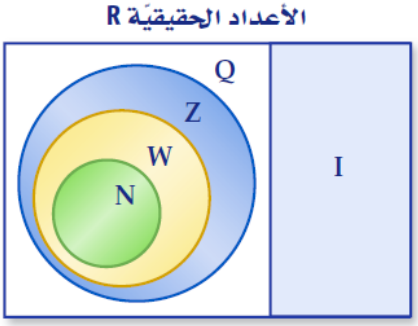
ورقة عمل الثاني عشر العام | 1-1 الدوال | الاسم:_____

في هذا الدرس سوف أتعلم: 1- وصف المجموعات الجزئية المكونة من أعداد حقيقية. 2- التعرف على الدوال وإيجاد قيمها وتحديد مجالاتها.

مفهوم أساسي

الأعداد الحقيقية

الرمز	المجموعة	أمثلة
Q	الأعداد النسبية	$0.125, -\frac{7}{8}, \frac{2}{3} = 0.666\ldots$
I	الأعداد غير النسبية	$\pi, \sqrt{3} = 1.73205\ldots$
Z	الأعداد الصحيحة	$-5, 17, -23, 8$
W	الأعداد الكلية	$0, 1, 2, 3\ldots$
N	الأعداد الطبيعية	$1, 2, 3, 4\ldots$



$$\{x \mid -3 \le x \le 16, x \in Z\}$$

- x ينتمي إلى مجموعة الأعداد المعطاة.
- x لها هذه الخصائص...
- الأعداد x حيث...

استخدام رمز بناء المجموعة

صف مجموعة الأعداد باستخدام رمز بناء المجموعة.

$\{1, 2, 3, 4, 5, \ldots.\}$

_____

$x \le -3$

_____

جميع مضاعفات π

_____

$x < 0$ أو $x \ge 100$

_____

$\{-0.25, 0, 0.25, 0.50, \ldots\}$

_____

اكتب كل مجموعة أعداد باستخدام رمز الفترة. إن أمكن.

$-8 < x \leq 16$

$a \geq -3$

$-4 \leq y < -1$

$x < 0$ أو $x \geq 100$

$\{-0.25, 0, 0.25, 0.50, \ldots\}$

تمييز الدالة: تذكَّر أن العلاقة هي قاعدة تربط عناصر مجموعة مثل A (المدخلات) مع عناصر من مجموعة مثل B (المخرجات)، حيث تُسمى A مجال العلاقة، وأما المجموعة B فتتضمن عناصر المدى جميعها، أما **الدالة** فهي حالة خاصة من العلاقة.

مفهوم أساسي — الدالة

التعبير اللفظي: الدالة f من مجموعة A إلى مجموعة B هي علاقة تربط كل عنصر x من المجموعة A بعنصر واحد فقط y من المجموعة B.

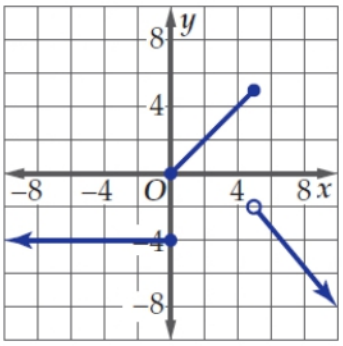
في كل علاقة مما يأتي، حدّد ما إذا كانت y تمثِّل دالةً في x أم لا:

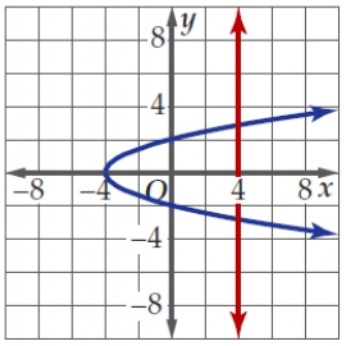
تمثّل قيم x رقم الطالب، وقيم y درجته في اختبار الفيزياء.

تمثل قيمة المدخل x العام بينما تمثل قيمة المخرج y اليوم من الأسبوع.

$x = y^3$

$x = |y|$





x	y
−6	−7
2	3
5	8
5	9
9	22

x	y
−8	−5
−5	−4
0	−3
3	−2
6	−3

إيجاد قيم الدوال

إذا كان $f(x) = x^2 + 8x - 24$ ، فأوجد قيمة الدالة في كل مما يأتي:

(a $f(6)$

(b $f(-4x)$

(c $f(5c + 4)$

إذا كانت $f(x) = \frac{2x + 3}{x^2 - 2x + 1}$، فأوجد قيمة الدالة في كل مما يأتي:

(A $f(12)$ (B $f(6x)$ (C $f(-3a + 8)$

إيجاد المجال جبريًا

إذا لم يذكر مجال الدالة فإنه يكون مجموعة الأعداد الحقيقية، مع استثناء القيم التي تجعل مقام الكسر صفرًا أو تجعل ما تحت الجذر عددًا سالبًا إذا كان دليل الجذر زوجيًا.

حدِّد مجال كلٍّ من الدوال الآتية:

(a $f(x)=\frac{2+x}{x^2-7x}$

(b $g(t)=\sqrt{t-5}$

(c $h(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-9}}$

(5C $g(x)=\frac{8x}{\sqrt{2x+6}}$

(5A $f(x)=\frac{5x-2}{x^2+7x+12}$

(5B $h(a)=\sqrt{a^2-4}$

050-2509447

إيجاد قيمة دالة متعددة التعريف

تُعرَّف بعض الدوال بقاعدتين أو أكثر وعلى فترات مختلفة ، وتُسمّى مثل هذه الدوال **الدوالّ المتعددة التعريف**.

