



الوحدة 2



دوال القوة والدوال كثيرة الحدود والدوال النسبية



ورقة عمل الثاني عشر العام

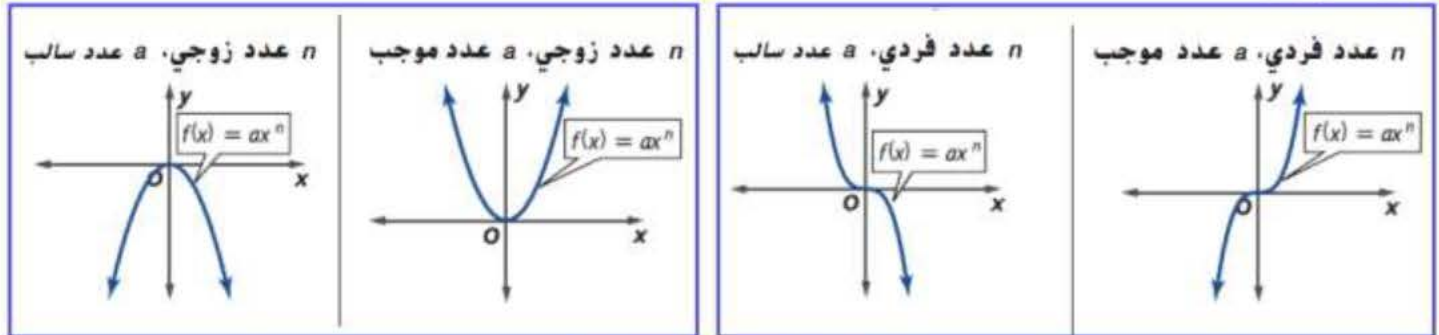
2-1 دوال القوة والدوال الجذرية

الاسم: _____

في هذا الدرس سوف نتعلم:

1- تمثيل دوال القوة بيانياً وتحليلها.

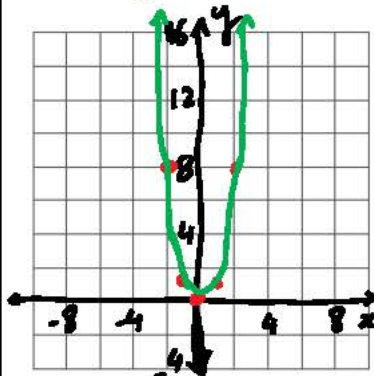
2- تمثيل الدوال الجذرية بيانياً وتحليلها وحل المعادلات الجذرية.

دالة القوة هي دالة تأخذ الصورة $f(x) = ax^n$ ، حيث a و n عدنان حقيقيان ثابتان غير الصفر.

تحليل الدوال أحادية الحد

مثّل كل دالة بيانياً وحللها. وضح المجال والهمدي والتناظرات والسلوك الطرفي والاتصال، وفترات تزايد أو تناقص الدالة.

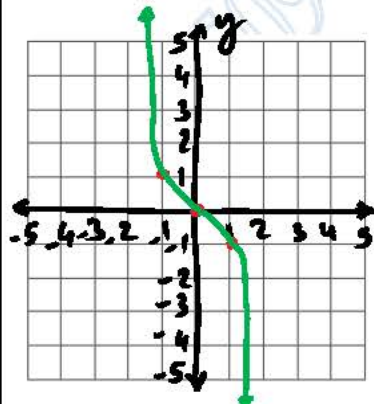
$$f(x) = \frac{1}{2}x^4$$



x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	40.5	8	0.5	0	0.5	8	40.5

الزمن (0,0) ←
المجال ← $x \in (-\infty, \infty)$ / $y \in (0, \infty)$
الدالة متناظرة حول محور y ولذا فإن الدالة زوجية.
السلوك الطرفي: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$ ($\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$)
الاتصال/ متصلة على $(-\infty, \infty)$
متناظرة في $(-\infty, 0)$ متزايدة في $x \in (0, \infty)$

$$f(x) = -x^7$$

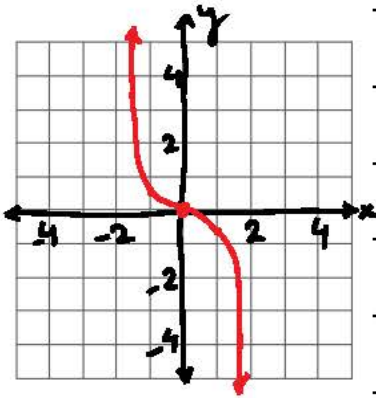


x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	2187	128	1	0	-1	-128	-2187

من فصول أكبر من جدول
المجال ← $(-\infty, \infty)$ / $(-\infty, \infty)$
الدالة متناظرة في نقطة الأصل (0,0) ولذا فإن الدالة فردية.
السلوك الطرفي: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$ ($\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$)
الاتصال/ الدالة متصلة على $(-\infty, \infty)$
الدالة متناقص على مجالها $(-\infty, \infty)$

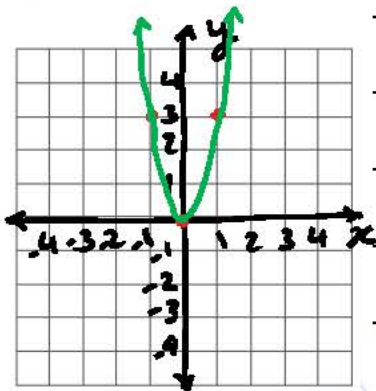
مثل كل دالة بيانيًا وحللها. وضح المجال والمدى والتناظرات والسلوك الطرفي والاتصال، وفترات تزايد أو تناقص الدالة.

$$f(x) = -\frac{2}{3}x^5$$



x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	162	21.3	0.6	0	-0.6	-21.3	-162
المجال	$(-\infty, \infty)$ / $(-\infty, \infty)$						
التناظر	متناظر حول نقطة الأصل $(0,0)$ ولذلك فالدالة فردية.						
السلوك الطرفي	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$ / $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$						
الاتصال	متصلة على $(-\infty, \infty)$						
تناقص	متناقص على مجالها $(-\infty, \infty)$						

$$f(x) = 3x^6$$

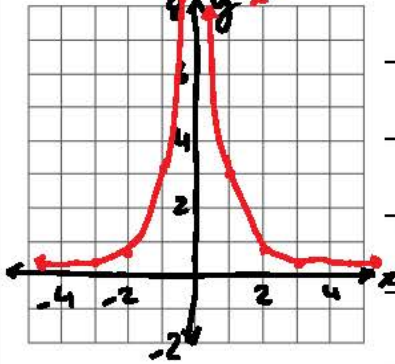


x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	2187	192	3	0	3	192	2187
المجال	$(-\infty, \infty)$ / $(-\infty, \infty)$						
التناظر	متناظر حول محور y ولذلك فالدالة زوجية.						
السلوك الطرفي	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$ / $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$						
متصلة	متصلة على $(-\infty, \infty)$						
متزايدة	متزايدة $(0, \infty)$ / $(-\infty, 0)$						

الدوال ذات الأسس السالبة

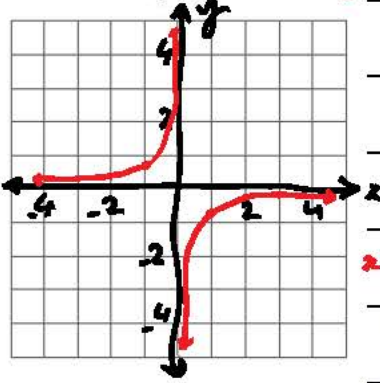
مثّل كل دالة بيانيًا وحلّلها. وضح المجال والمدى والتناظرات والسلوك الطرفي والاتصال، وفترات تزايد أو تناقص الدالة.

$$f(x) = 3x^{-2} = \frac{3}{x^2}$$



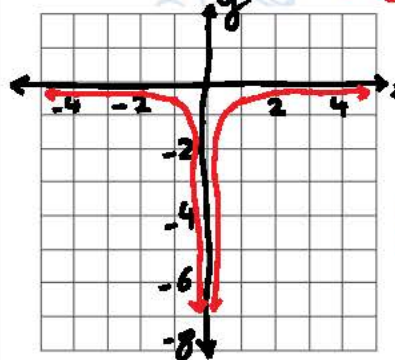
1. تكون جدول
2. المجال $\{x: x \neq 0, x \in \mathbb{R}\}$ المدى $(0, \infty)$
3. الدالة متناظرة في محور y ولذلك فالدالة زوجية.
4. السلوك الطرفي: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ / $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$
5. انفصال لانهائي عند $x = 0$
6. متزايدة في $(-\infty, 0)$ / متناقصة في $(0, \infty)$

$$f(x) = -\frac{3}{4}x^{-5} = -\frac{3}{4} \left(\frac{1}{x^5}\right)$$



1. تكون جدول
2. المجال $\mathbb{R}$ المدى $(-\infty, \infty) - \{0\}$
3. الدالة متناظرة في نقطة الأصل $(0,0)$ ولذلك فهي فردية.
4. السلوك الطرفي: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ / $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$
5. انفصال لانهائي عند $x = 0$
6. متزايدة في $(-\infty, 0)$ و $(0, \infty)$

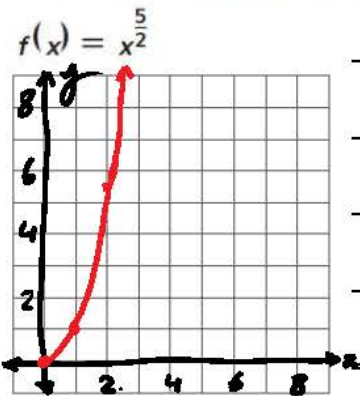
$$f(x) = -\frac{1}{2}x^{-4} = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{x^4}\right)$$



1. تكون جدول
2. المجال $\mathbb{R}$ المدى $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
3. الدالة متناظرة في محور y ولذلك فالدالة زوجية.
4. السلوك الطرفي: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ / $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$
5. انفصال لانهائي عند $x = 0$
6. متناقصة في $(-\infty, 0)$ / متزايدة في $(0, \infty)$

الأسس النسبية

مثّل كل دالة بيانيًا وحللها. وضح المجال والمدى ومقاطع التقاطع والسلوك الطرفي والاتصال، وفترات تزايد أو تناقص الدالة.



١) نذكر الأسس النسبية مقامه زوجي نقسم على القيم الغير سالبة.

x	0	1	2	3	4	5	6
y	0	1	5.66	15.59	32	55.9	88.18

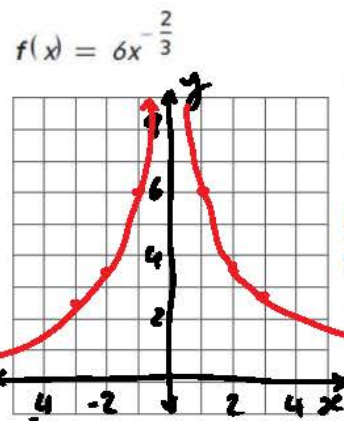
٢) المجال: $[0, \infty)$

٣) يتقاطع محور x ومحور y في النقطة $(0,0)$

٤) نهاية المثلثي $(0,0)$ و $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$

٥) متصلة على مجالها $[0, \infty)$

٦) متزايدة في $(0, \infty)$



١) نذكر الأسس النسبية مقامه زوجي نقسم على القيم الغير سالبة.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	2.78	3.78	6	infinity	6	3.78	2.78

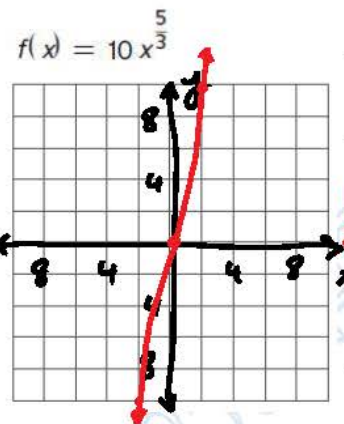
٢) المجال: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ ، المدى: $(0, \infty)$

٣) لا يتقاطع أيًا من محوري x و y

٤) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ / $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$

٥) انفصال لا نهائي عند $x=0$

٦) متزايدة في $(-\infty, 0)$ / متناقصة في $(0, \infty)$



١) نذكر الأسس النسبية مقامه زوجي نقسم على القيم الغير سالبة.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-62.4	-31.74	-10	0	10	31.74	62.4

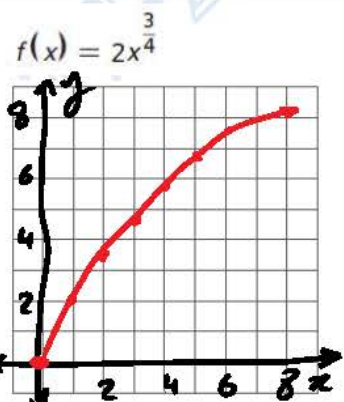
٢) المجال: $(-\infty, \infty)$ ، المدى: $(-\infty, \infty)$

٣) تقاطع محاور x و y في $(0,0)$

٤) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ / $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$

٥) متصلة على $(-\infty, \infty)$

٦) متزايدة على $(-\infty, \infty)$



١) نذكر الأسس النسبية مقامه زوجي نقسم على القيم الغير سالبة.

x	0	1	2	3	4	5	6
y	0	2	3.36	4.56	5.65	6.68	7.66

٢) المجال: $[0, \infty)$

٣) يتقاطع محور x و y في $(0,0)$

٤) نهاية المثلثي $(0,0)$ و $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$

٥) متصلة على $[0, \infty)$

٦) متزايدة على $[0, \infty)$

انحدار القوة

علم الأحياء تمثل البيانات التالية معدل الأيض أثناء الراحة R بالكيلو كالوري في اليوم الواحد للكتلة m بالكيلوجرامات للعديد من الحيوانات.

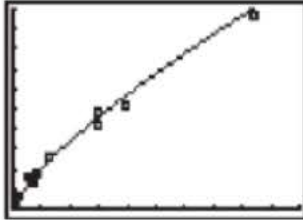
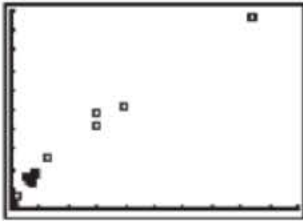
m	0.3	0.4	0.7	0.8	0.85	2.4	2.6	5.5	6.4	6
R	28	35	54	66	46	135	143	331	293	292
m	7	7.9	8.41	8.5	13	29.3	29.8	39.5	83.6	
R	265	327	346	363	520	956	839	1,036	1,948	

اضغط هنا لشرح
هذه المسألة بالفيديو

a. صمم مخطط انتشار للبيانات.

b. اكتب دالة كثيرة الحدود لتمثيل مجموعة البيانات. قرب كل معامل إلى أقرب ألف واذكر معامل الارتباط.

c. استخدم المعادلة للتنبؤ بمعدل الأيض في وقت الراحة لحيوان يبلغ وزنه 60 كيلوجرامًا.



(a) ندخل البيانات بالآلة الى سبة ثم نرسم مخطط الانتشار بالآلة.

(b) مخطط الانتشار الدالة تنبئ دالة الجذر بعن أنما دالة قوة

نستخدم انحدار القوة بالآلة الى سبة لنحصل على

$$y = 69.582(x)^{0.759} \quad a = 69.582 \quad b = 0.759$$

$$y = 69.582(60)^{0.759} = 1556 \text{ كيلوكالوري}$$

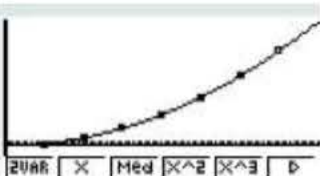
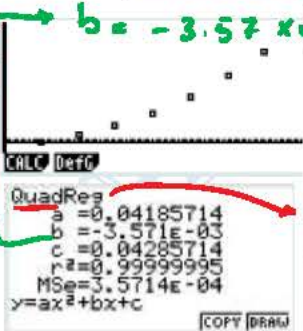
السيارات يوضح الجدول مسافة الكبح مقدرة بالأقدام. في عدة سرعات تقدر بالميل في الساعة. لسيارة محددة تسير على طريق يابس ممهد جيدًا.

السرعة	70	60	50	40	30	20	10
المسافة	204.9	150.5	104.5	66.9	37.6	16.7	4.2

A. صمم مخطط انتشار للبيانات.

B. حدد دالة أسية لتمثيل للبيانات.

C. تنبأ بمسافة الكبح لسيارة تسير بسرعة قدرها 80 ميل في الساعة.



(a) ندخل بيانات الجدول في الحاسبة ثم نرسم مخطط انتشار.

