مدرس الرياضيات مصطفى علامhttp://t.me/mustafaallam

قناة التلجرام ملازم ومراجعات الرياضياتhttps://t.me/alllaaam82

قناة اليوتيوب لشرح تمارين كتب
الرياضياتhttps://www.youtube.com/channel/UCvyojYVtaSKb7dt8U7C2a9g/videos



فيديوهات وكتب رياضيات سادس https://t.me/mathbook6

كتب وفيديوهات رياضيات سابعhttps://t.me/mathbook7

كتب رياضيات ثامنhttps://t.me/mathbook_8

فيديوهات وكتب رياضيات تاسع https://t.me/mathbook9GEN

كتب وفيديوهات رياضيات عاشر عامhttps://t.me/mathbook10GEN

فيديوهات رياضيات عاشر متقدم https://t.me/mathbook10ADV

فيديوهات وكتب رياضيات حادي عشر عام https://t.me/mathbook11GEN

كتب وفيديوهات رياضيات حادي عشر متقدمhttps://t.me/mathbook11ADV

كتب وفيديوهات رياضيات ثاني عشر عامhttps://t.me/mathbook12GEN

كتب وفيديوهات رياضيات ثاني عشر متقدمhttps://t.me/mathbook12ADV

بنوك أسئلة الرياضيات للبوابة الذكيةhttps://t.me/math_bank

الوحدة الأولى

الدوال من منظور حساب التفاضل والتكامل

عمل المدرس مُصطفى علام 050-2509447

عمل المدرس / مصطفى أسامة علام
050-2509447

https://t.me/mathbook12GEN
قناة شرح فيديو رياضيات 12 عام

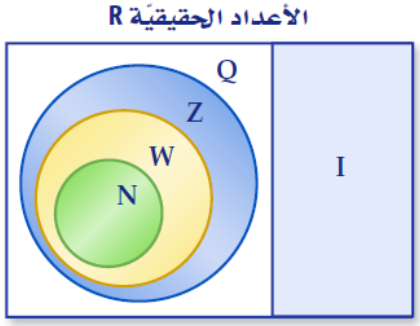
https://t.me/alllaaam82
قناة ملازم وامتحانات رياضيات

ورقة عمل الثاني عشر العام | 1-1 الدوال | الاسم: _____

في هذا الدرس سوف أتعلم: 1- وصف المجموعات الجزئية المكونة من أعداد حقيقية. 2- التعرف على الدوال وإيجاد قيمها وتحديد مجالاتها.

مفهوم أساسي — الأعداد الحقيقية

الرمز	المجموعة	أمثلة
Q	الأعداد النسبية	$0.125, -\frac{7}{8}, \frac{2}{3} = 0.666\ldots$
I	الأعداد غير النسبية	$\pi, \sqrt{3} = 1.73205\ldots$
Z	الأعداد الصحيحة	$-5, 17, -23, 8$
W	الأعداد الكلية	$0, 1, 2, 3\ldots$
N	الأعداد الطبيعية	$1, 2, 3, 4\ldots$



$\{x \mid -3 \le x \le 16, x \in Z\}$

- الأعداد x حيث...
- x لها هذه الخصائص...
- x ينتمي إلى مجموعة الأعداد المعطاة.

استخدام رمز بناء المجموعة

صف مجموعة الأعداد باستخدام رمز بناء المجموعة.

{1, 2, 3, 4, 5, ...}

$\{x \mid x \ge 1, x \in N\}$

$x \le -3$

$\{x \mid x \le -3, x \in R\}$

جميع مضاعفات π

$\{x \mid x = n\pi, n \in Z\}$

$x < 0$ أو $x \ge 100$

$\{x \mid x < 0 \text{ أو } x \ge 10, x \in R\}$

{−0.25, 0, 0.25, 0.50, ...}

$\{x \mid x = 0.25n, n \ge -1, n \in Z\}$

استخدام رمز الفترات

اكتب كل مجموعة أعداد باستخدام رمز الفترة. إن أمكن.

$-8 < x \leq 16$

$(-8, 16]$

$a \geq -3$

$[-3, \infty)$

$-4 \leq y < -1$

$[-4, -1)$

$x < 0$ أو $x \geq 100$

$(-\infty, 0) \cup [100, \infty)$

$\{-0.25, 0, 0.25, 0.50, \ldots\}$

لا يمكن استخدام رمز الفترة في هذه المجموعة

050-2509447

تحديد العلاقات التي تمثل دوال

تمييز الدالة : تذكَّر أن العلاقة هي قاعدة تربط عناصر مجموعة مثل A (المدخلات) مع عناصر من مجموعة مثل B (المخرجات)، حيث تُسمى A مجال العلاقة، وأما المجموعة B فتتضمن عناصر المدى جميعها،

أما **الدالة** فهي حالة خاصة من العلاقة.

مفهوم أساسي — الدالة

التعبير اللفظي: الدالة f من مجموعة A إلى مجموعة B هي علاقة تربط كل عنصر x من المجموعة A بعنصر واحد فقط y من المجموعة B.

في كل علاقة مما يأتي، حدّد ما إذا كانت y تمثِّل دالةً في x أم لا:

تمثّل قيم x رقم الطالب، وقيم y درجته في اختبار الفيزياء.

تمثل دالة / الطالب رقم 5 مثلاً له درجة واحدة فقط في اختبار الفيزياء.
ولا يمكن لهذا الطالب الحصول على درجتين في الفيزياء.

تمثل قيمة المدخل x العام بينما تمثل قيمة المخرج y اليوم من الأسبوع.

x	y
2000	الأحد
2000	الاثنين

لا تمثل دالة / يمكن لنفس x (نفس العام) أكثر من مخرج y (اليوم).

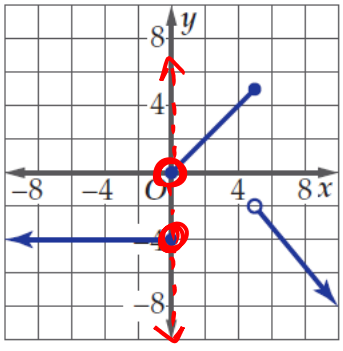
$x = y^3$

نعم دالة.

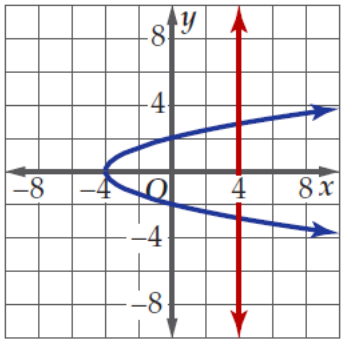
$x = |y|$

x	y
5	-5
5	5

y لا تمثل دالة لـ x
لأنه لنفس قيمة x صار قيمتين لـ y.



ليست دالة
الخط الرأسي يقطع الرسم أكثر من مرة عند $x=0$



ليست دالة.
الخط الرأسي يقطع المنحنى أكثر من مرة

x	y
−6	−7
2	3
5	8
5	9
9	22

ليست دالة
يوجد تكرار في x
* العنصر x ارتبط بأكثر من عنصر في y

x	y
−8	−5
−5	−4
0	−3
3	−2
6	−3

دالة.
لا يوجد تكرار في x

إيجاد قيم الدوال

إذا كان $f(x) = x^2 + 8x - 24$ ، فأوجد قيمة الدالة في كل مما يأتي:

(a $f(6)$

(b $f(-4x)$

(c $f(5c + 4)$

a) $f(6) = (6)^2 + 8(6) - 24$

$= 36 + 48 - 24 = 60$

b) $f(-4x) = (-4x)^2 + 8(-4x) - 24$

$= 16x^2 - 32x - 24$

c) $f(5c+4) = (5c+4)^2 + 8(5c+4) - 24$

$= 25c^2 + 40c + 16 + 40c + 32 - 24$

$= 25c^2 + 80c + 24$

إذا كانت $f(x) = \dfrac{2x+3}{x^2 - 2x + 1}$، فأوجد قيمة الدالة في كل مما يأتي:

(A $f(12)$ (B $f(6x)$ (C $f(-3a + 8)$

a) $f(12) = \dfrac{2(12)+3}{(12)^2 - 2(12) + 1} = \dfrac{24+3}{144 - 24 + 1} = \dfrac{27}{121}$

b) $f(6x) = \dfrac{2(6x)+3}{(6x)^2 - 2(6x) + 1} = \dfrac{12x + 3}{36x^2 - 12x + 1}$

c) $f(-3a+8) = \dfrac{2(-3a+8)+3}{(-3a+8)^2 - 2(-3a+8) + 1}$

$= \dfrac{-6a + 16 + 3}{9a^2 - 48a + 64 + 6a - 16 + 1}$

$= \dfrac{-6a + 19}{9a^2 - 42a + 49}$

إيجاد المجال جبريًا

إذا لم يذكر مجال الدالة فإنه يكون مجموعة الأعداد الحقيقية، مع استثناء القيم التي تجعل مقام الكسر صفرًا أو تجعل ما تحت الجذر عددًا سالبًا إذا كان دليل الجذر زوجيًّا.

حدِّد مجال كلٍّ من الدوال الآتية:

(a $f(x)=\frac{2+x}{x^2-7x}$

المجال ← $R-\{$أصفار المقام$\}$

أصفار المقام ⇒ $x^2-7x=0$

$x(x-7)=0$

$x=0$, $x=7$

المجال $= R-\{0,7\}$ or $x\neq\{0,7\}$, $x\in R$

(b $g(t)=\sqrt{t-5}$

ما تحت الجذر ← ≥ 0 ← المجال

$t-5\geq 0$

المجال $= t\geq 5$

المجال $=\{t \mid t\geq 5 , t\in R\}$

(c $h(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-9}}$

ما تحت الجذر ← >0 ← المجال

$x^2-9>0$

$x^2>9$

$|x|>3$

$x>3$ or $x<-3$

المجال $=\{x \mid x>3$ or $x<-3 , x\in R\}$

(5A $f(x)=\frac{5x-2}{x^2+7x+12}$

المجال ← $R-\{$أصفار المقام$\}$

أصفار المقام ← $x^2+7x+12=0$

$(x+3)(x+4)=0$

$x=-3$, $x=-4$

المجال $= R-\{-3,-4\}$ or $x\neq\{-3,-4\}$, $x\in R$

(5B $h(a)=\sqrt{a^2-4}$

ما تحت الجذر ≥ 0

$a^2-4\geq 0$

$a^2\geq 4$

$|a|\geq 2$

$a\geq 2$ or $a\leq -2$

المجال $=\{a \mid a\geq 2$ or $a\leq -2, a\in R\}$

(5C $g(x)=\frac{8x}{\sqrt{2x+6}}$

نأخذ المجال [الاستبعاد : صفار المقام

والأعداد السالبة تحت الجذر]

ما تحت الجذر >0

$2x+6>0$

$x>-\frac{6}{2}$

المجال $=\{x \mid x>-3 , x\in R\}$

إيجاد قيمة دالة متعددة التعريف

تُعرَّف بعض الدوال بقاعدتين أو أكثر وعلى فترات مختلفة ، وتُسمّى مثل هذه الدوال **الدوالّ المتعددة التعريف**.

طول : إذا كانت العلاقة بين أكبر معدل لطول الطفل $h(x)$ بالبوصة، وأكبر طول لوالديه x بالبوصة معطاة بالدالة:

$$h(x)=\begin{cases}1.6x-41.6 & , \quad 63<x<66\\ 3x-132 & , \quad 66\le x\le 68 \\ 2x-66 & , \quad x>68\end{cases}$$

→ $x=67$ → $x=72$

فأوجد أكبر معدل لطول الطفل في كل من الحالتين الآتيتين :

a) أكبر طول لوالديه 67 بوصة.

$h(67)=3(67)-132=69$ in

b) أكبر طول لوالديه 72 بوصة.

$h(72)=2(72)-66=78$ in

سرعة : إذا كانت سرعة مركبة $v(t)$ بالميل لكل ساعة تُعطَى بالدالة المتعددة التعريف الآتية، حيث الزمن t بالثواني:

$$v(t)=\begin{cases}4t & , \quad 0\le t\le 15\\ 60 & , \quad 15<t<240\\ -6t+1500 & , \quad 240\le t\le 250\end{cases}$$

فأوجد كلًّا مما يأتي:

6A) $v(5)$ **6B)** $v(15)$ **6C)** $v(245)$

A) $v(5)=4(5)=20$ mi/h

B) $v(15)=4(15)=60$ mi/h

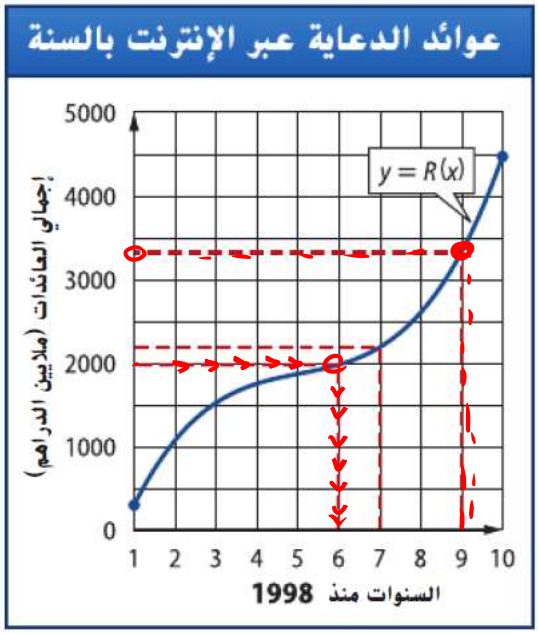
C) $v(245)=-6(245)+1500$

$=30$ mi/h

ورقة عمل الثاني عشر العام **1-2 تحليل التمثيلات البيانية للدوال والعلاقات** الاسم: _____

في هذا الدرس سوف أتعلم:
1- استخدام التمثيلات البيانية للدوال في تقدير قيم الدوال وإيجاد المجال والمدى والتقاطعات مع المحور الرأسي y وأصفار الدوال.
2- استكشاف التناظر في التمثيلات البيانية وتحديد الدوال الفردية والزوجية.

تقدير قيم الدوال



استعمل التمثيل البياني المجاور للدالة للإجابة عما يأتي:

$$R(t) = 17.7t^3 - 269t^2 + 1458t - 910, 1 \le t \le 10$$

a. استخدم التمثيل البياني في تقدير إجمالي عوائد الدعاية عبر الإنترنت في 2007. تأكد من التقدير جبريًا.

b. استخدم التمثيل البياني في تقدير العام الذي بلغ فيه إجمالي عوائد الإعلان عبر الإنترنت 2 مليار AED. تأكد من التقدير جبريًا.

$x = 2007 - 1998 = 9$

$y = R(9) =$ 3300 مليون د.ص

$R(9) = 17.7(9)^3 - 269(9)^2 + 1458(9) - 910 =$ 3326.3 مليون

عند $y = 2'000'000'000 =$ 2000 مليون

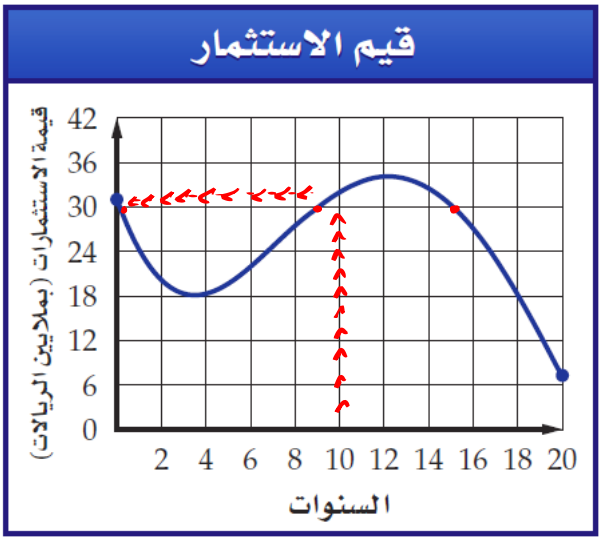
$x = 6 \Rightarrow 1998 + 6 =$ 2004

$R(6) = 17.7(6)^3 - 269(6)^2 + 1458(6) - 910 =$ 1977.2 مليون

استثمار: تمثل الدالة: $v(d) = 0.002d^4 - 0.11d^3 + 1.77d^2 - 8.6d + 31, 0 \le d \le 20$ تقديرًا لاستثمارات أحد رجال الأعمال في السوق المحلية؛ حيث $v(d)$ قيمة الاستثمارات بملايين الريالات في السنة d.

1A) استعمل التمثيل البياني لتقدير قيمة الاستثمارات في السنة العاشرة. ثم تحقّق من إجابتك جبريًّا.

1B) استعمل التمثيل البياني لتحديد السنوات التي بلغت فيها قيمة الاستثمارات 30 مليون ريال. ثم تحقّق من إجابتك جبريًّا.



(A) بيانيًا: في بداية العام وصل الاستثمار 32 مليون تقريبًا.

جبريًا: $v(10) = 0.002(10)^4 - 0.11(10)^3 + 1.77(10)^2 - 8.6(10) + 31$

$= 32$ مليون

(B) بيانيًا: بلغت الاستثمارات 30 مليون عند السنوات

$\frac{1}{4}$ ، 9 ، 15

جبريًا:

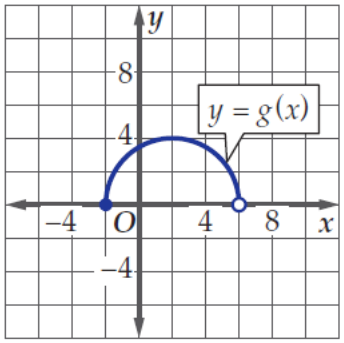
$v(\frac{1}{4}) \approx 28.9$

$v(9) \approx 29.9$

$v(15) = 30.25$

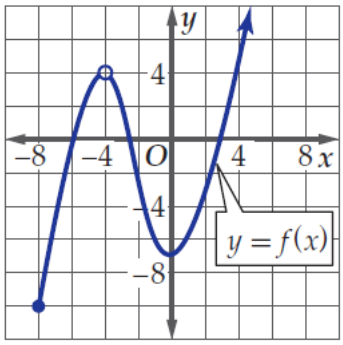
إيجاد المجال والمدى

أوجد مجال الدالة ومداها باستعمال التمثيل البياني.