طول : إذا كانت العلاقة بين أكبر معدل لطول الطفل $h(x)$ بالبوصة، وأكبر طول لوالديه x بالبوصة معطاة بالدالة:

$$h(x)=\begin{cases}1.6x-41.6 & , \quad 63<x<66\\ 3x-132 & , \quad 66\le x\le 68\\ 2x-66 & , \quad x>68\end{cases}$$

فأوجد أكبر معدل لطول الطفل في كل من الحالتين الآتيتين :

a) أكبر طول لوالديه 67 بوصة.

_____

b) أكبر طول لوالديه 72 بوصة.

_____

سرعة : إذا كانت سرعة مركبة $v(t)$ بالميل لكل ساعة تُعطَى بالدالة المتعددة التعريف الآتية، حيث الزمن t بالثواني:

$$v(t)=\begin{cases}4t & , \quad 0\le t\le 15\\ 60 & , \quad 15<t<240\\ -6t+1500 & , \quad 240\le t\le 250\end{cases}$$

فأوجد كلًّا مما يأتي:

6A) $v(5)$ **6B)** $v(15)$ **6C)** $v(245)$

_____

_____

_____

_____

_____

_____

_____

ورقة عمل الثاني عشر العام | 1-2 تحليل التمثيلات البيانية للدوال والعلاقات | الاسم: _____

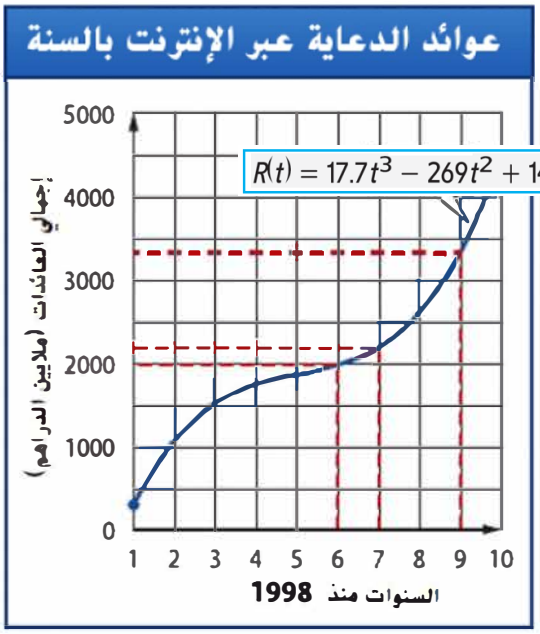
في هذا الدرس سوف أتعلم:

1- استخدام التمثيلات البيانية للدوال في تقدير قيم الدوال وإيجاد المجال والمدى والتقاطعات مع المحور الرأسي y وأصفار الدوال.

2- استكشاف التناظر في التمثيلات البيانية وتحديد الدوال الفردية والزوجية.

تقدير قيم الدوال

استعمل التمثيل البياني المجاور للدالة للإجابة عما يأتي:



a. **استخدم التمثيل البياني في تقدير إجمالي عوائد الدعاية عبر الإنترنت في 2007. تأكد من التقدير جبريًا.**

b. **استخدم التمثيل البياني في تقدير العام الذي بلغ فيه إجمالي عوائد الإعلان عبر الإنترنت 2 مليار AED. تأكد من التقدير جبريًا.**

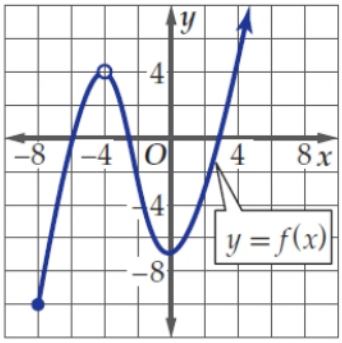
استثمار: تمثل الدالة: $v(d) = 0.002d^4 - 0.11d^3 + 1.77d^2 - 8.6d + 31, 0 \le d \le 20$ تقديرًا لاستثمارات أحد رجال الأعمال في السوق المحلية؛ حيث $v(d)$ قيمة الاستثمارات بملايين الريالات في السنة d.

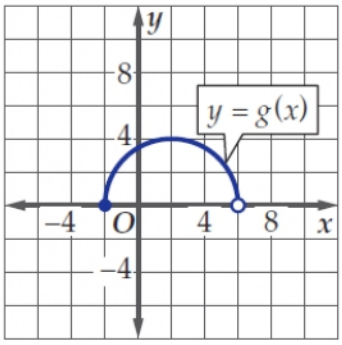
1A) استعمل التمثيل البياني لتقدير قيمة الاستثمارات في السنة العاشرة. ثم تحقّق من إجابتك جبريًا.

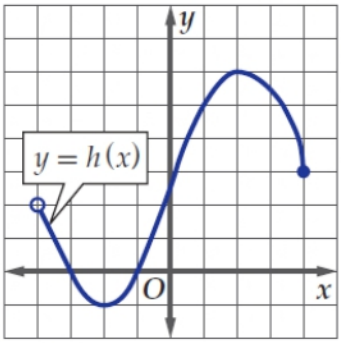
1B) استعمل التمثيل البياني لتحديد السنوات التي بلغت فيها قيمة الاستثمارات 30 مليون ريال. ثم تحقّق من إجابتك جبريًا.

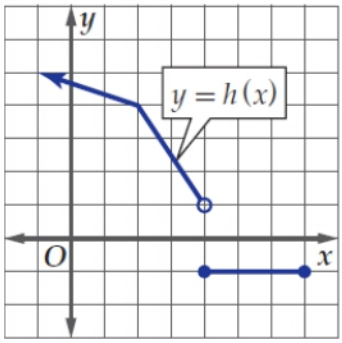


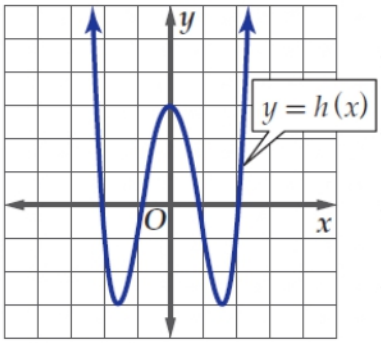
أوجد مجال الدالة ومداها باستعمال التمثيل البياني.