(b) مخطط انتشار يأخذ شكل معن الدالة التربيعية. عندئذ نستخدم نموذج انحدار تربيعي

$$y = ax^2 + bx + c \Rightarrow y = 0.042x^2 - 0.004x + 0.043$$

$$y = 0.042(80)^2 - 0.004(80) + 0.043$$

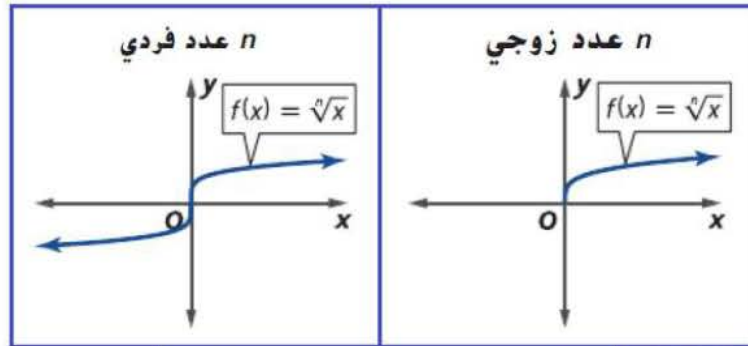
$$= 268.523 \text{ mi}$$

الدوال الجذرية هي دالة يمكن كتابتها بالصيغة $f(x) = \sqrt[n]{x^p}$ حيث n و p عددان صحيحان موجبان أكبر من العدد 1 وليس لهما أي عوامل مشتركة.

$$f(x) = 3\sqrt[3]{5x^3}$$

$$f(x) = -5\sqrt[3]{4x + 3x^2 - 1}$$

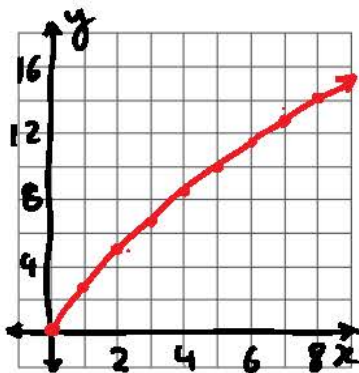
$$f(x) = \sqrt[4]{x + 12} + \frac{1}{2}x - 7$$
 أمثلة للدوال الجذرية:



التمثيل البياني للدوال الجذرية

مثل كل دالة بيانيًا وحللها. وضح المجال وال المدى والتقاطعات والسلوك الطرفي والاتصال، وفترات تزايد أو تناقص الدالة.

$$f(x) = 2\sqrt[4]{5x^3}$$



x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y	0	2.9	5	6.3	7.5	8.5	11.4	12.9	14.2

(2) المجال = المدى = $[0, \infty)$

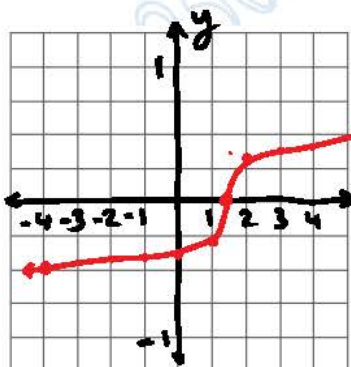
(3) نقاط التقاطع = صونته تقاطع في عند $(0,0)$

(4) يبدأ المنحنى من $(0,0)$ $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$

(5) متصلة على مجالها $[0, \infty)$

(6) متزايدة في $(0, \infty)$

$$f(x) = \frac{1}{4}\sqrt[5]{6x-8}$$



x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	-0.5	-0.42	-0.37	-0.33	-0.3	-0.27	-0.24	-0.21	-0.18

(2) المجال = المدى = $(-\infty, \infty)$

(3) نقاط التقاطع = نفع $z=0 \Rightarrow \frac{1}{4}\sqrt[5]{6x-8} = 0 \Rightarrow 6x-8=0 \Rightarrow x = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} = 1.3$
نفع $y = -0.37 \Rightarrow z=0$

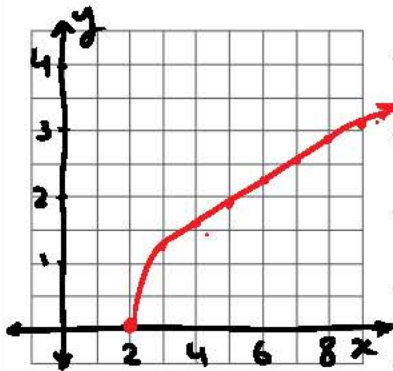
(4) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ / $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

(5) متصلة على $(-\infty, \infty)$

(6) متزايدة في $(-\infty, \infty)$

مثّل كل دالة بيانيًا وحلّلها. وضح المجال والمدى والتقاطعات والسلوك الطرفي والاتصال، وفترات تزايد أو تناقص الدالة.

$$f(x) = \frac{1}{2} \sqrt{2x^3 - 16}$$



$$2x^3 - 16 \geq 0 \rightarrow x^3 \geq 8 \rightarrow x \geq \sqrt[3]{8} \rightarrow x \geq 2$$

المجال: $[2, \infty)$ المدى: $[0, \infty)$

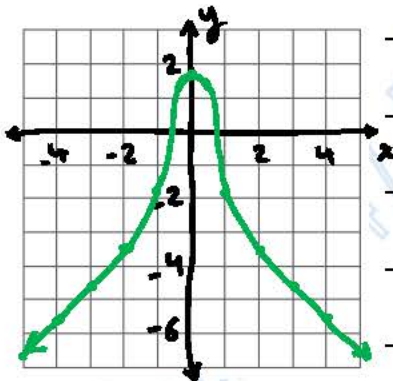
يقطع محور x عند 2 ولا يقطع محور y

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

متصلة على الفترة $[2, \infty)$

متزايدة في الفترة $(2, \infty)$

$$f(x) = -\sqrt[3]{12x^2 - 5}$$



$$x^2 \geq \frac{5}{12} \Rightarrow x \geq \sqrt{\frac{5}{12}} \text{ or } x \leq -\sqrt{\frac{5}{12}}$$

المجال: $(-\infty, -\sqrt{\frac{5}{12}}] \cup [\sqrt{\frac{5}{12}}, \infty)$ المدى: $(-\infty, \infty)$

$$0 = -\sqrt[3]{12x^2 - 5} \Rightarrow 12x^2 - 5 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{5}{12} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{5}{12}}$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{5}{12} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{5}{12}}$$

$$y = -\sqrt[3]{12\left(\frac{5}{12}\right) - 5} = -\sqrt[3]{5} \approx -1.7$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$$

متصلة على $(-\infty, \infty)$

متزايدة في الفترة $(-\infty, 0)$

متناقص في الفترة $(0, \infty)$

حل المعادلات الجذرية

ينتج أحياناً عن رفع كل طرف من طرفي المعادلة إلى أس **حلولاً دخيلة**، أو حلولاً لا تحقق المعادلة الأصلية. من المهم التحقق من أن الحلول ليست دخيلة.

حل كل من المعادلات التالية.

$$2x = \sqrt{100 - 12x} - 2$$

نخرج الطرفين

$$2x + 2 = \sqrt{100 - 12x}$$

نرفع الطرفين إلى المربع

$$(2x + 2)^2 = 100 - 12x$$

$$4x^2 + 8x + 4 = 100 - 12x$$

الاصليّة من

$$4x^2 + 20x - 96 = 0 \quad (\div 4) \quad x = 3, x = -8$$

لا تحقق $x = -8$ المعادلة الأصلية

$$x^2 + 5x - 24 = 0$$

المعادلة الأصلية

$$(x - 3)(x + 8) = 0$$

∴ م = {3}

حل دخيل

$$\sqrt[3]{(x-5)^2} + 14 = 50$$

نرفع في المعادلة من أجل

$$(x-5)^2 = (50-14)^3$$

$$(x-5)^2 = 46656$$

من $x = -211, x = 221$

كل واحد

$$x-5 = \pm \sqrt{46656}$$

نحقق المعادلة

$$x-5 = \pm 216$$

الاصليّة

$$x_1 = -216 + 5 = -211$$

$$x_2 = 216 + 5 = 221$$

م = {-211, 221}

نخرج الطرفين

$$(\sqrt{x-2})^2 = (5 - \sqrt{15-x})^2$$

$$x-2 = 5^2 - 10\sqrt{15-x} + 15-x$$

$$x-2-5^2-15+x = -10\sqrt{15-x}$$

نخرج

$$(2x-42)^2 = (-10\sqrt{15-x})^2$$

$$4x^2 - 168x + 1764 = 100(15-x)$$

$$4x^2 - 168x + 1764 = 1500 - 100x$$

$$4x^2 - 168x + 100x + 1764 - 1500 = 0$$

$$4x^2 - 68x + 264 = 0 \quad (\div 4)$$

$$x^2 - 17x + 66 = 0$$

$$(x-11)(x-6) = 0$$

$x = 11, x = 6$

بالنظر في المعادلة الأصلية نجد أن المميزين يحققان المعادلة الأصلية.

⇒ م = {6, 11}

نخرج الطرفين

$$(\sqrt{x+7})^2 = (3 + \sqrt{2-x})^2$$

$$x+7 = 9 + 6\sqrt{2-x} + 2-x$$

$$x+7-9-2+x = 6\sqrt{2-x}$$

نخرج

$$(2x-4)^2 = (6\sqrt{2-x})^2$$

$$4x^2 - 16x + 16 = 36(2-x)$$

$$4x^2 - 16x + 16 = 72 - 36x$$

$$4x^2 - 16x + 36x + 16 - 72 = 0$$

$$4x^2 + 20x - 56 = 0 \quad (\div 4)$$

$$x^2 + 5x - 14 = 0$$

$$(x-2)(x+7) = 0$$

حل دخيل

$x = 2, x = -7$

بالنظر في المعادلة الأصلية نجد أن $x = -7$ لا يحقق المعادلة الأصلية يعني أنه حل دخيل

⇒ م = {2}

حل كل من المعادلات التالية.

$$\sqrt[3]{4x+8} + 3 = 7$$

$$\sqrt[3]{4x+8} = 7-3$$

$$(\sqrt[3]{4x+8})^3 = (4)^3 \quad \text{نكتب الطرفين}$$

$$4x+8 = 64$$

$$x = \frac{64-8}{4} = \boxed{14}$$

بالتعويض في المعادلة الأصلية نجد أن 14

تحقق المعادلة الأصلية.

$$\Rightarrow \text{ج ٣} = \{14\}$$

$$3x = 3 + \sqrt{18x-18}$$

$$(3x-3)^2 = (\sqrt{18x-18})^2 \quad \text{نربع}$$

$$9x^2 - 18x + 9 = 18x - 18$$

$$9x^2 - 18x - 18x + 9 + 18 = 0$$

$$9x^2 - 36x + 27 = 0 \quad (\div 9)$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$(x-3)(x-1) = 0$$

$$x = 3 \quad , \quad x = 1$$

بالتعويض في المعادلة الأصلية نجد
أن كلا الحليين يحققان المعادلة الأصلية

$$\Rightarrow \text{ج ٣} = \{1, 3\}$$

ورقة عمل الثاني عشر العام

2-2 الدوال كثيرة الحدود

الاسم: _____

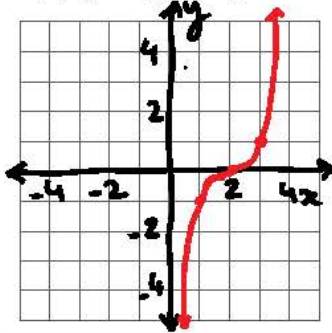
1- تمثيل الدوال كثيرة الحدود بيانياً. 2- تمثيل بيانات من الحياة اليومية باستخدام الدوال كثيرة الحدود.

في هذا الدرس سوف نتعلم:

التحويلات البيانية للدوال أحادية الحد

ارسم تمثيلاً بيانياً لكل دالة فيما يلي.

$$f(x) = (x - 2)^5$$



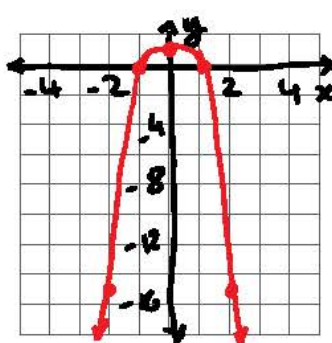
نقطة الانعطاف هي (2, 0)

$$y = x^3 \quad y = x^5$$

نقطة الرأس هي (2, 0) وهي نقطة الانعطاف

x	-1	0	1	2	3	4	5
y	-243	-32	-1	0	1	32	243

$$g(x) = -x^4 + 1$$



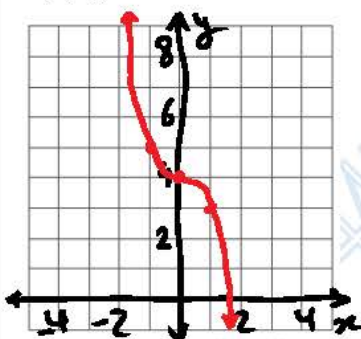
نقطة الرأس هي (0, 1)

$$y = x^2 \quad y = x^4$$

نقطة الرأس هي (0, 1) وهي نقطة الانعطاف

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-80	-16	0	1	0	-16	-80

$$f(x) = 4 - x^3$$

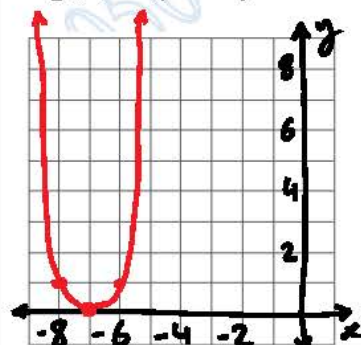


نقطة الانعطاف هي (0, 4) نقطة الرأس هي (0, 4) وهي نقطة الانعطاف

نقطة الرأس هي (0, 4)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	31	12	5	4	3	-4	-23

$$g(x) = (x + 7)^4$$



نقطة الرأس هي (-7, 0) وهي نقطة الانعطاف

x	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4
y	81	16	1	0	1	16	81

تطبيق اختبار الحد الرئيس

يستخدم اختبار الحد الرئيس قيمة الدرجة ومعامل هذا الحد لتحديد السلوك الطرفي للدالة كثيرة الحدود.

وَصَح السلوك الطرفي للتمثيل البياني لكل دالة كثيرة الحدود باستخدام الحدود. اشرح استدلالك باستخدام اختبار الحد الرئيس.

$$f(x) = 3x^4 - 5x^2 - 1$$

من الدرجة الزوجية ، معامل الحد الرئيس موجب

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty \quad , \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

$$g(x) = -3x^2 - 2x^7 + 4x^4$$

من الدرجة الفردية ، معامل الحد الرئيس سالب

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty \quad (\quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$$

$$h(x) = x^3 - 2x^2$$

من الدرجة الفردية ، معامل الحد الرئيس موجب

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad (\quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

$$h(x) = -2x^6 + 11x^4 + 2x^2$$

من الدرجة الزوجية ، معامل الحد الرئيس سالب

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad (\quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$$

$$g(x) = 4x^5 - 8x^3 + 20$$

من الدرجة الفردية ، معامل الحد الرئيس موجب

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad (\quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

أصفار الدوال كثيرة الحدود

تحتوي الدالة كثيرة الحدود من الدرجة $n \geq 1$ على n من الأصفار الحقيقية على أكثر تقدير وعلى $n-1$ من نقاط الدوران على أكثر تقدير.

اذكر عدد الأصفار الحقيقية الممكنة ونقاط الدوران لكل دالة. ثم حدد جميع الأصفار الحقيقية عن طريق التحليل على العوامل.

