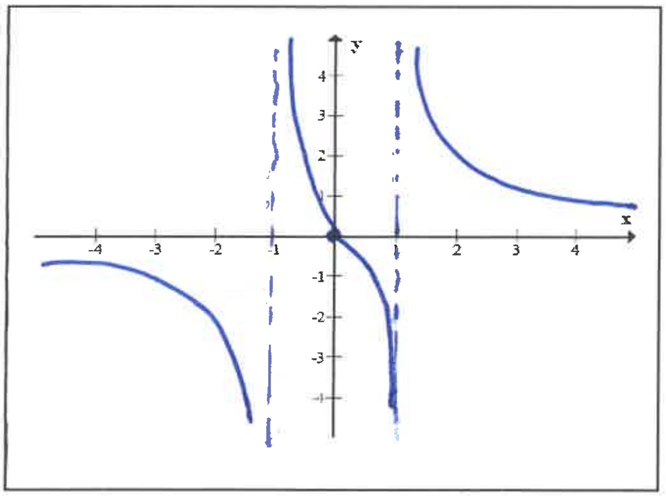
$$=\frac{-2x+12}{x^4}$$

$f'$: $++$ | $++$ | $--$ ; $0$, $6$ ; $\nearrow$ $\nearrow$ $\searrow$



(ضروري لان الداله تقطع محور التقارب الافقي)

(2) ارسم منحنى الدالة $f(x)=\dfrac{2x}{x^2-1}$



الرأسيه $x=\pm 1$

الافقية $y=0$

اصفار البسط $x=0$ .

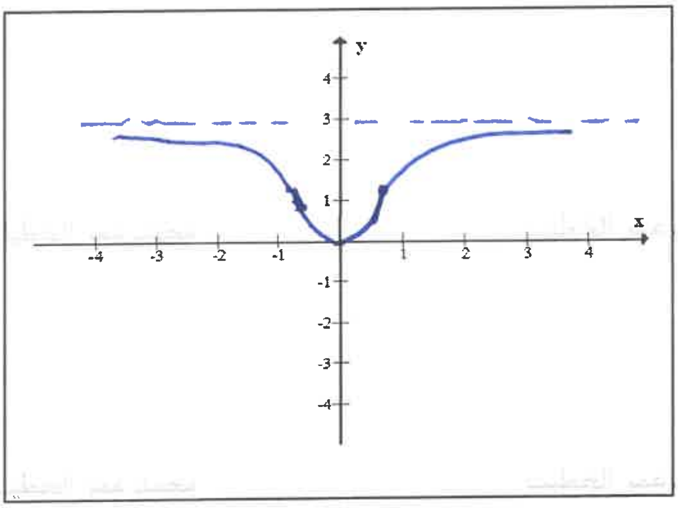
اشاره $f$

$---$ | $++$ | $---$ | $++$ ; $-1$, $0$, $1$

$-\infty \leftarrow -1 \rightarrow \infty$ ; $-\infty \leftarrow 1 \rightarrow \infty$

غير مهم الباقي .

**(1)** ارسم منحنى الدالة $f(x)=\frac{3x^2}{x^2+1}$



الرأسي لا يوجد

الأفقي $y=3$

أصفار الدالة $x=0$

اشارة الدالة

$f'$ + + + | + + +
0

دائماً موجبة --- فوق محور $x$.

$$f'(x)=\frac{6x(x^2+1)-3x^2(2x)}{(x^2+1)^2}$$

$$=\frac{6x^3+6x-6x^3}{(x^2+1)^2}=\frac{6x}{(x^2+1)^2}$$

$f'(x)=0 \Rightarrow 6x=0 \Rightarrow x=0$

$f'$ − − − | + + +
0

$$f''(x)=\frac{6(x^2+1)^2-6x\cdot 2(x^2+1)(2x)}{(x^2+1)^4}=$$

$$=\frac{(x+1)\left[6(x^2+1)-24x^2\right]}{(x^2+1)^4}=\frac{6-18x^2}{(x^2+1)^3}$$

$f''(x)=0 \Rightarrow 6-18x^2=0 \Rightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt3}$

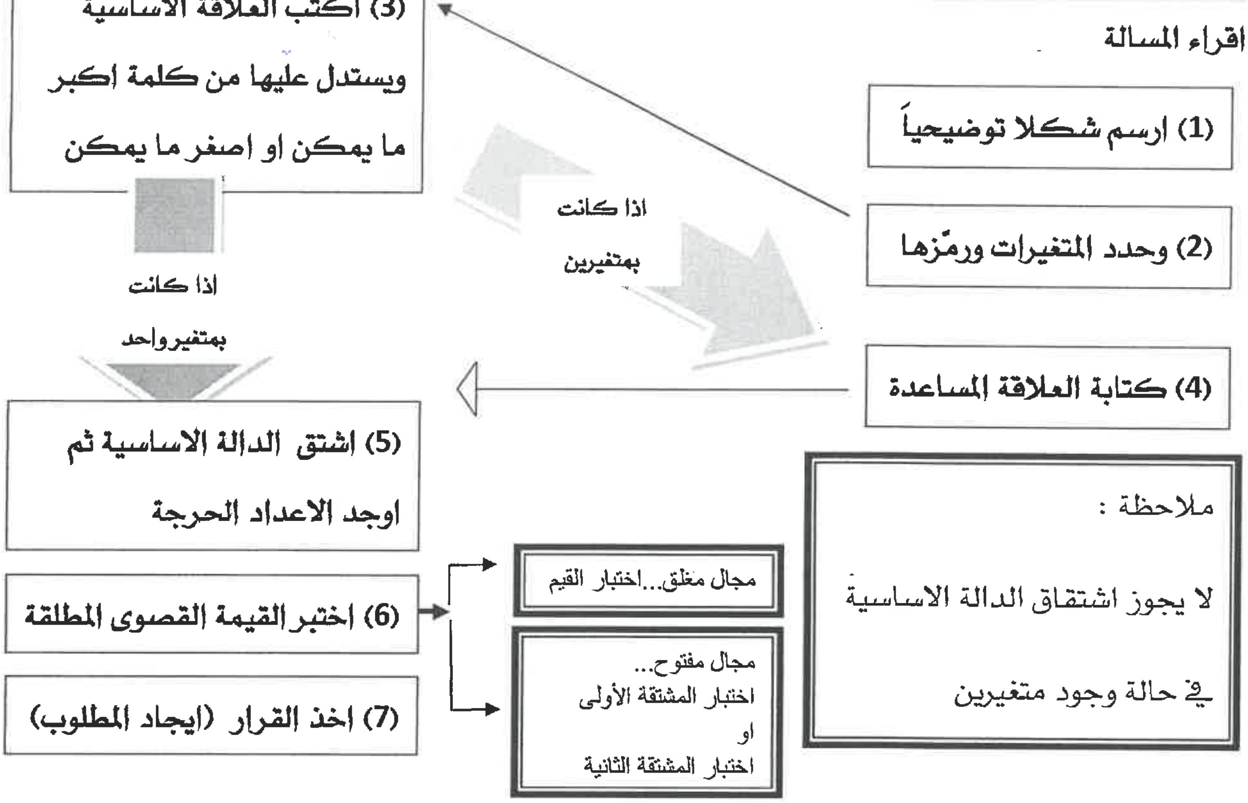
$f''$ ∩ − | + ∪ + + | − ∪
$-1/\sqrt3$ $1/\sqrt3$