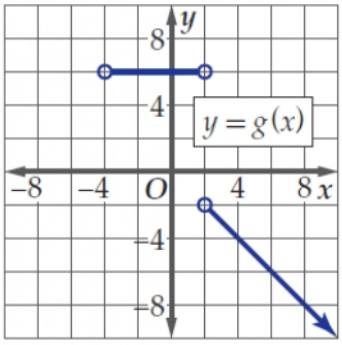


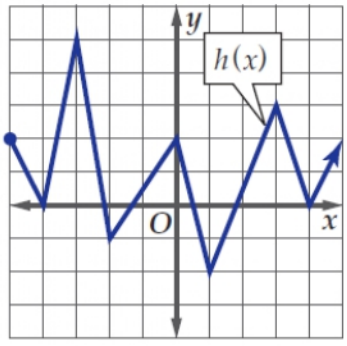




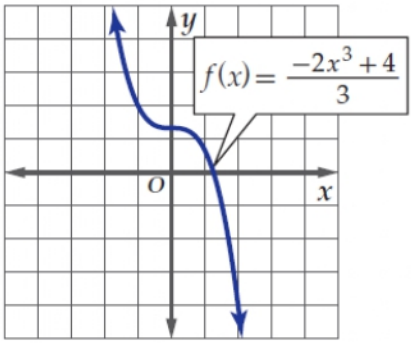


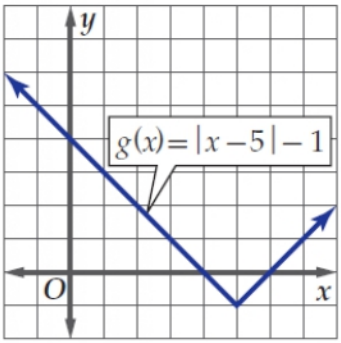


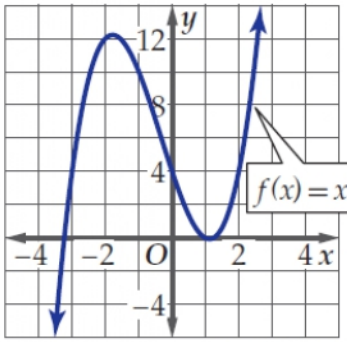


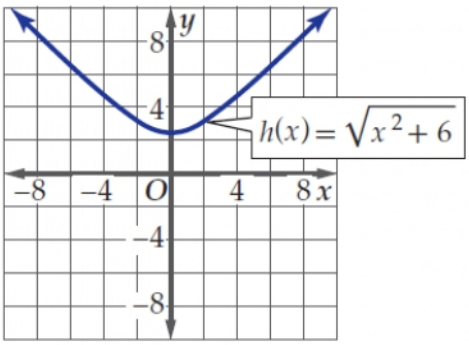


استعمل التمثيل البياني لكل من الدالتين أدناه، لإيجاد قيمة تقريبية للمقطع y، ثم أوجده جبريًّا:





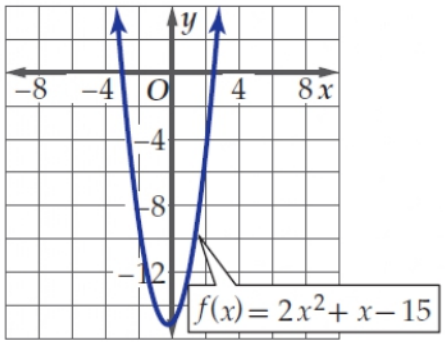


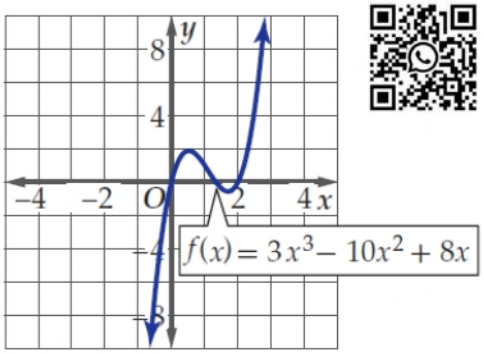


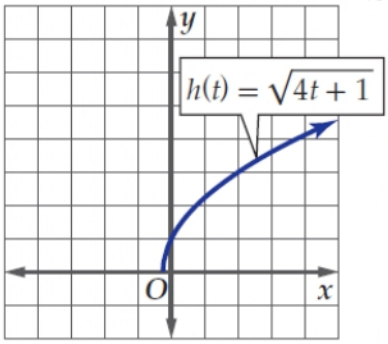
إيجاد الأصفار

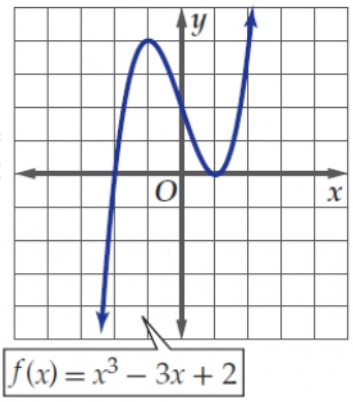
تُسمى المقاطع x لمنحنى الدالة **أصفار** الدالة، وتُسمى حلول المعادلة المرافقة للدالة **جذور** المعادلة. ولإيجاد أصفار دالة f، فإننا نحل المعادلة $f(x)=0$ بالنسبة للمتغير المستقل.

استعمل التمثيل البياني الذي يمثل الدالة، لإيجاد قيم تقريبيّة لأصفارها، ثم أوجد هذه الأصفار جبريًّا.