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x$$

الدرجة الثالثة $\Rightarrow$ عدد الأصفار الحقيقية الممكنة 3 على أكثر تقدير.
ونقاط الدوران 2 على أكثر تقدير.
وأيضاً الأصفار الحقيقية بالتحليل $\leftarrow$

$$x^3 - 5x^2 + 6x = 0$$

$$x(x^2 - 5x + 6) = 0$$

$$x(x-2)(x-3) = 0$$

$$x = 0, \quad x = 2, \quad x = 3$$

$$f(x) = x^3 - 6x^2 - 27x$$

من الدرجة الثالثة $\Rightarrow$ عدد الأصفار الحقيقية 3 على الأكثر ونقاط الدوران 2 على الأكثر.
وأيضاً الأصفار الحقيقية بالتحليل $\leftarrow$

$$x^3 - 6x^2 - 27x = 0$$

$$x(x^2 - 6x - 27) = 0$$

$$x(x+3)(x-9) = 0$$

$$x = 0, \quad x = -3, \quad x = 9$$

$$f(x) = x^4 - 8x^2 + 15$$

الدرجة الرابعة $\Rightarrow$ عدد الأصفار الحقيقية 4 على الأكثر ، نقاط الدوران 3 على الأكثر.
وأيضاً الأصفار الحقيقية بالتحليل $\leftarrow$

$$x^4 - 8x^2 + 15 = 0$$

$$(x^2 - 3)(x^2 - 5) = 0$$

$$x^2 = 3 \quad | \quad x^2 = 5$$

$$x = \pm\sqrt{3} \quad | \quad x = \pm\sqrt{5}$$

اذكر عدد الأصفار الحقيقية الممكنة ونقاط الدوران لكل دالة. ثم حدد جميع الأصفار الحقيقية عن طريق التحليل على العوامل.

$$g(x) = x^4 - 3x^2 - 4$$

من الدرجة الرابعة $\rightarrow$ عدد الأصفار الحقيقية 4 على الأكثر (عدد نقاط الدوران 3 على الأكثر)

$$g(x) = x^4 - 3x^2 - 4$$

افتراض u نكتب الدالة بالصيغة التربيعية $\rightarrow$

$$x^4 - 3x^2 - 4 = 0$$

نوجد الأصفار بالتحليل

$$(x^2 + 1)(x^2 - 4) = 0$$

$$x^2 = -1 \quad x^2 = 4$$

$$x = \pm\sqrt{-1} \quad x = \pm\sqrt{4}$$

$$x = \pm i \quad x = \pm 2$$

صفران حقيقيان

وصفران تخيليان

$$h(x) = x^5 - 6x^3 - 16x$$

من الدرجة الخامسة $\rightarrow$ عدد الأصفار الحقيقية 5 على الأكثر (عدد نقاط الدوران 4 على الأكثر)

$$x^5 - 6x^3 - 16x = 0$$

بإيجاد الأصفار

$$x(x^4 - 6x^2 - 16) = 0$$

$$x(x^2 + 2)(x^2 - 8) = 0$$

$$x = 0 \quad x^2 = -2 \quad x^2 = 8$$

$$x = \pm\sqrt{-2} \quad x = \pm\sqrt{8}$$

$$x = \pm i\sqrt{2} \quad x = \pm 2\sqrt{2}$$

$$g(x) = x^4 - 9x^2 + 18$$

من الدرجة الرابعة $\rightarrow$ عدد الأصفار الحقيقية 4 على الأكثر (عدد نقاط الدوران 3 على الأكثر)

$$x^4 - 9x^2 + 18 = 0$$

بإيجاد الأصفار بالتحليل

$$(x^2 - 3)(x^2 - 6) = 0$$

$$x^2 = 3 \quad x^2 = 6$$

$$x = \pm\sqrt{3} \quad x = \pm\sqrt{6}$$

الدوال كثيرة الحدود ذات الأصفار المكررة

اذكر عدد الأصفار الحقيقية الممكنة ونقاط الدوران لكل دالة. ثم حدد جميع الأصفار الحقيقية عن طريق التحليل على العوامل.

$$h(x) = -x^4 - x^3 + 2x^2$$

مع الدرجة الرابعة = عدد الأصفار الحقيقية 4 على الأكثر، عدد نقاط الدوران 3 على الأكثر.

$$-x^4 - x^3 + 2x^2 = 0$$

لايجاد الأصفار

$$-x^2(x^2 + x - 2) = 0$$

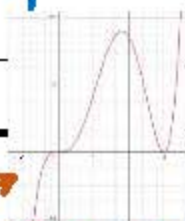
$$-x^2(x - 1)(x + 2) = 0$$

$x = 0$ يتكرر مرتين (عدد زوجي مساوٍ لـ 2)

$$x = 0 \quad | \quad x = 1 \quad | \quad x = -2$$

وهذا يعني أنه الدالة تقطع محور x عند

$x = 0$ ولا تقطعه.



$$f(x) = 3x^5 - 18x^4 + 27x^3$$

مع الدرجة الخامسة = عدد الأصفار الحقيقية 5 على الأكثر، عدد نقاط الدوران 4 على الأكثر.

$$3x^5 - 18x^4 + 27x^3 = 0$$

لايجاد الأصفار بالتحليل

$$3x^3(x^2 - 6x + 9) = 0$$

$$3x^3(x - 3)(x - 3) = 0$$

$x = 3$ يتكرر مرتين (بعض الموهمة عند $x = 3$)

$$x = 0 \quad | \quad x = 3 \quad | \quad x = 3$$

$x = 0$ يتكرر 3 مرات (عدد فردي مساوٍ لـ 3)

لأنه الدالة تقطع محور x

عند $x = 0$

$$g(x) = -2x^3 - 4x^2 + 16x$$

مع الدرجة الثالثة = عدد الأصفار الحقيقية 3 على الأكثر، عدد نقاط الدوران 2 على الأكثر.

$$-2x^3 - 4x^2 + 16x = 0$$

لايجاد الأصفار بالتحليل

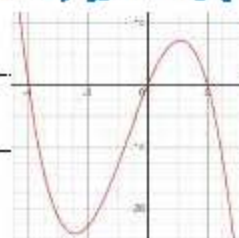
$$-2x(x^2 + 2x - 8) = 0$$

لا يوجد تكرار في الأصفار

$$-2x(x - 2)(x + 4) = 0$$

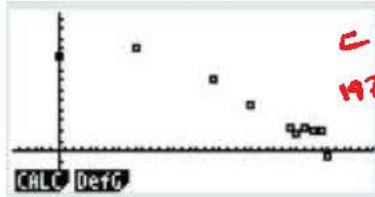
إذا الدالة تقطع المحور عند جميع الأصفار

$$x = 0 \quad | \quad x = 2 \quad | \quad x = -4$$



تمثيل البيانات باستخدام دوال كثيرة الحدود

المدخرات يوضح الجدول متوسط المدخرات الشخصية كنسبة من الدخل المتاح في الولايات المتحدة الأمريكية.



لدى السنوات
بعد 1970

السنة	1970	1980	1990	1995	2000	2001	2002	2003	2004	2005
النسبة المئوية للمدخرات	9.4	10.0	7.0	4.6	2.3	1.8	2.4	2.1	2.0	-0.4

a. صمم مخطط تشتت للبيانات. وحدد نوع الدالة كثيرة الحدود التي يمكن استخدامها لتمثيل البيانات.

b. اكتب دالة كثيرة الحدود لتمثيل مجموعة البيانات. قُرب كل معامل إلى أقرب ألف واذكر معامل الارتباط.

c. استخدم النموذج لتقدير نسبة المدخرات في 1993.

d. استخدم النموذج لتحديد العام التريبي الذي وصلت فيه نسبة المدخرات إلى 6.5%.

QuadRes
a = -8.633E-03
b = 0.03334772
c = 9.7444976
r² = 0.96087978
MSe = 0.62388913
y = ax² + bx + c

-8.6×10^{-3}
معامل الارتباط

a) من الدالة الحاسبة يتضح أنه مخطط الانتشار. يأخذ الشكل التربيعي نستخدم

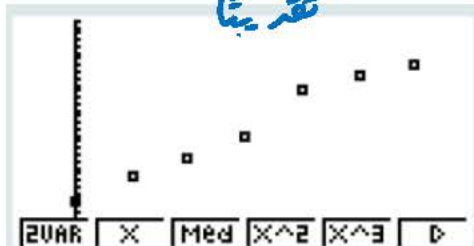
b) المعادلة التربيعية $y = ax^2 + bx + c$ بالكتابة

$$y = -0.009x^2 + 0.033x + 9.744$$

معامل الارتباط 0.96

c) عام 1993 $x = 23$ $y = -0.009(23)^2 + 0.033(23) + 9.744$
 $= 5.742$ %

d) نه رسم فلو $y = 6.5$ يتقاطع مع الدالة الناتجة الأولى $x = 20.9$ سنة
 1971 نقطة تقاطع



لدى السنوات
بعد 1900

السكان تم توضيح متوسط عمر سكان إحدى الدول حسب التوقع في عام 2080.

السنة	1900	1930	1960	1990	2020	2050	2080
متوسط العمر	22.9	26.5	29.5	33.0	40.2	42.7	43.9

a. اكتب دالة خطية لتمثيل البيانات. بفرض أن L1 يمثل عدد الأعوام منذ 1900.

b. قُدّر متوسط عمر السكان في 2005.

c. وفقًا للنموذج الخاص بك، في أي عام وصل متوسط عمر السكان إلى 30؟

a) من جدول مخطط الانتشار الذي ظهر في الحاسبة الذاكرة

يتضح أنه البيانات تأخذ شكل الدالة الخطية نستخدم

الدالة المعنى $y = ax + b$

$$y = 0.126x + 22.732$$

معامل الارتباط 0.97

b) 2005 $x = 105$ $y = 0.126(105) + 22.732$
 ≈ 36

c) 30 $y = 30$ $x = 58$ سنة 1958

LinearRes
a = 0.12630952
b = 22.7321428
r = 0.98690885
r² = 0.97398908
MSe = 2.14735714
y = ax + b



في هذا الدرس سوف نتعلم:

1- قسمة الدالة كثيرة الحدود باستخدام القسمة المطولة والقسمة التركيبية. 2- استخدام نظريتي الباقي والعمال.

استخدام القسمة المطولة لتحليل دالة كثيرة الحدود إلى العوامل

حل كل دالة كثيرة الحدود بالكامل باستخدام العامل المعطى والقسمة المطولة.

$$6x^3 - 25x^2 + 18x + 9 ; (x - 3)$$

$$\begin{array}{r}
 6x^2 - 7x - 3 \\
 x-3 \overline{) 6x^3 - 25x^2 + 18x + 9} \\
 \underline{- 6x^3 + 18x^2} \\
 -7x^2 + 18x + 9 \\
 \underline{- (-7x^2 + 21x)} \\
 -3x + 9 \\
 \underline{- (-3x + 9)} \\
 0 \dots
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 &\Rightarrow 6x^3 - 25x^2 + 18x + 9 \\
 &= (x-3)(6x^2 - 7x - 3) \\
 &= (x-3)(2x-3)(3x+1)
 \end{aligned}$$

$$x^3 + 7x^2 + 4x - 12 ; (x + 6)$$

$$\begin{array}{r}
 x^2 + x - 2 \\
 x+6 \overline{) x^3 + 7x^2 + 4x - 12} \\
 \underline{- x^3 + 6x^2} \\
 x^2 + 4x - 12 \\
 \underline{- (x^2 + 6x)} \\
 -2x - 12 \\
 \underline{- (-2x - 12)} \\
 0 \dots
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 &\Rightarrow x^3 + 7x^2 + 4x - 12 \\
 &= (x+6)(x^2 + x - 2) \\
 &= (x+6)(x-1)(x+2)
 \end{aligned}$$

$$6x^3 - 2x^2 - 16x - 8 ; (2x - 4)$$

$$\begin{array}{r}
 3x^2 + 5x + 2 \\
 2x-4 \overline{) 6x^3 - 2x^2 - 16x - 8} \\
 \underline{- 6x^3 + 12x^2} \\
 10x^2 - 16x - 8 \\
 \underline{- (10x^2 - 20x)} \\
 4x - 8 \\
 \underline{- (4x - 8)} \\
 0 \dots
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 &\Rightarrow 6x^3 - 2x^2 - 16x - 8 \\
 &= (2x-4)(3x^2 + 5x + 2) \\
 &= (2x-4)(3x+2)(x+1)
 \end{aligned}$$

القسمة المطوّلة مع الباقي غير الصفري

$$\frac{f(x)}{d(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{d(x)} \quad \text{or} \quad f(x) = d(x) \cdot q(x) + r(x),$$

اقسم باستخدام القسمة المطولة.

Divide $9x^3 - x - 3$ by $3x + 2$

$$\begin{array}{r}
 3x^2 - 2x + 1 \\
 3x+2 \overline{) 9x^3 - x - 3} \\
 \underline{9x^3 + 6x^2} \\
 -6x^2 - x - 3 \\
 \underline{-6x^2 - 4x} \\
 3x - 3 \\
 \underline{3x + 2} \\
 -5
 \end{array}$$

$$\Rightarrow \frac{9x^3 - x - 3}{3x + 2} = 3x^2 - 2x + 1 - \frac{5}{3x + 2}$$

 $(8x^3 - 18x^2 + 21x - 20) \div (2x - 3)$

$$\begin{array}{r}
 4x^2 - 3x + 6 \\
 2x-3 \overline{) 8x^3 - 18x^2 + 21x - 20} \\
 \underline{8x^3 - 12x^2} \\
 -6x^2 + 21x - 20 \\
 \underline{-6x^2 + 9x} \\
 12x - 20 \\
 \underline{12x - 18} \\
 -2
 \end{array}$$

$$\Rightarrow \frac{8x^3 - 18x^2 + 21x - 20}{2x - 3} = 4x^2 - 3x + 6 - \frac{2}{2x - 3}$$

 $(-3x^3 + x^2 + 4x - 66) \div (x - 5)$

$$\begin{array}{r}
 -3x^2 - 14x - 66 \\
 x-5 \overline{) -3x^3 + x^2 + 4x - 66} \\
 \underline{-3x^3 + 15x^2} \\
 -14x^2 + 4x - 66 \\
 \underline{-14x^2 + 70x} \\
 -66x - 66 \\
 \underline{-66x + 330} \\
 -396
 \end{array}$$

$$= \frac{-3x^3 + x^2 + 4x - 66}{x - 5}$$

$$= -3x^2 - 14x - 66 - \frac{396}{x - 5}$$

القسمة على دالة كثيرة الحدود من الدرجة 2 أو أعلى

اقسم باستخدام القسمة المطولة.