الخط المزدوج

− − − | + + + +
− − − $-1/\sqrt3$ + + 0 + + $1/\sqrt3$ − − −

* عندما يكون السؤال ضع دائرة ... لا يحتاج هذا الحل

## خطوات حل مسائل القيم المثلى



اقراء المسالة

(1) ارسم شكلا توضيحياً

(2) وحدد المتغيرات ورمّزها

اذا كانت بمتغيرين

(3) اكتب العلاقة الاساسية ويستدل عليها من كلمة اكبر ما يمكن او اصغر ما يمكن

اذا كانت بمتغير واحد

(4) كتابة العلاقة المساعدة

(5) اشتق الدالة الاساسية ثم اوجد الاعداد الحرجة

(6) اختبر القيمة القصوى المطلقة

مجال مغلق...اختبار القيم

مجال مفتوح...
اختبار المشتقة الأولى
او
اختبار المشتقة الثانية

(7) اخذ القرار (ايجاد المطلوب)

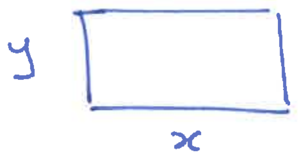
ملاحظة :

لا يجوز اشتقاق الدالة الاساسية في حالة وجود متغيرين

كلامات تدل على ان السؤال ...على القيم المثلى مثل .... اكبرما يمكن ، اصغر ما يمكن ، اقصر ، اطول.....

---

مزرعة مستطيلة الشكل تقع على حافة نهر مستقيم، يراد وضع سياج طوله $96\,ft$ على الجوانب الثلاث الاخرى ما اكبر مساحة يمكن احاطتها.



$2x+y=96$

$y=96-2x$

$0 \le x \le 48$

$A = xy.$

$= x(96-2x)$

$= 96x-2x^2.$

$A' = 96-4x.$

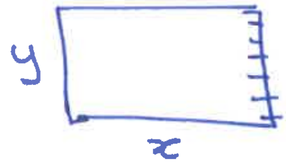
$A' = 0 \rightarrow x = 24.$

$A(0) = 0$

$A(48) = 0$

$A(24) = 1152$ . اكبر مساحة

(1) قطعة ارض مستطيلة الشكل مساحتها $1800\,ft^2$ ، اوجد طول اصغر سياج ممكن احاطة الارض به من الجوانب الثلاث فقط



$xy = 1800$

$y = \frac{1800}{x}$

$0 < x$.

$$P = 2x + y$$

$$= 2x + \frac{1800}{x}$$

$$P' = 2 - \frac{1800}{x^2}$$

$$P' = 0 \Rightarrow 2 = \frac{1800}{x^2}$$

$$2x^2 = 1800$$

$$x^2 = 900$$

$$x = -30 \quad , \quad x = 30$$

مرفوض

قيمة صغرى محلية وحيده عند $x=30$ $\Rightarrow$ $P = 2(30) + \frac{1800}{30} = 120f$

(2) يراد عمل سياج حول اسطبل للخيول مستطيل الشكل ومقسوم الى حضرتين متلاصقين ومتطابقين في المساحة اذا كان طول السياج $120\ ft$ اوجد ابعاد الاسطبل كامل لتكون مساحة اكبر ما يمكن

$4x + 3y = 120$

$y = \frac{120 - 4x}{3}$

$0 \leqslant x \leq 3.$

$$A = 2xy.$$

$$= 2x\left(\frac{120-4x}{3}\right) = \frac{2}{3}x(120-4x)$$

$$= \frac{2}{3}(120x - 4x^2)$$

$$A' = \frac{2}{3}(120 - 8x)$$

$$A' = 0 \Rightarrow x = 15$$

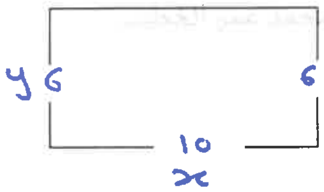
$A(0) = 0$

$A(30) = 0$

$A(15) = 600$ قيمة عظمى مطلقة

$2x.$ ← $30, 20$ الابعاد هي

(1) صالة عرض مستطيلة الشكل مساحتها $800\ ft^2$، بها ثلاث ابواب من ثلاث جوانب عرض الباب الأول $10\,ft$، ومن الجهتين الباقية بابيين بعرض $6\,ft$ لكل منهم ، اوجد طول اصغر جدار ممكن احاطة المعرض به من الجوانب الثلاث (التي تحتوي الابواب )



$xy = 800$

$y = \frac{800}{x}$

$0 < x$ .

$P = x - 10 + y - 6 + y - 6$

$= x + 2y - 22$

$P = x + 2 \cdot \frac{800}{x} - 22 = x + \frac{1600}{x} - 22$ .

$P' = 1 - \frac{1600}{x2}$

$P' = 0 \rightarrow 1 = \frac{1600}{x2} \Rightarrow x = -40, 40$

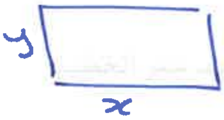
مرفوض

$P = 40 + \frac{1600}{40} - 22 . = 58\ ft$ .

اصغر سياج

---

(2) بين ان المستطيل ذي المساحة العظمى الذي محيطة قيمة ثابتة $p$ يكون مربع طول ضلعة $\frac{p}{4}$ ومساحتة $A = \frac{p^2}{16}$ .



$2x + 2y = P$ .

$x + y = \frac{P}{2}$

$y = \frac{P}{2} - x$ .