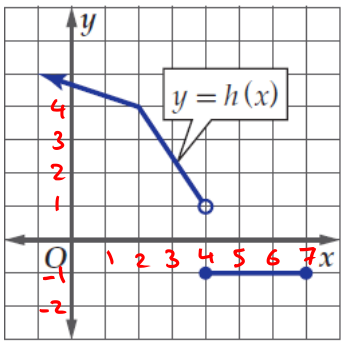
المجال = [-2, 6)

المدى = [0, 4]



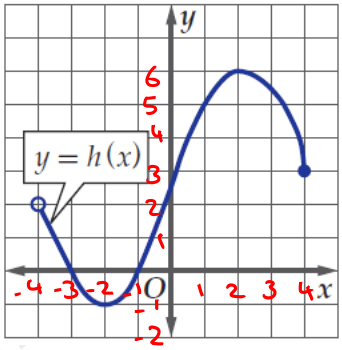
المجال = $[-8,-4) \cup (-4, \infty)$

المدى = $[-10, \infty)$



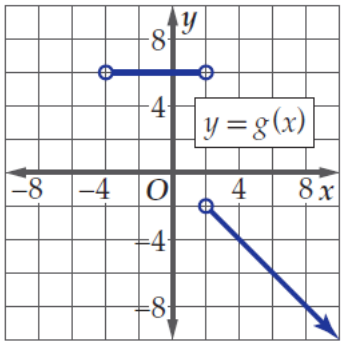
المجال = $(-\infty, 7]$

المدى = $\{-1\} \cup (1, \infty)$



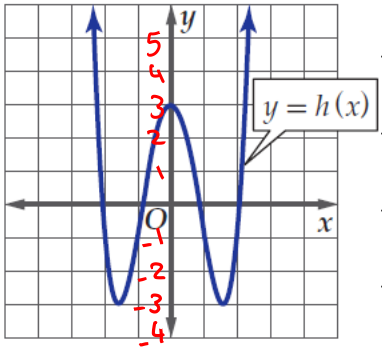
المجال = $(-4, 4]$

المدى = $[-1, 6]$



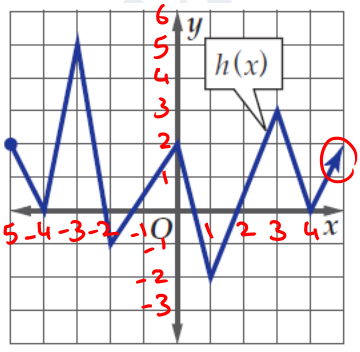
المجال = $(-4, 2) \cup (2, \infty)$

المدى = $(-\infty, -2) \cup \{6\}$



المجال = $\mathbb{R}$

المدى = $[-3, \infty)$

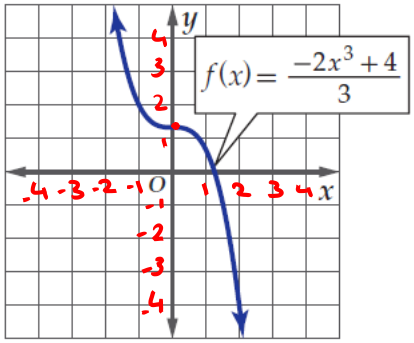


المجال = $[-5, \infty)$

المدى = $[-2, \infty)$

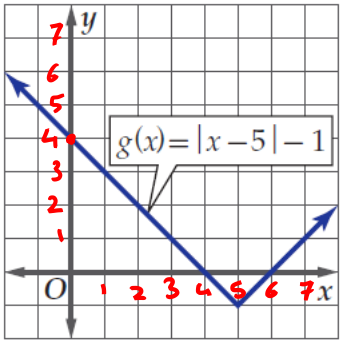
إيجاد التقاطع مع المحور الرأسي y

استعمل التمثيل البياني لكل من الدالتين أدناه، لإيجاد قيمة تقريبية للمقطع y، ثم أوجده جبريًّا:



* من الرسم : يقطع المنحنى المحور y عند 1.4 تقريباً
* الحساب الجبري لمقطع y نضع $x=0$

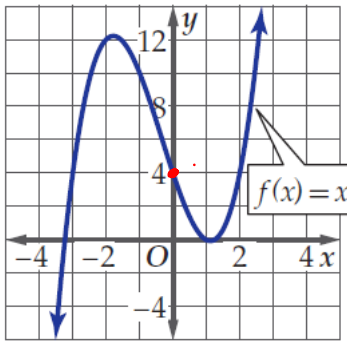
$f(0)=\frac{-2(0)^3+4}{3}=\frac{4}{3}=1\frac{1}{3}=1.\overline{3}$



* من الرسم : يقطع المنحنى المحور y عند 4
* الحساب الجبري : نضع $x=0$

$g(0)=|0-5|-1$

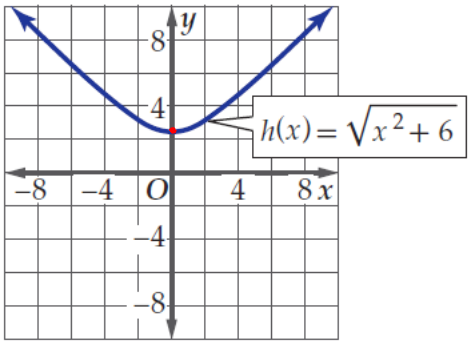
$=4$



* من الرسم : يقطع y عند 4
* الحساب الجبري :

$x=0 \rightarrow y=0^3+0^2-6(0)+4$

$y=4$



* من الرسم : يقطع 2.3
* الحساب الجبري :

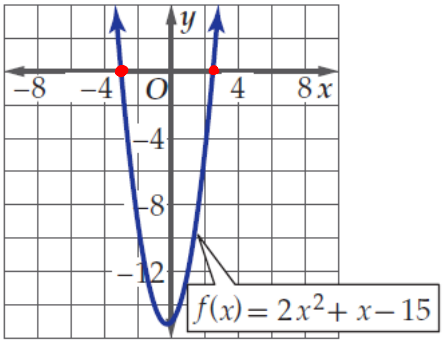
$x=0 \rightarrow y=\sqrt{0^2+6}=\sqrt{6}$

≈ 2.449

إيجاد الأصفار

تُسمى المقاطع x لمنحنى الدالة **أصفار** الدالة، وتُسمى حلول المعادلة المرافقة للدالة **جذور** المعادلة. ولإيجاد أصفار دالة f، فإننا نحل المعادلة $f(x)=0$ بالنسبة للمتغير المستقل.

استعمل التمثيل البياني الذي يمثل الدالة، لإيجاد قيم تقريبية لأصفارها، ثم أوجد هذه الأصفار جبريًّا.



* من الرسم: لمنحنى صفران عند $x=-3$ و $x=2.5$

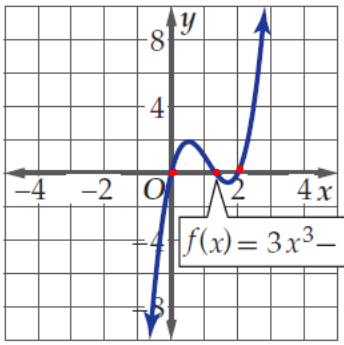
* الحل الجبري:

$2x^2+x-15=0$

$(2x-5)(x+3)=0$

إما $(2x-5)=0 \rightarrow x=\frac{5}{2}=2.5$

أو $(x+3)=0 \rightarrow x=-3$



من الرسم: لمنحنى 3 أصفار $x=2$ ، $x=1.4$ ، $x=0$

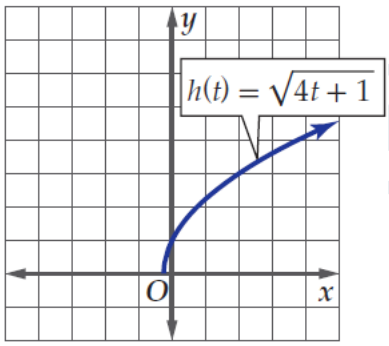
الحل الجبري:

$3x^3-10x^2+8x=0$

$x(3x^2-10x+8)=0$

$x(3x-4)(x-2)=0$

$x=0$ / $3x-4=0 \rightarrow x=\frac{4}{3}$ / $x-2=0 \rightarrow x=2$



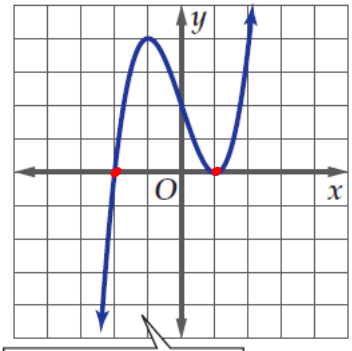
من الرسم: لمنحنى صفر واحد عند $t\approx -0.2$ تقريبًا

الحل الجبري:

$\sqrt{4t+1}=0$

$4t+1=0$

$t=\frac{-1}{4}$



* من الرسم: لمنحنى صفران، $x=-2$ / $x=1$

* الحل الجبري:

$x^3-3x+2=0$

بما أن $x=1$ صفر للدالة $\Rightarrow (x-1)$ عامل من عواملها

نستخدم القسمة التركيبية

	1	0	−3	2
1		1	1	−2
	1	1	−2	0

$x^3-3x+2=0$

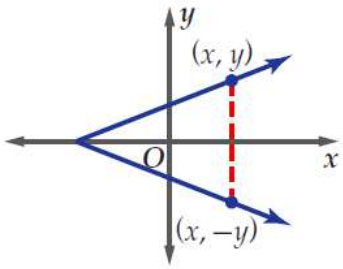
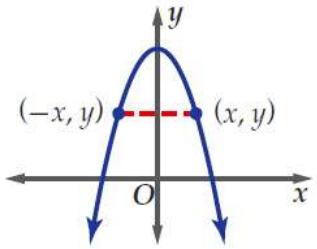
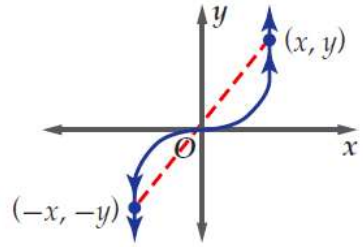
$(x-1)(x+2)(x-1)=0$

$\Rightarrow x^3-3x+2=(x-1)(x^2+x-2)=(x-1)(x+2)(x-1)$

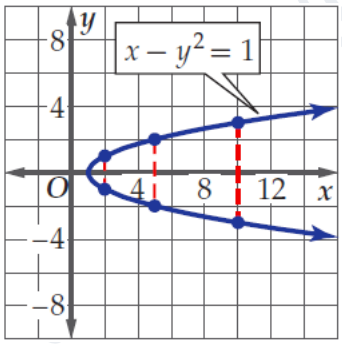
$\Rightarrow x=1$, $x=-2$, $x=1$

اختبار التناظر

مفهوم أساسي — اختبارات التماثل

اختبار التمثيل البياني	النموذج	الاختبار الجبري
يكون تمثيل العلاقة البياني متماثلًا حول المحور x، إذا وفقط إذا تحقق الشرط التالي: إذا كانت النقطة (x, y) واقعة على التمثيل البياني، فإن النقطة $(x, -y)$ تقع عليه أيضًا.		إذا كان تعويض $-y$ مكان y يعطي معادلة مكافئة.
يكون تمثيل العلاقة البياني متماثلًا حول المحور y، إذا وفقط إذا تحقق الشرط التالي: إذا كانت النقطة (x, y) واقعة على التمثيل البياني، فإن النقطة $(-x, y)$ تقع عليه أيضًا.		إذا كان تعويض $-x$ مكان x يعطي معادلة مكافئة.
يكون تمثيل العلاقة البياني متماثلًا حول نقطة الأصل، إذا وفقط إذا تحقق الشرط التالي: إذا كانت النقطة (x, y) واقعة على التمثيل البياني، فإن النقطة $(-x, -y)$ تقع عليه أيضًا.		إذا كان تعويض $-x$ مكان x و $-y$ مكان y يعطي معادلة مكافئة.

استعمل التمثيل البياني لاختبار التماثل حول المحور x والمحور y ونقطة الأصل. عزِّز إجابتك عدديًّا، ثم تحقّق منها جبريًّا.



* من الرسم نرى أنه الشكل متماثل حول محور x حيث أنه لكل (x,y) تقع على المنحنى يوجد (x,-y) تقع على المنحنى أيضاً

أمثلة عددية

x	1	1	5/2	5/2	10/3	10/3
y	1	-1	2	-2	3	-3

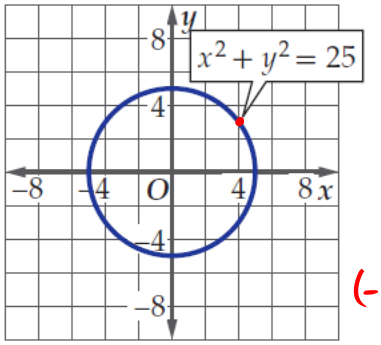
* جبرياً:

نرى أنه $x-(-y)^2=1$ هو نفسه المعبر $x-y^2=1$

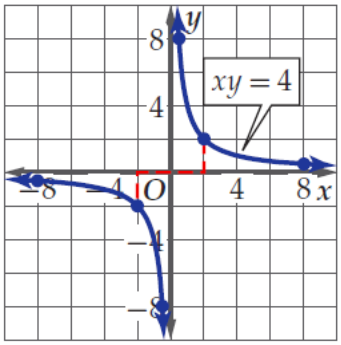
وبذلك يكون التمثيل البياني متماثل حول محور x

اختبار التناظر

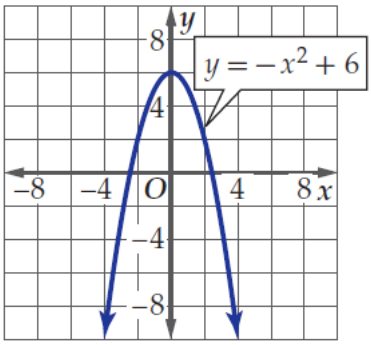
استعمل التمثيل البياني لاختبار التماثل حول المحور x والمحور y ونقطة الأصل.
عزِّز إجابتك عدديًّا، ثم تحقَّق منها جبريًّا.



* يتضح من الرسم أنه متماثل حول محور x لأن كل نقطة (x,y) تقع على المنحنى فإن $(x,-y)$ تقع على المنحنى أيضاً
وكذلك متماثل حول محور y لأن كل نقطة (x,y) تقع على المنحنى فإن $(-x,y)$ تقع أيضاً على المنحنى / أمثلة عددية $(4,3)(4,-3),(-4,3)$
* جبرياً $x^2+(-y)^2=0$ هي نفسها $x^2+y^2=0$ ← متماثل حول محور x
$(-x)^2+y^2=0$ هي نفسها $x^2+y^2=0$ ← متماثل حول محور y



* يتضح من الرسم أنه متناظر حول نقطة الأصل
حيث أنه لكل نقطة (x,y) تقع على المنحنى فإن $(-x,-y)$ تقع أيضاً على المنحنى
* أمثلة عددية $(1,1)$ ، $(4,1)$ / $(-1,-1)$ ، $(-4,-1)$
* جبرياً التعبير $xy=4$ صورته $(-x)(-y)=4$
بالتالي المنحنى متماثل حول نقطة الأصل



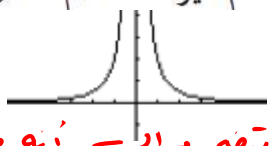
* يتضح من الرسم أنه متماثل حول محور y حيث أنه لكل نقطة (x,y) تقع على المنحنى فإن $(-x,y)$ تقع أيضاً على المنحنى
* أمثلة عددية ← $(2,4)$ ، $(1,5)$ / $(-2,4)$ ، $(-1,5)$
* جبرياً : التعبير $y=-x^2+6$ صورته $y=-(-x)^2+6$
وبالتالي فإن المنحنى متناظر حول محور y

مفهوم أساسي — الدوال الزوجية والدوال الفردية

نوع الدالة	الاختبار الجبري
تُسمى الدوال المتماثلة حول المحور y الدوال الزوجية.	لكل x في مجال f، فإن $f(-x) = f(x)$.
تُسمى الدوال المتماثلة حول نقطة الأصل الدوال الفردية.	لكل x في مجال f، فإن $f(-x) = -f(x)$.

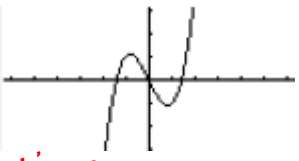
استعمل الحاسبة البيانية لتمثل كل دالة مما يأتي بيانيًّا. ثمَّ حلّل منحناها لتحدّد إن كانت الدالة زوجية أم فردية أم غير ذلك. ثم تحقّق من إجابتك جبريًّا.

1) $f(x) = \frac{2}{x^2}$



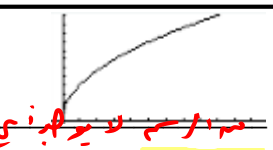
* بما أن الرسم يتضح أنه متماثل حول محور y يعني الدالة زوجية
* جبرياً / $f(-x) = \frac{2}{(-x)^2}$
$= \frac{2}{x^2} = f(x)$
زوجية

2) $f(x) = x^3 - 2x$



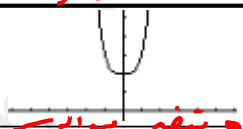
* بما أن الرسم يتضح أنه متماثل حول نقطة الأصل يعني الدالة فردية
* جبرياً: $f(-x) = (-x)^3 - 2(-x)$
$= -x^3 + 2x$
$= -[x^3 - 2x] = -f(x)$
فردية

3) $g(x) = 4\sqrt{x}$



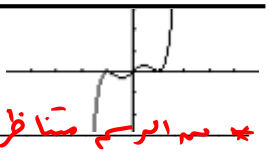
* الرسم لا يتماثل يعني الدالة ليست زوجية وليست فردية
* جبرياً / $f(-x) = 4\sqrt{-x}$
$\neq f(x) \neq -f(x)$
ليست زوجية وليست فردية

4) $f(x) = x^4 + 2$



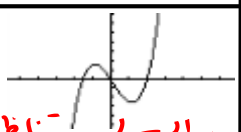
* يتضح من الرسم أنه متماثل حول محور y يعني الدالة زوجية
* جبرياً / $f(-x) = (-x)^4 + 2$
$= x^4 + 2 = f(x)$
زوجية

5) $h(x) = x^5 - 2x^3 + x$



* بما أن الرسم متماثل حول نقطة الأصل يعني الدالة فردية
* جبرياً / $f(-x) = (-x)^5 - 2(-x)^3 + (-x)$
$= -x^5 + 2x^3 - x$
$= -[x^5 - 2x^3 + x] = -f(x)$
فردية

6) $f(x) = x^3 - 0.5x^2 - 3x$



* الرسم ليس متماثل يعني الدالة ليست زوجية وليست فردية
* جبرياً / $f(-x) = (-x)^3 - 0.5(-x)^2 - 3(-x)$
$= -x^3 - 0.5x^2 + 3x \neq f(x) \neq -f(x)$
ليست زوجية وليست فردية

ورقة عمل الثاني عشر العام | 1-3 الاتصال والسلوك الطرفي والنهايات | الاسم:_____

في هذا الدرس سوف أتعلم:
1- استخدام النهايات لتحديد اتصال دالة ما وتطبيق نظرية القيمة الوسطية على الدوال المتصلة.
2- استخدام النهايات لوصف السلوك الطرفي للدوال.