Divide $2x^4 - 4x^3 + 13x^2 + 3x - 11$ by $x^2 - 2x + 7$

$$\begin{array}{r}
 2x^2 - 1 \\
 x^2 - 2x + 7 \overline{) 2x^4 - 4x^3 + 13x^2 + 3x - 11} \\
 \underline{2x^4 - 4x^3 + 14x^2} \\
 -x^2 + 3x - 11 \\
 \underline{-x^2 + 2x - 7} \\
 x - 4
 \end{array}$$

$$\Rightarrow \frac{2x^4 - 4x^3 + 13x^2 + 3x - 11}{x^2 - 2x + 7} = 2x^2 - 1 + \frac{x - 4}{x^2 - 2x + 7}$$

 $(2x^3 + 5x^2 - 7x + 6) \div (x^2 + 3x - 4)$

$$\begin{array}{r}
 2x - 1 \\
 x^2 + 3x - 4 \overline{) 2x^3 + 5x^2 - 7x + 6} \\
 \underline{2x^3 + 6x^2 - 8x} \\
 -x^2 + x + 6 \\
 \underline{-x^2 - 3x + 4} \\
 4x + 2
 \end{array}$$

$$\Rightarrow \frac{2x^3 + 5x^2 - 7x + 6}{x^2 + 3x - 4} = 2x - 1 + \frac{4x + 2}{x^2 + 3x - 4}$$

 $(6x^5 - x^4 + 12x^2 + 15x) \div (3x^3 - 2x^2 + x)$

$$\begin{array}{r}
 2x^2 + x \\
 3x^3 - 2x^2 + x \overline{) 6x^5 - x^4 + 0x^3 + 12x^2 + 15x} \\
 \underline{6x^5 - 4x^4 + 2x^3} \\
 3x^4 - 2x^3 + 12x^2 + 15x \\
 \underline{3x^4 - 2x^3 + x^2} \\
 11x^2 + 15x
 \end{array}$$

$$\Rightarrow \frac{6x^5 - x^4 + 12x^2 + 15x}{3x^3 - 2x^2 + x} = 2x^2 + x + \frac{11x^2 + 15x}{3x^3 - 2x^2 + x}$$

القسمة التركيبية

اقسم باستخدام القسمة التركيبية.

$$(2x^4 - 5x^2 + 5x - 2) \div (x + 2) \rightarrow x = -2$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} -2 & 2 & 0 & -5 & 5 & -2 \\ & & -4 & 8 & -6 & 2 \\ \hline & 2 & -4 & 3 & -1 & 0 \end{array} R$$

$$\Rightarrow \frac{2x^4 - 5x^2 + 5x - 2}{x + 2} = 2x^3 - 4x^2 + 3x - 1$$

$$\left(\frac{10x^3}{2} - \frac{13x^2}{2} + \frac{5x}{2} - \frac{14}{2}\right) \div \left(\frac{2x}{2} - \frac{3}{2}\right) \quad z = \frac{3}{2}$$

$$\left(5x^3 - \frac{13}{2}x^2 + \frac{5}{2}x - 7\right) \div \left(2 - \frac{3}{2}\right)$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} \frac{3}{2} & 5 & -6.5 & 2.5 & -7 \\ & & 7.5 & 1.5 & 6 \\ \hline & 5 & 1 & 4 & -1 \end{array} R$$

$$\Rightarrow \frac{10x^3 - 13x^2 + 5x - 14}{2x - 3}$$

$$= 5x^2 + x + 4 - \frac{1}{2x - \frac{3}{2}}$$

$$= 5x^2 + x + 4 - \frac{2}{2x - 3}$$

$$(4x^3 + 3x^2 - x + 8) \div (x - 3) \rightarrow x = 3$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} 3 & 4 & 3 & -1 & 8 \\ & & 12 & 45 & 132 \\ \hline & 4 & 15 & 44 & 140 \end{array} R$$

$$\Rightarrow \frac{4x^3 + 3x^2 - x + 8}{x - 3}$$

$$= 4x^2 + 15x + 44 + \frac{140}{x - 3}$$

$$\left(\frac{6x^4}{3} + \frac{11x^3}{3} - \frac{15x^2}{3} - \frac{12x}{3} + \frac{7}{3}\right) \div \left(\frac{3x}{3} + \frac{1}{3}\right)$$

$$\left(2x^4 + \frac{11}{3}x^3 - 5x^2 - 4x + \frac{7}{3}\right) \div \left(x + \frac{1}{3}\right)$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} -\frac{1}{3} & 2 & \frac{11}{3} & -5 & -4 & \frac{7}{3} \\ & & -\frac{2}{3} & -1 & 2 & \frac{2}{3} \\ \hline & 2 & 3 & -6 & -2 & 3 \end{array} R$$

$$\Rightarrow \frac{6x^4 + 11x^3 - 15x^2 - 12x + 7}{3x + 1}$$

$$= 2x^3 + 3x^2 - 6x - 2 + \frac{3}{x + \frac{1}{3}}$$

$$= 2x^3 + 3x^2 - 6x - 2 + \frac{9}{3x + 1}$$

استخدام نظرية الباقي

نظرية الباقي : إذا كانت $f(x)$ دالة كثيرة الحدود مقسومة على $(x - c)$ ، فإن الباقي $r = f(c)$

كرة القدم يمكن تمثيل عدد التذاكر المباعة أثناء موسم كرة القدم باستخدام $t(x) = x^3 - 12x^2 + 48x + 74$ ، حيث إن x هو عدد المباريات التي تم لعبها. استخدم نظرية الباقي لإيجاد عدد التذاكر المباعة خلال المباراة الثانية عشرة بموسم كرة القدم.

$$\begin{array}{r|rrrr} 12 & 1 & -12 & 48 & 74 \\ & & 12 & 0 & 576 \\ \hline & 1 & 0 & 48 & 650 \end{array} \Rightarrow t(12) = \boxed{650} \text{ تذكرة}$$

كرة القدم استخدم نظرية الباقي لتحديد عدد التذاكر المباعة خلال المباراة الثالثة عشر بموسم كرة القدم بالموسم.

$$\begin{array}{r|rrrr} 13 & 1 & -12 & 48 & 74 \\ & & 13 & 13 & 793 \\ \hline & 1 & 1 & 61 & 867 \end{array} \Rightarrow t(13) = \boxed{867} \text{ تذكرة}$$

استخدام نظرية العامل

نظرية العامل : يكون للدالة $f(x)$ كثيرة الحدود العامل $(x - c)$ إذا وفقط إذا كان $f(c) = 0$.

استخدم نظرية العامل لتحديد ما إذا كانت التعابير ذات الحدين الموضحة تعد عوامل لـ $f(x)$ ، استخدم التعابير ذات الحدين لكتابة الصيغة المحللة لـ $f(x)$.

$$f(x) = 4x^4 + 21x^3 + 25x^2 - 5x + 3; (x - 1), (x + 3)$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 4 & 21 & 25 & -5 & 3 \\ & & 4 & 25 & 50 & 45 \\ \hline & 4 & 25 & 50 & 45 & 48 \end{array} \quad \begin{array}{r|rrrrr} -3 & 4 & 21 & 25 & -5 & 3 \\ & & -12 & -27 & 6 & -9 \\ \hline & 4 & 9 & -2 & 1 & 0 \end{array}$$

لأن الباقي $\neq 0$ ، $(x - 1)$ ليس عامل

لأن الباقي $= 0$ ، $(x + 3)$ عامل

$$\Rightarrow f(x) = (x + 3)(4x^3 + 9x^2 - 2x + 1)$$

$$f(x) = 2x^3 - x^2 - 41x - 20; (x + 4), (x - 5)$$

$$\begin{array}{r|rrrr} -4 & 2 & -1 & -41 & -20 \\ & & -8 & 36 & 20 \\ \hline & 2 & -9 & -5 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{r|rrrr} 5 & 2 & -9 & -41 & -20 \\ & & 10 & 5 & 5 \\ \hline & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array} \Rightarrow f(x) = (x + 4)(x - 5)(2x + 1)$$

لأن الباقي $= 0$ ، $(x + 4)$ عامل

لأن الباقي $= 0$ ، $(x - 5)$ عامل

ورقة عمل الثاني عشر العام

2-4 أصفار الدوال كثيرة الحدود

الاسم: _____

في هذا الدرس سوف نتعلم:

1- إيجاد الأصفار الحقيقية للدوال كثيرة الحدود.

2- إيجاد الأصفار المركبة للدوال كثيرة الحدود.

توضح نظرية الصفر النسبي كيف يمكن استخدام معامل الحد الرئيس والحد الثابت لدالة كثيرة الحدود ذات معاملات أعداد صحيحة في تحديد قائمة بجميع الأصفار النسبية الممكنة.

معامل الحد الرئيس يساوي 1

$P \rightarrow$ عوامل الحد الثابت
 $Q \rightarrow$ عوامل الحد الرئيس

اذكر جميع الأصفار النسبية المحتملة لكل دالة. ثم حدد أيًا منها يكون أصفارًا، إن وجدت.

$$f(x) = x^3 + 2x + 1 \rightarrow P = 1$$

$$g(x) = x^4 + 4x^3 - 12x - 9 \rightarrow P = 1, 3, 9$$

$$1-1 \rightarrow \frac{P}{Q} = \frac{1}{1} = 1 \rightarrow \text{الأصفار الممكنة}$$

$$1-3-9 \rightarrow \frac{P}{Q} = \frac{1}{1} = 1 \rightarrow \text{الأصفار الممكنة}$$

نستخدم المقويض البشري لا نقسم كل منر ممكن

$$1 \text{ ليس منر} \rightarrow 1 = 4 \rightarrow 1 + 2(1) + 1 = 4$$

$$-1 \text{ ليس منر} \rightarrow -1 = -2 \rightarrow -1 + 2(-1) + 1 = -2$$

صحة نظرية الصفر النسبي هي لا يوجد منر نسبي لهذه الدالة.

لملاحظة: الدالة ذات الدرجة الفردية لا يمكن

تغير لها منر واحد حقيقي على الأقل

ولكن هذا المبدأ يوجد منر حقيقي ولكنه غير نسبي.

$$h(x) = x^4 + 3x^3 - 7x^2 + 9x - 30 \rightarrow P = 1, 2, 3, 5, 6$$

$$Q = 1, 15, 30 \rightarrow \frac{P}{Q} = \frac{1}{1}, \frac{2}{15}, \frac{3}{5}, \frac{5}{3}, \frac{6}{5}, \frac{6}{15}, \frac{10}{3}, \frac{15}{2}, \frac{30}{1}$$

$$\text{نختبر } 2 \rightarrow \begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & 3 & -7 & 9 & -30 \\ & & 2 & 10 & 6 & 30 \\ \hline & 1 & 5 & 3 & 15 & 0 \end{array}$$

لأن الباقي = 0 $\rightarrow$ 2 منر من أصفار الدالة.

$$\text{نختبر } 5 \rightarrow \begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & 3 & -7 & 9 & -30 \\ & & 5 & 0 & -15 & 15 \\ \hline & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \end{array}$$

لأن الباقي = 0 فإن 5 منر من أصفار الدالة.

$$\text{فإنه نسبي وغير حقيقي} \rightarrow x^2 + 3 = 0 \Rightarrow x = \pm \sqrt{-3}$$

الأصفار النسبية هي 2 -5 $\rightarrow$ 2 فكل

نختبر الصفر 1 باستخدام المقويض التركيبي

$$1 \text{ ليس منر} \rightarrow \begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & 4 & 0 & -12 & -9 \\ & & 1 & 5 & 5 & -7 \\ \hline & 1 & 5 & 5 & -7 & -16 \end{array}$$

نختبر الصفر -1 باستخدام المقويض التركيبي

$$-1 \text{ منر للدالة} \rightarrow \begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & 4 & 0 & -12 & -9 \\ & & -1 & -3 & 3 & 3 \\ \hline & 1 & 3 & -3 & -9 & 0 \end{array}$$

نختبر 3 على الدالة كثيرة الحدود المنخفضة

$$3 \text{ منر للدالة لأن} \rightarrow \begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & 3 & -3 & -9 & -3 \\ & & 0 & 9 & 0 & 0 \\ \hline & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\text{فكل } 2 = 0 \rightarrow x^2 - 3 = 0 \rightarrow x = \pm \sqrt{3}$$

ولكن ذلك $\rightarrow$ أصفار غير نسبيةالأصفار النسبية للدالة هي 3 -1 $\rightarrow$ 2 فكل

$$f(x) = x^3 + 5x^2 - 4x - 2 \rightarrow P = 1, 2$$

$$Q = 1, 2 \rightarrow \frac{P}{Q} = \frac{1}{1}, \frac{2}{2} \rightarrow \text{الأصفار النسبية الممكنة}$$

$$\text{نختبر } 1 \rightarrow \begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 5 & -4 & -2 \\ & & 1 & 6 & 2 \\ \hline & 1 & 6 & 2 & 0 \end{array}$$

لأن الباقي = 0 $\rightarrow$ 1 منر من أصفار الدالة.

$$x^2 + 6x + 2 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4(1)(2)}}{2(1)} \Rightarrow x = -3 \pm \sqrt{10}$$

لأنه أصفار غير نسبية

الصفر النسبي الوحيد للدالة هو 1

معامل الحد الرئيس لا يساوي 1

اذكر جميع الأصفار النسبية المحتملة لكل دالة. ثم حدد أيًا منها يكون أصفارًا، إن وجدت.

$q = 1, 3$

$h(x) = 3x^3 - 7x^2 - 22x + 8 \rightarrow p = 1, 2, 4, 8$

$$\rightarrow \text{الأصفار النسبية الممكنة} \rightarrow \pm \frac{1}{3}, \pm 2, \pm \frac{2}{3}, \pm 4, \pm \frac{4}{3}, \pm 8, \pm \frac{8}{3}$$

بعد اختبار بقدر الأصفار إلى أن نحصل للعنصر -2 ← باستخدام القويمة التركيبية
-2 عنصر نسبي للدالة لأنه الباقي = 0

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 3 & -7 & -22 & 8 \\ & & -6 & 26 & -8 \\ \hline & 3 & -13 & 4 & 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 3x^2 - 13x + 4 &= 0 \\ (3x - 1)(x - 4) &= 0 \\ x &= \frac{1}{3}, x = 4 \end{aligned}$$

الأصفار النسبية للدالة هي

$$-2, \frac{1}{3}, 4$$

$q = 1, 2$

$g(x) = 2x^3 - 4x^2 + 18x - 36 \rightarrow p = 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36$

$$\rightarrow \text{الأصفار النسبية الممكنة} \rightarrow \pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm 2, \pm 3, \pm \frac{3}{2}, \pm 4, \pm 6, \pm 9, \pm \frac{9}{2}, \pm 12, \pm 18, \pm 36$$

بعد اختبار افتبارات الأصفار نجد العنصر 2 ← باستخدام القويمة التركيبية
لأنه الباقي = 0 ← 2 عنصر من أصفار الدالة.

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 2 & -4 & 18 & -36 \\ & & 4 & 0 & 36 \\ \hline & 2 & 0 & 18 & 0 \end{array}$$

$$\rightarrow \text{غير حقيقي} \rightarrow x = \frac{-9 \pm \sqrt{81}}{2} = \frac{-9 \pm 9}{2} \Rightarrow x^2 = -9 \Rightarrow 2x^2 + 18 = 0$$

العنصر النسبي الوحيد لهذه الدالة هو 2

$1, 3$

$f(x) = 3x^4 - 18x^3 + 2x - 21 \rightarrow p = 1, 3, 7, 21$

$$\rightarrow \text{الأصفار النسبية الممكنة} \rightarrow \pm 1, \pm \frac{1}{3}, \pm 3, \pm 7, \pm \frac{7}{3}, \pm 21$$

بعد اختبار كل هذه الأصفار نجد أنه جميع هذه الأصفار ليس أصفاراً للدالة

وبذلك نستنتج أنه هذه الدالة ليس لها أصفار نسبية.

حل معادلة كثيرة الحدود

الأعمال بعد أول نصف ساعة، يمكن تمثيل عدد ألعاب الفيديو التي باعتها الشركة في تاريخ الإصدار كما يلي $g(x) = 2x^3 + 4x^2 - 2x$ ، بحيث يكون $g(x)$ هو عدد الألعاب المباعة بالهئات و x عدد الساعات بعد الإصدار. ما الزمن المستغرق لبيع 400 لعبة؟

400 لعبة يعني $g(x) = 400$ x تعني 400 لعبة

$$\Rightarrow 2x^3 + 4x^2 - 2x = 400$$

$$2x^3 + 4x^2 - 2x - 400 = 0$$

$$\frac{1, 2, 4}{1, 2} \Rightarrow 1, -\frac{1}{2}, -2, -4,$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 2 & 4 & -2 & -400 \\ & & 2 & 6 & 4 \\ \hline & 2 & 6 & 4 & 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 6x + 4 = 0 \quad (+2)$$

$$x^2 + 3x + 2 = 0$$

$$(x + 1)(x + 2) = 0$$

$$x = -1, x = -2 \rightarrow \text{مرفوض (لا يوجد زمن بالساعات)}$$

هنا نقرية المعاملتين فإن

الأعداد النسبية الممكنة هي

مع افتبار هذه الأعداد نجد أن (1)

(2) صفر من الأعداد الثلاثة

لأنه الباقي = 0

الأعداد هي 1, -2, -1

و لكن اكل الاحتمال المناسب بعد الساعات هو (1)

يستغرق ساعة زمن لبيع

400 لعبة.

الكرة الطائرة فيما يلي التمثيل البياني لكرة طائرة عادت بعد ضربها بسرعة أولية 40 مترًا في الثانية بارتفاع 4 مترًا $f(t) = 4 + 40t - 16t^2$ ، بحيث $f(t)$ يمثل ارتفاع الكرة بالقدم و t يمثل الزمن بالثواني. ما الزمن الذي ستصل به

الكرة إلى ارتفاع 20 مترًا؟

$$f(t) = 20$$

$$\Rightarrow -16t^2 + 40t + 4 = 20$$

$$-16t^2 + 40t - 16 = 0 \rightarrow (+8)$$

$$2t^2 - 5t + 2 = 0$$

$$(2t - 1)(t - 2)$$

$$\Rightarrow t = \frac{1}{2}, t = 2$$

تصل الكرة إلى ارتفاع 20 ft بعد مرور $\frac{1}{2}$ ثانية وبعد مرور 2 ثانية.