∴ الشكل مربع طول ضلعه $\frac{P}{4}$

$A = \frac{P}{4}\left(\frac{P}{2} - \frac{P}{4}\right)$

$= \frac{P}{4}\left(\frac{P}{4}\right)$

$= \frac{P}{16}$ #

$A = xy$

$= x\left(\frac{P}{2} - x\right)$

$= \frac{P}{2}x - x^2$

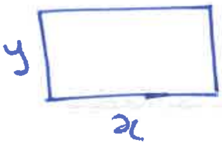
$A' = \frac{P}{2} - 2x$ .

$A' = 0 \Rightarrow \frac{P}{2} - 2x = 0$

$x = \frac{P}{4}$ .

---

(3) بين ان المستطيل ذي المحيط الاصغر ومساحتة قيمة ثاية $A$ يكون مربع طول ضلعة $\sqrt{A}$ ومحيطة $4\sqrt{A}$ .



$xy = A$

$y = \frac{A}{x}$

$x = -\sqrt{A}\ ,\ \sqrt{A}$

مرفوض

اصغر محيط عندما يكون الشكل مربع طول ضلعه $\sqrt{A}$

$P = 2\sqrt{A} + \frac{2A}{\sqrt{A}}$

$= 4\sqrt{A}$ #

$P = 2x + 2y$

$= 2x + 2 \cdot \frac{A}{x}$ .

$= 2x + \frac{2A}{x}$

$P' = 2 - \frac{2A}{x2}$ .

$P' = 0 \Rightarrow 2 = \frac{2A}{x2}$

$x^2 = A$

(1) يراد عمل صندوق على شكل شبه مكعب بدون غطاء من ورقة مربعة الشكل طول ضلها $12in$ وذلك بقطع 4 مربعات متطابقة عند الرؤوس، اوجد اكبر حجم للصندوق.

$ح = (12-2x)(12-2x)x$

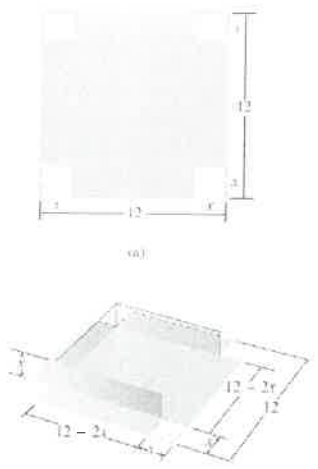
$= (12-2x)^2 x$

$= (144-48x+4x^2)x$

$= 4x^3-48x^2+144x.$

$ح' = 12x^2-96x+144$

$ح' = 0 \Rightarrow x = 2, \ x = 6.$



(a)

$0 \leq x \leq 6$

$ح(0) = 0$

$ح(6) = 0$

$ح(2) = 128$ اكبر حجم

---

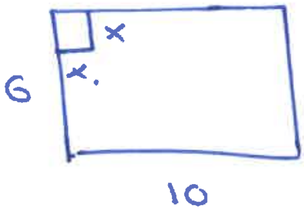
(2) يراد عمل صندوق على شكل شبه مكعب بدون غطاء من ورق مقوى مستطيل الشكل طول ضلها $10in$ وعرضها $6in$ وذلك بقطع 4 مربعات متطابقة بطول ضلع $x$ عند الرؤوس، اوجد قيمة $x$ التي تحقق القيمة العظمى لحجم للصندوق

$ح = (10-2x)(6-2x)x$

$= (10-2x)(6x-2x^2)$

$= 60x-20x^2-12x^2+4x^3.$

$= 4x^3-32x^2+60x.$



$ح' = 12x^2-64x+60.$

$0 \leq x \leq 6$

الاقل:

$ح' = 0$

$x = \frac{8+\sqrt{19}}{3} = 4.11$ مرفوض

$x = \frac{8-\sqrt{19}}{3} = 1.21$ ✓

# الوحدة الرابعة : تطبيقات الاشتقاق /// الدرس الثامن : المعدلات المرتبطة

## خطوات حل مسائل المعدلات المرتبطة بالزمن

اقراء المسألة

(1) ارسم شكلا توضيحياً

(2) حدد المتغيرات ورمّزها

(3) اكتب المعطيات والمطلوب

(4) اكتب العلاقة الاساسية التي تربط المعطيات بالمطلوب

(5) اشتق الدالة الاساسية ضمنياً بالنسبة للزمن

اشتق كل المتغيرات بالنسبة للزمن

(6) عوض المعطيات لايجاد المطلوب

ملاحظة :

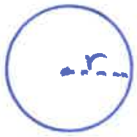
(1) يجوز اشتقاق الدالة الاساسية في حالة وجود متغيرين بشرط توفر معلومات عن المتغيرات او ابحث عن علاقة مساعدة للتخلص من احدهما

(2) اذا كانت قيمة المتغير تزيد فان معدل تغيرة موجب

(3) اذا كانت قيمة المتغير تقل فان معدل تغيرة سالب

---

ينتشر حريق في احدى الغابات بشكل دائري ، ويتزايد طول نصف قطر الحريق بمعدل $5\,ft/\min$ اوجد معدل التغير في مساحة المنطقة المحترقة عندما يكون نصف قطر الحريق $200\,ft$.



$$\frac{dr}{dt} = +5$$

$$\left.\frac{dA}{dt}\right|_{r=200} = ??$$

$$A = \pi r^2$$

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt}$$

$$= 2\pi(200)\cdot 5$$

$$= 2000\pi$$

$$= 6283\ ft^2/min$$

(1) سلم طوله 10 $ft$ ، موضوع احد طرفية على جدار منزل والطرف الأخر موضوع على الارض، اذا تم سحب الجزء السفلي من السلم بمعدل 3 $ft/s$ بعيداً عن الحائط

اوجد سرعة انزلاق الطرف العلوي للسلم عند اللحظة التي يكون فيها الطرف السفلي على بعد 6 $ft$ من الحائط.

$$y = \sqrt{100-x^2}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{-2x \cdot \frac{dx}{dt}}{2\sqrt{100-x^2}}$$

$$= \frac{-6(3)}{\sqrt{100-6^2}}$$

$$= -2.25 \text{ ft/s.}$$

$$\frac{dx}{dt} = +3$$

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{x=6} = ??$$

---

(2) سلم طوله 10 $ft$ ، موضوع احد طرفية على جدار منزل والطرف الأخر موضوع على الارض، اذا تم سحب الجزء السفلي من السلم بمعدل 3 $ft/s$ بعيداً عن الحائط

اوجد معدل تغير الزاوية بين السلم والخط الافقي عندما يبعد اسفل السلم 6 $ft$ من الحائط.