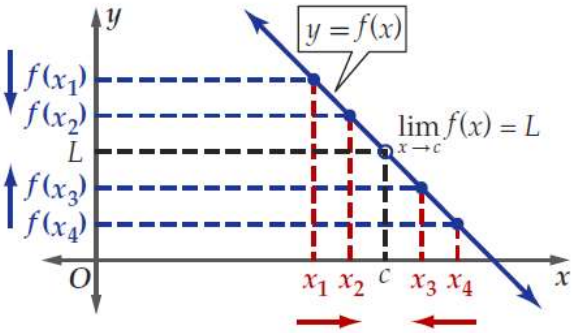
الاتصال: تكون **الدالة متصلة** إذا لم يكن في تمثيلها البياني أيُّ انقطاع أو قفزة. وعليه يمكنك تتبع مسار المنحنى دون أن ترفع القلم عنه.

إن مفهوم اقتراب قيم الدالة من قيمة دون الحاجة إلى الوصول إلى تلك القيمة يُسمى **النهاية**.

مفهوم أساسي — النهايات

التعبير اللفظي: إذا كانت قيمة الدالة $f(x)$ تقترب من قيمة واحدة L عندما تقترب x من c من الجهتين، فإن نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من c هي L.

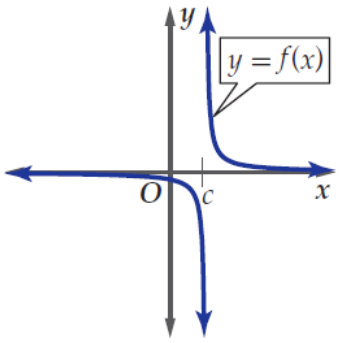
الرموز: نقول: إن $\lim_{x\to c} f(x) = L$، وتُقرأ نهاية الدالة $f(x)$ عندما تقترب x من c هي L.



مفهوم أساسي — أنواع الانفصال

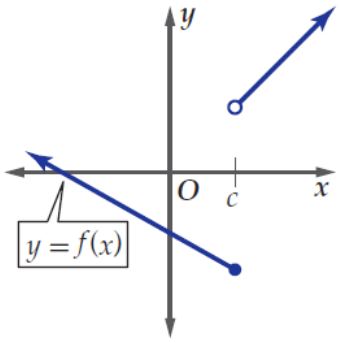
للدالة **انفصال لا نهائي** عند $x = c$ إذا تزايدت قيم الدالة أو تناقصت بلا حدود عندما تقترب x من c من اليمين أو اليسار.

مثال:



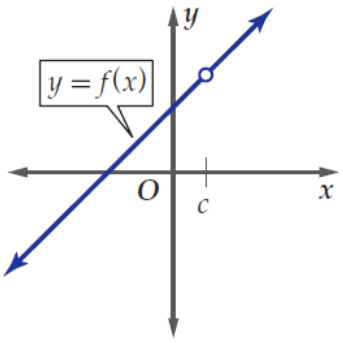
للدالة **انفصال قفزي** عند $x = c$ إذا كانت نهايتا الدالة عندما تقترب x من c من اليمين ومن اليسار موجودتين، ولكنهما غير متساويتين.

مثال:



للدالة **انفصال قابل للإزالة** عند $x = c$ إذا كانت نهاية الدالة عندما تقترب x من c موجودة، ولاتساوي قيمة الدالة عند $x = c$، ويشار إليها بدائرة صغيرة (○) غير مظلّلة؛ لتعبر عن عدم اتصال عند هذه النقطة.

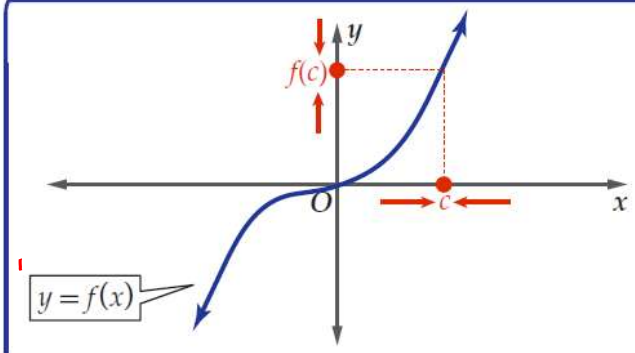
مثال:



تحديد نقطة اتصال

ملخص المفهوم

اختبار الاتصال



1. $f(x)$ معرّفة عند c ، أي أن $f(c)$ موجودة.
2. $f(x)$ تقترب من القيمة نفسها عندما تقترب x من c من الجهتين. أي أن $\lim_{x\to c} f(x)$ موجودة.
3. $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$.

حدد ما إذا كانت الدالة $f(x) = 2x^2 - 3x - 1$ متصلة عند $x = 2$. برّر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال.

نتحقق من الشروط الثلاثة كما يلي :-

① $f(2) = 2(2)^2 - 3(2) - 1 = 1$

② $\lim_{x\to 2} f(x)$ موجودة

x	1.99	1.999	2	2.001	2.01
$f(x)$	0.950	0.995	1	1.005	1.050

يتضح من الجدول كلما x اقتربت من 2 من اليسار واليمين تقترب $f(x)$ من 1

$\lim_{x\to 2} f(x) = 1$

③ $\lim_{x\to 2} f(x) = f(2) = 1$ ⇐ الدالة متصلة عند $x = 2$

حدد ما إذا كانت كل من الدالتين الآتيتين متصلتين عند $x = 0$. برّر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال:

$f(x) = x^3$

نتحقق من الشروط الثلاثة كما يلي :-

① $f(0) = (0)^3 = 0$ موجودة

② من اليسار ومن اليمين

x	-0.01	-0.001	0	0.001	0.01
$f(x)$	-1×10^{-6}	-1×10^{-9}	0	1×10^{-9}	1×10^{-6}

كلما اقتربت x من 0 تقترب $f(x)$ من 0

$\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = 0$

③ $f(0) = \lim_{x\to 0} f(x) = 0$ → الدالة متصلة عند $x = 0$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & , \quad x < 0 \\ x & , \quad x \geq 0 \end{cases}$$

① $f(0) = 0$ → موجودة

② عندما تقترب x من 0 من اليمين تقترب $f(x)$ من 0

x	-0.01	-0.001	0	0.001	0.01
$f(x)$	-100	-1000	0	0.001	0.01

وعندما تقترب x من 0 من اليسار تقترب $f(x)$ إلى $-\infty$

⇐ غير موجودة $\lim_{x\to 0} f(x)$

الدالة غير متصلة عند $x = 0$

تحديد نقاط الانفصال

حدد ما إذا كانت كل دالة مما يأتي متصلة عند قيمة x المعطاة. وبرر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال.

وإذا كانت الدالة غير متصلة فحدّد نوع عدم الاتصال: لانهائي، قفزي، قابل للإزالة.

$$f(x)=\begin{cases}3x-2 & , \quad x>-3\\ 2-x & , \quad x\le -3\end{cases}$$ عند $x=-3$.

① $f(-3) = 2-(-3) = 5$ موجودة

② كلما اقتربت x من -3 من اليمين، اقتربت $f(x)$ لـ 5

x	-3.01	-3.001	-3	-2.99	-2.90
$f(x)$	5.01	5.001	5	-10.97	-10.7

كلما اقتربت x من -3 من اليسار

اقتربت $f(x)$ لـ -11

$\lim_{x\to -3} f(x)$ غير موجود ⟸

الدالة غير متصلة عند $x=-3$

نوع عدم الاتصال (انفصال قفزي)

$$f(x)=\frac{x+3}{x^2-9}$$ عند $x=-3, x=3$.

عند $x=-3$

① $f(-3) = \frac{(-3)+3}{(-3)^2-9} = \frac{0}{0}$ → غير موجودة

②

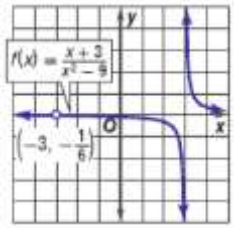
x	-3.01	-3.001	-3	-2.999	-2.99	-2.9
$f(x)$	-0.1663	-0.16639		-0.16669	-0.1669	-0.1694

كلما اقتربت x من -3 من اليمين اقتربت $f(x)$ من -0.16 ⟸ $\lim_{x\to -3} f(x) = -0.16$

الدالة انفصال قابل للإزالة عند $x=-3$

عند $x=3$

① $f(3) = \frac{(3)+3}{3^2-9} = \frac{6}{0}$ → غير معرفة



②

x	2.99	2.999	3	3.001	3.01
$f(x)$	-100	-1000		1000	100

كلما اقتربت x من 3 من اليمين تقترب $f(x)$ من ∞

كلما اقتربت x من 3 من اليسار تقترب $f(x)$ من $-\infty$

الدالة انفصال لانهائي عند $x=3$

$$f(x)=\begin{cases}5x+4 & , \quad x>2\\ 2-x & , \quad x\le 2\end{cases}$$ ، عند $x=2$.

① $f(2) = 2-(2) = 0$

②

x	1.99	1.999	2	2.001	2.01
$f(x)$	0.01	0.001	0	14.005	14.05

كلما اقتربت x من 2 من اليمين اقتربت $f(x)$ من 14

كلما اقتربت x من 2 من اليسار، اقتربت $f(x)$ من 0

الدالة غير متصلة عند $x=2$

نوع عدم الاتصال / انفصال نفزي

$$f(x)=\frac{1}{x^2}$$ ، عند $x=0$.

① $f(0) = \frac{1}{0^2} = \frac{1}{0}$ ← غير معرفة

②

x	-0.01	-0.001	0	0.001	0.01
$f(x)$	10'000	1000'000		1'000'000	10'000

كلما اقتربت x من 0 من اليمين واليسار تقترب $f(x)$ من ∞

$\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = \infty$

الدالة غير متصلة عند $x=0$

نوع الانفصال [انفصال لانهائي]

allaam@yahoo.com عمل المدرس مصطفى علام

إزالة عدم الاتصال

أعد تعريف الدالة $f(x)=\frac{x^2-16}{x-4}$؛ لتصبح متصلة عند $x=4$.

① $f(4)=\frac{4^2-16}{4-4}=\frac{0}{0}$ غير معرفة

②

x	3.99	3.999	4	4.001	4.01
$f(x)$	7.99	7.999	$\times$	8.001	8.01

الدالة تقترب من 8 عندما تقترب x من 4 من اليمين واليسار

$\Rightarrow \lim_{x\to 4} f(x)=8$

لإعادة كتابة تعريف الدالة لكي تكون متصلة عند $x=4$

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-16}{x-4}, & x\neq 4\\ 8, & x=4\end{cases}$$

لأن نهاية الدالة عند $x=4$ تساوي 8 وتساوي q عند $x=4$

أعد تعريف الدالة $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$؛ لتصبح متصلة عند $x=1$.

① $f(1)=\frac{(1)^2-1}{(1)-1}=\frac{0}{0}\rightarrow$ غير معرفة

②

x	0.99	0.999	1	1.001	1.01
$f(x)$	1.99	1.999	$\times$	2.001	2.01

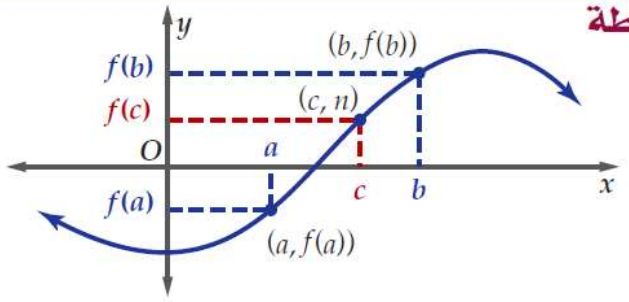
$\lim_{x\to 1} f(x)=2$ ⇐ الدالة تقترب من 2 عندما x تقترب من 1 من اليمين واليسار

لإعادة كتابة تعريف الدالة لكي تكون متصلة عند $x=1$

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-1}{x-1}, & x\neq 1\\ 2, & x=1\end{cases}$$

allaaam@yahoo.com عمل المدرس مصطفى علام

نظرية — نظرية القيمة المتوسطة



إذا كانت $f(x)$ دالة متصلة على $[a, b]$، وكانت $a < b$
ووجدت قيمة n بين $f(a)$ و $f(b)$ فإنه يوجد عدد c بين a و b، بحيث $f(c) = n$.

حدّد الأعداد الصحيحة المتتالية التي تنحصر بينها الأصفار الحقيقية لكل دالة مما يأتي في الفترة المعطاة:

$f(x) = x^3 - 4x + 2$ ، $[-4, 4]$.

لأن الدالة $f(x)$ كثيرة حدود فهي متصلة على الفترة $[-4, 4]$

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	-46	-13	2	5	2	-1	2	17	50

- - ↓ + + + ↓ - ↓ + + +
0 0 0

إذن يوجد صفر حقيقي بين -3 و -2
وصفر حقيقي بين 0 و 1
وصفر حقيقي بين 1 و 2

$f(x) = x^3 + 2x^2 - 8x + 3$ ، $[-6, 4]$

لأن الدالة $f(x)$ كثيرة حدود فهي متصلة على الفترة $[-6, 4]$

x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	-93	-32	3	18	19	12	3	-2	3	24	67

- - ↓ + + + + + ↓ - ↓ + + +
0 0 0

الأصفار الحقيقية تقع بين: $(-5, -4)$ ، $(0, 1)$ ، $(1, 2)$

$f(x) = \dfrac{x^2 - 6}{x + 4}$ ، $[-3, 4]$



الدالة غير متصلة عند $x = -4$ لكن متصلة في الفترة $[-3, 4]$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	3	-1	$-1.\overline{6}$	-1.5	-1	$-0.\overline{3}$	0.4285	1.25

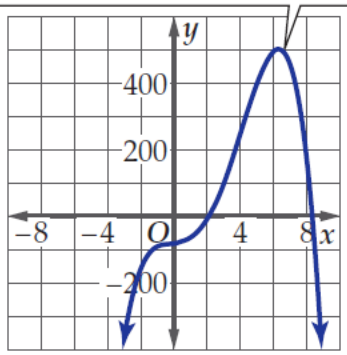
+ ↓ - - - - - ↓ + +
0 0

هناك صفران حقيقيان بين: $(-3, -2)$ ، $(2, 3)$

التمثيلات البيانية التي تقترب من ما لانهاية

استعمل التمثيل البياني لكل من الدوال الآتية لوصف سلوك طرفي تمثيلها البياني، ثم عزز إجابتك عدديًّا.

$f(x) = -x^4 + 8x^3 + 3x^2 + 6x - 80$



من الرسم /

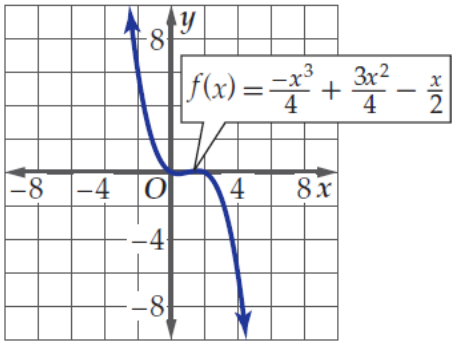
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$

التعزيز العددي /

x	-10000	-1000	1000	10000
$f(x)$	-1×10^{16}	-1×10^{12}	-1×10^{12}	-1×10^{16}
	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$

$f(x) = \frac{-x^3}{4} + \frac{3x^2}{4} - \frac{x}{2}$



من الرسم /

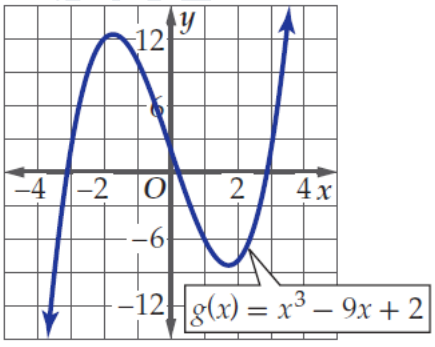
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$

$\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$

التعزيز العددي /

x	-10000	-1000	1000	10000
$f(x)$	2.5×10^{11}	2.5×10^{8}	-2.5×10^{8}	-2.5×10^{11}
	∞	∞	$-\infty$	$-\infty$

$g(x) = x^3 - 9x + 2$



من الرسم /

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

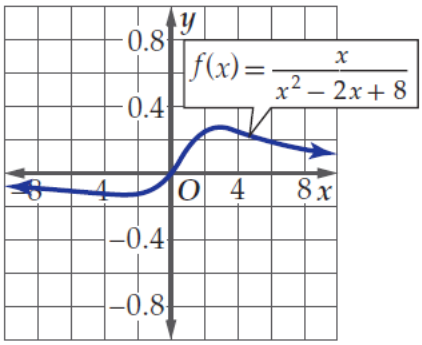
$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

التعزيز العددي /

x	-10000	-1000	1000	10000
$f(x)$	-15×10^{11}	-15×10^{8}	15×10^{8}	15×10^{11}
	$-\infty$	$-\infty$	∞	∞

التمثيلات البيانية التي تقترب من قيمة محددة

استعمل التمثيل البياني لكل من الدوال الآتية لوصف سلوك طرفي تمثيلها البياني، ثم عزز إجابتك عدديًّا.



