HOSSAMBAYOUMI199

الرياضيات

الصف الحادي عشر علمي

قوانين الفصل الدراسي الثاني

"لا تبحث عن الحل الأسرع ... بل عن الفهم الذي لا يُنسى"

اضغط هنا

للانضمام لجروب التيليجرام

إعداد: أ. حسام بيومي

رياضيات

الأعداد المركبة

الوحدة التخيلية : هي العدد الذي مربعه (-1) و يرمز له بالرمز i

$i = \sqrt{-1}$, $i^2 = -1$

تعريف العدد المركب

هو عدد على الصورة $z = a + b\,i$ حيث a ، b عددان حقيقيان ، i الوحدة التخيلية

و يمكن كتابة أي عدد مركب على الصورة $z = a + b\,i$ و تسمى الصورة الجبرية للعدد المركب

حيث a الجزء الحقيقي

، حيث b الجزء التخيلي

$z = \underbrace{a}_{\text{الجزء الحقيقي}} + \underbrace{b}_{\text{الجزء التخيلي}}\,i$

تساوي عددين مركبين

يتساوي عددان مركبان إذا و فقط إذا تساوى جزءاهما الحقيقيان و تساوى جزءاهما التخيليان

و ليكن : $z_1 = a_1 + b_1 i$ ، $z_2 = a_2 + b_2 i$

$$z_1 = z_2 \Longleftrightarrow a_1 = a_2 \text{ ، } b_1 = b_2$$

التمثيل البياني لعدد مركب :

يمكن وضع العدد المركب $z = a + b\,i$ على صورة الزوج المرتب (a,b)

حيث : الإحداثي السيني هو الجزء الحقيقي و الإحداثي الصادي هو الجزء التخيلي

$z = a + b\,i$ $\longleftrightarrow$	$M\,(a,b)$
الصورة الجبرية	الصورة الديكارتية

العمليات على الأعداد المركبة

أولا جمع و طرح الأعداد المركبة :

في الجمع نجمع جزءيهما الحقيقين معا و نجمع جزءيهما التخيلين معا

كذلك في الطرح نطرح جزءيهما الحقيقين معا و نطرح جزءيهما التخيلين معا

إذا كان $z_1 = a_1 + b_1 i$ ، $z_2 = a_2 + b_2 i$ عددين مركبين فإن

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$$

$$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$$

ثانيا ضرب الأعداد المركبة

قاعدة الضرب :

$\forall z_1 . z_2 \in \mathbb{C} \quad . \quad c \in R$

حيث $z_1 = a_1 + b_1 i \; , \quad z_2 = a_2 + b_2 i$

1. $c z_1 = c a_1 + c b_1 i$
2. $z_1 \times z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i$

قوى العدد المركب (i)

إذا كان P عدد كلي فإن :

$i^{4P} = 1 \quad . \quad i^{4P+1} = i \quad . \quad i^{4P+2} = -1 \quad . \quad i^{4P+3} = -i$

المعكوس الضربي لعدد مركب غير صفري $z = a + b\,i$ هو z^{-1}

أي أن :

$$z^{-1} = \frac{1}{a+b\,i} \times \frac{a-b\,i}{a-b\,i} \Longrightarrow z^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2} i$$

القيمة المطلقة لعدد مركب :

هي المسافة بين بين النقطة التي تمثل هذا العدد المركب و نقطة الأصل في المستوى الإحداثي المركب

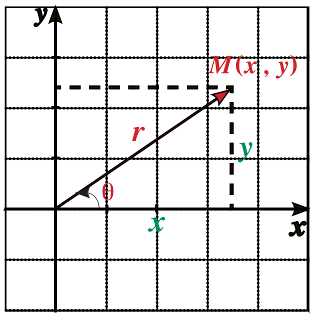
$$z = a + b\,i \longrightarrow |z| = |a + b\,i| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

الإحداثيات القطبية :

يمثل الزوج المرتب $(r . \theta)$ الإحداثيات القطبية للنقطة M على المستوى الإحداثي المركب

و يمكن التحويل بين الإحداثيات القطبية و الإحداثيات الديكارتية باستخدام

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$



حيث θ هي الزاوية الموجهة في الوضع القياسي التي يمر ضلعها النهائي بالنقطة M

و يمكن التحويل من الإحداثيات الديكارتية $(x . y)$ إلى الإحداثيات القطبية $(r . \theta)$

باستخدام $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ثم نوجد قياس زاوية الإسناد $\propto$ باستخدام $\tan \propto = \left|\frac{y}{x}\right|$

ثم نحدد الربع الذي تقع فيه هذه الزاوية θ من إشارة كل من x, y و نوجدها

الصورة المثلثية

يمكن كتابة العدد المركب $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ على الصورة :

$z = r\,(\cos\theta + i \sin\theta)$ و تعرف **بالصورة المثلثية** للعدد المركب z

حل معادلات الدرجة الأولى :

نحل معادلات الدرجة الأولي في الأعداد المركبة بنفس الطريقة التي نحل بها في الأعداد الحقيقية

الجذر التربيعي لعدد مركب :

لإيجاد الجذر التربيعي لعدد مركب Z نبحث عن عدد w يكون مربعه يساوي Z

ليكن $Z = a + bi$

نبحث عن $w = m + ni$ بحيث يكون : $w^2 = Z$

$$(m+ni)^2 = a + bi$$

$$m^2 - n^2 + 2mni = a + bi$$

$$m^2 - n^2 = a$$

$$2mn = b$$

للمساعدة في حل هذا النظام ندخل معادلة ثالثة ناتجة عن كون $|w|^2 = |z|$

أي $\boxed{\left(\sqrt{m^2+n^2}\right)^2 = \sqrt{a^2+b^2}}$

الدوال الجيبية

1. تسمى $|a|$ سعة الدالة الجيبية.
2. $|b|$ تمثل عدد الدورات في الفترة $[0, 2\pi]$
3. $\dfrac{2\pi}{|b|}$ تمثل دورة الدالة.