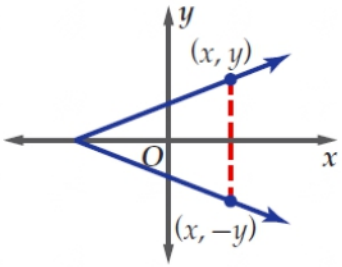
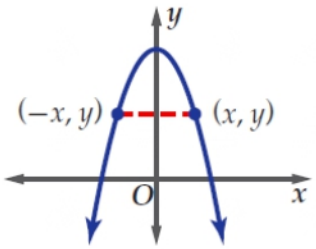
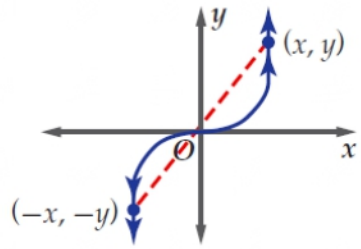




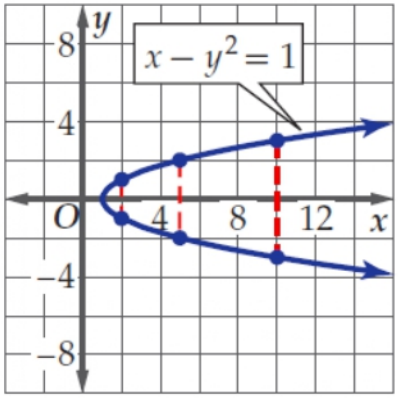




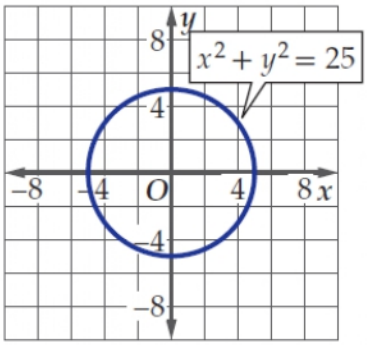
مفهوم أساسي — اختبارات التماثل

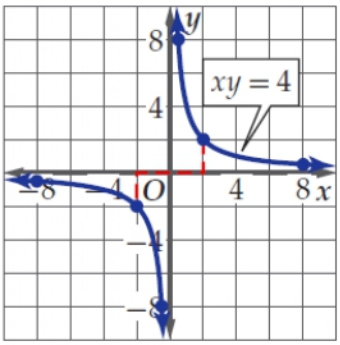
اختبار التمثيل البياني	النموذج	الاختبار الجبري
يكون تمثيل العلاقة البياني متماثلًا حول المحور x، إذا وفقط إذا تحقق الشرط التالي: إذا كانت النقطة (x, y)واقعة على التمثيل البياني، فإن النقطة $(x, -y)$ تقع عليه أيضًا.		إذا كان تعويض $-y$ مكان y يعطي معادلة مكافئة .
يكون تمثيل العلاقة البياني متماثلًا حول المحور y، إذا وفقط إذا تحقق الشرط التالي: إذا كانت النقطة (x, y) واقعة على التمثيل البياني، فإن النقطة $(-x, y)$ تقع عليه أيضًا.		إذا كان تعويض $-x$ مكان x يعطي معادلة مكافئة .
يكون تمثيل العلاقة البياني متماثلًا حول نقطة الأصل، إذا وفقط إذا تحقق الشرط التالي: إذا كانت النقطة (x, y) واقعة على التمثيل البياني، فإن النقطة $(-x, -y)$ تقع عليه أيضًا.		إذا كان تعويض $-x$ مكان x و $-y$ مكان y يعطي معادلة مكافئة.

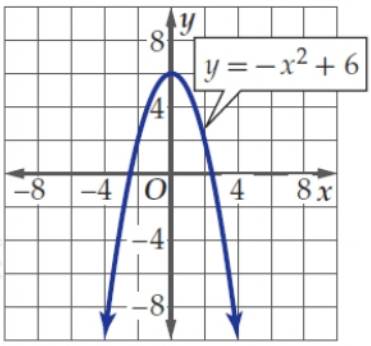
استعمل التمثيل البياني لاختبار التماثل حول المحور x والمحور y ونقطة الأصل.
عزِّز إجابتك عدديًّا، ثم تحقّق منها جبريًّا.



استعمل التمثيل البياني لاختبار التماثل حول المحور x والمحور y ونقطة الأصل.
عزِّز إجابتك عدديًّا، ثم تحقّق منها جبريًّا.







مفهوم أساسي — الدوال الزوجية والدوال الفردية

نوع الدالة	الاختبار الجبري
تُسمى الدوال المتماثلة حول المحور y الدوال الزوجية.	لكل x في مجال f، فإن $f(-x) = f(x)$.
تُسمى الدوال المتماثلة حول نقطة الأصل الدوال الفردية.	لكل x في مجال f، فإن $f(-x) = -f(x)$.

استعمل الحاسبة البيانية لتمثل كل دالة مما يأتي بيانيًّا. ثمَّ حلّل منحناها لتحدّد إن كانت الدالة زوجية أم فردية أم غير ذلك. ثم تحقّق من إجابتك جبريًّا.

$f(x) = \frac{2}{x^2}$

$f(x) = x^3 - 2x$

$g(x) = 4\sqrt{x}$

$f(x) = x^4 + 2$

$h(x) = x^5 - 2x^3 + x$

$f(x) = x^3 - 0.5\,x^2 - 3x$

ورقة عمل الثاني عشر العام | 1-3 الاتصال والسلوك الطرفي والنهايات | الاسم:_____

في هذا الدرس سوف أتعلم:
1- استخدام النهايات لتحديد اتصال دالة ما وتطبيق نظرية القيمة الوسطية على الدوال المتصلة.
2- استخدام النهايات لوصف السلوك الطرفي للدوال.