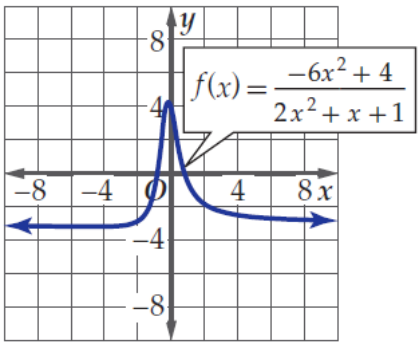
من الرسم /

* $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$

التعزيز العددي /

* $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$

x	-10000	-1000	1000	10000
$f(x)$	-10×10^{-5}	-10×10^{-6}	1×10^{-3}	1×10^{-4}
	0	0	0	0

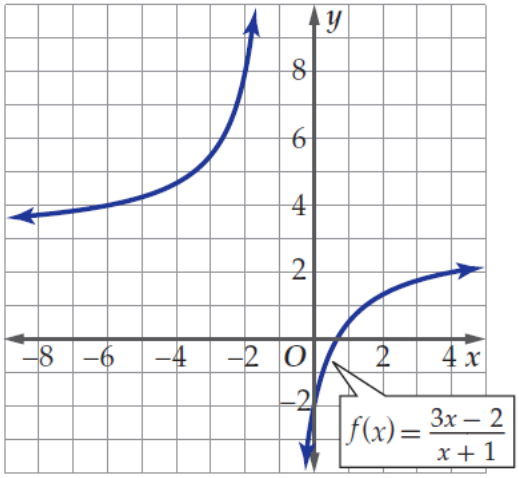


من الرسم /

* $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 3$
* $\lim_{x\to\infty} f(x) = 3$

التعزيز العددي /

x	-10000	-1000	1000	10000
$f(x)$	-3	-3	-2.998	-2.999



من الرسم /

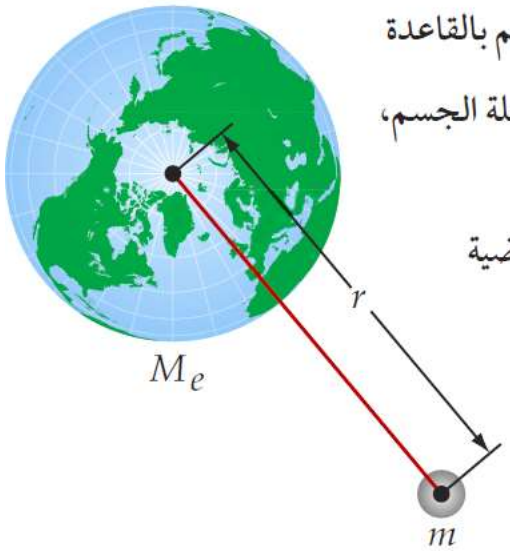
* $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 3$
* $\lim_{x\to\infty} f(x) = 3$

التعزيز العددي /

x	-10000	-1000	1000	10000
$f(x)$	3.0005	3.005	2.995	2.9995

@yahoo.com عمل المدرس مصطفى علام

تطبيق السلوك الطرفي



فيزياء: تُعطى قيمة طاقة الوضع الناتجة عن الجاذبية الأرضية لجسم بالقاعدة $U(r) = -\frac{GmM_e}{r}$ ، حيث G ثابت نيوتن للجذب الكوني، و m كتلة الجسم، و M_e كتلة الأرض، و r المسافة بين الجسم ومركز الأرض كما في الشكل المجاور. ماذا يحدث لطاقة الوضع الناتجة عن الجاذبية الأرضية لجسم عندما يتحرك مبتعدًا عن الأرض مسافة كبيرة جدًا؟

عندما تزداد r كثيراً ← $\lim_{r \to \infty} U(r)$

في الدالة G ، m ، M_e ثوابت

وكلما زادت r (المقام) بطريقة كبيرة جداً يقترب الكسر (الدالة) للصفر

$\Rightarrow \lim_{r \to \infty} U(r) = 0$

معنى ذلك أن طاقة الوضع تقترب كثيراً للصفر

فيزياء: الضغط الديناميكي هو قياس الضغط الناتج عن حركة جزيئات الغاز ويعطى بالقاعدة $q(v) = \frac{\rho v^2}{2}$ ، حيث ρ (ويقرأ روه) كثافة الغاز، و v السرعة التي يتحرك بها الجزيء. ماذا يحدث للضغط الديناميكي لجزيئات الغاز عندما تستمر سرعة الجزيئات في التزايد؟

تستمر v في التزايد

$\lim_{v \to \infty} q(v) = \infty$

في الدالة ρ ثابت

وعندما تزداد v^2 إلى ما لا نهاية يكبر الكسر بصورة كبيرة جداً (البسط)

$\Rightarrow \lim_{v \to \infty} q(v) = \infty$

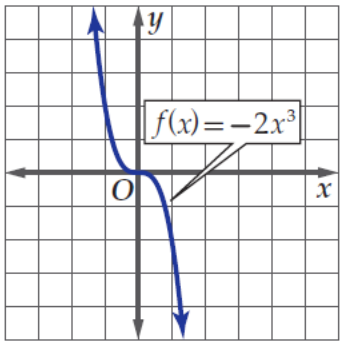
معنى ذلك أن الضغط الديناميكي سوف يزداد بصورة كبيرة للغاية.

ورقة عمل الثاني عشر العام | 1-4 القيم القصوى ومتوسط معدل التغير | الاسم: _____

في هذا الدرس سوف أتعلم:
1- تحديد الفترات التي تكون فيها الدوال متزايدة أو ثابتة أو متناقصة. وتحديد القيم العظمى والصغرى لها.
2- إيجاد متوسط معدل التغير لدالة ما.

تحليل سلوك التزايد والتناقص

استخدم التمثيل البياني لكل دالة لتقدير الفترات مقربةً إلى أقرب 0.5 وحدة والتي تكون عندها الدالة متزايدة أو متناقصة أو ثابتة. ادعم إجابتك عدديًا.

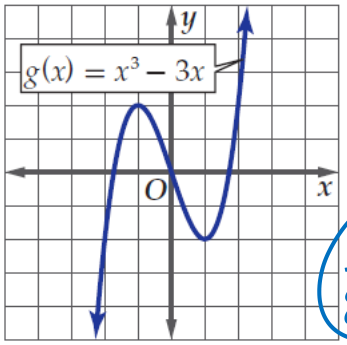


* من الرسم : $f(x)$ تتناقص على الفترة $(-\infty, \infty)$

الدعم العددي :-

x	-8	-6	-4	-2	0	2	4	6	8
f(x)	1024	432	128	16	0	-16	-128	-432	-1024

يوضح الجدول أنه عندما تزايد x تتناقص $f(x)$

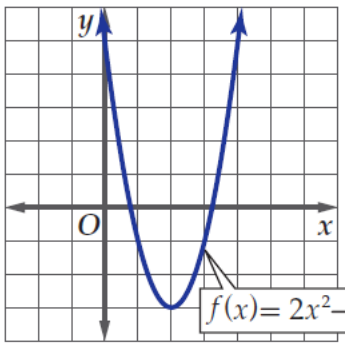


* من الرسم/ $g(x)$ تتزايد في الفترتين $(1, \infty)$, $(-\infty, -1)$
$g(x)$ تتناقص في الفترة $(-1, 1)$

* الدعم العددي/

x	-5	-3	-1	-0.5	0	0.5	1	3	5
g(x)	-110	-18	2	1.375	0	-1.375	-2	18	110

تزايد | تناقص | تزايد

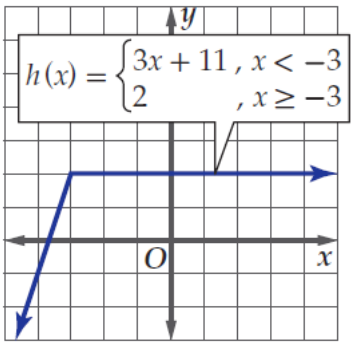


* من الرسم/ $f(x)$ تتناقص في $(-\infty, 2)$ / $f(x)$ تتزايد في $(2, \infty)$

* الدعم العددي..

x	-2	0	1.5	2	2.5	4	6
f(x)	29	5	-2.5	-3	-2.5	5	29

تناقص | تزايد



* من الرسم/ $h(x)$ تتزايد في $(-\infty, -3)$ / ثابتة في $(-3, \infty)$

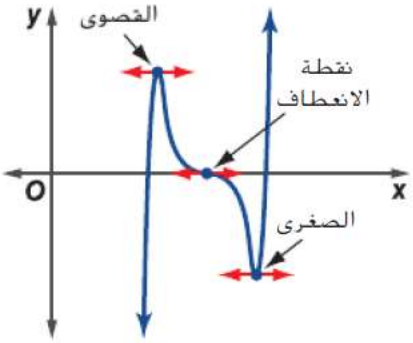
* التمثيل العددي/

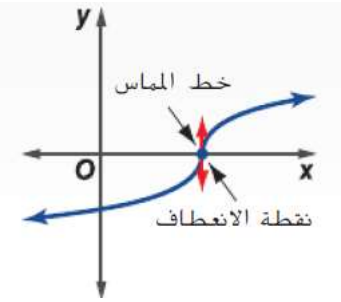
x	-7	-5	-3.5	-3	-2.5	-1	1	3
h(x)	-10	-4	0.5	2	2	2	2	2

تزايد | ثابتة

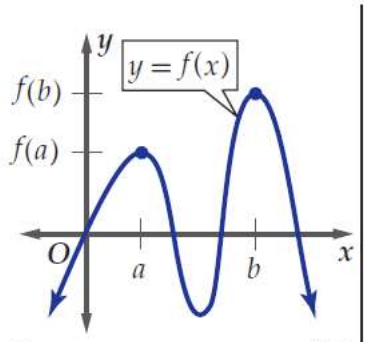
تقدير وتحديد القيم القصوى لدالة

النقاط الحرجة لدالة ما هي تلك النقاط التي يكون عندها الخط المماس للمنحنى أفقي أو رأسي. **القيم القصوى** هي نقاط حرجة تغير الدالة عندها سلوكها من حيث التزايد أو التناقص. وعند هذه النقاط، تكون للدالة قيمة **عظمى** أو **صغرى**، محلية أو مطلقة. **نقطة الانعطاف** يمكن أن تكون أيضًا نقطة حرجة. وعند هذه النقاط، تغير الدالة من إتجاه تقعرها، ولكن لا تغير سلوكها من حيث التزايد أو التناقص. بدلًا عن ذلك، يتغير اتجاه المنحنى من أعلى لأسفل أو العكس.

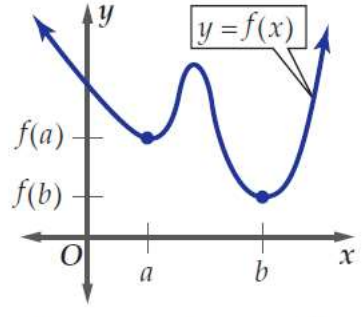




القيم القصوى المحلية والمطلقة

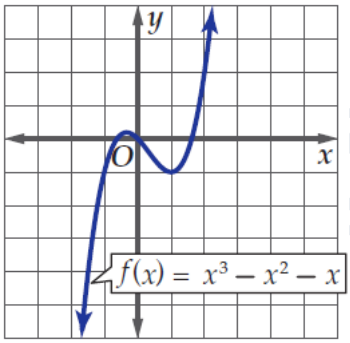


$f(a)$ قيمة عظمى محلية للدالة f
$f(b)$ قيمة عظمى مطلقة للدالة f



$f(a)$ قيمة صغرى محلية للدالة f
$f(b)$ قيمة صغرى مطلقة للدالة f

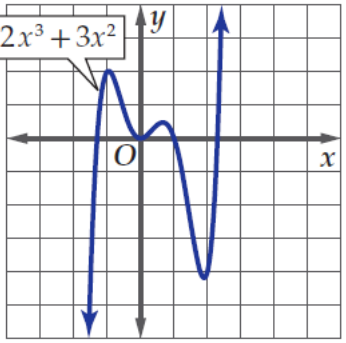
قدّر قيم x التي يكون لكلٍّ من الدوال الآتية عندها قيم قصوى مقربة إلى أقرب 0.5 وحدة، وأوجد قيم الدالة عندها، وبيّن نوع القيم القصوى، ثم عزّز إجابتك عدديًا.



* من الرسم / للدالة قيمة عظمى محلية عند $x = -0.5$ قيمتها 0.2 تقريبًا.
للدالة قيمة صغرى محلية عند $x = 1$ قيمتها -1
- ولا توجد للدالة قيمة عظمى وصغرى مطلقة حيث تطرفها إلى اللانهاية.

* التقريب العددي /

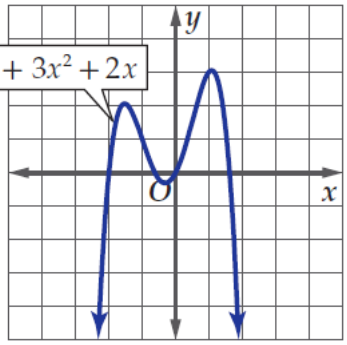
x	-100	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	100
$f(x)$	-1.01×10^6	-1	0.125	0	-0.625	-1	-0.375	9.9×10^5



* من الرسم / عند $x=1$ قيمة عظمى محلية / عند $x=0$ صغرى محلية قيمتها 0
عند $x=0.75$ عظمى محلية قيمتها 0.5 / عند $x=2$ صغرى محلية قيمتها 4 -
لا توجد قيم صغرى أو عظمى مطلقة لأنه كلما اتجهنا إلى ما لا نهاية +، -

* التعزيز العددي /

x	-100	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	0.75	1	1.5	2	2.5	100
$f(x)$	-1×10^{10}	-4.2	2	0.8	0	0.406	0.44	0	-2.5	-4	7	9.8×10^{9}
	↓		∩ عظمى		∪ صغرى		∩ عظمى		∪ صغرى			↑



* من الرسم / عند $x=-1$ قيمة عظمى محلية قيمتها 2 / عند $x=-0.25$ قيمة صغرى محلية قيمتها -0.25
عند $x=1$ قيمة عظمى مطلقة قيمتها 3
لا توجد قيمة صغرى مطلقة ولا توجد عظمى مطلقة لأنه كلما اتجهنا إلى ما لا نهاية -

* التعزيز العددي /

x	-100	-2	-1.5	-1	-0.25	0	0.5	1	1.5	100
$f(x)$	-98×10^{7}	0	2	1	-0.3	0	1.56	3	13	-1×10^{8}
	↓		∩ عظمى محلية		∪ صغرى محلية		∩ عظمى مطلقة			↓

allaaam@gmail.com

استخدام حاسبة التمثيل البياني لتقريب القيم القصوى

الحاسبة البيانية: أوجد القيم القصوى المحلية والمطلقة مقربة إلى أقرب جزء من مئة لكل دالة فيما يأتي، وحدد قيم x التي تكون عندها هذه القيم:

$$f(x) = -4x^3 - 8x^2 + 9x - 4$$



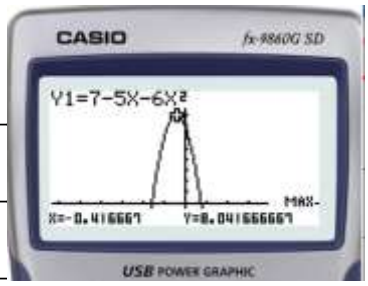
اضغط لمعرفة كيفية استخدام الآلة الحاسبة

من الآلة الحاسبة يتضح أنه عند $x = 0.426$ قيمة عظمى محلية $= -1.927$

وعند $x = -1.759$ قيمة صغرى محلية $= -22.813$

ولا توجد قيم قصوى مطلقة

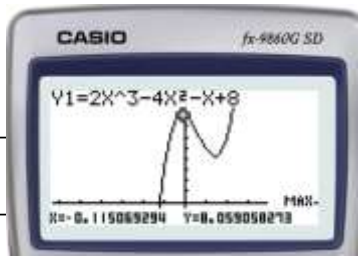
$$h(x) = 7 - 5x - 6x^2$$



من الآلة الحاسبة

يتضح أنه عند $x = -0.616$ قيمة عظمى مطلقة $= 8.041$

$$g(x) = 2x^3 - 4x^2 - x + 5$$



من الآلة الحاسبة يتضح أنه عند $x = -0.115$ قيمة عظمى محلية $= 8.059$

وعند $x = 1.448$ قيمة صغرى محلية $= 4.237$

ولا يوجد للدالة قيم قصوى مطلقة.

allaam@yahoo.com علام مصطفى

استخدام القيم القصوى للبحث عن الحل الأمثل

زراعة: يتم قطف 400 حبة برتقال من كل شجرة في الموسم الواحد عندما يكون عدد أشجار البرتقال في الحقل 75 شجرة. فإذا علمت أنه عند زراعة كل شجرة جديدة ينقص إنتاج كل شجرة في البستان بمقدار حبتين. فكم شجرة إضافية يجب زراعتها للحصول على أكبر إنتاج ممكن؟

الإنتاج = 75×400

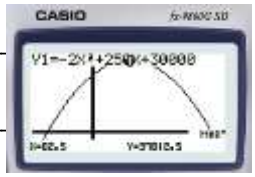
شجرة واحدة / $= (75+1) \times (400 - 2(1))$

شجرتان / $= (75+2) \times (400 - 2(2))$

x شجرة $f(x) = (75+x)(400-2x)$

$f(x) = -2x^2 + 250x + 30000$

نرسم الدالة في الآلة الحاسبة ثم نحسب max ، min



عند $x = 62.5$ قيمة عظمى مطلقة $= 37812.5$ حبة

إذًا عند زراعة 62.5 شجرة إضافية يكون الإنتاج أكبرها يمكن 37812.5 حبة

صناعة: يرغب صاحب مصنع زجاج في إنتاج كأس أُسطوانية الشكل مفتوحة من أعلى مساحتها الكلية $10\pi \text{ in}^2$. أوجد طول نصف قطر الكأس وارتفاعه اللذين يجعلان حجمها أكبر ما يمكن.