اعتبره سؤال جديد .

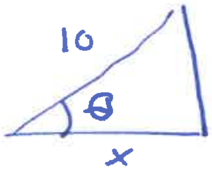
$$\cos\theta = \frac{x}{10}$$

$$-\sin\theta \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{10} \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$-\frac{8}{10} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{10}(3)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{-3}{8}.$$

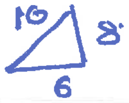
rad/s.



$$\frac{dx}{dt} = +3.$$

$$\left.\frac{d\theta}{dt}\right|_{x=6} = ??$$

* عندما $x=6$ نرسم مثلث جديد



* تحقق من السؤال بأخذ $\cos^{-1}$ للطرفين .

قطرة ماء كروية تتبخر بمعدل $1cm^3/\min$ وتبقى تحافظ على شكلها

(أ) اوجد معدل تناقص نصف قطر قطرة الماء عند اللحظة التي يكون فيها نصف القطر $0.2\ cm$.

$$\frac{dv}{dt} = -1$$

$$\left.\frac{dr}{dt}\right|_{r=0.2} = ?$$

$$v = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

$$\frac{dv}{dt} = 4\pi r^2 \cdot \frac{dr}{dt}.$$

$$-1 = 4\pi(0.2)^2 \cdot \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{25}{4\pi}\ cm/min.$$

(ب) اوجد سرعة تناقص المساحة السطحية لقطرة الماء عند اللحظة التي يكون فيها نصف القطر $0.2\ cm$.

$$S = 4\pi r^2$$

$$\frac{ds}{dt} = 8\pi r \frac{dr}{dt}.$$

$$= 8\pi(0.2) \cdot \frac{-25}{4\pi}.$$

$$= -10\ cm^2/min.$$

(ج) اذا كان معدل تبخر حجم قطرة الماء يتناسب مع المساحة السطحية لها ، فبين ان معدل تغير نصف القطر ثابت عند اي لحظة

بالاختصار ، يكون

$$\frac{dr}{dt} = k.$$

ثابت .

أي معدل تغير نصف القطر ثابت .

$$\frac{dv}{dt} \propto S.$$

$$\frac{dv}{dt} = k\,S$$

حيث k ثابت التناسب

اشتقاق

$$\frac{4}{3}\pi \cdot 3r^2 \frac{dr}{dt} = 4\pi r^2.$$

(1) يتسرب النفط من ناقلة بحرية بمعدل $20m^3/h$ وينتشر بشكل دائري بسمك $2cm$، اوجد معدل تزايد نصف قطر بقعة النفط عندما يكون نصف القطر $10m$ .

* العرض الرأسي يساوي ارتفاع هو .
اسطوانة

$$\frac{dv}{dt} = +20$$

$$\left.\frac{dr}{dt}\right|_{r=10} = ??$$

$$v = \pi r^2 \cdot \left(\frac{2}{100}\right)$$

ارتفاع الاسطوانة بالمتر

$$\frac{dv}{dt} = \frac{2}{100}\pi r \frac{dr}{dt}$$

$$20 = \frac{2}{100}\pi(10)\cdot\frac{dr}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dr}{dt} = \frac{1}{2\pi} \text{ m/h.}$$

---

(2) يتسرب النفط من ناقلة بحرية بمعدل $90gl/\min$ وينتشر بشكل دائري بسمك $\frac{1}{8}''$، اوجد معدل تزايد نصف قطر بقعة النفط عندما يكون نصف القطر $100ft$ .

$7.5 = 1ft^3$ جالون

$$\frac{1}{8}'' = \frac{1}{8}in = \frac{1}{8}\times\frac{1}{12}ft = \frac{1}{96}'$$

$7.5g \rightarrow 1ft^3$

$90g \rightarrow ??$

$$?? = \frac{90}{7.5} = 12.$$

$$\frac{dv}{dt} = +12$$

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{r=100} = ??$$

$$v = \pi r^2 \cdot \left(\frac{1}{96}\right)$$

ارتفاع الاسطوانة بالقدم

$$\frac{dv}{dt} = \frac{2}{96}\pi r \frac{dr}{dt}$$

$$12 = \frac{2}{96}\pi(100)\frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{144}{25\pi} \text{ ft/min.}$$

# الوحدة الرابعة: تطبيقات الاشتقاق /// الدرس التاسع : معدلات التغير في الاقتصاد والعلوم

## الاقتصاد

(1) تكلفة إنتاج $x$ قطعة هو $C(x)$ وهي دالة تراكمية

(2) التكلفة الفعلية لانتاج القطعة رقم $x_n$ هو $C(x_n)-C(x_{n-1})$

(3) التكلفة الحدية لانتاج القطعة رقم $x_n$ هو $C'(x_n)$

وهي دالة حدية اي تحسب قيمة التكلفة عند قطعة واحدة فقط وليست تراكمية

ملاحظة : عندما يكون الانتاج كبير فان التكلفة العفعلية لانتاج القطعة رقم $x_n$ تقريبا يساوي التكلفة الحدية

(4) متوسط التكلفة للقطعة الواحدة يساوي $\overline{C}(x)=\dfrac{C(x)}{x}$

أذا كانت دالة التكلفة لأنتاج $x$ لعبة تعطى بالعلاقة $C(x)=0.02x^2+2x+4000$

(أ) اوجد تكلفة انتاج اول 100 قطعة

$$C(100)=0.02(100)^2+2(100)+4000$$
$$=4400$$

(ب) اوجد تكلفة انتاج اول 1000 قطعة

$$C(1000)=0.02(1000)^2+2(1000)+4000$$
$$=26000.$$

أذا كانت دالة التكلفة لأنتاج $x$ لعبة تعطى بالعلاقة $C(x)=0.02x^2+2x+4000$

(أ) اوجد التكلفة الفعلية لانتاج اللعبة رقم 100.

تكلفة انتاج لقطعة رقم ١٠٠ هو .

$$C(100) - C(99)$$

$$= 4400 - 4\ 394.02 = 5.98 .$$

---

(ب) اوجد التكلفة الحدية لانتاج اللعبة رقم 100.

$$c'(x) = 0.04x + 2 .$$

$$c'(100) = 0.04(100)+2$$

$$= 6 .$$

---

(ج) قارن بين التكلفة الفعلية لانتاج اللعبة رقم 100 والتكلفة الحدية لانتاج اللعبة رقم 100.