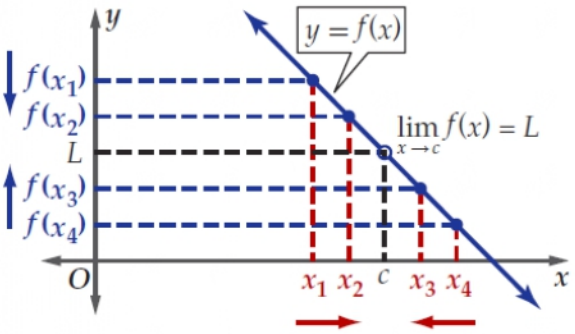
الاتصال: تكون **الدالة متصلة** إذا لم يكن في تمثيلها البياني أيُّ انقطاع أو قفزة. وعليه يمكنك تتبع مسار المنحنى دون أن ترفع القلم عنه.

إن مفهوم اقتراب قيم الدالة من قيمة دون الحاجة إلى الوصول إلى تلك القيمة يُسمى **النهاية**.

مفهوم أساسي — النهايات

التعبير اللفظي: إذا كانت قيمة الدالة $f(x)$ تقترب من قيمة واحدة L عندما تقترب x من c من الجهتين، فإن نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من c هي L.

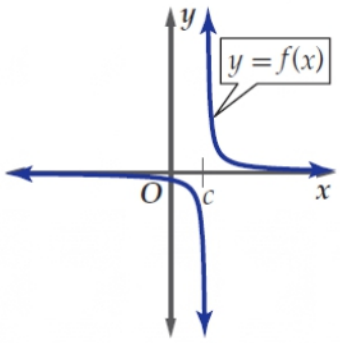
الرموز: نقول: إن $\lim_{x\to c} f(x) = L$، وتُقرأ نهاية الدالة $f(x)$ عندما تقترب x من c هي L.



مفهوم أساسي — أنواع الانفصال

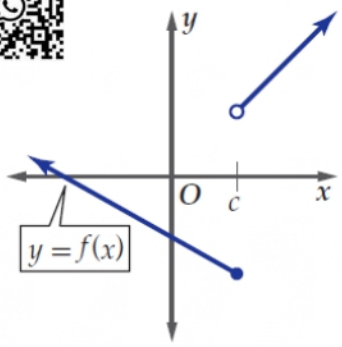
للدالة **انفصال لا نهائي** عند $x = c$ إذا تزايدت قيم الدالة أو تناقصت بلا حدود عندما تقترب x من c من اليمين أو اليسار.

مثال:



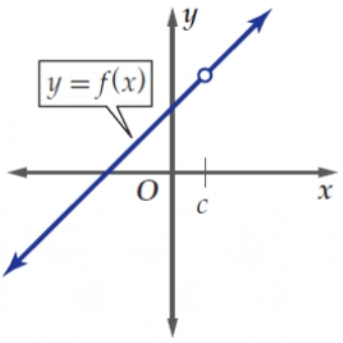
للدالة **انفصال قفزي** عند $x = c$ إذا كانت نهايتا الدالة عندما تقترب x من c من اليمين ومن اليسار موجودتين، ولكنهما غير متساويتين.

مثال:



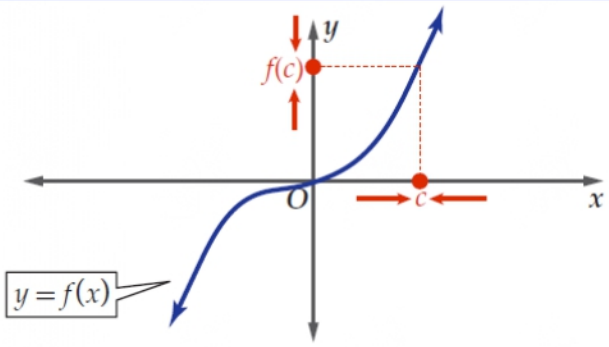
للدالة **انفصال قابل للإزالة** عند $x = c$ إذا كانت نهاية الدالة عندما تقترب x من c موجودة، ولاتساوي قيمة الدالة عند $x = c$، ويشار إليها بدائرة صغيرة (○) غير مظلّلة؛ لتعبر عن عدم اتصال عند هذه النقطة.

مثال:



ملخص المفهوم

اختبار الاتصال



- $f(x)$ معرّفة عند c ، أي أن $f(c)$ موجودة.
- $f(x)$ تقترب من القيمة نفسها عندما تقترب x من c من الجهتين. أي أن $\lim_{x\to c} f(x)$ موجودة.
- $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$.

حدد ما إذا كانت الدالة $f(x) = 2x^2 - 3x - 1$ متصلة عند $x = 2$. برّر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال.

حدد ما إذا كانت كل من الدالتين الآتيتين متصلتين عند $x = 0$. برّر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال:

$f(x) = x^3$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & , \quad x < 0 \\ x & , \quad x \geq 0 \end{cases}$$

تحديد نقاط الانفصال

حدد ما إذا كانت كل دالة مما يأتي متصلة عند قيمة x المعطاة. وبرر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال.

وإذا كانت الدالة غير متصلة فحدّد نوع عدم الاتصال: لانهائي، قفزي، قابل للإزالة.

$$f(x)=\begin{cases}3x-2 & , \quad x>-3\\ 2-x & , \quad x\le -3\end{cases}$$ عند $x=-3$.

$$f(x)=\frac{x+3}{x^2-9}$$ عند $x=-3\,,x=3$.

$f(x)=\begin{cases} 5x+4 & , \quad x>2 \\ 2-x & , \quad x\le 2 \end{cases}$ ، عند $x=2$.

$f(x)=\frac{1}{x^2}$ ، عند $x=0$.