المساحة = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة

$10\pi = \pi r^2 + 2\pi rh$

$10 = r^2 + 2rh$

$h = \frac{10 - r^2}{2r}$

الحجم $= \pi r^2 h$

$= \pi r^2 \left(\frac{10 - r^2}{2r}\right)$

$V(r) = \frac{10\pi r^2}{2r} - \frac{\pi r^3}{2r}$

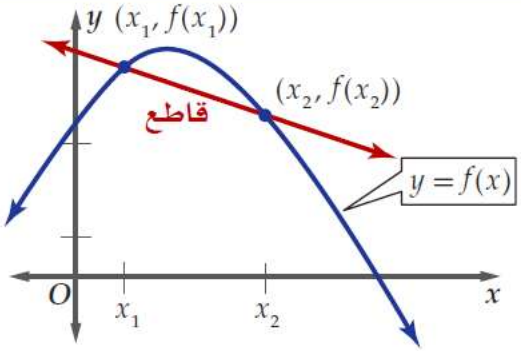
$V(r) = 5\pi r - \frac{1}{2}\pi r^2$

نرسم بالآلة الحاسبة ثم نوجد max

من الآلة عند $r = 1.83$ in ذلك أكبر حجم $= 19.12 \text{ in}^3$

عند $r = 1.83 \Rightarrow h = \frac{10 - 1.83^2}{2(1.83)} = 1.83$

يعني للحصول على أكبر حجم يكون نصف القطر 1.83 in / والارتفاع 1.83 in



متوسط معدل التغير

متوسط معدل تغير الدالة $f(x)$ في الفترة $[x_1, x_2]$ هو

$$m_{sec} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

أوجد متوسط معدل التغير لكل دالة فيما يأتي في الفترة المعطاة.

$f(x) = -x^3 + 3x \ , \ [-2, -1]$

$m_{sec} = \dfrac{f(-1) - f(-2)}{-1 - (-2)}$

$= \dfrac{-4 - 2}{1 + 2}$

$= \dfrac{-6}{3} = \boxed{-2}$

$f(-1) = -(-1)^3 + 3(-1) = -4$

$f(-2) = -(-2)^3 + 3(-2) = 2$

$f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 2, [2, 3]$

$m_{sec} = \dfrac{f(3) - f(2)}{3 - 2}$

$= \dfrac{2 - (-4)}{3 - 2} = \dfrac{6}{1}$

$= \boxed{6}$

$f(3) = (3)^3 - 2(3)^2 - 3(3) + 2 = 2$

$f(2) = (2)^3 - 2(2)^2 - 3(2) + 2 = -4$

$f(x) = x^4 - 6x^2 + 4x, [-5, -3]$

$m_{sec} = \dfrac{f(-3) - f(-5)}{-3 - (-5)}$

$= \dfrac{15 - 455}{-3 + 5}$

$= \boxed{-220}$

$f(-3) = (-3)^4 - 6(-3)^2 + 4(-3) = 15$

$f(-5) = (-5)^4 - 6(-5)^2 + 4(-5) = 455$

إيجاد متوسط السرعة

فيزياء: إذا كانت المسافة التي يقطعها جسم ساقط من مكان مرتفع تعطى بالدالة $d(t) = 16t^2$، حيث t الزمن بالثواني بعد سقوط الجسم، $d(t)$ المسافة المقطوعة بالأقدام. إذا أهملت مقاومة الهواء، فأوجد السرعة المتوسطة في كل من الفترتين الآتيتين.

a) من 0 إلى 2 ثانية b) من 2 إلى 4 ثوانٍ

a) $r = \frac{d(t_2) - d(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{d(2) - d(0)}{2 - 0} = \frac{16(2)^2 - 16(0)^2}{2 - 0} = 32$ ft/sec

b) $r = \frac{d(4) - d(2)}{4 - 2} = \frac{16(4)^2 - 16(2)^2}{4 - 2} = 96$ ft/sec

---

فيزياء: قُذِفَ جسم إلى أعلى من ارتفاع 4 ft عن سطح الأرض، فإذا كان ارتفاعه عن سطح الأرض يُعطى بالدالة $d(t) = -16t^2 + 20t + 4$، حيث t الزمن بالثواني بعد قذفه و$d(t)$ المسافة التي يقطعها، إذا أهملت مقاومة الهواء، فأوجد السرعة المتوسطة للجسم في الفترة من 0.5 إلى 1 ثانية.

$r = \frac{d(1) - d(0.5)}{1 - 0.5}$

$d(1) = -16(1)^2 + 20(1) + 4 = 8$

$d(0.5) = -16(0.5)^2 + 20(0.5) + 4 = 10$

$= \frac{8 - 10}{1 - 0.5} = -4$ ft/sec

السرعة المتوسطة تناقص في الفترة من 0.5 إلى 1 ثانية

طقس: إذا كان متوسط درجات الحرارة السيليزية لكل شهر في المدينة المنورة في سنة ما معطى بالدالة:

$f(x) = -0.5455x^2 + 7.09x + 21.45$، حيث x تمثّل رقم الشهر، فمثلاً $x = 1$ تمثّل شهر يناير،

فأوجد متوسط معدل التغير في كل من الفترتين الآتيتين: وبرر إجابتك.

a) من أبريل إلى مايو. b) من يوليو إلى أكتوبر.

a) $m_{sec} = \frac{f(5) - f(4)}{5 - 4}$

$f(5) = -0.5455(5)^2 + 7.09(5) + 21.45 = 43.26$

$f(4) = -0.5455(4)^2 + 7.09(4) + 21.45 = 41.08$

$= \frac{43.26 - 41.08}{5 - 4} = 2.18$ درجة في الشهر

b) $m_{sec} = \frac{f(10) - f(7)}{10 - 7}$

$f(10) = -0.5455(10)^2 + 7.09(10) + 21.45 = 37.8$

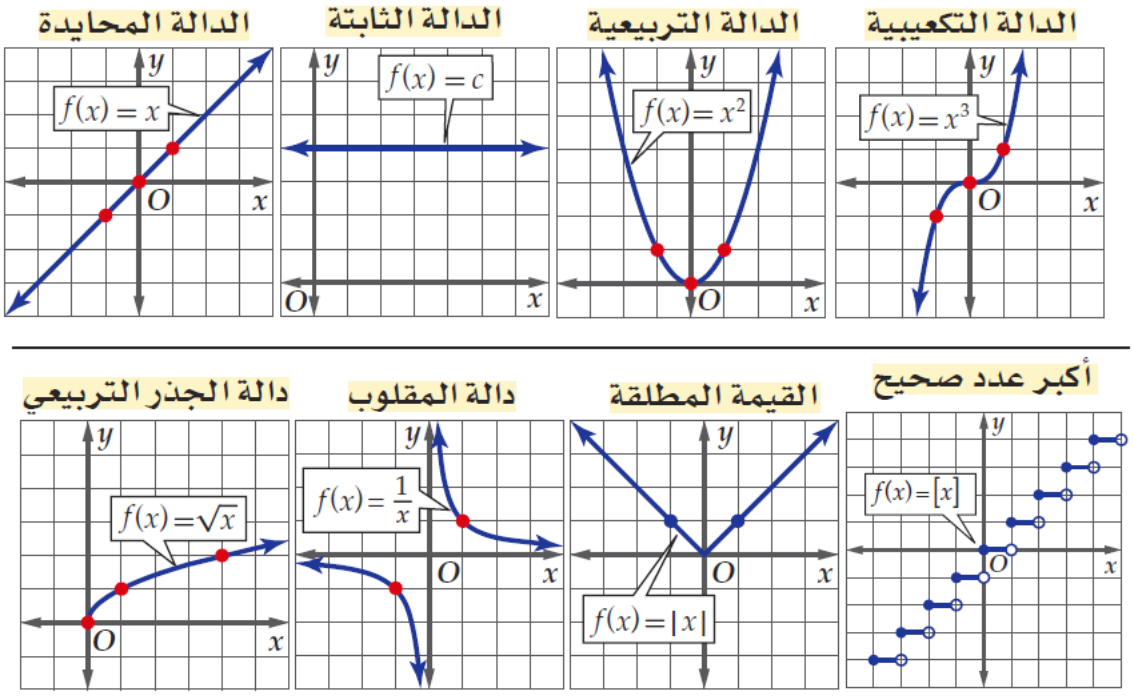
$f(7) = -0.5455(7)^2 + 7.09(7) + 21.45 = 44.35$

$= \frac{37.8 - 44.35}{10 - 7} = -2.18$ درجة في الشهر

ورقة عمل الثاني عشر العام | 1-5 الدوال الأصلية والتحويلات | الاسم:_____

في هذا الدرس سوف أتعلم: 1- تحليل الدوال الأصلية وتمثيلها بيانيا ووصفها. 2- تحديد التحويلات للدوال الأصلية وتمثيلها بيانيا.

الدوال الرئيسة

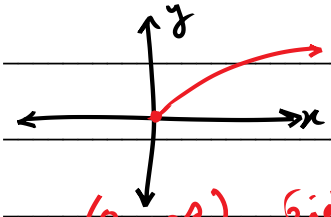


alllaaam@ya

وصف خصائص الدالة الأصلية

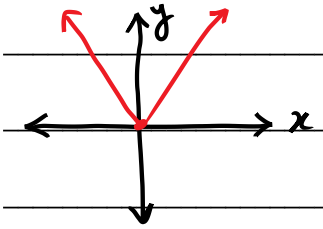
صف الخصائص التالية للتمثيل البياني للدالة الأصلية: المجال والمدى والتقاطعات والتماثل والاتصال والسلوك الطرفي وفترات تزايد/تناقص التمثيل البياني.

$f(x) = \sqrt{x}$



* المجال $[0,\infty)$ ، المدى $[0,\infty)$
* يقطع x و نفسه يقطع y عند 0 $(0,0)$
* المنحنى ليس متماثل لذا فإن الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* المنحنى متصل عند جميع قيم المجال.
* يبدأ المنحنى عند $x=0$ ، $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$
* المنحنى متزايد في الفترة $(0,\infty)$

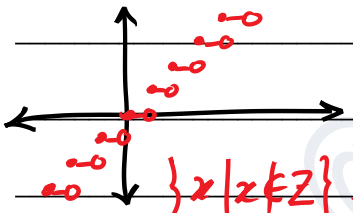
$f(x) = |x|$



* المجال $\mathbb{R}$ / المدى $[0,\infty)$
* الدالة متصل واحد نقط عند $(0,0)$
* الرسم متماثل حول محور y فإنها زوجية
* الدالة متصلة عند جميع قيم المجال

* $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$
* $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$
* الدالة متناقصة في الفترة $(-\infty,0)$ ومتزايدة في الفترة $(0,\infty)$

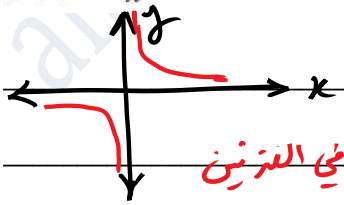
$f(x) = [x]$



* المجال $\mathbb{R}$ / المدى $\mathbb{Z}$
* الدالة تقطع محور y عند $(0,0)$ / وتقطع محور x عند $\{x \mid 0 \le x < 1, x \in R\}$
* الرسم غير متماثل لذا فالدالة ليست زوجية وليست فردية
* للدالة انفصال قفزي عند $\{x \mid x \in Z\}$
* $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ ، $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$

* الدالة ثابتة عند $\{x \mid x \notin Z\}$ ومتزايدة عند $\{x \mid x \in Z\}$

$f(x) = \frac{1}{x}$



* المجال $\{x \mid x \neq 0, x \in R\}$
* المدى $\{y \mid y \neq 0, y \in R\}$
* المنحنى لا يقطع أي من محوري x و y
* منحنى الدالة متماثل حول نقطة الأصل ولذلك فهي دالة فردية.
* للدالة انفصال لا نهائي عند $x=0$
* $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ ، $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$

* الدالة متناقصة في الفترتين $(-\infty,0)$ ، $(0,\infty)$

إزاحة التمثيل البياني

الإزاحة الرأسية

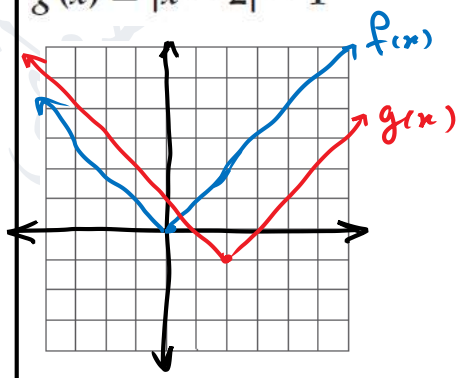
منحنى $g(x) = f(x) + k$ هو منحنى $f(x)$ مزاحًا:
- k وحدة إلى أعلى عندما $k > 0$.
- $|k|$ من الوحدات إلى أسفل عندما $k < 0$.

الإزاحة الأفقية

منحنى $g(x) = f(x - h)$ هو منحنى $f(x)$ مزاحًا:
- h من الوحدات إلى اليمين عندما $h > 0$.
- $|h|$ من الوحدات إلى اليسار عندما $h < 0$.

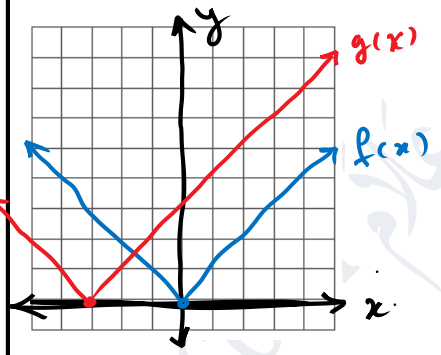
استعمل منحنى الدالة الرئيسة (الأم) $f(x) = |x|$ لتمثيل كلّ دالة من الدوال الآتية بيانيًّا:

$g(x) = |x - 2| - 1$



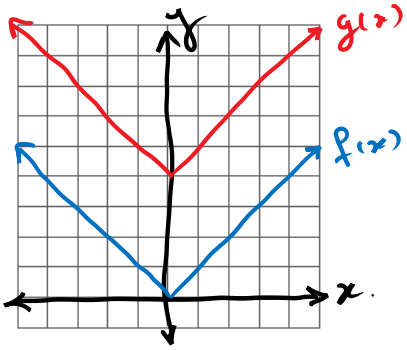
منحنى الدالة $g(x)$ هو منحنى الدالة $f(x) = |x|$ بعد إزاحة 2 لليمين ، 1 لأسفل

$g(x) = |x + 3|$



منحنى الدالة $g(x)$ هو منحنى الدالة $f(x) = |x|$ بعد إزاحة 3 وحدات لليسار

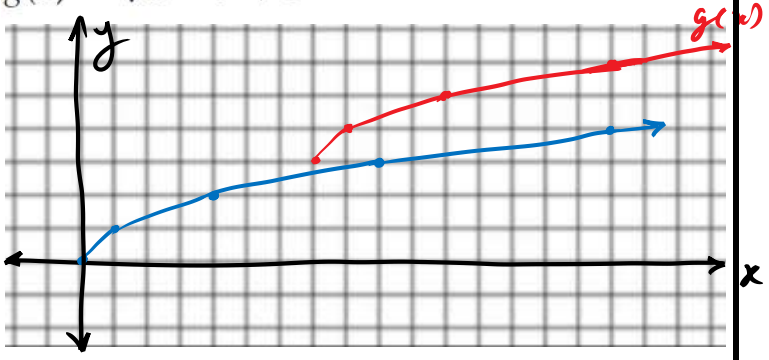
$g(x) = |x| + 4$



منحنى الدالة $g(x)$ هو منحنى الدالة $f(x) = |x|$ بعد إزاحة 4 وحدات لأعلى.

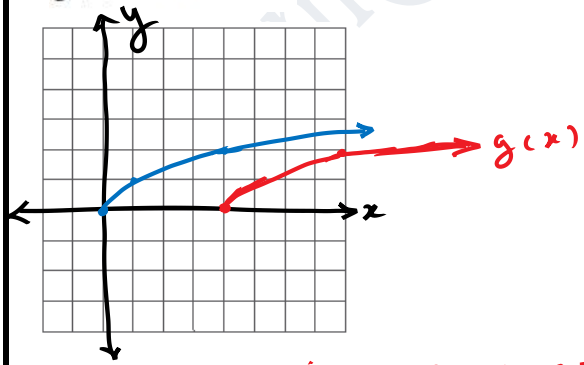
استعمل منحنى الدالة الرئيسة (الأم) $f(x) = \sqrt{x}$ لتمثيل كل من الدالتين الآتيتين:

$g(x) = \sqrt{x - 7} + 3$



منحنى الدالة $g(x)$ هو منحنى الدالة $f(x)$ بعد إزاحة 7 وحدات يمين ثم 3 لأعلى.

$g(x) = \sqrt{x - 4}$

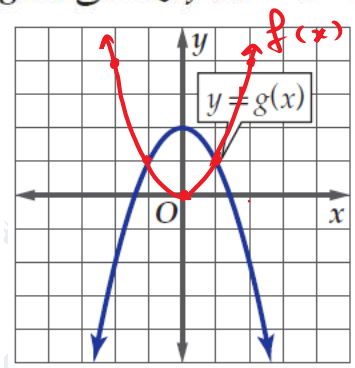


منحنى الدالة $g(x)$ هو منحنى الدالة $f(x)$ بعد إزاحة 4 وحدات لليمين

الانعكاس حول المحورين الإحداثيين

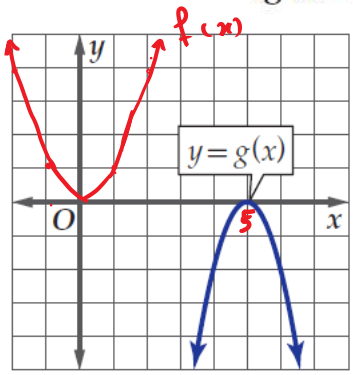
الانعكاس حول المحور x	الانعكاس حول المحور y
منحنى الدالة $g(x) = -f(x)$ هو انعكاس لمنحنى الدالة $f(x)$ حول المحور x.	منحنى الدالة $g(x) = f(-x)$ هو انعكاس لمنحنى الدالة $f(x)$ حول المحور y.