استخدام اختبارات القيمتين العظمى والصغرى

اختبارات القيمتين العظمى والصغرى لأصفار الدالة

لنفرض أن f دالة كثيرة الحدود من الدرجة $n \geq 1$ ولها معاملات حقيقية ومعامل الحد الرئيس موجب، لنفرض أن $f(x)$ تمت قسمته على $x - c$ باستخدام القسمة التركيبية.

- إذا كان $c \leq 0$ وكل عدد في آخر سطر بالقسمة غير سالب وغير موجب، فإن c هي قيمة صغرى للأصفار الحقيقية للدالة f .
- إذا كان $c \geq 0$ وكل عدد في آخر سطر بالقسمة غير سالب، فإن c هي قيمة عظمى للأصفار الحقيقية للدالة f .

حدد فترة يجب أن توجد فيها جميع الأصفار الحقيقية للدالة المحددة. اشرح استدلالك باستخدام اختبارات القيمتين العظمى والصغرى. ثم جد كل الأصفار الحقيقية.

$$h(x) = 2x^4 - 11x^3 + 2x^2 - 44x - 24$$

سوف نرسم الدالة بيانياً بالآلة حاسبة نجد أن الأصفار الحقيقية تقع على الفترتين $[-7, -1]$

نختبر -1 باستخدام المعرفين الآتيين

2	-11	2	-44	-24
	-2	13	-15	59
2	-13	15	-59	35

لأن $c = -1$ ليس موجباً
والسطر الأخير متبادل فيسأب مع غير موجب

نأخذ $c = -1$ هو قيمة صغرى للأصفار الحقيقية.

نختبر 7 باستخدام المعرفين الآتيين

2	-11	2	-44	-24
	14	21	161	819
2	3	23	117	795

لأن $c = 7$ ليس موجباً

والسطر الأخير كله غير سالب

نأخذ $c = 7$ هو القيمة العظمى للأصفار الحقيقية.

نأخذ $c = 7$ هو القيمة العظمى للأصفار الحقيقية.

حسب نظرية الصفر النسبي - الأصفار النسبية الممكنة

$$\Rightarrow \pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm 2, \pm \frac{3}{2}, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 12, \pm 24$$

ولكن الأصفار تقع بين $[-7, -1]$ أي أننا نستطيع تضيق قائمة الأصفار النسبية الممكنة

$$\pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm 2, \pm \frac{3}{2}, \pm 3, \pm 4, \pm 6$$

سوف نرسم بيما الأصفار عند $\pm 6, \pm \frac{1}{2}$

نختبر (6)

نختبر $-\frac{1}{2}$

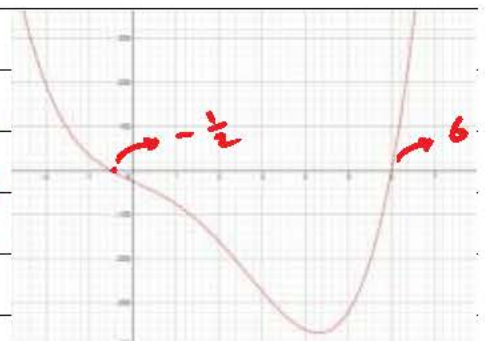
2	-11	2	-44	-24
	12	6	48	24
2	1	8	4	0

$$\Rightarrow \begin{array}{r|rrrr} -\frac{1}{2} & 2 & 1 & 8 & 4 \\ & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline & 2 & 0 & 8 & 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow f(x) = (x-6)(x+\frac{1}{2})(2x^2+8)$$

لأن هذا السطر لا يوجد أصفار حقيقية فإضافة

لذلك الدالة لها صفران نسبيا هما $6, -\frac{1}{2}$ $\Rightarrow x = \pm \sqrt{-4} \Rightarrow x = \pm 2i$ لأن



حدد فترة يجب أن توجد فيها جميع الأصفار الحقيقية للدالة المحددة. اشرح استدلالك باستخدام اختبارات القيمتين العظمى والصغرى. ثم جد كل الأصفار الحقيقية.

$$f(x) = 10x^5 - 50x^4 - 3x^3 + 22x^2 - 41x + 30$$

من خلال رسم الدالة بالآلة الحاسبة نجد الأصفار الحقيقية في الفترة $[-2, 6]$.

نختبر $C = -2$ ←

30	-41	22	-3	-50	10	-2
-926	504	-274	140	-20		
-896	463	-252	137	-70	10	

لأنه المطر الأخير يكادول صافين
نظير صاف، وفي صواب $C \leq 0$
لنا $C = -2$ قيمة صغرى للأصفار الحقيقية

نختبر $C = 6$ ←

30	-41	22	-3	-50	10	6
12858	2184	342	60	60		
12828	2143	364	57	10	10	

لأنه المطر الأخير كله غير صاف
و $C > 0$ فبأنه $C = 6$ قيمة
عظمى للأصفار الحقيقية.

من نظرية الصفر النسبي مع الأصفار، القيمة الممكنة هي $1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30$

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{10}, \frac{1}{15}, \frac{1}{30}, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30$$

$$\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{6}{5}, \frac{10}{5}, \frac{15}{5}, \frac{30}{5}$$

نقصه الأصفار في الفترة $[-2, 6]$

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{10}, \frac{1}{15}, \frac{1}{30}, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30$$



يتضح من ذلك أن 5 صغرى للأصفار، نختبر $[5]$

30	-41	22	-3	-50	10	5
-30	35	-15	0	50		
0	-6	7	-3	0	10	

الصغرى $[5]$ صغرى الدالة

من ذلك أن 5 صغرى للأصفار، نختبر $[-\frac{6}{5}]$ $-\frac{6}{5} = -1.2$

30	-41	22	-3	-50	10	-1.2
-42.4992	76.416	-85.68	74.4	-12		
-12.4992	35.416	-63.68	71.4	-62	10	

الصغرى النسبي الوحيدة للصغرى $[5]$ لأنه إذا قمنا بافتبار جميع الأصفار الممكنة على الشكل $\frac{p}{q}$ لا يكون الباقى 0

الأصفار الأقرب $\approx$ صفران أكبر صغرى

$$-1.16, 0.71$$

قاعدة ديكرت للإشارات

Describe the possible real zeros of each function.

وضح الأصفار الحقيقية الممكنة لكل دالة.

$$g(x) = -3x^3 + 2x^2 - x - 1$$

$$g(x) \rightarrow - \quad + \quad - \quad -$$

$$g(-x) \rightarrow + \quad + \quad + \quad -$$

الأصفار الحقيقية: (2) أو (0)

الأصفار البتية: (1)

عدد الأصفار الحقيقية / 2 أو 0

عدد الأصفار البتية / 1

عدد الأصفار التخيلية / 2 / 0

$$h(x) = 6x^5 + 8x^2 - 10x - 15$$

$$h(x) \rightarrow + \quad + \quad - \quad -$$

$$h(-x) \rightarrow - \quad + \quad + \quad -$$

+ (1)

- (2) (0)

عدد الأصفار الموجبة / (1)

عدد الأصفار السالبة / (2) أو (0)

عدد الأصفار التخيلية / (2) أو (4)

$$f(x) = -11x^4 + 20x^3 + 3x^2 - x + 18$$

$$f(x) \rightarrow - \quad + \quad + \quad - \quad +$$

$$f(-x) \rightarrow - \quad - \quad + \quad + \quad +$$

+ (3) (1)

- (1)

عدد الأصفار الحقيقية / (3) أو (1)

عدد الأصفار البتية / (1)

عدد الأصفار التخيلية / (0) أو (2)

إيجاد دالة كثيرة الحدود أصفارها معلومة

اكتب دالة كثيرة الحدود من أقل درجة ذات معاملات حقيقية بالصيغة القياسية مع الأصفار البوضحة.

Write a polynomial function of least degree with real coefficients in standard form with the given zeros.

$$-2, 4, \text{ and } (3 - i) \rightarrow (3 + i)$$

$$\begin{aligned} & (x+2)(x-4)(x-(3-i))(x-(3+i)) \\ &= (x^2-2x-8)(x-3+i)(x-3-i) \\ &= (x^2-2x-8)(x^2-3x-\cancel{xi}-3x+9+\cancel{3i}+\cancel{xi}-\cancel{3i}-i^2) \\ &= (x^2-2x-8)(x^2-6x+9-(-1)) \\ &= (x^2-2x-8)(x^2-6x+10) \\ &= (x^4-6x^3+10x^2-2x^3+12x^2-20x-8x^2+48x-80) \\ &= x^4-8x^3+14x^2+28x-80 \\ &\Rightarrow f(x) = x^4 - 8x^3 + 14x^2 + 28x - 80 \end{aligned}$$

$$-3, 1 \text{ (multiplicity: 2)}, 4i \rightarrow -4i$$

$$\begin{aligned} & (x+3)(x-1)(x-1)(x-4i)(x+4i) \\ &= (x^2+2x-3)(x-1)(x^2-16i^2) \\ &= (x^3+2x^2-3x-x^2-2x+3)(x^2-16(-1)) \\ &= (x^3+x^2-5x+3)(x^2+16) \\ &= x^5+x^4-5x^3+3x^2+16x^3+16x^2-80x+48 \\ &= x^5+x^4+11x^3+19x^2-80x+48 \\ &\Rightarrow f(x) = x^5 + x^4 + 11x^3 + 19x^2 - 80x + 48 \end{aligned}$$

$$2\sqrt{3}, -2\sqrt{3}, (1+i) \rightarrow (1-i)$$

$$\begin{aligned} & (x-2\sqrt{3})(x+2\sqrt{3})(x-(1+i))(x-(1-i)) \\ &= (x^2-4(3))(x-1-i)(x-1+i) \\ &= (x^2-12)(x^2-x-\cancel{xi}-x+1+\cancel{xi}-\cancel{xi}-i^2) \\ &= (x^2-12)(x^2-2x+1-(-1)) \\ &= (x^2-12)(x^2-2x+2) \\ &= x^4-12x^2-2x^3+24x+2x^2-24 \\ &= x^4-2x^3-10x^2+24x-24 \\ &\Rightarrow f(x) = x^4 - 2x^3 - 10x^2 + 24x - 24 \end{aligned}$$

تحليل أصفار الدالة كثيرة الحدود وإيجادها

اكتب كل دالة في صورة (a) ناتج ضرب العوامل الخطية والعوامل التربيعية غير القابلة للاختزال و (b) ناتج ضرب العوامل الخطية. ثم (c) اذكر جميع أصفارها.

Write each function as (a) the product of linear and irreducible quadratic factors and (b) the product of linear factors. Then (c) list all of its zeros.

$$k(x) = x^5 - 18x^3 + 30x^2 - 19x + 30$$

الاصفار الممكنة: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 5, \pm 6, \pm 10, \pm 15, \pm 30$
اصفار الدرجة 4: 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30
اصفار الدرجة 1: 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30

$$\begin{array}{r|rrrrrr} -5 & 1 & 0 & -18 & 30 & -19 & 30 \\ & & -5 & 25 & -35 & 25 & -30 \\ \hline & 1 & -5 & 7 & -5 & 6 & 0 \end{array}$$

مصفوف الرسم بالالة نجد ان 5 - مصفوفة سالبة لالة
ايضا مصفوف الرسم بالالة نجد ان 2, 3 - مصفوف

$$\begin{array}{r|rrrrr} 2 & 1 & -5 & 7 & -5 & 6 \\ & & 2 & -6 & 2 & -6 \\ \hline & 1 & -3 & 1 & -3 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{r|rrrr} 3 & 1 & -3 & 1 & -3 \\ & & 3 & 0 & 3 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \rightarrow x^2 + 1 = 0$$

$$\Rightarrow k(x) = (x+5)(x-2)(x-3)(x^2+1) \quad \text{[a]}$$

$$k(x) = (x+5)(x-2)(x-3)(x-i)(x+i) \quad \text{[b]}$$

$$f(x) = x^4 + x^3 - 26x^2 + 4x - 120$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} -5 & 1 & 1 & -26 & 4 & -120 \\ & & 5 & 30 & 20 & 120 \\ \hline & 1 & 6 & 4 & 24 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{r|rrrr} -6 & 1 & 6 & 4 & 24 \\ & & -6 & 0 & -24 \\ \hline & 1 & 0 & 4 & 0 \end{array}$$

مصفوف الرسم بالالة نجد ان 5, 6 - مصفوف لالة

$$\Rightarrow f(x) = (x+6)(x-5)(x^2+4) \quad \text{[a]}$$

$$f(x) = (x+6)(x-5)(x-2i)(x+2i) \quad \text{[b]}$$

$$f(x) = x^5 - 2x^4 - 2x^3 - 6x^2 - 99x + 108$$

مصفوف الرسم بالالة نجد ان 3, 1, 1, 4 - مصفوف خفيفة

$$\begin{array}{r|rrrrrr} -3 & 1 & -2 & -2 & -6 & -99 & 108 \\ & & -3 & 15 & -39 & 135 & -108 \\ \hline & 1 & -5 & 13 & -45 & 36 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{r|rrrr} 4 & 1 & -4 & 9 & -36 \\ & & 4 & 0 & 36 \\ \hline & 1 & 0 & 9 & 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow f(x) = (x+3)(x-1)(x-4)(x^2+9) \quad \text{[a]}$$

$$\Rightarrow f(x) = (x+3)(x-1)(x-4)(x-3i)(x+3i) \quad \text{[b]}$$

إيجاد أصفار الدالة كثيرة الحدود بمعلومية واحد منها

لكل دالة، استخدم الصفر الموضح لإيجاد جميع الأصفار المركبة للدالة. ثم اكتب التحليل إلى العوامل الخطية للدالة.

For each function, use the given zero to find all the complex zeros of the function. Then write the linear factorization of the function.

$$p(x) = x^4 - 6x^3 + 20x^2 - 22x - 13, \quad 2 - 3i$$

استخدم المقويين التركيبيين للصفر $2 - 3i$

لمعرفة استخدام الآلة إلى جهة للفرد بالجمع

$2 - 3i$	1	-6	20	-22	-13
	$2 - 3i$	$-17 + 6i$	$24 + 3i$	13	0
	1	$-4 - 3i$	$3 + 6i$	$2 + 3i$	