إزالة عدم الاتصال

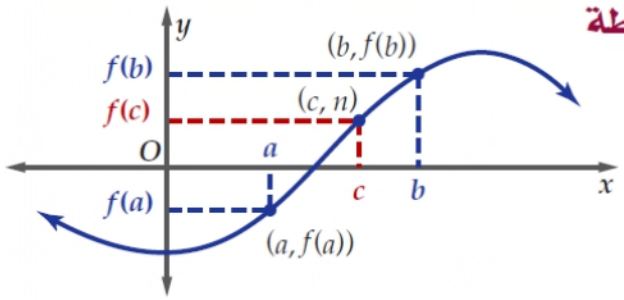
أعد تعريف الدالة $f(x)=\frac{x^2-16}{x-4}$؛ لتصبح متصلة عند $x=4$.

أعد تعريف الدالة $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$ ؛ لتصبح متصلة عند $x=1$.

050-2509447

نظرية

نظرية القيمة المتوسطة



إذا كانت $f(x)$ دالة متصلة على $[a, b]$، وكانت $a < b$ ووجدت قيمة n بين $f(a)$ و $f(b)$ فإنه يوجد عدد c بين a وَ b، بحيث $f(c) = n$.

حدّد الأعداد الصحيحة المتتالية التي تنحصر بينها الأصفار الحقيقية لكل دالة مما يأتي في الفترة المعطاة:

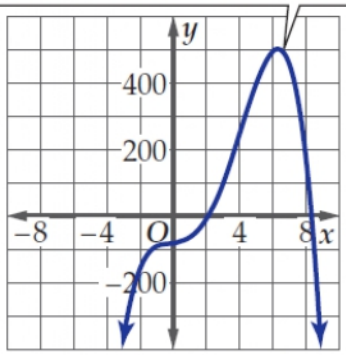
$f(x) = x^3 - 4x + 2$، $[-4, 4]$.

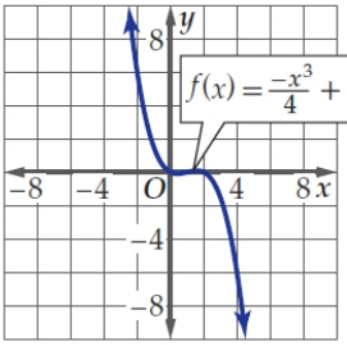
$f(x) = x^3 + 2x^2 - 8x + 3$، $[-6, 4]$

$f(x) = \frac{x^2 - 6}{x + 4}$، $[-3, 4]$

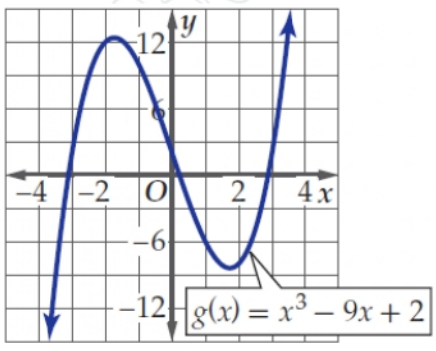
استعمل التمثيل البياني لكل من الدوال الآتية لوصف سلوك طرفي تمثيلها البياني، ثم عزز إجابتك عدديًّا.

$f(x) = -x^4 + 8x^3 + 3x^2 + 6x - 80$



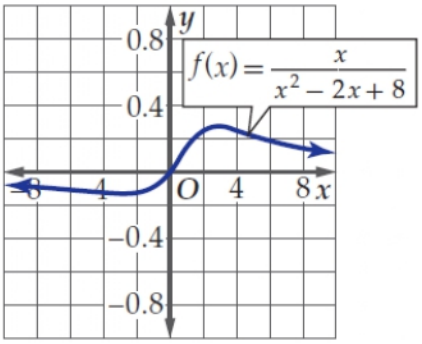


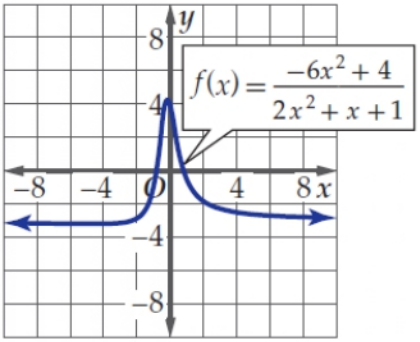
$f(x) = \frac{-x^3}{4} + \frac{3x^2}{4} - \frac{x}{2}$

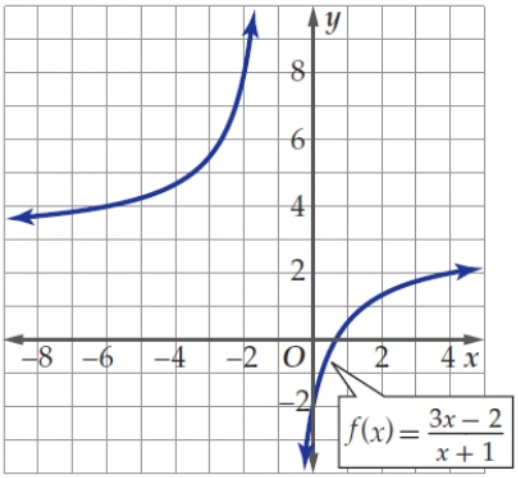


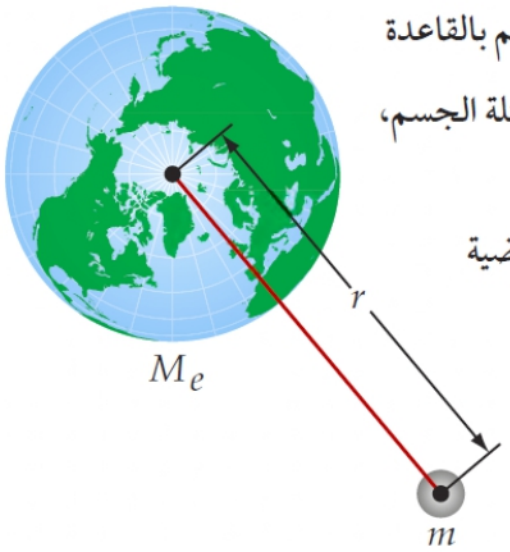
$g(x) = x^3 - 9x + 2$

استعمل التمثيل البياني لكل من الدوال الآتية لوصف سلوك طرفي تمثيلها البياني، ثم عزز إجابتك عدديًا.