صف العلاقة بين منحنى الدالة $f(x) = x^2$ ومنحنى $g(x)$ في كل مما يأتي، ثم اكتب معادلة $g(x)$:



منحنى الدالة $g(x)$ هو انعكاس في محور x ثم إزاحة لأعلى 2 وحدة

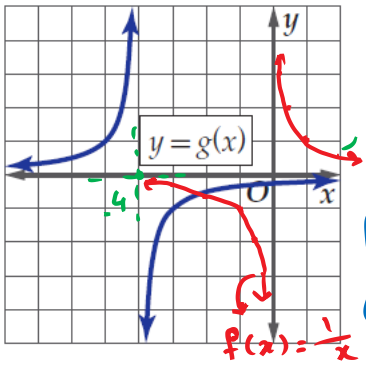
$\Rightarrow g(x) = -x^2 + 2$



منحنى الدالة $g(x)$ هو إزاحة 5 وحدات يمين و انعكاس في محور x

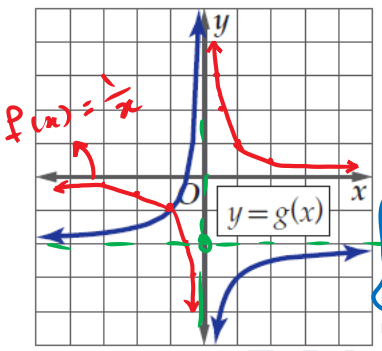
$\Rightarrow g(x) = -(x-5)^2$

صف العلاقة بين منحنيي $f(x) = \frac{1}{x}$ و $g(x)$ ثم اكتب معادلة $g(x)$ في كلٍّ من السؤالين الآتيين:



منحنى الدالة $g(x)$ هو انعكاس في محور x ثم إزاحة 4 وحدات يسار

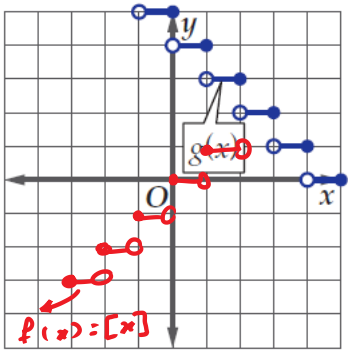
$g(x) = -\frac{1}{(x+4)}$



منحنى الدالة $g(x)$ هو انعكاس في محور x ثم إزاحة 2 لأسفل

$g(x) = -\frac{1}{x} - 2$

صف العلاقة بين منحنيي $f(x) = [x]$ و $g(x)$ في كلٍّ من الحالتين الآتيتين، ثم اكتب معادلة الدالة $g(x)$.



حل ① انعكاس في محور y ثم إزاحة 5 يمين

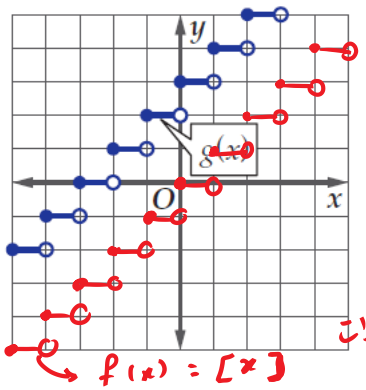
$\Rightarrow g(x) = [-(x-5)]$

حل ② إزاحة 5 يسار ثم انعكاس في محور y

$\Rightarrow g(x) = [-x+5]$

حل ③ انعكاس في محور y ثم إزاحة 5 لأعلى

$\Rightarrow g(x) = [-x] + 5$



منحنى الدالة $g(x)$ هو إزاحة 3 وحدات لليسار

$g(x) = [x+3]$

حل آخر: إزاحة لأعلى 3 وحدات

$\Rightarrow g(x) = [x] + 3$

مفهوم أساسي — التمدد الرأسي والتمدد الأفقي

التمدد الرأسي

إذا كان a عددًا حقيقيًّا موجبًا، فإن منحنى الدالة $g(x) = a\,f(x)$ هو:

- توسع رأسي لمنحنى $f(x)$، إذا كانت $a > 1$.
- تضيق رأسي لمنحنى $f(x)$، إذا كانت $0 < a < 1$.

انكماش (ضغط)

التمدد الأفقي

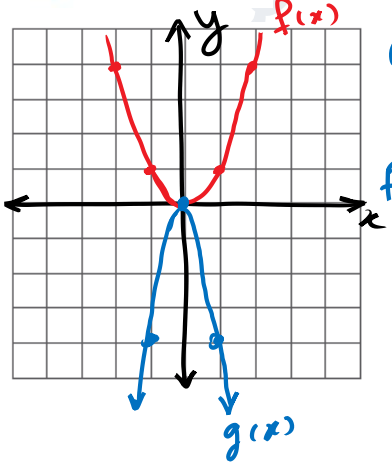
إذا كان a عددًا حقيقيًّا موجبًا، فإن منحنى الدالة $g(x) = f(ax)$ هو:

- تضيق أفقي لمنحنى $f(x)$، إذا كانت $a > 1$.
- توسع أفقي لمنحنى $f(x)$، إذا كانت $0 < a < 1$.

انكماش (ضغط)

عيِّن الدالة الرئيسة (الأم) $f(x)$ للدالة $g(x)$ في كل مما يأتي، ثم صف العلاقة بين المنحنيين، ومثلهما بيانيًّا في المستوى الإحداثي.

$g(x) = -(2x)^2$

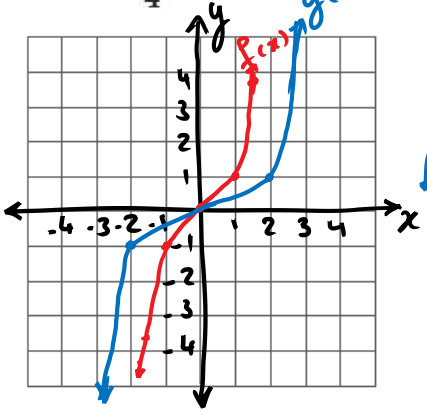


منحنى الدالة $g(x)$ هو انكماش رأسي فقي ثم انعكاس في محور x للدالة

$f(x) = x^2$

$2 > 1$

$g(x) = \frac{1}{4}x^3$

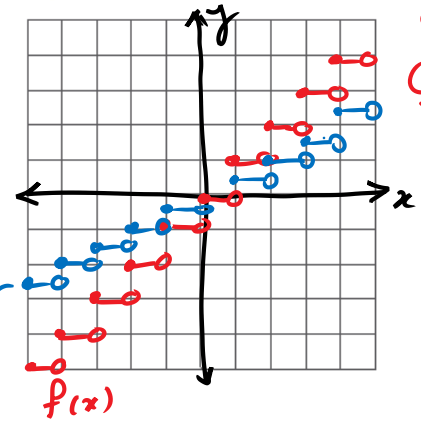


منحنى الدالة $g(x)$ هو انكماش رأسي للدالة

$f(x) = x^3$

لأن $0 < \frac{1}{4} < 1$

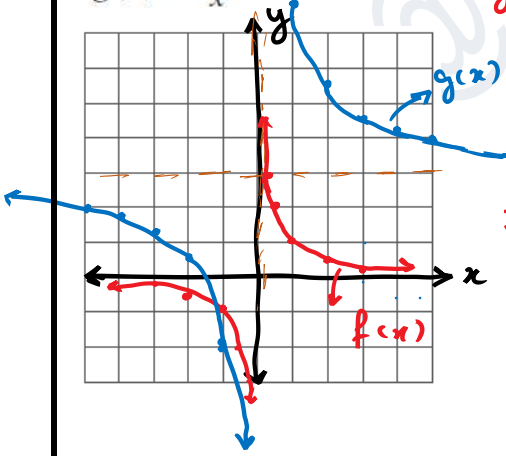
$g(x) = \frac{1}{2}[x]$



منحنى الدالة $g(x)$ هو انكماش رأسي للدالة

$f(x) = [x]$

$g(x) = \frac{5}{x} + 3$



منحنى الدالة $g(x)$ هو تمدد رأسي ثم إزاحة لأعلى 3 وحدات للدالة

$f(x) = \frac{1}{x}$

@yahoo.com

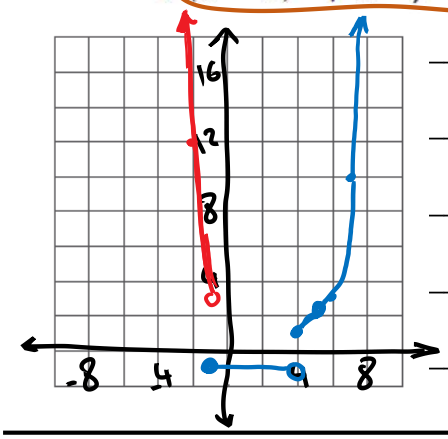
مثّل الدالة بيانيًّا:

$$f(x)=\begin{cases}3x^2 & , \ x<-1\\ -1 & , \ -1\le x<4\\ (x-5)^3+2 & , \ x\ge 4\end{cases}$$

x	-4	-3	-2	-1
y	48	27	12	3

x	-1	2	4
y	-1	-1	-1

x	4	5	6	7	8	...
y	1	2	3	10	29	

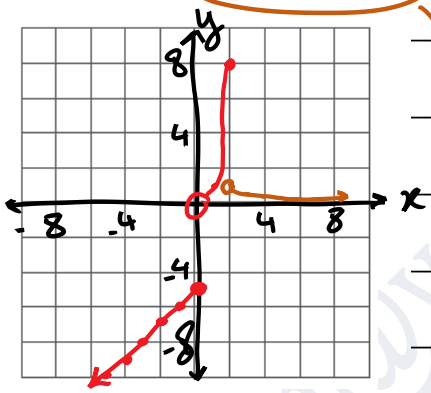


$$g(x)=\begin{cases}x-5 & , \ x\le 0\\ x^3 & , \ 0<x\le 2\\ \frac{2}{x} & , \ x>2\end{cases}$$

x	0	-1	-2	-3
y	-5	-6	-7	-8

x	0	1	2
y	0	1	8

x	2	3	4	5
y	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$



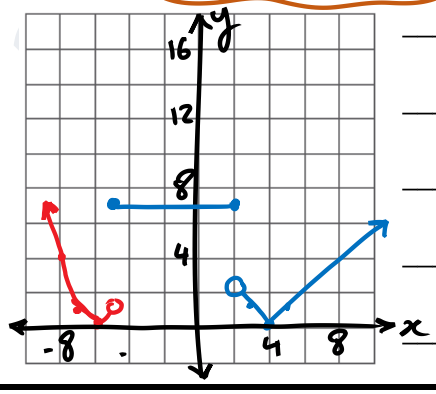


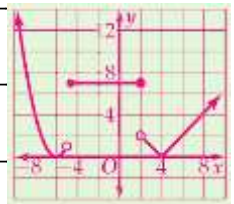
$$h(x)=\begin{cases}(x+6)^2 & , \ x<-5\\ 7 & , \ -5\le x\le 2\\ |4-x| & , \ x>2\end{cases}$$

x	-5	-6	-7	-8
y	1	0	1	4

x	-5	-4	0	2
y	7	7	7	7

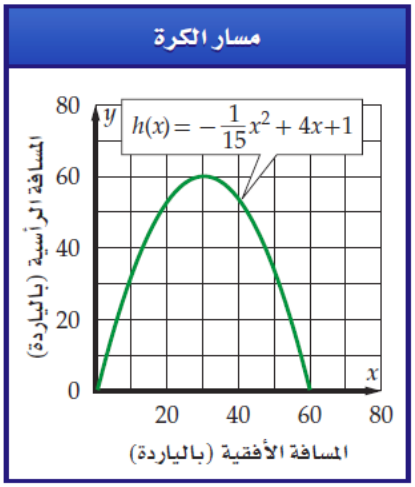
x	2	3	4	5
y	2	1	0	1





تحويلات الدوال

كرة قدم: ضرب لاعب كرة قدم، فكان مسارها معطى بالدالة $h(x) = -\frac{1}{15}x^2 + 4x + 1$ ، حيث $h(x)$ يمثل ارتفاع الكرة باليادرة عن سطح الأرض، وتمثل x المسافة الأفقية باليادرة التي تقطعها الكرة حيث $x = 0$ ترتبط بخط منتصف الملعب. صف التحويلات التي تمت على الدالة الرئيسة (الأم) $f(x) = x^2$ للحصول على $h(x)$.



$c = (\frac{b}{a})^2$

$= (-\frac{60}{2})^2$

$= 900$

$h(x) = -\frac{1}{15}(x^2 - 60x) + 1$

$= -\frac{1}{15}(x^2 - 60x + 900 - 900) + 1$

$= -\frac{1}{15}(x^2 - 60x + 900) + 60 + 1$

$= -\frac{1}{15}(x - 30)^2 + 61$

إزاحة 30 وحدة يمين ثم ضغط رأسي ثم انعكاس في محور x ثم إزاحة لأعلى 61 وحدة

كهرباء: إذا كانت شدة التيار $I(x)$ بالأمبير الذي يمر بجهاز DVD تعطى بالدالة $I(x) = \sqrt{\frac{x}{11}}$ ، حيث x القدرة بالواط والعدد 11 هو المقاومة بالأوم.

A) صف التحويلات التي تمت على الدالة $f(x) = \sqrt{x}$ للحصول على الدالة $I(x)$.

B) اكتب دالة تصف مرور تيار في مصباح مقاومته 15 أوم.

$I(x) = \sqrt{\frac{1}{11}(x)}$

A ← عمود أفقي

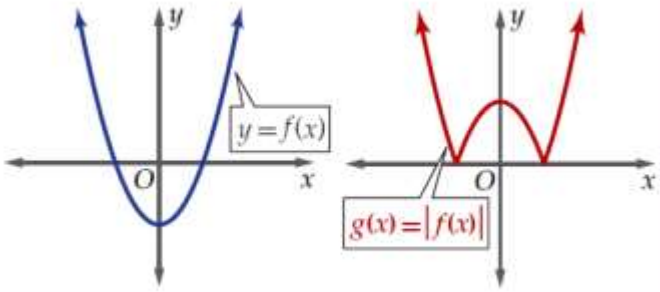
B

$I(x) = \sqrt{\frac{x}{15}}$

مفهوم أساسي — التحويلات الهندسية مع دوال القيمة المطلقة

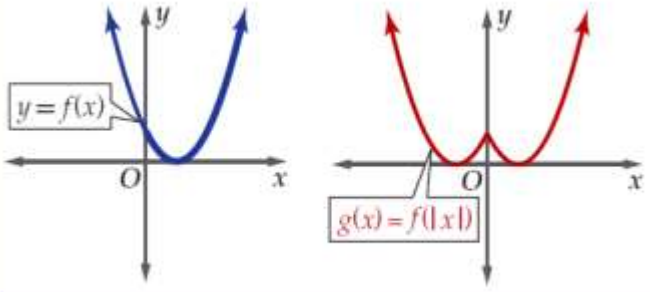
$g(x) = |f(x)|$

يُغير هذا التحويل الهندسي أي جزء من منحنى الدالة يقع تحت المحور x ليصبح فوقه بالانعكاس حول المحور x.

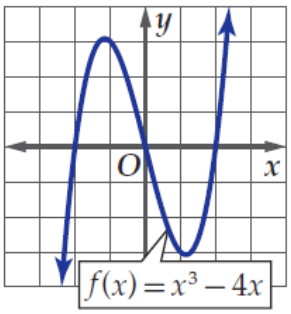


$g(x) = f(|x|)$

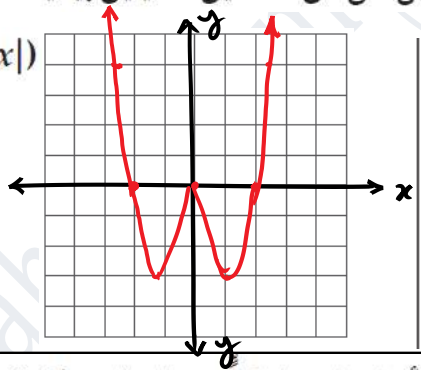
يغير هذا التحويل الهندسي جزء منحنى الدالة الموجود إلى يسار المحور y ويضع مكانه صورة جزء المنحنى الواقع إلى يمين المحور y بالانعكاس حول المحور y.



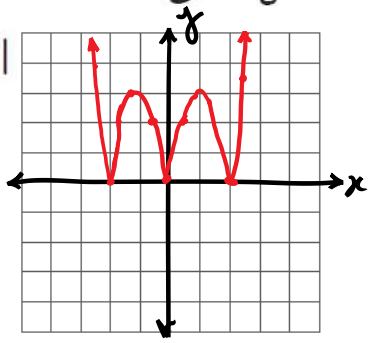
استعمل منحنى الدالة $f(x) = x^3 - 4x$ لتمثيل كل من الدالتين الآتيتين بيانيًّا:



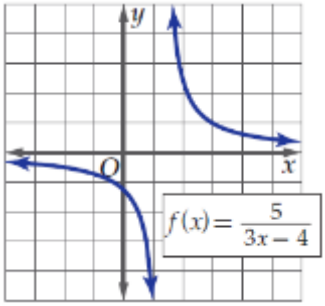
$h(x) = f(|x|)$

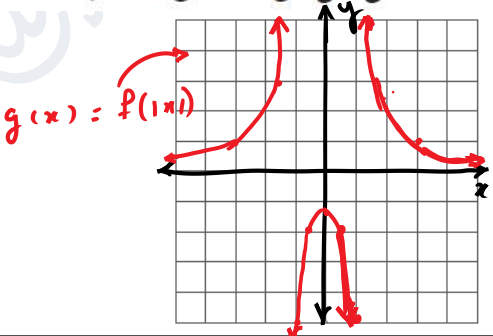


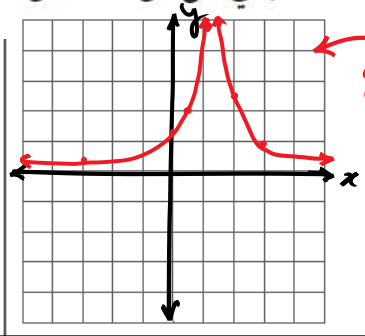
$g(x) = |f(x)|$

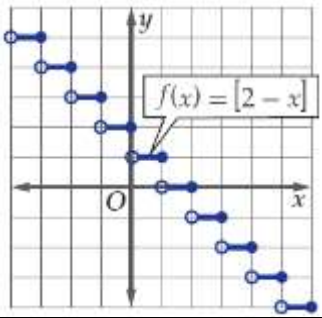


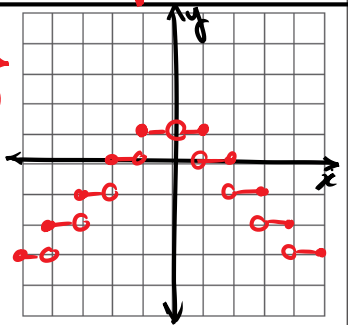
استعمل منحنى الدالة $f(x)$ في كلٍّ من الشكلين أدناه؛ لتمثيل كل من الدالتين $g(x) = |f(x)|$ و $h(x) = f(|x|)$ بيانيًّا:

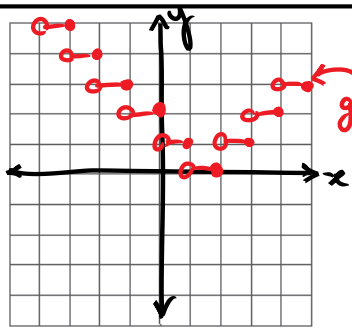












ورقة عمل الثاني عشر العام | 1-6 العمليات على الدوال وتركيب الدوال | الاسم: _____

في هذا الدرس سوف أتعلم: 1- إجراء العمليات على الدوال. 2- إيجاد تركيب الدوال.