التكلفة الفعلية تساوي تقريباً التكلفة الحدية

عندما يكون الانتاج كبير .

---

(د) اوجد متوسط انتاج القطعة الواحدة عند انتاج 100 قطعة

$$\bar{C}(100) = \frac{C(100)}{100} = \frac{4400}{100} = 44 .$$

---

(هـ) اوجد متوسط انتاج القطعة الواحدة عند انتاج 1000 قطعة

$$\bar{C}(1000) = \frac{C(1000)}{1000} = \frac{26\ 000}{1000} = 26 .$$

---

(و) قارن بين متوسط تكلفة القطعة الواحدة عند انتاج 100 قطعة و 1000 ماذا تلاحظ.

كلما زاد الانتاج يقل متوسط التكلفة للقطعة الواحدة .

إنتهت الوحدة الرابعة بحمد الله ... واعتذر للجميع عن أي تقصير أو خطأ.

# الوحدة الخامسة : التكامل /// الدرس الأول : الدوال الاصلية

## قواعد التكامل

**ملاحظة: راجع قواعد الاشتقاق**

(1) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad , n \neq -1$

$* \int (a\,x+b)^n dx = \frac{(a\,x+b)^{n+1}}{a(n+1)} + c$

(2) $\int \sin x \, dx = -\cos x + c$

$* \int \sin(ax+b)\, dx = \frac{-\cos(ax+b)x}{a} + c$

(3) $\int \cos x \, dx = \sin x + c$

(4) $\int \sec^2 x \, dx = \tan x + c$

(5) $\int \csc^2 x \, dx = -\cot x + c$

(6) $\int \sec x \tan x \, dx = \sec x + c$

(7) $\int \csc x \cot x \, dx = -\csc x + c$

(8) $\int e^x \, dx = e^x + c$

$* \int e^{ax+b} \, dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + c$

(9) $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$

$* \int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$

(10) $\int \frac{1}{x^2+1} dx = \tan^{-1} x + c$

$* \int f'(x)\, e^{f(x)} \, dx = e^{f(x)} + c$

(11) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sin^{-1} x + c$

$* \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c$

(12) $\int \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}} dx = \sec^{-1} x + c$

## خواص التكامل غير المحدود

(1) $\int k\, f(x)\, dx = k \int f(x)\, dx$

(2) $\int (f(x) \pm g(x))\, dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx$

**يتوزع التكامل على**
**الجمع والطرح ولا يتوزع**
**على الضرب أوالقسمة**

اوجد التكاملات التالية (اوجد الدالة الاصلية)

(1) $\int 2\sec x \tan x \quad dx = 2\sec x + C$

---

(2) $\int \sec^2 x \quad dx = \tan x + C$

---

(3) $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} \quad dx = \int \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{\cos x} dx = \int \sec x \tan x \, dx$

$= \sec x + c.$

---

(4) $\int 4\frac{\cos x}{\sin^2 x} \quad dx = \int \frac{4}{\sin x} \cdot \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int 4\csc x \cot x \, dx$

$= -\csc x + c.$

---

(5) $\int \frac{\cos x}{\sin x} \quad dx = \ln|\sin x| + c.$

---

(6) $\int \frac{4x}{x^2+4} \quad dx = 2\int \frac{2x}{x^2+4} dx = 2\ln|x^2+4| + c.$

---

(7) $\int \frac{e^x}{e^x+3} \quad dx = \ln|e^x+3| + c.$

---

(8) $\int \frac{3}{4x^2+4} \quad dx = \frac{3}{4}\int \frac{1}{x^2+1} dx$

$= \frac{3}{4} \tan^{-1} x + c.$

## التطبيقات

الدالة المكانية ← دالة السرعة المتجهة ← دالة التسارع

بالاشتقاق

الدالة المكانية → دالة السرعة المتجهة → دالة التسارع

بالتكامل

**(1)** حدد الدالة المكانية $s(t)$ لدالة السرعة المتجهة $v(t)=3-12t$ والموقع الابتدائي $s(0)=3$

$v(t) = 3-12t \quad , \quad s(0)=3$

$S(t) = \int 3-12t \, dt$

$= 3t - 6t^2 + c.$

$S(0) = 3 \Rightarrow . \; C = 3.$

$S(t) = 3t - 6t^2 + 3 .$

---

**(2)** حدد الدالة المكانية $s(t)$ لدالة السرعة المتجهة $v(t)=3e^{-t}-2$ والموقع الابتدائي $s(0)=0$

$v(t) = 3e^{-t} - 2 . \quad , \quad S(0)=0.$

$S(t) = \int 3e^{-t} - 2 \; dt$

$= -3e^{-t} - 2t + c.$

$S(0) = 0 \Rightarrow -3 + C = 0$

$\Rightarrow C = 3 .$

$S(t) = -3e^{-t} - 2t + 3.$

حسب السؤال

**(1)** حدد الدالة المكانية $s(t)$ لدالة السرعة المتجهة $a(t) = 3\sin t + 1$ و والسرعة الأبتدائية $v(0) = 0$

الموقع الابتدائي $s(0) = 4$

$a(t) = 3\sin t + 1 \quad , \quad v(0) = 0 , \quad s(0) = 4.$

$v(t) = \int 3\sin t + 1 \, dt$

$= -3\cos t + t + c_1.$

$v(0) = 0 \rightarrow -3 + c_1 = 0 \Rightarrow c_1 = 3.$

$v(t) = -3\cos t + t + 3.$

$s(t) = \int -3\cos t + t + 3 \, dt$

$= -3\sin t + \frac{1}{2}t^2 + 3t + c_2.$

$s(0) = 4 \Rightarrow c_2 = 4.$

$\therefore s(t) = -3\sin t + \frac{1}{2}t^2 + 3t + 4.$

---

**(2)** حدد الدالة المكانية $s(t)$ لدالة السرعة المتجهة $a(t) = t^2 + 1$ و والسرعة الأبتدائية $v(0) = 4$

الموقع الابتدائي $s(0) = 0$

$a(t) = t^2 + 1 \quad , \quad v(0) = 4 , \quad s(0) = 0.$

$v(t) = \int t^2 + 1 \, dt$

$= \frac{1}{3}t^3 + t + c_1.$

$v(0) = 4 \rightarrow c_1 = 4$

$v(t) = \frac{1}{3}t^3 + t + 4.$

$s(t) = \int \frac{1}{3}t^3 + t + 4 \, dt$

$= \frac{1}{12}t^4 + \frac{1}{2}t^2 + 4t + c_2.$

$s(0) = 0 \rightarrow c_2 = 0$

$\therefore s'(t) = \frac{1}{12}t^4 + \frac{1}{2}t^2 + 4t$

# الوحدة الخامسة: التكـامل /// الدرس الثاني: المجموع والرمز سيجما

## رمز المجموع (سيجما) $\sum$

اذا كانت $n$ عدد صحيح موجب و $a,b,c$ اعداد حقيقية فان

(1) $\sum_{i=1}^{n} c = nc$

(2) $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

(3) $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

### خواص المجموع

(1) $\sum_{i=1}^{n} (ca_i \pm db_i) = c\sum_{i=1}^{n} a_i \pm d\sum_{i=1}^{n} b_i$