لأنه $2 - 3i$ من الدالة فإنه $2 + 3i$ من أيضاً

$2 + 3i$	1	$-4 - 3i$	$3 + 6i$	$2 + 3i$
	$2 + 3i$	$-4 - 6i$	$-2 - 3i$	0
	1	-2	-1	0

$$x^2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-1)}}{2(1)}$$

$$\Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} \Rightarrow x = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = 1 \pm \sqrt{2}$$

$$x = \frac{2 + 2\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2}, \quad x = \frac{2 - 2\sqrt{2}}{2} = 1 - \sqrt{2}$$

$$x = \frac{2 + 2\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2}, \quad x = \frac{2 - 2\sqrt{2}}{2} = 1 - \sqrt{2}$$

$$x = \frac{2 + 2\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2}, \quad x = \frac{2 - 2\sqrt{2}}{2} = 1 - \sqrt{2}$$

$$x = \frac{2 + 2\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2}, \quad x = \frac{2 - 2\sqrt{2}}{2} = 1 - \sqrt{2}$$

$$x = \frac{2 + 2\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2}, \quad x = \frac{2 - 2\sqrt{2}}{2} = 1 - \sqrt{2}$$

$$x = \frac{2 + 2\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2}, \quad x = \frac{2 - 2\sqrt{2}}{2} = 1 - \sqrt{2}$$

$$x = \frac{2 + 2\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2}, \quad x = \frac{2 - 2\sqrt{2}}{2} = 1 - \sqrt{2}$$

$$x = \frac{2 + 2\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2}, \quad x = \frac{2 - 2\sqrt{2}}{2} = 1 - \sqrt{2}$$

$$x = \frac{2 + 2\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2}, \quad x = \frac{2 - 2\sqrt{2}}{2} = 1 - \sqrt{2}$$

$$x = \frac{2 + 2\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2}, \quad x = \frac{2 - 2\sqrt{2}}{2} = 1 - \sqrt{2}$$

$$x = \frac{2 + 2\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2}, \quad x = \frac{2 - 2\sqrt{2}}{2} = 1 - \sqrt{2}$$

$$x = \frac{2 + 2\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2}, \quad x = \frac{2 - 2\sqrt{2}}{2} = 1 - \sqrt{2}$$

$$x = \frac{2 + 2\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2}, \quad x = \frac{2 - 2\sqrt{2}}{2} = 1 - \sqrt{2}$$

$$x = \frac{2 + 2\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2}, \quad x = \frac{2 - 2\sqrt{2}}{2} = 1 - \sqrt{2}$$

$$x = \frac{2 + 2\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2}, \quad x = \frac{2 - 2\sqrt{2}}{2} = 1 - \sqrt{2}$$

$$x = \frac{2 + 2\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2}, \quad x = \frac{2 - 2\sqrt{2}}{2} = 1 - \sqrt{2}$$

$$x = \frac{2 + 2\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2}, \quad x = \frac{2 - 2\sqrt{2}}{2} = 1 - \sqrt{2}$$

$$x = \frac{2 + 2\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2}, \quad x = \frac{2 - 2\sqrt{2}}{2} = 1 - \sqrt{2}$$

$$x = \frac{2 + 2\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2}, \quad x = \frac{2 - 2\sqrt{2}}{2} = 1 - \sqrt{2}$$

$$x = \frac{2 + 2\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2}, \quad x = \frac{2 - 2\sqrt{2}}{2} = 1 - \sqrt{2}$$

$$x = \frac{2 + 2\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2}, \quad x = \frac{2 - 2\sqrt{2}}{2} = 1 - \sqrt{2}$$

$$x = \frac{2 + 2\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2}, \quad x = \frac{2 - 2\sqrt{2}}{2} = 1 - \sqrt{2}$$

$$x = \frac{2 + 2\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2}, \quad x = \frac{2 - 2\sqrt{2}}{2} = 1 - \sqrt{2}$$

$$x = \frac{2 + 2\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2}, \quad x = \frac{2 - 2\sqrt{2}}{2} = 1 - \sqrt{2}$$

$$x = \frac{2 + 2\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2}, \quad x = \frac{2 - 2\sqrt{2}}{2} = 1 - \sqrt{2}$$

$$x = \frac{2 + 2\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2}, \quad x = \frac{2 - 2\sqrt{2}}{2} = 1 - \sqrt{2}$$

$$x = \frac{2 + 2\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2}, \quad x = \frac{2 - 2\sqrt{2}}{2} = 1 - \sqrt{2}$$

$$x = \frac{2 + 2\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2}, \quad x = \frac{2 - 2\sqrt{2}}{2} = 1 - \sqrt{2}$$

$$x = \frac{2 + 2\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2}, \quad x = \frac{2 - 2\sqrt{2}}{2} = 1 - \sqrt{2}$$

$$h(x) = x^4 - 8x^3 + 26x^2 - 8x - 95; 1 - \sqrt{6}$$

نستخدم المقربين التربيعي

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 - \sqrt{6} & 1 & -8 & 26 & -8 & -95 \\ & & 1 - \sqrt{6} & -1 + 6\sqrt{6} & -11 - 19\sqrt{6} & 95 \\ \hline & 1 & -7 - \sqrt{6} & 25 + 6\sqrt{6} & -19 - 19\sqrt{6} & 0 \\ & & 1 + \sqrt{6} & -6 - 6\sqrt{6} & 19 + 19\sqrt{6} & \\ \hline & & -6 & 19 & 0 & \end{array}$$

$$x^2 - 6x + 19 = 0$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(1)(19)}}{2(1)}$$

$$= \frac{6 \pm \sqrt{-40}}{2}$$

$$= \frac{6 \pm 2\sqrt{10}i}{2}$$

$$= 3 \pm \sqrt{10}i$$

$$x^2 - 6x + 19 = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 - \sqrt{6} \quad \text{و} \quad 1 + \sqrt{6} \quad \text{و} \quad 3 + \sqrt{10}i \quad \text{و} \quad 3 - \sqrt{10}i$$

تحليل الدالة إلى العوامل الخطية

$$h(x) = (x - (1 - \sqrt{6}))(x - (1 + \sqrt{6}))(x - (3 + \sqrt{10}i))(x - (3 - \sqrt{10}i))$$

في هذا الدرس سوف نتعلم:

1- تحليل الدوال النسبية وتمثيلها بيانياً.

2- حل المعادلات النسبية.

إيجاد خطوط التقارب الرأسية والأفقية

جد مجال كل دالة ومعادلات خطوط التقارب الرأسية أو الأفقية، إن وجدت.

Find the domain of each function and the equations of the vertical or horizontal asymptotes, if any.

$$g(x) = \frac{8x^2 + 5}{4x^2 + 1}$$

$$f(x) = \frac{x + 4}{x - 3}$$

لحساب المجال نوجد أصفار المقام

$$4x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x = \pm \frac{1}{2}$$

لنوجد أصفار حقيقتنا للمقام

$$\Rightarrow \text{مجال} = (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (-\frac{1}{2}, \infty)$$

خطوط التقارب الرأسية

لنوجد بسبب عدم وجود أصفار للمقام

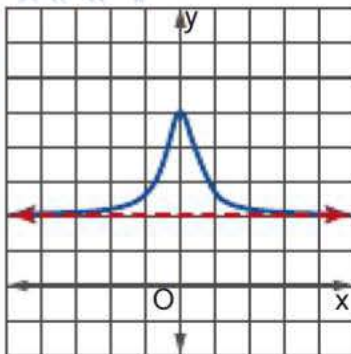
خطوط التقارب الأفقية

لأن درجة البسط = درجة المقام

نأخذ خط التقارب الأفقي = $y = \frac{\text{محدد البسط}}{\text{محدد المقام}}$

$$\Rightarrow y = \frac{8}{4} = 2$$

نتحقق من ذلك برسم الدالة بالآلة الحاسبة



لحساب المجال نوجد أصفار المقام

$$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$$

أصفار المقام = R

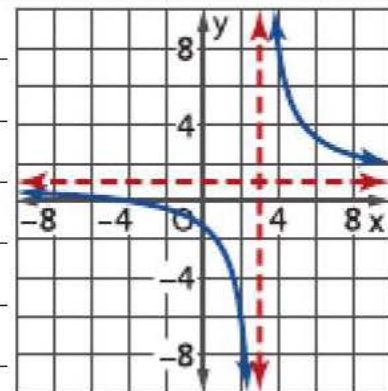
$$= R - \{3\}$$

خطوط التقارب الرأسية

خطوط التقارب الأفقية = $y = \frac{\text{محدد البسط}}{\text{محدد المقام}}$

$$y = \frac{1}{1} = 1$$

نتحقق من الرسم بالآلة الحاسبة



$$h(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x + 4}$$

* نوجد أصفار المقام

$$x + 4 = 0 \Rightarrow x = -4$$

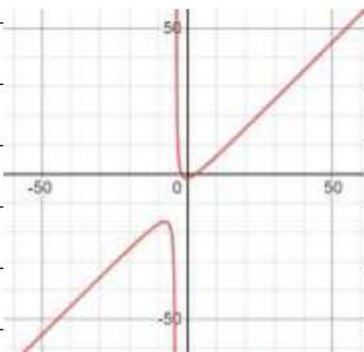
$$\Rightarrow \text{المجال} = \mathbb{R} - \{-4\}$$

* خطوط التقارب الرأسية $x = -4$

* لا توجد خطوط تقارب أفقية

لأن درجة البسط = درجة المقام

نتحقق من رسم الدالة بالآلة



$$m(x) = \frac{15x + 3}{x + 5}$$

* نوجد أصفار المقام

$$x + 5 = 0 \Rightarrow x = -5$$

$$\Rightarrow \text{المجال} = \mathbb{R} - \{-5\}$$

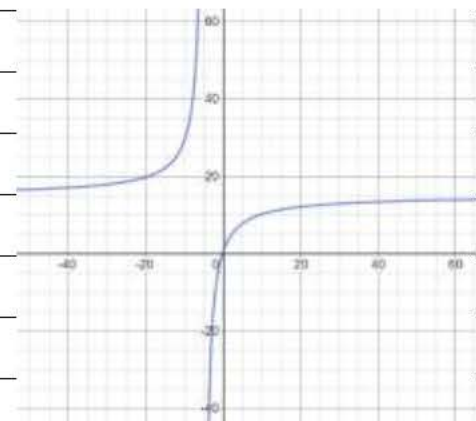
* خطوط التقارب الرأسية $x = -5$

* خطوط التقارب الأفقية

$$y = \frac{15}{1} = 15 \quad \text{معدل الداميين للبسط} \\ \text{معدل الداميين للمقام}$$

لأن درجة البسط < درجة المقام

نتحقق من ذلك رسمًا للدالة بالآلة الحاسبة



تمثيل الدوال النسبية بيانياً: $n < m$ و $n > m$

• إذا كانت $n < m$ فإن الخط المتقارب الأفقي $y = 0$ • إذا كانت $n = m$ فإن خط التقارب الأفقي $y = \frac{a_n}{b_m}$ • إذا كانت $n > m$ فلا يوجد خط تقارب أفقي

في كل دالة، حدد أي خطوط تقارب رأسية وأفقية ونقاط التقاطع. ثم مثل الدالة بيانياً واذكر مجالها.

For each function, determine any vertical and horizontal asymptotes and intercepts. Then graph the function, and state its domain.

$$g(x) = \frac{6}{x+3}$$

خطوط التقارب الرأسية: $x = -3$

$$x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$$

خط التقارب الرأسي هو $x = -3$

خطوط التقارب الأفقية: $y = 0$
لأنه درجة البسط < درجة المقام

نقاط التقاطع

نقطع y نضع $x = 0$

$$\Rightarrow y = \frac{6}{0+3} = 2$$

نقطع x نضع $y = 0$

$$0 = \frac{6}{x+3} \rightarrow \text{لا يوجد حل}$$

مجالها: $R - \{-3\}$

$$k(x) = \frac{x^2 - 7x + 10}{x - 3}$$

نصف المقام $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$

المجال: $R - \{3\}$

خطوط التقارب الرأسية: $x = 3$

خطوط التقارب الأفقية: (الدوم)

لأنه درجة البسط أكبر من درجة المقام ≥ 1
لجاء للدالة خط تقارب مائل

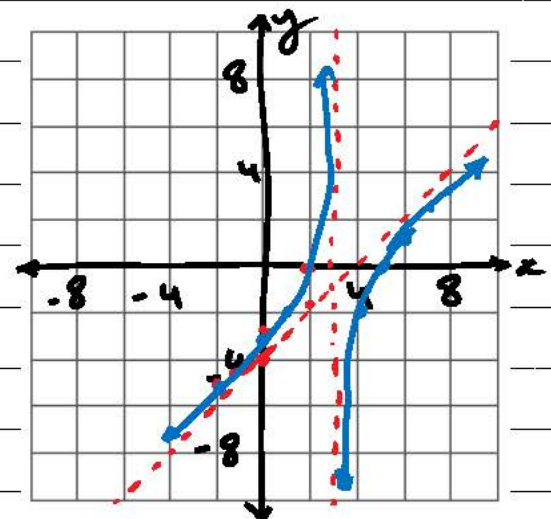
$$\begin{array}{r} x-4 \\ x-3 \overline{) x^2 - 7x + 10} \\ \underline{x^2 - 3x} \\ -4x + 10 \\ \underline{-4x + 12} \\ -2 \end{array}$$

معادلة خط التقارب المائل: $y = x - 4$

$$x^2 - 7x + 10 = 0 \Rightarrow x = 5, x = 2$$

$$y = \frac{0^2 - 7(0) + 10}{0 - 3} = \frac{-10}{3}$$

x	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y	-5.6	-4.5	-3.5	-2.5	-1.5	-0.5	0.5	1.5	2.5	3.5	4.5	5.5	6.5	7.5	8.5	9.5



050-2509447

في كل دالة، حدد أي خطوط تقارب رأسية وأفقية ونقاط التقاطع. ثم مثل الدالة بيانياً واذكر مجالها.

$$n(x) = \frac{x}{x^2 + x - 2}$$

$$x^2 + x - 2 = 0 \quad \leftarrow \text{أصفار المقام}$$

$$(x-1)(x+2) = 0$$

$$x = 1, \quad x = -2$$

$$\text{المجال} \leftarrow R - \{1, -2\}$$

* خطوط التقارب الرأسية هي

$$x = 1, \quad x = -2$$

* خطوط التقارب الأفقية هو $y = 0$

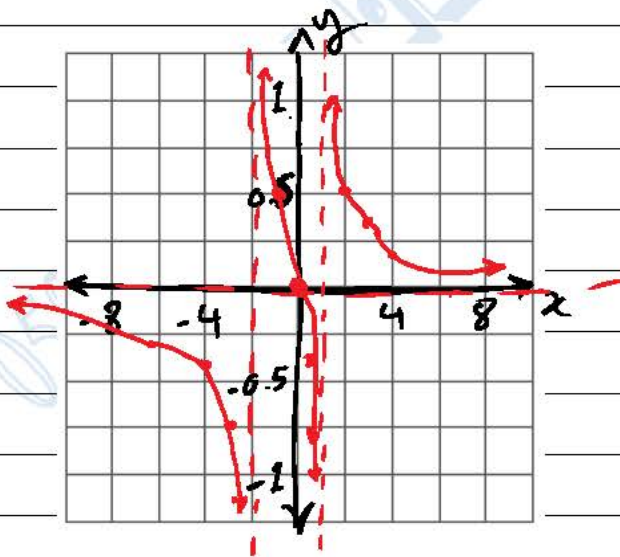
لأنه درجة البسط < درجة المقام

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1/2	1	2	3	4
y	0.3	0.4	0.75	1	0.5	0	0.2	0.5	0.3	0.2	0.1

$$0 = \frac{x}{x^2 + x - 2} \quad \leftarrow \text{مقطع x}$$

$$\Rightarrow \boxed{0 = 2}$$

$$y = \frac{0}{(0)^2 + (0) - 2} = \boxed{0} \quad \leftarrow \text{مقطع y}$$



$$h(x) = \frac{2}{x^2 + 2x - 3}$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \quad \leftarrow \text{أصفار المقام}$$

$$(x-1)(x+3) = 0$$

$$x = 1, \quad x = -3$$

$$\text{المجال} \leftarrow R - \{1, -3\}$$

* خطوط التقارب الرأسية هي $x = 1, x = -3$ * خطوط التقارب الأفقية $y = 0$

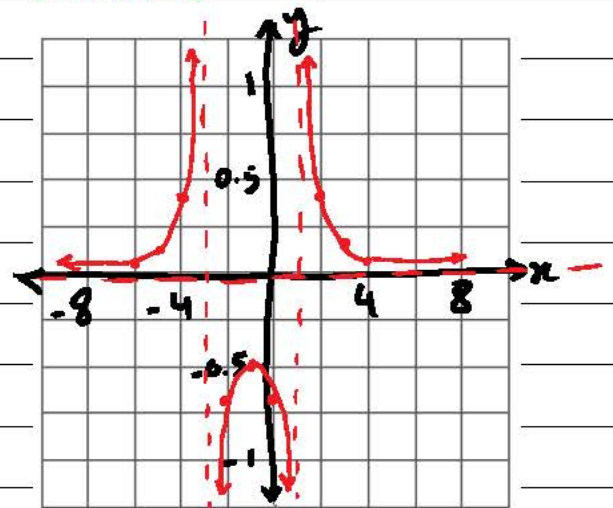
لأنه درجة البسط < درجة المقام

x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	0.09	0.17	0.4	1	0.75	0.5	0.33	0.5	0.4	0.17	0.09

$$0 = \frac{2}{x^2 + 2x - 3} \quad \leftarrow \text{مقطع x}$$

$$\text{مستحيل} \rightarrow \text{لا توجد تقاطع x}$$

$$y = \frac{2}{0^2 + 2(0) - 3} = -\frac{2}{3} \quad \leftarrow \text{مقطع y}$$



تمثيل الدالة النسبية بيانياً: $n = m$

في كل دالة، حدد أي خطوط تقارب رأسية وأفقية ونقاط التقاطع. ثم مثل الدالة بيانياً واذكر مجالها.