مفهوم أساسي العمليات على الدوال

إذا كانت f, g دالتين يتقاطع مجالاهما، فإننا نعرف عمليات الجمع، والضرب، والطرح، والقسمة لجميع قيم x الموجودة في تقاطع المجالين على النحو الآتي:

الجمع: $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$ **الضرب:** $(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$

الطرح: $(f-g)(x)=f(x)-g(x)$ **القسمة:** $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}, g(x)\neq 0$

في كل من الحالات السابقة مجال الدالة الجديدة يساوي تقاطع مجالي الدالتين f و g، باستثناء القيم التي تجعل $g(x)=0$ في دالة القسمة.

العمليات على الدوال

إذا كانت $f(x)=x^2+4x, g(x)=\sqrt{x+2}, h(x)=3x-5$، فأوجد كلًّا من الدوال الآتيةِ، ثم حدد مجالها:

(a) $(f+g)(x)$

$(f+g)(x)=(x^2+4x)+\sqrt{x+2}$

$=x^2+4x+\sqrt{x+2}$

مجال $f(x)=(-\infty,\infty)$

مجال $g(x)$: $x+2\geq 0 \Rightarrow x\geq -2 \Rightarrow [-2,\infty)$

مجال $(f+g)$ هو $(-\infty,\infty)\cap[-2,\infty)=[-2,\infty)$

(b) $(f-h)(x)$

$(f-h)(x)=(x^2+4x)-(3x-5)$

$=x^2+x+5$

مجال f $(-\infty,\infty)$

مجال h $(-\infty,\infty)$

مجال $(f-h)$ هو $(-\infty,\infty)\cap(-\infty,\infty)=(-\infty,\infty)$

(c) $(f\cdot h)(x)$

$(f\cdot h)(x)=(x^2+4x)(3x-5)$

$=3x^3-5x^2+12x^2-20x$

$=3x^3+7x^2-20x$

مجال f $(-\infty,\infty)$ مجال h $(-\infty,\infty)$

مجال $(f\cdot h)$ هو $(-\infty,\infty)\cap(-\infty,\infty)$

$=(-\infty,\infty)$

(d) $\left(\frac{h}{f}\right)(x)$

$\left(\frac{h}{f}\right)(x)=\frac{3x-5}{x^2+4x}$

مجال h $(-\infty,\infty)$ / مجال f $(-\infty,\infty)$

أصفار الدالة $\left(\frac{h}{f}\right)$ $\Rightarrow \{0,-4\}$

$x^2+4x=0$

$x(x+4)=0$

$x=0, x=-4$

مجال $\left(\frac{h}{f}\right)$ هو $(-\infty,\infty)\cap(-\infty,\infty)-\{0,-4\}$

$=(-\infty,\infty)-\{0,-4\}$

almaam@yahoo.com

العمليات على الدوال

أوجد $(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$, $(f\cdot g)(x)$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ في كل مما يأتي، ثم أوجد مجال كل دالة من الدوال الناتجة.

$f(x)=x-4, g(x)=\sqrt{9-x^2}$

$(f+g)(x) = x-4+\sqrt{9-x^2}$

المجال $\Rightarrow$ $9-x^2 \geq 0$

$9 \geq x^2$

$3 \geq |x|$

$|x| \leq 3$

$-3 \leq x \leq 3 \Rightarrow D=[-3,3]$

$(f-g)(x) = x-4-\sqrt{9-x^2}$

المجال $D=[-3,3]$

$(f\cdot g)(x) = (x-4)\sqrt{9-x^2}$

$= x\sqrt{9-x^2} - 4\sqrt{9-x^2}$

المجال $\Rightarrow$ $D=[-3,3]$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x-4}{\sqrt{9-x^2}}$

المجال $\Rightarrow$ $9-x^2>0$

$9>x^2$

$3>|x|$

$|x|<3$

$-3<x<3$

المجال $\Rightarrow$ $D=(-3,3)$

$f(x)=x^2-6x-8, g(x)=\sqrt{x}$

$(f+g)(x) = x^2-6x-8+\sqrt{x}$

المجال $\Rightarrow$ $x \geq 0$

$D=[0,\infty)$

$(f-g)(x) = x^2-6x-8-\sqrt{x}$

المجال $\Rightarrow$ $D=[0,\infty)$

$(f\cdot g)(x) = (x^2-6x-8)\sqrt{x}$

$= x^2\sqrt{x} - 6x\sqrt{x} - 8\sqrt{x}$

المجال $\Rightarrow$ $D=[0,\infty)$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2-6x-8}{\sqrt{x}}$

المجال $\Rightarrow$ $x>0$

$D=(0,\infty)$

allaaam@yahoo.com عمل المدرس مصطفى علام

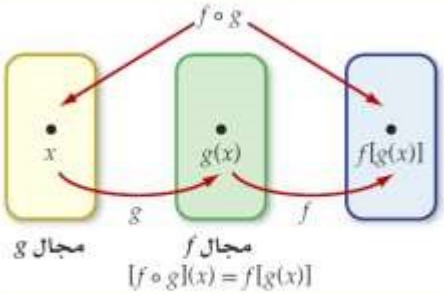
تركيب دالتين

مفهوم أساسي — تركيب دالتين

يعرف تركيب الدالتين f و g على النحو الآتي:

$$[f \circ g](x) = f[g(x)]$$

ويتكون مجال الدالة $f \circ g$ من جميع قيم x في مجال الدالة g على أن تكون $g(x)$ في مجال f.



تقرأ الدالة $f \circ g$ على النحو f تركيب g أو f بعد g، حيث تُطبَّق الدالة g أولًا ثم الدالة f.

إرشادات للدراسة

تحديد مجالي الدالتين:
من المهم تعرّف مجالي الدالتين قبل تركيبهما؛ لأن القيود على مجالات الدوال قد لا تكون واضحة بعد إجراء عملية التركيب وتبسيطها.

إذا كانت $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = x - 4$، فأوجد كلًّا مما يأتي:

(a) $[f \circ g](x)$

$(fog)(x) = f(g(x))$

$= (g(x))^2 + 1$

$= (x-4)^2 + 1$

$= x^2 - 8x + 16 + 1$

$= \boxed{x^2 - 8x + 17}$

(b) $[g \circ f](x)$

$(gof)(x) = g(f(x))$

$= (f(x)) - 4$

$= (x^2 + 1) - 4$

$= \boxed{x^2 - 3}$

(c) $[f \circ g](2)$

$= (fog)(x)$

$= x^2 - 8x + 17$

$fog(2)$

$= (2)^2 - 8(2) + 17$

$= \boxed{5}$

أوجد $[f \circ g](3)$, $[g \circ f](x)$, $[f \circ g](x)$ في كل مما يأتي: $f(x) = 3x + 1, g(x) = 5 - x^2$

$(fog)(x)$

$= f(g(x))$

$= 3(5 - x^2) + 1$

$= 15 - 3x^2 + 1$

$= \boxed{-3x^2 + 16}$

$(gof)(x)$

$= g(f(x))$

$= 5 - (3x+1)^2$

$= 5 - (9x^2 + 6x + 1)$

$= \boxed{-9x^2 - 6x + 4}$

$(fog)(3) = -3(3)^2 + 16$

$= -3(9) + 16$

$= -27 + 16$

$= \boxed{-11}$

$f(x) = 6x^2 - 4, g(x) = x + 2$

$(fog)(x)$

$= 6(x+2)^2 - 4$

$= 6(x^2 + 4x + 4) - 4$

$= 6x^2 + 24x + 24 - 4$

$= \boxed{6x^2 + 24x + 20}$

$(gof)(x)$

$= (6x^2 - 4) + 2$

$= \boxed{6x^2 - 2}$

$(fog)(3) =$

$= 6(3)^2 + 24(3) + 20$

$= 6(9) + 72 + 20$

$= 54 + 92$

$= \boxed{146}$

إيجاد دالة مركبة مجالها مقيد

عند وجود قيود على مجال f أو مجال g فإن مجال $f \circ g$ يكون مقيدًا بكل قيم x في مجال g التي تكون صورها $g(x)$ موجودةً في مجال f.

حدّد مجال الدالة $f \circ g$ متضمنًا القيود الضرورية، ثم أوجد $f \circ g$ في كل من الحالتين الآتيتين:

$f(x) = x^2 - 2, g(x) = \sqrt{x-3}$

نوجد في البداية مجال $g(x)$ ← $x - 3 \geq 0$

$x \geq 3$

$(f \circ g)(x) = (g(x))^2 - 2$ ← المجال ← $\mathbb{R}$ ← المجال المجدي

← مجال $(f \circ g)(x) \Rightarrow \{x : x \geq 3, x \in \mathbb{R}\}$

$(f \circ g)(x) = (g(x))^2 - 2$

$= (\sqrt{x-3})^2 - 2$

$= x - 3 - 2$

$= x - 5$

مع أن مجال $x-5$ هو $x \in \mathbb{R}$ ولكن مجال $(f \circ g)$ في شأننا مقيد بالشرط $x \geq 3$

$f(x) = \frac{1}{x+1}, g(x) = x^2 - 9$

نوجد في البداية مجال $g(x)$ ← المجال $x \in \mathbb{R}$

$(f \circ g)(x) = \frac{1}{g(x)+1}$ ← مجال $(f \circ g)(x)$

$g(x) + 1 \neq 0$

$g(x) \neq -1$

$x^2 - 9 \neq -1$

$x^2 \neq 8$

$x \neq \pm\sqrt{8}$

$x \neq \pm 2\sqrt{2}$

$\Rightarrow$ مجال $(f \circ g)(x) \Rightarrow \{x : x \neq \pm 2\sqrt{2}, x \in \mathbb{R}\}$

$(f \circ g)(x) = \frac{1}{x^2 - 9 + 1} = \frac{1}{x^2 - 8}$

$f(x) = \frac{5}{x}, g(x) = x^2 + x$

* نوجد مجال $g(x)$ ← المجال ← $x \in \mathbb{R}$

$f(g(x)) = \frac{5}{g(x)}$ ← المجال المجدي

$g(x) \neq 0$

$x^2 + x \neq 0$

$x(x+1) \neq 0$

$x \neq 0, x \neq -1$

$\Rightarrow$ مجال $(f \circ g)(x) \Rightarrow \{x : x \neq 0, x \neq -1, x \in \mathbb{R}\}$

$(f \circ g)(x) = \frac{5}{g(x)} = \frac{5}{x^2 + x}$

$f(x) = \sqrt{x+1}, g(x) = x^2 - 1$

* نوجد مجال $g(x)$ ← المجال ← $x = \mathbb{R}$

$f(g(x)) = \sqrt{(g(x)) + 1}$ ← المجال المجدي

$g(x) + 1 \geq 0$

$g(x) \geq -1$

$x^2 - 1 \geq -1$

$x^2 \geq 0$

$x \leq 0$ أو $x \geq 0$ ← $x = \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ مجال $(f \circ g)(x) = \{x : x \in \mathbb{R}\}$

$(f \circ g)(x) = \sqrt{g(x) + 1} = \sqrt{x^2 - 1 + 1}$

$= \sqrt{x^2} = |x|$

تحليل دالة مركبة

أوجد دالتين f, g بحيث يكون $h(x) = [f \circ g](x)$، وعلى ألّا تكون أي منهما الدالة المحايدة $I(x) = x$ في كلٍّ مما يأتي:

$h(x) = 2x^2 + 20x + 50$

$= 2(x^2 + 10x + 25)$

$\Rightarrow f(x) = 2x$

$g(x) = x^2 + 10x + 25$

$h(x) = 2x^2 + 20x + 50$

$= 2(x^2 + 10x + 25)$

$= 2(g(x)) = f(g(x)) = (f \circ g)(x)$

$h(x) = \sqrt{-7x} + 9x$

$h(x) = \sqrt{-7x} + \frac{9}{-7}(-7x)$

$g(x) = -7x$

$f(x) = \sqrt{x} - \frac{9}{7}x$

$h(x) = \sqrt{-7x} - \frac{9}{7}(-7x)$

$= \sqrt{g(x)} - \frac{9}{7}g(x)$

$= f(g(x)) = (f \circ g)(x)$

$h(x) = x^2 - 2x + 1$

$h(x) = (x-1)^2$

$g(x) = x - 1$

$f(x) = x^2$

$\Rightarrow h(x) = (x-1)^2 = (g(x))^2$

$= f(g(x))$

$= (f \circ g)(x)$

$h(x) = \frac{1}{x+7}$

$g(x) = x + 7$

$f(x) = \frac{1}{x}$

$h(x) = \frac{1}{g(x)}$

$= f(g(x))$

$= (f \circ g)(x)$

$h(x) = [-3(x-9)]$

$g(x) = x - 9$

$f(x) = [-3x]$

$h(x) = [-3(g(x))]$

$= f(g(x))$

$= (f \circ g)(x)$

$h(x) = \frac{\sqrt{4+x}}{x-2}$

$h(x) = \frac{\sqrt{4+x}}{x+4-2-4}$

$g(x) = x + 4$

$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-6}$

$h(x) = \frac{\sqrt{4+x}}{x+4-6}$

$= \frac{\sqrt{g(x)}}{g(x)-6}$

$= f(g(x))$

$= (f \circ g)(x)$

تركيب دوال من الحياة اليومية

مؤثرات حركية : تُصمَّمُ إحدى ألعاب الحاسوب بحيث تبدأ بصورة مستطيلة بعداها 60 بكسل في 20 بكسل. ثم يزداد كل بُعد بمقدار 15 بكسل لكل ثانية.

a) أوجد دالتين تعطي إحداهما مساحة المستطيل A كدالة في عرضه L، وتعطي الأخرى عرضه بعد t ثانية.

b) أوجد $A \circ L$. وماذا تمثل هذه الدالة؟

c) كم من الوقت يلزم لتصبح مساحة المستطيل 3 أضعاف مساحته الأصلية؟



a) بدلالة العرض L فإن الطول $L+40$ حيث $L \geq 20$

$$A(L) = L(L+40) = L^2 + 40L$$

وبدأ العرض يزداد 15 بكسل لكل ثانية ←

$$L(t) = 20 + 15t$$

b)

$$(A \circ L)(t) = (L(t))^2 + 40(L(t)) = (20+15t)^2 + 40(20+15t)$$

$$= 400 + 600t + 225t^2 + 800 + 600t = 225t^2 + 1200t + 1200$$

وتمثل هذه الدالة مساحة المستطيل كدالة في الزمن.

c)

$$(A \circ L)(t) = 3(60 \times 20) = 3600 \Rightarrow 3600 = 225t^2 + 1200t + 1200$$

$$\Rightarrow 225t^2 + 1200t - 2400 = 0 \Rightarrow t = \frac{-1200 \pm \sqrt{(1200)^2 - 4(225)(-2400)}}{2(225)}$$

$t_1 = 1.55$ ✓ مساحة المستطيل تتضاعف 3 مرات بعد مرور 1.55 ثانية.

$t_2 = -6.88$ مرفوض

أعمال : أعلن محل تجاري عن خصم مقداره 15% على ثمن أجهزة الحاسوب لطلاب الجامعات، كما وزّع قسائم يستفيد حاملها بخصم مقداره 100 ريال من ثمن الحاسوب.

5A) عبّر عن هذه البيانات بدالتين c و d.

5B) أوجد $[c \circ d](x)$ و $[d \circ c](x)$. وماذا يعني كلٌّ منهما؟

5C) أي التركيبين $c \circ d$ أو $d \circ c$ يعطي سعرًا أقل؟ وضح إجابتك.

5A) x البلغ الأصلي

البلغ بعد الخصم $d(x) = 0.85x$

القيمة النهائية $c(x) = x - 100$

x قيمة الفاتورة

بعد القسيمة

5B)

$$(c \circ d)(x) = c(d(x)) = (0.85x) - 100 = 0.85x - 100$$

تمثل السعر بالاستفادة من الخصم أولاً ثم القسيمة.

$$(d \circ c)(x) = d(c(x)) = 0.85(x - 100) = 0.85x - 85$$

تمثل السعر بالاستفادة من القسيمة أولاً ثم الخصم.

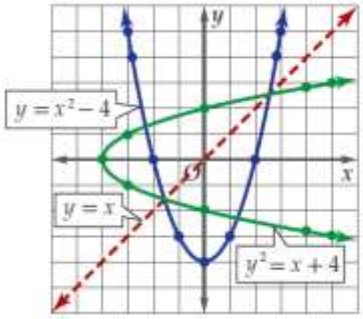
5C) التركيب $(c \circ d)(x)$ يعطي سعرًا أقل.

مثال ← إذا كانت الفاتورة الأصلية 1000

$$\Rightarrow (c \circ d)(1000) = 750 \text{ درهم} \quad \text{و} \quad (d \circ c)(1000) = 765 \text{ درهم}$$

ورقة عمل الثاني عشر العام | 1-7 العلاقات والدوال العكسية | الاسم: _____

في هذا الدرس سوف أتعلم: 1- استخدام اختبار الخط الأفقي على منحنى الدالة لتحديد إن كان لدالة ما دالة عكسية أم لا. 2- إيجاد الدوال العكسية جبريا وبيانيا.