(2) $\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{m-1} a_i$

### اكتب كل الحدود واحسب المجموع

$$\sum_{i=6}^{10} (4i+2) = \overset{i=6}{\overset{\downarrow}{26}} + 30 + 34 + 38 + \overset{i=10}{\overset{\downarrow}{42}} = 170$$

$$\sum_{i=3}^{7} (i^2+i) = 12 + 20 + 30 + 42 + 56 = 160$$

$$\sum_{i=6}^{8} (i^2+2) = 38 + 51 + 66 = 155$$

---

### اوجد ناتج المجموع

$$\sum_{i=4}^{20} (i-3)(i+3) = \sum_{i=4}^{20} i^2 - 9 = \sum_{i=1}^{20} (i^2-9) - \sum_{i=1}^{3} (i^2-9)$$

$$= \sum_{i=1}^{20} i^2 - \sum_{i=1}^{20} 9 - \left[ \sum_{i=1}^{3} i^2 - \sum_{i=1}^{3} 9 \right]$$

$$= \frac{20(21)(41)}{6} - 9(20) - \left[ \frac{3(4)(7)}{6} - 9 \times 3 \right] = 2703$$

## مجموع ريمان لحساب المساحة

يسمى المقدار $\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x$ مجموع ريمان للدالة $f(x)$ على الفترة $[a,b]$ حيث $x_i$ هي عناصر التجزئة و $c_i$ هي نقاط القيم

**(1)** اعتمد على الجدول المجاور في تقدير قيمة مساحة المنطقة المحصورة بالمنحنى $f(x)$ ومحور $x$ على الفترة $[0,1]$ حيث قواعد القيم هي نقطة النهاية اليسرى

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | x |
| $x$ | 0.0 | 0.2 | 0.4 | 0.6 | 0.8 | 1.0 |
| $f(x)$ | 2.0 | 2.2 | 1.6 | 1.4 | 1.6 | 2.0 |

$A_L = \Delta x[f(0) + f(0.2) + f(0.4) + f(0.6) + f(0.8)]$

$= 0.2[2 + 2.2 + 1.6 + 1.4 + 1.6]$

$= 1.76.$

---

**(2)** اعتمد على الجدول المجاور في تقدير قيمة مساحة المنطقة المحصورة بالمنحنى $f(x)$ ومحور $x$ على الفترة $[1,2]$ حيث قواعد القيم هي نقطة النهاية اليمنى

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | x | | | | | |
| $x$ | 1.0 | 1.2 | 1.4 | 1.6 | 1.8 | 2.0 |
| $f(x)$ | 0.0 | 0.4 | 0.6 | 0.8 | 1.2 | 1.4 |

$A_R .= \Delta x[f(1.2) + f(1.4) + f(1.6) + f(1.8) + f(2)]$

$= 0.2[0.4 + 0.6 + 0.8 + 1.2 + 1.4]$

$= 0.88$

(1) اعتمد على الجدول المجاور في تقدير قيمة مساحة المنطقة المحصورة بالمنحنى $f(x)$ ومحور $x$ على الفترة $[0,0.8]$ حيث قواعد القيم هي نقطة النهاية اليسرى

| $x$ | 0.0 | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.6 | 0.7 | 0.8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 2.0 | 2.4 | 2.6 | 2.7 | 2.6 | 2.4 | 2.0 | 1.4 | 0.6 |

$$A_L = \Delta x[f(0) + f(0.1) + \cdots + f(0.7)]$$

$$= 0.1[2 + 2.4 + \cdots + 1.4]$$

$$= 1.81$$

---

(2) اعتمد على الجدول المجاور في تقدير قيمة مساحة المنطقة المحصورة بالمنحنى $f(x)$ ومحور $x$ على الفترة $[0,2.6]$ حيث قواعد القيم هي نقطة النهاية اليمنى

| $x$ | 1.0 | 1.2 | 1.4 | 1.6 | 1.8 | 2.0 | 2.2 | 2.4 | 2.6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 0.0 | 0.4 | 0.6 | 0.8 | 1.2 | 1.4 | 1.2 | 1.4 | 1.0 |

$$A_R = \Delta x[f(1.2) + f(1.4) + \cdots + f(2.6)]$$

$$= 0.2[0.4 + 0.6 + \cdots + 1]$$

$$= 1.60.$$

## المساحة

اذا كانت كل من $f(x)$ و $g(x)$ دوال متصلة على الفترة $[a,b]$ حيث $f(x)\geq g(x)$ فان المساحة المحصورة بين المنحنين تعطى بالتكامل

$$A=\int_a^b \left[\ \text{الدالة الأعلى} - \text{الدالة الأسفل}\ \right]\ dx$$

$$\int_a^b [f(x)-g(x)]\,dx$$

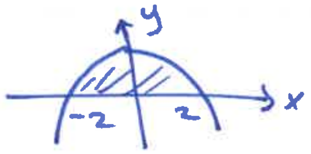
ملاحظة : يمكن اعتبار محور $x$ دالة معادلتها $y=0$