فيزياء: تُعطى قيمة طاقة الوضع الناتجة عن الجاذبية الأرضية لجسم بالقاعدة $U(r) = -\frac{GmM_e}{r}$ ، حيث G ثابت نيوتن للجذب الكوني، و m كتلة الجسم، و M_e كتلة الأرض، و r المسافة بين الجسم ومركز الأرض كما في الشكل المجاور. ماذا يحدث لطاقة الوضع الناتجة عن الجاذبية الأرضية لجسم عندما يتحرك مبتعدًا عن الأرض مسافة كبيرة جدًا؟

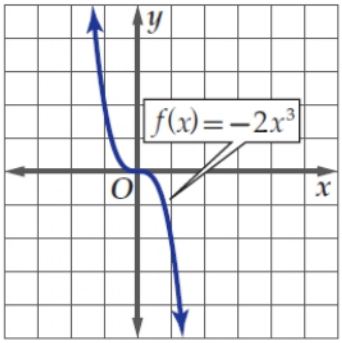
فيزياء: الضغط الديناميكي هو قياس الضغط الناتج عن حركة جزيئات الغاز ويعطى بالقاعدة $q(v) = \frac{\rho v^2}{2}$، حيث ρ (ويقرأ روه) كثافة الغاز، و v السرعة التي يتحرك بها الجزيء. ماذا يحدث للضغط الديناميكي لجزيئات الغاز عندما تستمر سرعة الجزيئات في التزايد؟

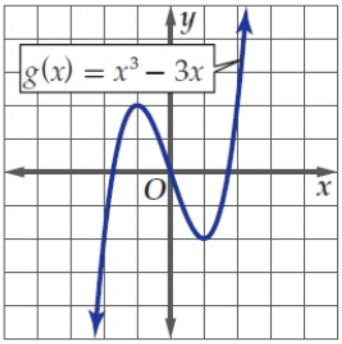
ورقة عمل الثاني عشر العام | 1-4 القيم القصوى ومتوسط معدل التغير | الاسم:_____

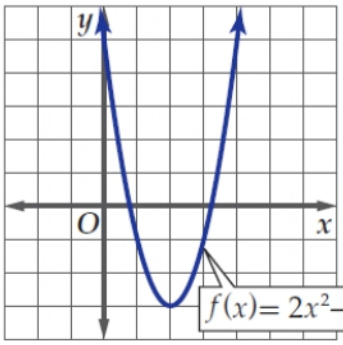
في هذا الدرس سوف أتعلم:
1- تحديد الفترات التي تكون فيها الدوال متزايدة أو ثابتة أو متناقصة. وتحديد القيم العظمى والصغرى لها.
2- إيجاد متوسط معدل التغير لدالة ما.

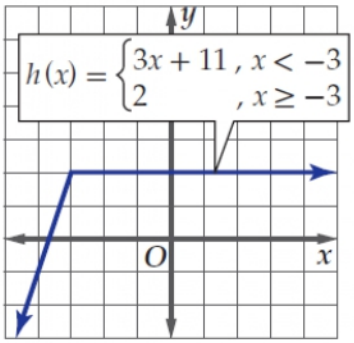
تحليل سلوك التزايد والتناقص

استخدم التمثيل البياني لكل دالة لتقدير الفترات مقربةً إلى أقرب 0.5 وحدة والتي تكون عندها الدالة متزايدة أو متناقصة أو ثابتة. ادعم إجابتك عدديًا.

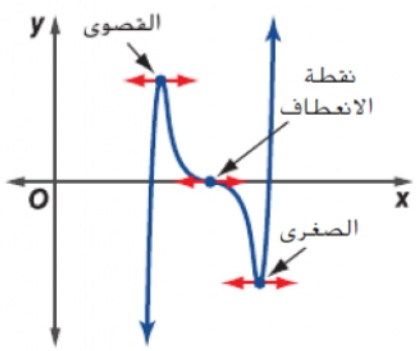




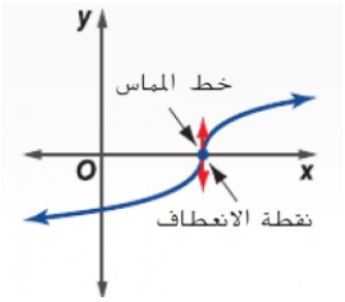




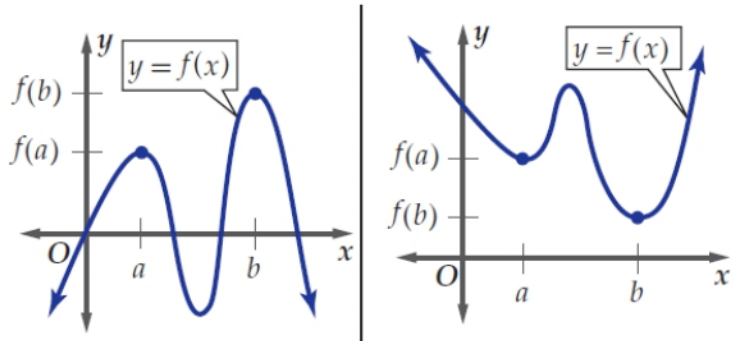
تقدير وتحديد القيم القصوى لدالة



النقاط الحرجة لدالة ما هي تلك النقاط التي يكون عندها الخط المماس للمنحنى أفقي أو رأسي. **القيم القصوى** هي نقاط حرجة تغير الدالة عندها سلوكها من حيث التزايد أو التناقص. وعند هذه النقاط، تكون للدالة قيمة **عظمى** أو **صغرى**، محلية أو مطلقة. **نقطة الانعطاف** يمكن أن تكون أيضًا نقطة حرجة. وعند هذه النقاط، تغير الدالة من إتجاه تقعرها، ولكن لا تغير سلوكها من حيث التزايد أو التناقص. بدلًا عن ذلك، يتغير اتجاه المنحنى من أعلى لأسفل أو العكس.