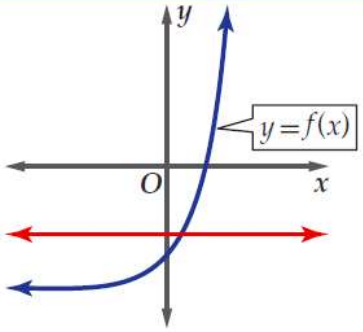


الدالة العكسية: يقال: إن كلًا من العلاقتين A, B **علاقة عكسية** للأخرى إذا وفقط إذا تحقق الشرط التالي:
إذا كان الزوج المرتب (a, b) ينتمي إلى إحدى العلاقتين؛ فإن الزوج المرتب (b, a) ينتمي إلى العلاقة الأخرى.
وإذا مُثِّلت العلاقة بمعادلة، فيمكن إيجاد علاقتها العكسية بتبديل المتغير المستقل بالمتغير التابع.

العلاقتين المتعاكستين هي انعكاس للأخرى حول المستقيم $y = x$.

ليس من الضروري أن تكون العلاقة العكسية دالة.

مفهوم أساسي — اختبار الخط الأفقي



التعبير اللفظي: يوجد للدالة f دالة عكسية f^{-1} إذا وفقط إذا كان كل خط أفقي يتقاطع مع منحنى الدالة عند نقطة واحدة على الأكثر.

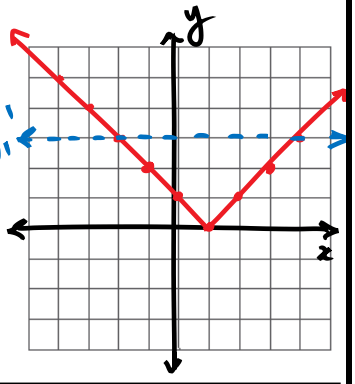
مثال: بما أنه لا يوجد خط أفقي يقطع منحنى الدالة f بأكثر من نقطة، فإن الدالة العكسية f^{-1} موجودة.

تطبيق اختبار الخط الأفقي

مثّل كلًا من الدوال الآتية بيانيًا باستعمال الحاسبة البيانية، ثم طبّق اختبار الخط الأفقي لتحديد إن كانت الدالة العكسية موجودة أم لا.

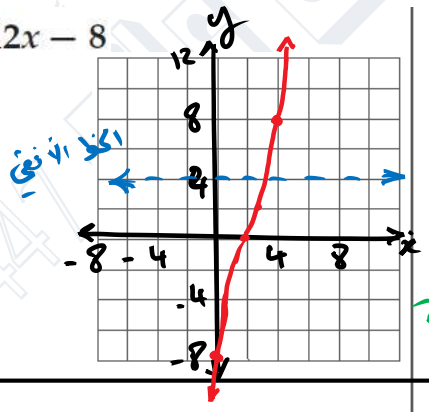
$f(x) = |x - 1|$

من الرسم نرى أنه هناك خط أفقي يقطع المنحنى $f(x)$ أكثر من مرة وعليه فإن f^{-1} غير موجودة



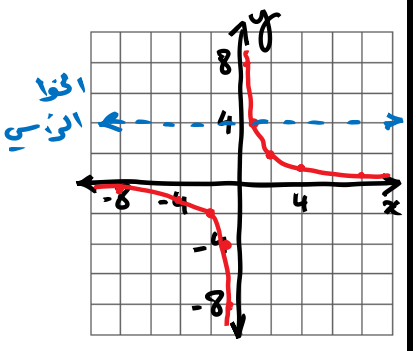
$g(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$

من الرسم يتضح أنه لا يوجد خط أفقي يقطع المنحنى أكثر من مرة وعليه فإن g^{-1} موجودة



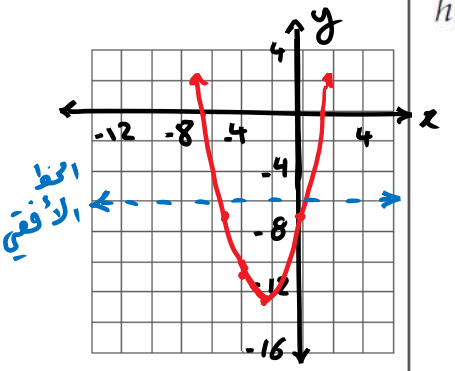
$h(x) = \frac{4}{x}$

لا يوجد أي خط أفقي يقطع منحنى الدالة $h(x)$ أكثر من مرة وعليه فإن h^{-1} موجودة



$f(x) = x^2 + 5x - 7$

الخط الأفقي يقطع منحنى الدالة $f(x)$ في أكثر من نقطة وعليه فإن f^{-1} غير موجودة.



إيجاد الدوال العكسيّة جبريًا

مفهوم أساسي — إيجاد الدالة العكسية

الخطوة 1: تحقّق من وجود دالة عكسية للدالة المعطاة بالتحقق من أنها متباينة بالاعتماد على اختبار الخط الأفقي.

الخطوة 2: ضع y مكان $f(x)$، ثم بدّل موقعي x, y.

الخطوة 3: حل المعادلة بالنسبة للمتغير y، ثم ضع $f^{-1}(x)$ مكان y.

الخطوة 4: اذكر أية شروط على مجال f^{-1}. وبيّن أن مجال f يساوي مدى f^{-1}، وأن مدى f يساوي مجال f^{-1}.

في كل مما يأتي أوجد الدالة العكسية f^{-1} إن أمكن، وحدد مجالها والقيود عليه، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا فاكتب غير موجودة.

1) $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$

اجتازت f اختبار الخط الأفقي وبالتالي هي واحد لواحد وعليه f^{-1} موجودة.

مجال f ← $x \neq -2$

مدى f ← $y \neq 1$

$x = \frac{y-1}{y+2}$

$x(y+2) = y-1$

$xy + 2x = y-1$

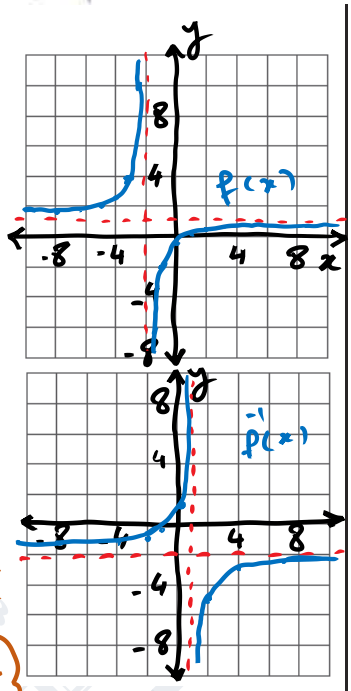
$xy - y = -1-2x$

$y(x-1) = -1-2x$

$y = \frac{-1-2x}{x-1}$

$f^{-1}(x) = \frac{-1-2x}{x-1}$

من رسم f^{-1}: $D \Rightarrow x \neq 1$، $R \Rightarrow y \neq -2$



2) $f(x) = -16 + x^3$

اجتازت f اختبار الخط الأفقي وبالتالي هي واحد لواحد وعليه f^{-1} موجودة.

f مجال ← $x \in R$

f مدى ← $y \in R$

$x = -16 + y^3$

$x + 16 = y^3$

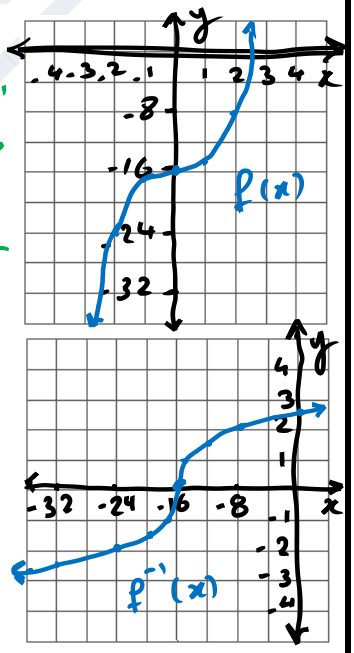
$\sqrt[3]{x+16} = y$

$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+16}$

من رسم f^{-1}

$D \Rightarrow x \in R$

$R \Rightarrow y \in R$



3) $f(x) = \sqrt{x-4}$

اجتازت f اختبار الخط الأفقي وبالتالي هي واحد لواحد وعليه فإن f^{-1} موجودة

$D = [4, \infty)$

$R = [0, \infty)$

$x = \sqrt{y-4}$

$x^2 = y-4$

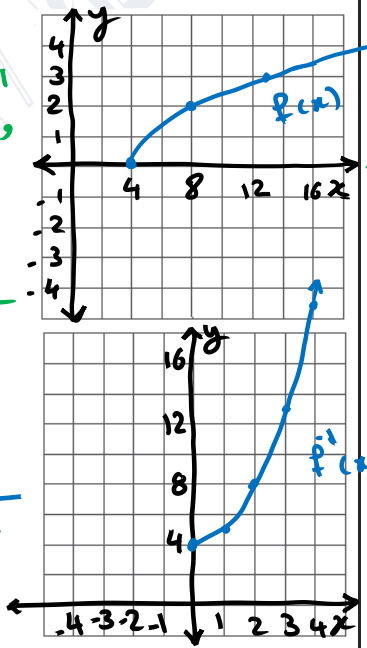
$y = x^2+4$

$f^{-1}(x) = x^2+4$

من رسم f^{-1}

$D = [0, \infty)$

$R = [4, \infty)$



4) $f(x) = \frac{x+7}{x}$ $D \Rightarrow x \neq 0$ $R \Rightarrow y \neq 1$

اجتازت الدالة f اختبار الخط الأفقي بالتالي فهي واحد لواحد وعليه فإن f^{-1} موجودة

$x = \frac{y+7}{y}$

$xy = y+7$

$xy - y = 7$

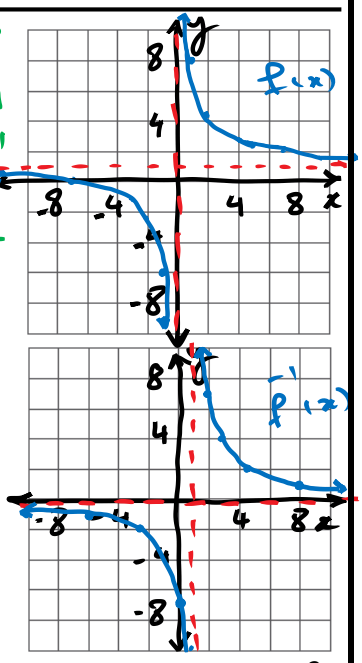
$y(x-1) = 7$

$y = \frac{7}{x-1}$

من رسم f^{-1}

$D \Rightarrow x \neq 1$

$R \Rightarrow y \neq 0$



ملاحظة: مجال ومدى الدالة الأصلية = مدى ومجال الدالة العكسية (على الترتيب)

$f(x)$ $f^{-1}(x)$

مجال ↔ مدى

مدى ↔ مجال

إثبات صحة الدوال العكسية

مفهوم أساسي تركيب الدالة ودالتها العكسية

تكون كل من الدالتين f و f^{-1}، دالة عكسية للأخرى، إذا وفقط إذا تحقق الشرطان الآتيان:

- $f[f^{-1}(x)] = x$ لجميع قيم x في مجال $f^{-1}(x)$.
- $f^{-1}[f(x)] = x$ لجميع قيم x في مجال $f(x)$.

أثبت جبريًا أن كلًّا من الدالتين f, g تمثل دالة عكسية للأخرى في كل مما يأتي:

$f(x) = \frac{6}{x-4}$ و $g(x) = \frac{6}{x} + 4$

$(f \circ g)(x) = \frac{6}{g(x) - 4}$

$= \frac{6}{(\frac{6}{x} + 4) - 4}$

$= \frac{6}{\frac{6}{x}}$

$= x$

$(g \circ f)(x) = \frac{6}{f(x)} + 4$

$= \frac{6}{\frac{6}{x-4}} + 4$

$= (x - 4) + 4$

$= x$

$\therefore (f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = x$

فإن كلًّا من f, g تمثل دالة عكسية للأخرى.

$f(x) = 18 - 3x, g(x) = 6 - \frac{x}{3}$

$(f \circ g)(x) = 18 - 3(g(x))$

$= 18 - 3[6 - \frac{x}{3}]$

$= 18 - 18 + x$

$= x$

$(g \circ f)(x) = 6 - \frac{f(x)}{3}$

$= 6 - \frac{18 - 3x}{3}$

$= 6 - (\frac{18}{3} - \frac{3}{3}x)$

$= 6 - (6 - x)$

$= 6 - 6 + x$

$= x$

$\therefore (f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = x$

فإن كلًّا من f, g تمثل دالة عكسية للأخرى.

$f(x) = x^2 + 10, x \geq 0, g(x) = \sqrt{x - 10}$

$(f \circ g)(x) = (g(x))^2 + 10$

$= (\sqrt{x - 10})^2 + 10$

$= x - 10 + 10$

$= x$

$(g \circ f)(x) = \sqrt{f(x) - 10}$

$= \sqrt{x^2 + 10 - 10}$

$= \sqrt{x^2}$

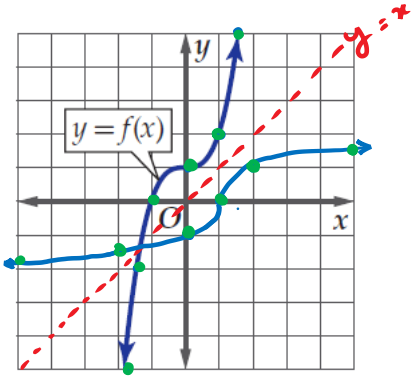
$= x$

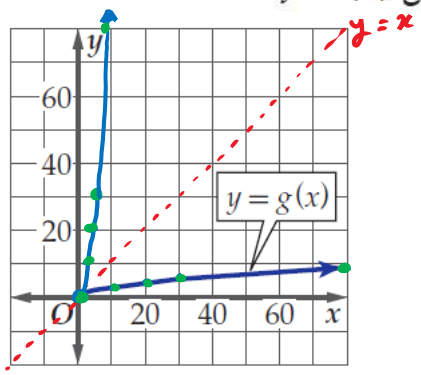
$\therefore (f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = x$

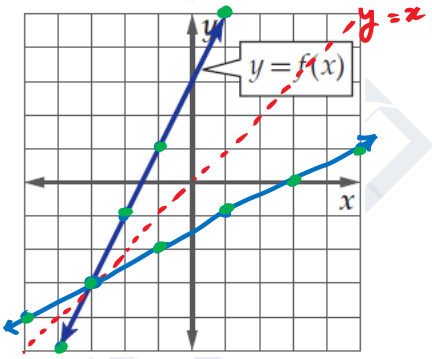
فإن كلًّا من f, g تمثل دالة عكسية للأخرى.

إيجاد الدوال العكسية بيانيًا

استعمل التمثيل البياني للدالة $f(x)$ لتمثيل $f^{-1}(x)$.







استخدام الدالة العكسية من الحياة اليومية

أعمال: يتقاضى شخص 16 ريالًا عن كل ساعة عمل، ويعمل في الأسبوع عددًا من الساعات لا يقل عن 40 ساعة ولا يزيد على 105 ساعات، ويتقاضى أجرًا إضافيًا مقداره 24 ريالًا عن كل ساعة عمل إضافية تزيد على الـ40 ساعة. ويمكن حساب دخله الأسبوعي مقابل x ساعة عمل بالدالة $f(x) = 640 + 24(x - 40)$.

a) أثبت أن $f^{-1}(x)$ موجودة، ثمَّ أوجدها.

b) ماذا تمثّل كل من x و $f^{-1}(x)$ في الدالة العكسية؟

c) حدّد القيود المفروضة على مجال $f(x)$ ومجال $f^{-1}(x)$ إن وجدت؟ وضّح إجابتك.

d) أوجد عدد الساعات التي عملها الشخص في أسبوع كان دخله فيه 760 ريالًا.

a) $f(x) = 24x - 320$ بعد التبسيط

دالة خطية والمعامل خلية فإن f^{-1} موجودة.

$\Rightarrow x = 24y - 320$

$\Rightarrow y = \frac{x + 320}{24}$

$f^{-1}(x) = \frac{x + 320}{24}$

b) x تمثل الدخل الأسبوعي، $f^{-1}(x)$ تمثل عدد ساعات العمل في الأسبوع.

c) مجال $f(x)$ هو عدد ساعات العمل الممكنة $\Leftarrow x \in [40, 105]$

مجال $f^{-1}(x)$ هو الدخل الأسبوعي $\Leftarrow x \in [640, 2200]$

أقل دخل عند عمل 40 ساعة $\Leftarrow$ 640 درهم

أكبر دخل عند عمل 105 ساعات $\Leftarrow$ 2200 درهم

d) نعوض في $f^{-1}(x)$ $\Leftarrow$ $f^{-1}(760) = \frac{760 + 320}{24} = 45$ ساعة

توفير: يتبقى لأحمد بعد سداد أقساط منزله وبعض الالتزامات 65% من راتبه الشهري، فإذا خصّص منها 1800 ريال لنفقات المعيشة، وقدّر أن بإمكانه توفير 20% من المبلغ المتبقي تقريبًا، فإن مقدار التوفير الشهري يعطى بالدالة: $f(x) = 0.2(0.65x - 1800)$، حيث x الراتب الشهري.

5A) أثبت أن $f^{-1}(x)$ موجودة، ثم أوجدها.

5B) ماذا تمثّل كل من x, $f^{-1}(x)$ في الدالة العكسية؟

5C) حدد أية قيود على كل من مجال $f(x)$, $f^{-1}(x)$ إن وجدت. وبرّر إجابتك.

5D) إذا وفّر أحمد 500 ريالًا في الشهر، فأوجد راتبه الشهري.

5A) $f(x) = 0.13x - 360$ مبسط

دالة خطية والمعامل لا يساوي الصفر فإن $f^{-1}(x)$ موجودة.

$\Rightarrow x = 0.13y - 360$

$\Rightarrow y = \frac{x + 360}{0.13} = f^{-1}(x)$

5B) x تمثل مقدار التوفير الشهري، $f^{-1}(x)$ تمثل الراتب الشهري.

5C) مجال $f(x)$ هو قيم x التي تجعل التوفير ≥ 0 $\Leftarrow 0.13x - 360 \geq 0$ $\Leftarrow x \geq 2769.23$

مجال $f^{-1}(x)$ التوفير الشهري $[0, \infty)$

5D) $f^{-1}(500) = \frac{500 + 360}{0.13} = 6615.38$ درهم

مع تحياتي / مصطفى علام