For each function, determine any vertical and horizontal asymptotes and intercepts. Then graph the function, and state its domain.

$$f(x) = \frac{3x^2 - 3}{x^2 - 9}$$

$$x^2 - 9 = 0$$

أضمار المقام ←

$$(x - 3)(x + 3) = 0$$

$$x = 3, x = -3$$

$$R = \{3, -3\}$$

خطوط التقارب الرأسية هي $x = 3$ و $x = -3$

خطوط التقارب الأفقية هي $y = \frac{3}{1} = 3$

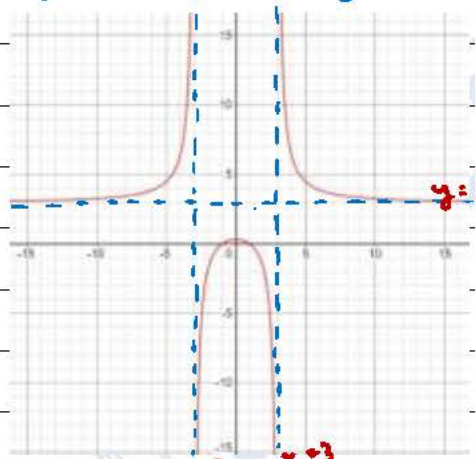
لأن درجة البسط = درجة المقام

$$3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

تقطع x ←

$$y = \frac{3(x^2 - 3)}{x^2 - 9} = \frac{1}{3}$$

تقطع y ←



$$h(x) = \frac{x - 6}{x + 2}$$

$$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$$

أضمار المقام ←

$$R = \{-2\}$$

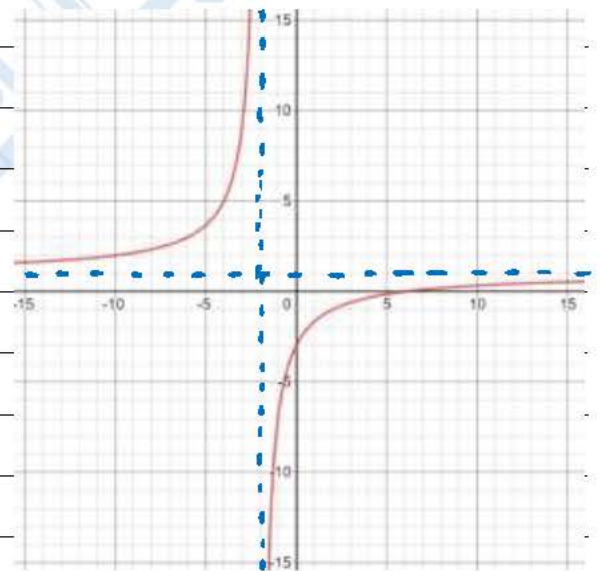
المجال ←

خطوط التقارب الرأسية هي $x = -2$

خطوط التقارب الأفقية هي $y = 1$

تقطع x ← $0 = x - 6 \Rightarrow x = 6$

تقطع y ← $y = \frac{0 - 6}{0 + 2} = -3$



$$h(x) = \frac{x^2 - 4}{5x^2 - 5}$$

$$5x^2 - 5 = 0$$

أضمار المقام ←

$$x = \pm 1$$

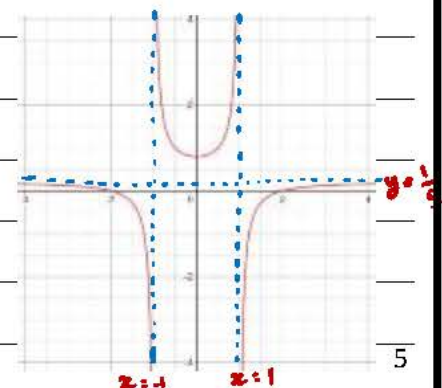
$$R = \{1, -1\}$$

خطوط التقارب الرأسية هي $x = 1$ و $x = -1$

خطوط التقارب الأفقية هي $y = \frac{1}{5}$

تقطع x ← $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$

تقطع y ← $y = \frac{0^2 - 4}{5(0)^2 - 5} = \frac{4}{5}$



تمثيل الدالة النسبية بيانياً: $n = m + 1$

في كل دالة، حدد أي خطوط تقارب رأسية وأفقية ونقاط التقاطع. ثم مثل الدالة بيانياً واذكر مجالها.

For each function, determine any vertical and horizontal asymptotes and intercepts. Then graph the function, and state its domain.

$$f(x) = \frac{2x^3}{x^2 + x - 12}$$

$$x^2 + x - 12 = 0$$

$$(x - 3)(x + 4) = 0$$

$$x = 3 \text{ و } x = -4 \quad R = \{3, -4\}$$

$$x = 3 \text{ و } x = -4$$

$$x = 3 \text{ و } x = -4$$

$$x = 3 \text{ و } x = -4$$

$$x = 3 \text{ و } x = -4$$

$$x = 3 \text{ و } x = -4$$

$$x = 3 \text{ و } x = -4$$

$$x = 3 \text{ و } x = -4$$

$$x = 3 \text{ و } x = -4$$

$$x = 3 \text{ و } x = -4$$

$$x = 3 \text{ و } x = -4$$

$$x = 3 \text{ و } x = -4$$

$$x = 3 \text{ و } x = -4$$

$$x = 3 \text{ و } x = -4$$

$$x = 3 \text{ و } x = -4$$

$$x = 3 \text{ و } x = -4$$

$$x = 3 \text{ و } x = -4$$

$$x = 3 \text{ و } x = -4$$

$$x = 3 \text{ و } x = -4$$

$$x = 3 \text{ و } x = -4$$

$$x = 3 \text{ و } x = -4$$

$$x = 3 \text{ و } x = -4$$

$$x = 3 \text{ و } x = -4$$

$$x = 3 \text{ و } x = -4$$

$$x = 3 \text{ و } x = -4$$

$$x = 3 \text{ و } x = -4$$

$$x = 3 \text{ و } x = -4$$

$$h(x) = \frac{x^2 + 3x - 3}{x + 4}$$

$$x + 4 = 0 \Rightarrow x = -4$$

$$R = \{-4\}$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x + 4 = 0 \Rightarrow x = -4$$

$$R = \{-4\}$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x + 4 = 0 \Rightarrow x = -4$$

$$R = \{-4\}$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x + 4 = 0 \Rightarrow x = -4$$

$$R = \{-4\}$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x + 4 = 0 \Rightarrow x = -4$$

$$R = \{-4\}$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x + 4 = 0 \Rightarrow x = -4$$

$$R = \{-4\}$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x + 4 = 0 \Rightarrow x = -4$$

$$R = \{-4\}$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x + 4 = 0 \Rightarrow x = -4$$

$$R = \{-4\}$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

$$x = -4$$

التمثيل البياني لدالة نسبية لها عوامل مشتركة

في كل دالة، حدد أي خطوط تقارب رأسية وأفقية والفجوات ونقاط التقاطع. ثم مثل الدالة بيانيًا واذكر مجالها.

For each function, determine any vertical and horizontal asymptotes, holes, and intercepts. Then graph the function and state its domain.

$$h(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 2x - 8} \rightarrow R.$$

$$h(x) = \frac{(x-2)(x+2)}{(x+2)(x-4)} = \frac{x-2}{x-4}$$

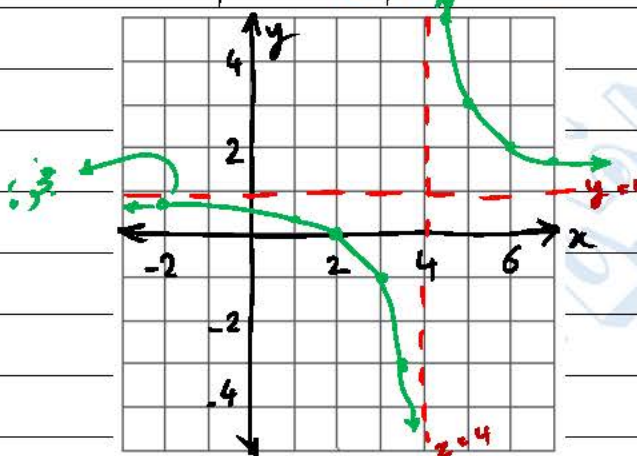
$$R = \{-2, 4\}$$

* فجوة عند $x = -2$

* خطوط التقارب الرأسية عند $x = 4$

* خطوط التقارب الأفقية عند $y = 1$

x	1	2	3	3.5	4	4.5	5	6	7
y	0.3	0	-1	-3	1/2	5	3	2	1.7



$$g(x) = \frac{x^2 + 10x + 24}{x^2 + x - 12}$$

$$g(x) = \frac{(x+6)(x+4)}{(x-3)(x+4)} = \frac{x+6}{x-3}$$

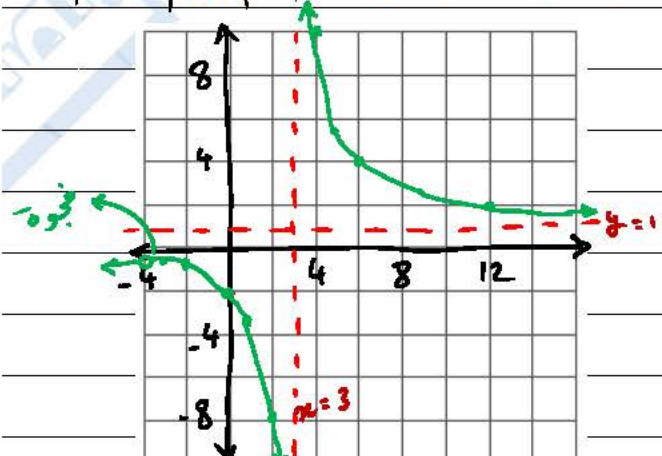
$$R = \{-4, 3\}$$

* فجوة عند $x = -4$

* خط التقارب الرأسية عند $x = 3$

* خط التقارب الأفقي عند $y = 1$

x	0	1	2	2.5	3	3.5	4	5	6	7
y	-2	-3.5	-8	-7	19	10	5.5	4	3.25	3.25



$$c(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 4x - 5}$$

$$c(x) = \frac{(x+1)(x-3)}{(x+1)(x-5)} = \frac{x-3}{x-5}$$

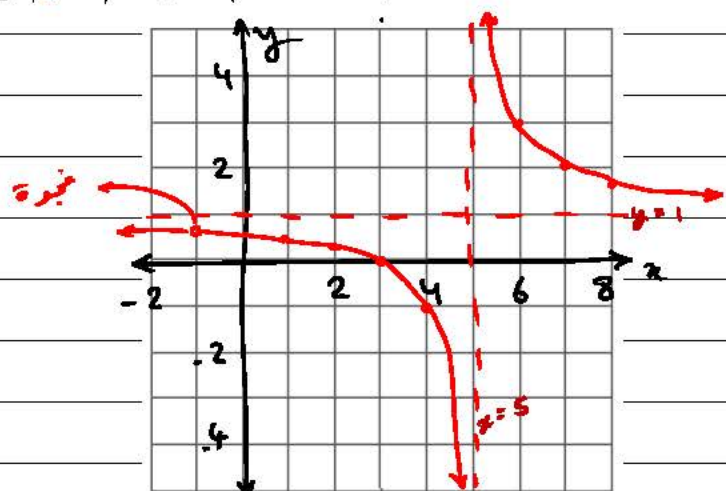
$$R = \{-1, 5\}$$

* خطوط التقارب الرأسية عند $x = 5$

* خطوط التقارب الأفقية عند $y = 1$

* فجوة عند $x = -1$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	0.6	0.5	0.3	0	-1	3	2	1.7	1.5	1.4	1.4



حل المعادلة النسبية

Solve each equation.

حل كل من المعادلات التالية.

$$x + \frac{6}{x-8} = 0 \quad \text{بحالطرفين } \times (x-8)$$

$$x(x-8) + \frac{6}{x-8}(x-8) = 0(x-8)$$

$$x^2 - 8x + 6 = 0$$

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4(1)(6)}}{2(1)}$$

$$x = 4 \pm \sqrt{10}$$

$$\frac{20}{x+3} - 4 = 0 \quad \text{بحالطرفين } \times (x+3)$$

$$\frac{20}{x+3}(x+3) - 4(x+3) = 0(x+3)$$

$$20 - 4x - 12 = 0$$

$$20 - 12 = 4x$$

$$\frac{8}{4} = x$$

$$2 = x$$

$$\frac{9x}{x-2} = 6 \quad \text{بحالطرفين } \times (x-2)$$

$$\frac{9x}{x-2}(x-2) = 6(x-2)$$

$$9x = 6x - 12$$

$$9x - 6x = -12$$

$$3x = -12$$

$$x = \frac{-12}{3}$$

$$x = -4$$

050-2509447

حل معادلة نسبية باستخدام الحلول الدخيلة

Solve each equation.

حلّ كل من المعادلات التالية.

$$\frac{4}{x^2 - 6x + 8} = \frac{3x}{x-2} + \frac{2}{x-4}$$

$$\frac{4}{(x-2)(x-4)} = \frac{3x}{x-2} + \frac{2}{x-4} \quad \text{نضرب بـ } (x-2)(x-4)$$

$$\frac{4}{(x-2)(x-4)} \cdot (x-2)(x-4) = \frac{3x}{x-2} \cdot (x-2)(x-4) + \frac{2}{x-4} \cdot (x-2)(x-4)$$

$$\Rightarrow 4 = 3x(x-4) + 2(x-2) \Rightarrow (3x+2)(x-4) = 0$$

$$4 = 3x^2 - 12x + 2x - 4$$

$$0 = 3x^2 - 10x - 8$$

دخيل $x = -\frac{2}{3}$ ، $x = 4$
المعادلة الأصلية غير معرفة $x = 4$ ، $x = -\frac{2}{3}$ باقي الحل الوحيد هو $x = -\frac{2}{3}$

$$\frac{2x}{x+3} + \frac{3}{x-6} = \frac{27}{x^2 - 3x - 18}$$

$$\frac{2x}{x+3} + \frac{3}{x-6} = \frac{27}{(x+3)(x-6)} \quad x(x+3)(x-6)$$

$$\frac{2x}{x+3} \cdot (x+3)(x-6) + \frac{3}{x-6} \cdot (x+3)(x-6) = \frac{27}{(x+3)(x-6)} \cdot x(x+3)(x-6)$$

$$\Rightarrow 2x(x-6) + 3(x+3) = 27$$

$$2x^2 - 12x + 3x + 9 = 27$$

$$2x^2 - 9x - 18 = 0$$

$$(2x+3)(x-6) = 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{2} , x = 6$$

المعادلة الأصلية غير معرفة
منه $x = 6$ (حل دخيل)
وبالتالي الحل الوحيد
 $x = -\frac{3}{2}$

$$\frac{12}{x^2 + 6x} = \frac{2}{x+6} + \frac{x-2}{x}$$

$$\frac{-12}{x(x+6)} = \frac{2}{x+6} + \frac{x-2}{x} \quad x(x)(x+6)$$

$$\frac{-12}{x(x+6)} \cdot (x)(x+6) = \frac{2}{x+6} \cdot (x)(x+6) + \frac{x-2}{x} \cdot (x)(x+6)$$

$$\Rightarrow -12 = 2(x) + (x-2)(x+6)$$

$$-12 = 2x + x^2 + 6x - 2x - 12$$

$$\Rightarrow x^2 + 6x = 0$$

$$x(x+6) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0 , x = -6$$

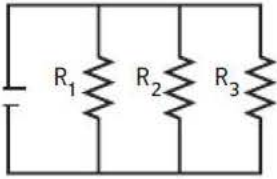
الحلين مرفوضين
(حليين دخيلين)
لأن المعادلة غير معرفة
عند $x = 0$ وعند $x = -6$

ϕ = الحل

لا يوجد

حل المعادلة النسبية

الكهرباء يوضح مخطط دائرة كهربية ثلاث مقاومات متوازية. إذا كانت R هي المقاومة المكافئة للمقاومات الثلاث، فإن $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$. في هذه الدائرة، R_1 تساوي ضعف مقاومة R_2 ، R_3 تساوي 20 أوم. نفترض أن المقاومة المكافئة تساوي 10 أوم. جد R_1 و R_2 .