**(1)** اكتب التكامل الذي يعبر عن المساحة المحصورة فوق محور $x$ وتحت المنحنى $f(x)=4-x^2$

$$A=\int_{-2}^{2}(4-x^2)-(0)\ dx$$

$$=\int_{-2}^{2} 4-x^2\ dx$$

$$=$$



$4-x^2=0$

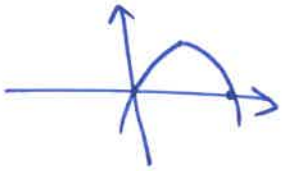
$x=\pm 2$

---

**(2)** اكتب التكامل الذي يعبر عن المساحة المحصورة فوف محور $x$ وتحت المنحنى $f(x)=4x-x^2$

$$A=\int_{0}^{4}(4x-x^2)-(0)\ dx$$

$$=\int_0^4 (4x-x^2)\ dx.$$

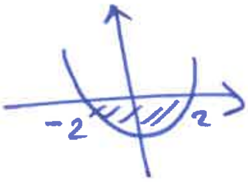


$4x-x^2=0$

$x=0,\ 4.$

(1) اكتب التكامل الذي يعبر عن المساحة المحصورة تحت محور $x$ وفوق المنحنى $f(x)=x^2-4$

$$A = \int_{-2}^{2} (0)-(x^2-4)\,dx$$



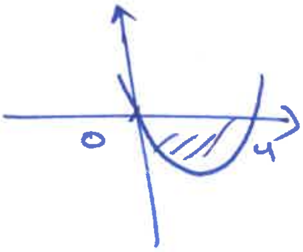
$$= \int_{-2}^{2} -(x^2-4)\,dx$$

$$= \int_{-2}^{2} 4-x^2\,dx\,.$$

---

(2) اكتب التكامل الذي يعبر عن المساحة المحصورة تحت محور $x$ وفوق المنحنى $f(x)=x^2-4x$

$$A = \int_{0}^{4} 0-(x^2-4x)\,dx$$



$$= \int_{0}^{4} -(x^2-4x)\,dx$$

$$= \int_{0}^{4} 4x-x^2\,dx\,.$$

## القيمة المتوسطة للدالة

اذا كانت الدالة $f$ قابلة للتكامل على الفترة $[a,b]$ فان القيمة المتوسطة للدالة $f$ تساوي

$$f_{ave}=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \qquad ,f(c)=f_{ave}$$

**(1)** اوجد القيمة المتوسطة للدالة $f(x)=2x+1$ على الفترة $[0,4]$ ثم اوجد قيمة $c$ التي تحقق النظرية

$$f_{ave}=\frac{1}{4-0}\int_0^4 (2x+1)dx$$

$$=\frac{1}{4}\left[x^2+x\right]_0^4$$

$$=5.$$

$$f(c)=f_{ave}$$

$$2c+1=5$$

$$c=2$$

---

**(2)** اوجد القيمة المتوسطة للدالة $f(x)=x^2+2x$ على الفترة $[0,1]$

$$f_{ave}=\frac{1}{1-0}\int_0^1 (x^2+2x)\,dx$$

$$=\left.\frac{x^3}{3}+2x\right]_0^1$$

$$=\frac{7}{3}.$$

**(1)** اوجد القيمة المتوسطة للدالة $f(x)=x^2-1$ على الفترة $[1,3]$

$$f_{ave} = \frac{1}{3-1}\int_1^3 x^2-1 \; dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3}-x\right]_1^3$$

$$= \frac{10}{3}.$$

---

**(2)** اوجد القيمة المتوسطة للدالة $f(x)=2x-x^2$ على الفترة $[0,1]$

$$f_{ave} = \frac{1}{1-0}\int_0^1 2x-x^2 dx$$

$$= x^2-\frac{x^3}{3}\Big]_0^1$$

$$= \frac{2}{3}.$$

$\int f.$

(1) اكتب $\int_0^2 f(x)\,dx + \int_2^3 f(x)\,dx$ بصورة تكامل منفرد

$= \int_0^3 f(x)dx.$

---

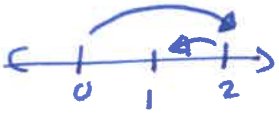
$\int f$

(2) اكتب $\int_0^3 f(x)\,dx - \int_2^3 f(x)\,dx$ بصورة تكامل منفرد

$= \int_0^2 f(x)dx.$

---

$\int f$



(3) اكتب $\int_0^2 f(x)\,dx + \int_2^1 f(x)\,dx$ بصورة تكامل منفرد

$= \int_0^1 f(x)dx.$

---

(4) اذا كان $\int_1^3 f(x)\,dx = 3$ و $\int_1^3 g(x)\,dx = -2$ فاوجد

$(a)\ \int_1^3 [f(x)+g(x)]\,dx =$ $3 + (-2) = 1.$

$(b)\ \int_1^3 [f(x)-g(x)]\,dx =$ $3 - (-2) = 5$

$(c)\ \int_1^3 [2f(x)-g(x)]\,dx =$ $2(3) - (-2) = 8$

$(d)\ \int_1^3 [4.g(x)-3f(x)]\,dx =$ $4(-2) - 3(3) = -17$

## الوحدة الخامسة: التكامل /// الدرس الخامس: النظرية الاساسية في التفاضل

### النظرية الاساسية لحساب التفاضل والتكامل (الجزء الاول)

اذا كانت الدالة $f$ متصلة على الفترة $[a,b]$ و $F(x)$ هي الدالة الاصلية لـ $f$ فان

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

اوجد قيمة كل مما يلي

(1) $\int_0^2 (2x-3)\,dx = x^2 - 3x \Big]_0^2 = -2$

(2) $\int_0^3 (x^2-2)\,dx = \; = \frac{x^3}{3} - 2x \Big]_0^3 = 3.$

(3) $\int_{-1}^1 (x^3+2x)\,dx = \frac{x^4}{4} + x^2 \Big]_{-1}^1 = 0.$

(4) $\int_0^2 (x^3+3x-1)\,dx = \frac{x^4}{4} + \frac{3X}{2} - x \Big]_0^2 = -4$

(5) $\int_1^4 x\sqrt{x} + \frac{3}{x})\,dx = \int_1^4 x^{3/2} + \frac{3}{x}\,dx$

$= \frac{2}{5}x^{5/2} + 3\,\mathrm{Ln}|x| \Big]_1^4 = \frac{62}{5} + 3\,\mathrm{Ln}\,4.$

(6) $\int_1^2 4x - \frac{2}{x^2})\,dx = \int 4x - 2x^{-2}\,dx$

$= 2x^2 + 2x^{-1} \Big]_1^2 = 5$

## النظرية الاساسية لحساب التفاضل والتكامل (الجزء الثاني)

اذا كانت الدالة $f$ متصلة على الفترة $[a,b]$ و كانت $F(x)=\int_{a}^{x} f(t)\,dt$ فان

$$F'(x)=f(x)$$

اذا كانت الدالة $f$ متصلة على الفترة $[a,b]$ و كانت $= F(x)=\int_{a}^{g(x)} f(t)\,dt$ فان

$$F'(x)=f(g(x))\times g'(x)$$

اذا كانت الدالة $f$ متصلة على الفترة $[a,b]$ و كانت $F(x)=\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\,dt$ فان

$$F'(x)=f(g(x))\times g'(x)-f(h(x))\times h'(x)$$

اوجد $f'(x)$ في كل مما يلي

(1) $f(x)=\int_{1}^{x}(t^2+2t+1)\,dt$

$f'(x) = x^2+2x+1$

---

(2) $f(x)=\int_{x}^{1}\sec t\,dt = -\int_{1}^{x} \sec x\, t\, dt$

$f'(x) = -\sec x$ .