قانون الجيب

في أي مثلث ABC :

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$$

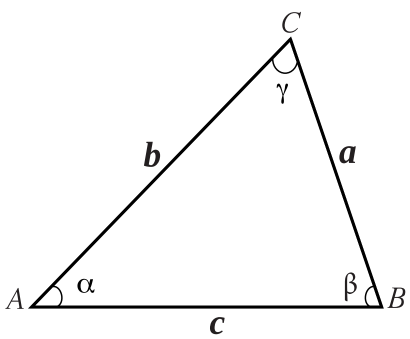
قانون جيب التمام

في ΔABC

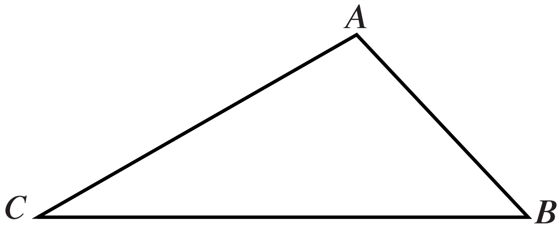
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$



يمكن إيجاد مساحة مثلث بمعلومية طولي ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما كما يلي:



$$Area\,(ABC) = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}ac\sin\beta = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$$

قاعدة هيرون

تعطى مساحة مثلث ABC أطوال أضلاعه $a\,,b\,,c$ بالقاعدة:

$$\text{Area}(ABC) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

حيث: (نصف محيط المثلث) $s = \frac{1}{2}(a+b+c) = \text{semiperimeter}$

تستخدم المتطابقات المثلثية الأساسية لتحويل المقادير المثلثية إلى شكل أبسط.

المتطابقات المثلثية الأساسية

- متطابقات القسمة (الظل وظل التمام)

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \quad , \quad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

- متطابقات المقلوب

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \quad , \quad \csc\theta = \frac{1}{\sin\theta} \quad , \quad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

- متطابقات فيثاغورث

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \quad , \quad 1+\tan^2\theta = \sec^2\theta \quad , \quad 1+\cot^2\theta = \csc^2\theta$$

متطابقات الدوال المتكافئة

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \sin\theta \qquad \tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \cot\theta \qquad \sec\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \csc\theta$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \cos\theta \qquad \cot\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \tan\theta \qquad \csc\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \sec\theta$$

متطابقات المجموع والفرق

$$\cos(\beta+\alpha)=\cos\beta\cos\alpha-\sin\beta\sin\alpha$$

$$\cos(\beta-\alpha)=\cos\beta\cos\alpha+\sin\beta\sin\alpha$$

$$\sin(\beta+\alpha)=\sin\beta\cos\alpha+\cos\beta\sin\alpha$$

$$\sin(\beta-\alpha)=\sin\beta\cos\alpha-\cos\beta\sin\alpha$$

$$\tan(\beta+\alpha)=\frac{\tan\beta+\tan\alpha}{1-\tan\beta\tan\alpha}$$

$$\tan(\beta-\alpha)=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}$$

أولًا: جيب تمام ضعف الزاوية

$$\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta$$

$$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$$

$$\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta$$

ثانيًا: جيب ضعف الزاوية

$$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$$

ثالثًا: ظل ضعف الزاوية

$$\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

متطابقات نصف الزاوية

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

نظرية (1)

إذا وازى مستقيم خارج مستوٍ مستقيمًا في المستوي، فإنه يوازي المستوى .

نظرية (2)

إذا وازى مستقيم مستويًا، فكل مستوٍ مار بالمستقيم ويقطع المستوي، يقطعه في مستقيم موازٍ للمستقيم المعلوم.

نظرية (3)

المستقيمان الموازيان لمستقيم ثالث في الفضاء **متوازيان**.

نتيجة (1)

إذا توازى مستقيمان ومرّ بهما مستويان متقاطعان، فإن تقاطعهما هو مستقيم يوازي كلًّا من هذين المستقيمين.

نظرية (4)

إذا قطع مستوٍ مستويين متوازيين فإن خطي تقاطعه معهما يكونان متوازيين.

نظرية (5)

المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين يكون عموديًّا على مستويهما.

نتيجة (2)

جميع المستقيمات العمودية على مستقيم معلوم من نقطة تنتمي إلى هذا المستقيم تكون محتواة في مستوٍ واحد عموديًّا على المستقيم المعلوم.

نظرية (6)

إذا كان مستقيم عموديًّا على كلٍّ من مستويين مختلفين فإنهما يكونان متوازيين.

$$\overleftrightarrow{l} \perp \pi_1 \ , \ \overleftrightarrow{l} \perp \pi_2 \implies \pi_1 \parallel \pi_2$$

نظرية (7)

إذا كان مستقيم عموديًّا على أحد مستويين متوازيين فإنه يكون عموديًّا على المستوي الآخر.

$$\overleftrightarrow{l} \perp \pi_1 \ , \ \pi_1 \parallel \pi_2 \implies \overleftrightarrow{l} \perp \pi_2$$

نظرية (8)

المستقيمان العموديان على مستوٍ متوازيان.

$$\overleftrightarrow{l} \perp \pi \ , \ \overleftrightarrow{m} \perp \pi \implies \overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m}$$

نظرية (9)

إذا توازى مستقيمان أحدهما عموديًّا على مستوٍ كان المستقيم الآخر عموديًّا على المستوي أيضًا.

$$\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m} \ , \ \overleftrightarrow{l} \perp \pi \implies \overleftrightarrow{m} \perp \pi$$