$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{10} = \frac{1}{2R_2} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{20} \quad \times 20R_2$$

$$(20R_2) \frac{1}{10} = \frac{1}{2R_2} (20R_2) + \frac{1}{R_2} (20R_2) + \frac{1}{20} (20R_2)$$

$$2R_2 = 10 + 20 + R_2$$

$$2R_2 - R_2 = 30$$

$$\boxed{R_2 = 30} \text{ أوم} \Rightarrow R_1 = 2R_2 = 2(30) = \boxed{60} \text{ أوم}$$

الأجهزة الإلكترونية لنفترض أن التيار I بالأمبير، في دائرة كهربية، تم تحديده بالصيغة $I = t + \frac{1}{10-t}$ حيث t هو الزمن بالثواني. في أي وقت يساوي التيار أمبير واحد؟

$$I = 1 = t + \frac{1}{10-t} \quad \times (10-t)$$

$$(10-t) \cdot 1 = t(10-t) + \frac{1}{10-t} (10-t)$$

$$10 - t = 10t - t^2 + 1$$

$$t^2 - 11t + 9 = 0$$

من الآلة الحاسبة $\rightarrow \boxed{5} \rightarrow \boxed{3}$ MODE

$$t_1 = 10.11$$

$$t_2 = 0.89$$

في هذا الدرس سوف نتعلم:

1- حل المتباينات كثيرة الحدود.

2- حل المتباينات النسبية.

إيجاد حل لمتباينة كثيرة الحدود

Solve each inequality.

حل كل من المتباينات التالية.

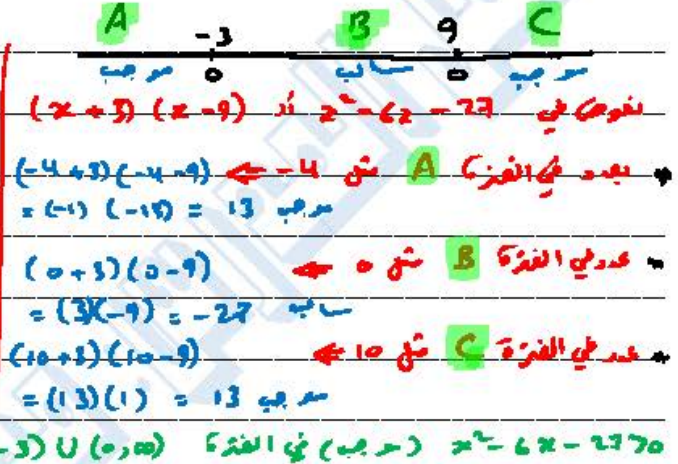
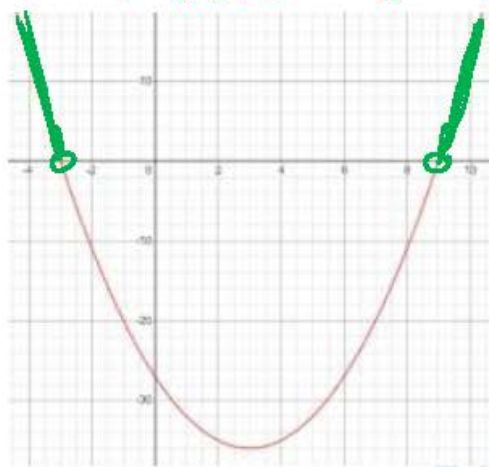
$$x^2 - 6x - 30 > -3$$

$$x^2 - 6x - 30 + 3 > 0$$

$$x^2 - 6x - 27 > 0 \rightarrow \text{نكتبه في الصورة القياسية}$$

$$x^2 - 6x - 27 = 0 \quad \text{نوجد الجذور}$$

$$(x + 3)(x - 9) = 0 \Rightarrow x = -3, x = 9$$



$$(x - 4)^2 > 4$$

$$(x - 4)^2 - 4 > 0$$

$$x^2 - 8x + 16 - 4 > 0$$

$$x^2 - 8x + 12 > 0$$

$$(x - 2)(x - 6) > 0 \rightarrow \text{موجب}$$

$$(x - 2)(x - 6) = 0 \quad \text{نجد الجذور}$$

$$x = 2, x = 6$$



A: $x = 0 \Rightarrow (0-2)(0-6) = 12$ موجب

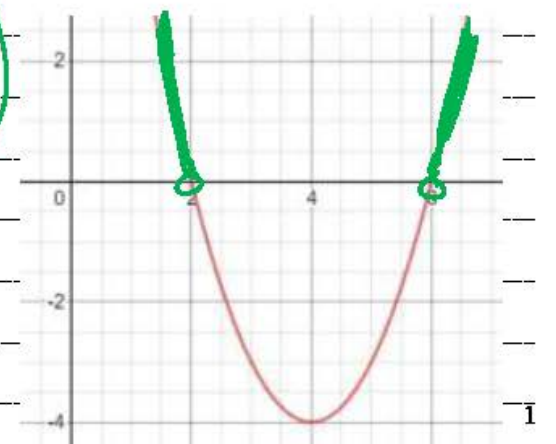
B: $x = 4 \Rightarrow (4-2)(4-6) = -4$ سالب

C: $x = 7 \Rightarrow (7-2)(7-6) = 5$ موجب

مع مخطط الإشارة:

$$(x - 2)(x - 6) > 0$$

في الفترة $(-\infty, 2) \cup (6, \infty)$



$$x^2 + 5x + 6 < 20$$

$$x^2 + 5x + 6 - 20 < 0$$

$$x^2 + 5x - 14 < 0$$

$$(x - 2)(x + 7) < 0 \quad \text{سالب}$$

$$(x - 2)(x + 7) = 0 \quad \text{حل المعادلة}$$

$$x = 2, x = -7$$

مخطط الإشارات

A -7

B 2

C

موجب

سالب

موجب

A if $x = -10 \Rightarrow (-10 - 2)(-10 + 7) = 36$ موجب

B if $x = 0 \Rightarrow (0 - 2)(0 + 7) = -14$ سالب

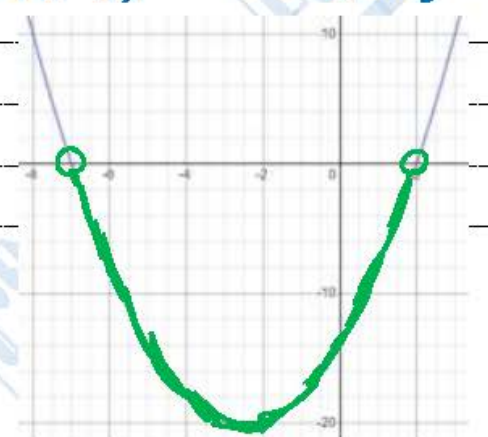
C if $x = 3 \Rightarrow (3 - 2)(3 + 7) = 10$ موجب

$$x^2 + 5x - 14 < 0$$

$$(-7, 2)$$

سالب

في الفترة



إيجاد حل متباينة كثيرة حدود باستخدام السلوك الطرفي

Solve each inequality.

حل كل من المتباينات التالية.

$$3x^3 - 4x^2 - 13x - 6 \leq 0 \quad \text{سالب أو } = 0$$

$$3x^3 - 4x^2 - 13x - 6 = 0 \quad \text{نوجد مضارب}$$

$$\frac{1, 2, 3, 6}{1, 3}$$

المضارب النسبية الممكنة

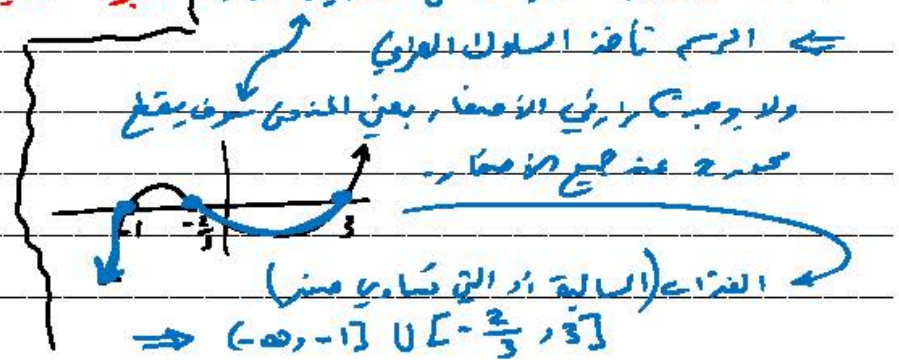
بتجربة المضارب الآخرين بـ -1

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 3 & -4 & -13 & -6 \\ & \downarrow & -3 & 7 & 6 \\ \hline & 3 & -7 & -6 & 0 \end{array}$$

$$3x^2 - 7x - 6 = 0$$

$$(3x + 2)(x - 3) = 0$$

$$x = -\frac{2}{3}, x = 3$$



الفئة (السالبة أو التي تساوي صفر)

$$\Rightarrow \left[-\frac{2}{3}, 3\right] \cup (-\infty, -1] \cup (-\infty, -\infty)$$

$$2x^2 - 10x \leq 2x - 16$$

سالب

$$2x^2 - 10x - 2x + 16 \leq 0$$

$$2x^2 - 12x + 16 \leq 0 \quad (+2)$$

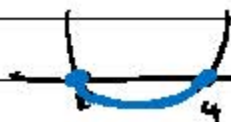
$$x^2 - 6x + 8 \leq 0$$

$$(x - 2)(x - 4) \leq 0$$

$$x = 2, x = 4 \quad \text{نقطة الصلة}$$

الدالة من الدرجة المزدوجة ومعامل الحد الرئيسي موجب

فإنه يكون الدالة



يتفتح من الرسم التقريبي

الحل هو

$$[2, 4]$$

$$2x^3 + 7x^2 - 12x - 45 \geq 0$$

$$= 1, 3, 5, 9, 15, 45 \quad \text{الأعداد النسبية الممكنة هي}$$

1, 2

-3

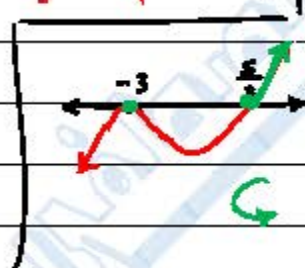
باستخدام الكويفت الرئيسي

$$\begin{array}{r|rrrr} -3 & 2 & 7 & -12 & -45 \\ & 1 & -6 & -3 & 45 \\ \hline & 2 & 1 & -15 & 0 \end{array}$$

$$2x^2 + x - 15 = 0$$

$$(2x - 5)(x + 3) = 0$$

$$x = \frac{5}{2}, x = -3$$



معامل الحد الرئيسي موجب

الدالة من الدرجة المزدوجة ومعامل الحد الرئيسي موجب

والصفر 3 - 2 فكلر موجب

عنايف الدالة نفس محور 2 عند 3 - 2

وتقطع محور 2 عند 5/2

مع حلول الرسم التقريبي

$$(-\infty, -3] \cup [\frac{5}{2}, \infty)$$

المتباينات كثيرة الحدود التي لها مجموعات حل غير عادية

Solve each inequality.

حل كل من المتباينات التالية.

$$x^2 + 5x + 8 < 0 \rightarrow \text{سالب}$$

من خلال استخدام الآلة $\rightarrow [5] \rightarrow [3] \rightarrow \text{mode}$

لا توجد أصفار حقيقية.



الدالة من درجة الدرجة ومعدلها الرئيسي موجب

المفني يقع بالكامل فوق محور x يعني الدالة موجبة دائماً

وبالتالي حل المتباينة ϕ

$$x^2 + 5x + 8 \geq 0$$

من خلال استخدام الآلة $\rightarrow [5] \rightarrow [3] \rightarrow \text{mode}$

لا توجد أصفار حقيقية



الدالة من درجة الدرجة ومعدلها الرئيسي موجب

المفني يقع بالكامل فوق محور x يعني الدالة موجبة دائماً

حل المتباينة $(-\infty, \infty)$

$$x^2 - 10x + 25 > 0 \rightarrow \text{موجب}$$

$$(x - 5)(x - 5) = 0$$

أصفار الدالة $x = 5$ مكرر مرتينالمفني لن يزل لأنه سالب x موجب وليس محصوراً عند 5حل المتباينة $(-\infty, \infty) - \{5\}$

$$x^2 - 10x + 25 \leq 0 \rightarrow \text{سالب أو 0}$$

حل المتباينة $\{5\}$

$$x^2 + 2x + 5 > 0 \rightarrow \text{موجب}$$

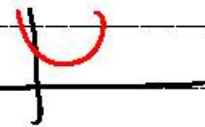
لا توجد أصفار حقيقية (بمقدار 2)

سالب x موجب

المفني يقع فوق محور x

حل المتباينة $(-\infty, \infty)$

$$x^2 + 2x + 5 \leq 0$$

حل المتباينة ϕ

$$x^2 - 2x - 15 \leq -16$$

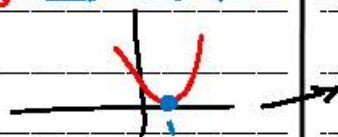
$$x^2 - 2x - 15 + 16 \leq 0 \rightarrow \text{سالب أو 0}$$

$$x^2 - 2x + 1 \leq 0$$

$$(x - 1)(x - 1)$$

 $x = 1$ مكرر مرتين

لأنه موجب محصوراً عند 1

حل المتباينة $\{1\}$ 

$$x^2 - 2x - 15 > -16$$

حل المتباينة $(-\infty, \infty) - \{1\}$

أو

 $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$

إيجاد حل متباينة نسبية

Solve each inequality.

$$\frac{4}{x-6} - \frac{2}{x+1} > 0$$

$$\frac{4(x+1) + 2(x-6)}{(x-6)(x+1)} > 0 \quad \leftarrow \text{نجمع الطرفين الأيسر}$$

$$\frac{4x+4+2x-12}{(x-6)(x+1)} > 0$$

$$\frac{6x-8}{(x-6)(x+1)} > 0$$

$$\text{أضمار البسط: } x = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

$$\text{أضمار المقام: } x = -1, x = 6 \quad \leftarrow \text{الدالة غير معرفة}$$

نخطب الإشارة

$x = -2$	$x = 0$	$x = 2$	$x = 7$
$\frac{(-)}{(-)(-)}$	$\frac{(-)}{(+)(+)}$	$\frac{(+)}{(-)(+)}$	$\frac{(+)}{(+)(+)}$
-	-	+	-

$$\text{حل المتباينة} \Rightarrow (-1, \frac{4}{3}) \cup (6, \infty)$$

$$\frac{x^2 - x - 11}{x - 2} \leq 3$$

$$\frac{x^2 - x - 11}{x - 2} - 3 \leq 0 \quad \leftarrow \text{نجمع الطرفين الأيسر}$$

$$\frac{x^2 - x - 11 - 3(x - 2)}{x - 2} \leq 0$$

$$\frac{x^2 - x - 11 - 3x + 6}{x - 2} \leq 0$$

$$\frac{x^2 - 4x - 5}{x - 2} \leq 0$$

$$\frac{(x+1)(x-5)}{x-2} \leq 0$$

$x = -2$	$x = 0$	$x = 3$	$x = 6$
$\frac{(-)(-)}{(-)}$	$\frac{(+)(-)}{(-)}$	$\frac{(+)(-)}{(+)}$	$\frac{(+)(+)}{(+)}$
-	-	+	-

$$\text{حل المتباينة} \Rightarrow (-\infty, -1] \cup (2, 5]$$

حل كل من المتباينات التالية.

$$\frac{x+6}{4x-3} \geq 1$$

$$\frac{x+6}{4x-3} - 1 \geq 0$$

نجمع الطرفين الأيسر

$$\frac{(x+6) - (4x-3)}{4x-3} \geq 0$$

$$\text{أضمار البسط: } x = 3$$

$$\text{أضمار المقام: } x = \frac{3}{4}$$

$$\frac{x+6-4x+3}{4x-3} \geq 0$$

$$\frac{-3x+9}{4x-3} \geq 0$$

نخطب الإشارة

$x = 0$	$x = 1$	$x = 4$
$\frac{(+)}{(-)}$	$\frac{(-)}{(-)}$	$\frac{(-)}{(+)}$
-	+	-

$$\text{حل المتباينة} \Rightarrow (\frac{3}{4}, 3]$$

$$\frac{1}{x} > \frac{1}{x+5}$$

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x+5} > 0$$

نجمع الطرفين الأيسر

$$\frac{x+5-x}{x(x+5)} > 0$$

لا يربط أضمار البسط

$$\text{أضمار المقام: } x = 0, x = -5$$

$$\frac{5}{x(x+5)} > 0$$

$x = -6$	$x = -1$	$x = 1$
$\frac{(+)}{(-)(-)}$	$\frac{(-)}{(+)(-)}$	$\frac{(+)}{(+)(+)}$
+	-	+

$$\text{حل المتباينة} \Rightarrow (-\infty, -5) \cup (0, \infty)$$