اوجد $f'(x)$ في كل مما يلي

(1) $f(x)=\int_{e^x}^{2-x}\sin t^2\,dt$

$f'(x) = \sin(2-x)(-1). - \sin(e^x)^2 . e^x$

$= -\sin(2-x) - e^x \sin e^{2x} .$

---

(2) $f(x)=\int_{x^2}^{x^3}\sin(3t)\,dt$

$f'(x) = \sin(3x^3) . 3x^2 - \sin(3x^2) . 2x$

$= 3x^3 \sin 3x^3 - 2x \sin 3x^2 .$

---

(3) $f(x)=\int_{3x}^{\sin x}(t^2+4)\,dt$

$f'(x) = ((\sin x)^2+4) \cos x - ((3x)^2+4) . 3 .$

$= \cos x(\sin^2 x+4) - 3(9x^2+4)$

$= -27x^4 - 12 + \sin^2 x + 4\cos x .$

---

(4) $f(x)=\int_{2-x}^{xe^x}e^{2t}\,dt$

$f'(x) = e^{2(xe^x)} . [1 . e^x + xe^x] - e^{2(2-x)} . (-1)$

$= e^{2xe^x}[e^x + xe^x] + e^{4-2x} .$

# الوحدة الخامسة: التكـامل /// الدرس السادس: التكامل بالتعويض

**قبل البدأ بالتكامل ...اسئل نفسك**

1) هل الدالة التي نريد ايجاد تكاملها هي ناتج جمع وطرح حدود وكل حدد قابل للتكامل

2) هل الدالة التي نريد ايجاد تكاملها هي ناتج ضرب او قسمة ويمكن تحويلها ال جمع او طرح حدود وكل حدد قابل للتكامل

3) هل الدالة التي نريد ايجاد تكاملها هي حاصل ضرب او قسمة دالتين ،احدى الدالتين او جزء منها يساوي ثابت في مشتقة الدالة الاخرى

**اوجد التكـاملات التالية**

(1) $\int xe^{x^{2}+1}\,dx$

$u = x^2+1$

$\frac{du}{dx} = 2x$

$\frac{du}{2x} = dx$

$= \int x e^{u} \frac{du}{2x}$

$= \frac{1}{2} \int e^{u} du$

$= \frac{1}{2} e^{u} + c$

$= \frac{1}{2} e^{x^2+1} + c.$

يمكن حل السؤال بدون التعويض.

---

(2) $\int e^{x}\sqrt{e^{x}+4}\,dx$

$u = e^x + 4.$

$\frac{du}{dx} = e^x.$

$\frac{du}{e^x} = dx$

$= \int e^x u^{1/2} \frac{du}{e^x}$

$= \int u^{1/2} du$

$= \frac{2}{3} u^{3/2} + c$

$= \frac{2}{3} (e^x+4)^{3/2.} + c$

## اوجد التكاملات التالية

(1) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

$u = \sqrt{x}$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$2\sqrt{x}\,du = dx$

$= \int \frac{e^{u}}{\sqrt{x}} \cdot 2\sqrt{x}\,du$

$= 2\int e^{u}\,du = 2e^{u} + c = 2e^{\sqrt{x}} + c.$

ممكن حل السؤال بدون التعويض .

---

(2) $\int \frac{\cos(1/x)}{x^2}\,dx$

$u = \frac{1}{x}.$

$\frac{du}{dx} = -\frac{1}{x^2}$

$-x^2\,du = dx.$

$= \int \frac{\cos u}{x^2} \cdot -x^2\,du$

$= -\int \cos u\,du$

$= -\sin u + c = -\sin\frac{1}{x} + c.$

---

(3) $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\,dx$

$u = \ln x$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}.$

$x\,du = dx$

$= \int \frac{\sqrt{u}}{x} \cdot x\,du$

$= \int u^{1/2}\,du$

$= \frac{2}{3}u^{3/2} + c = \frac{2}{3}(\ln x)^{3/2} + c.$

---

(4) $\int \sec^2 x\sqrt{\tan x}\,dx$

$u = \tan x$

$\frac{du}{dx} = \sec^2 x$

$\frac{du}{\sec^2 x} = dx$

$= \int \sec^2 x\,\sqrt{u}\,\frac{du}{\sec^2 x}$

$= \int u^{1/2}\,du$

$= \frac{2}{3}u^{3/2} + c = \frac{2}{3}(\tan x)^{3/2} + c.$

اوجد التكاملات التالية

(1) $\int \frac{1}{\sqrt{u}\ (\sqrt{u}+1)}\ du$

$t = \sqrt{u} + 1$

$\frac{dt}{du} = \frac{1}{2\sqrt{u}}$

$2\sqrt{u}\,dt = du$

$= \int \frac{1}{\sqrt{u}\ \ t} \cdot 2\sqrt{u}\,dt$

$= 2\int \frac{1}{t}\,dt = 2\,Ln|t| + c = 2\,Ln|\sqrt{u}+1| + c$

---

(2) $\int \frac{v}{v^2+4}\ dv \quad = \frac{1}{2}\int \frac{2v}{v^2+4} \quad = \frac{1}{2}\,Ln|v^2+4| + c$

ممكن حل السؤال بالتعويض .

---

(3) $\int \frac{4}{x(\ln x+1)^2}\ dv$

$u = Lnx + 1$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$

$x\,du = dx$

$= \int \frac{4}{x\ \ u^2}\ x\,du$

$= \int 4\ u^{-2}\,du$

$= 4\frac{u^{-1}}{-1} + c$

$= \frac{-4}{u} + c = \frac{-4}{Lnx+1} + c$

إنتهت الوحدة الخامسة بحمد الله