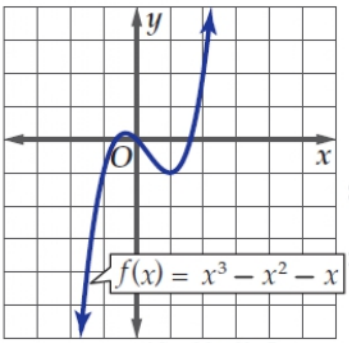
القيم القصوى المحلية والمطلقة



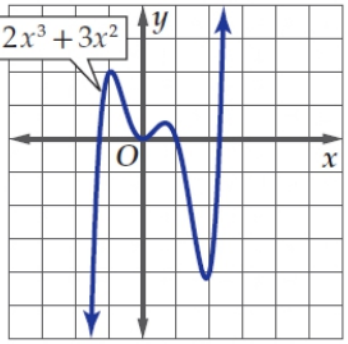
$f(a)$ قيمة عظمى محلية للدالة f | $f(a)$ قيمة صغرى محلية للدالة f

$f(b)$ قيمة عظمى مطلقة للدالة f | $f(b)$ قيمة صغرى مطلقة للدالة f

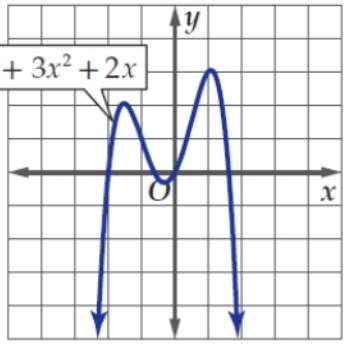
قدّر قيم x التي يكون لكلٍّ من الدوال الآتية عندها قيم قصوى مقربة إلى أقرب 0.5 وحدة، وأوجد قيم الدالة عندها، وبيِّن نوع القيم القصوى، ثم عزّز إجابتك عدديًّا.



$g(x)=x^5-2x^4-2x^3+3x^2$



$f(x)=-x^4-x^3+3x^2+2x$

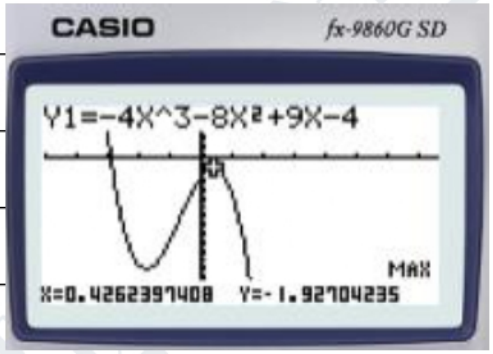


050-2509447

الحاسبة البيانية : أوجد القيم القصوى المحلية والمطلقة مقربة إلى أقرب جزء من مئة لكل دالة فيما يأتي، وحدد قيم x التي تكون عندها هذه القيم:

$f(x) = -4x^3 - 8x^2 + 9x - 4$

اضغط لمعرفة كيفية استخدام الآلة الحاسبة



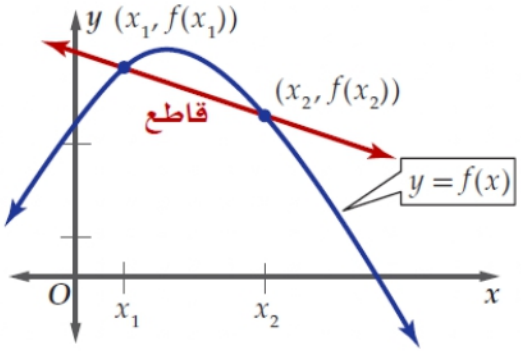
$h(x) = 7 - 5x - 6x^2$

$g(x) = 2x^3 - 4x^2 - x + 5$

زراعة: يتم قطف 400 حبة برتقال من كل شجرة في الموسم الواحد عندما يكون عدد أشجار البرتقال في الحقل 75 شجرة. فإذا علمت أنه عند زراعة كل شجرة جديدة ينقص إنتاج كل شجرة في البستان بمقدار حبتين. فكم شجرة إضافية يجب زراعتها للحصول على أكبر إنتاج ممكن؟

صناعة: يرغب صاحب مصنع زجاج في إنتاج كأس أُسطوانية الشكل مفتوحة من أعلى مساحتها الكلية $10\pi \text{ in}^2$. أوجد طول نصف قطر الكأس وارتفاعه اللذين يجعلان حجمها أكبر ما يمكن.

متوسط معدل التغير



متوسط معدل تغير الدالة $f(x)$ في الفترة $[x_1, x_2]$ هو

$$m_{\text{sec}} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

أوجد متوسط معدل التغير لكل دالة فيما يأتي في الفترة المعطاة.

$f(x) = -x^3 + 3x \ , \ [-2, -1]$

$f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 2 \, , \, [2, 3]$

$f(x) = x^4 - 6x^2 + 4x \, , \, [-5, -3]$

فيزياء: إذا كانت المسافة التي يقطعها جسم ساقط من مكان مرتفع تعطى بالدالة $d(t) = 16t^2$، حيث t الزمن بالثواني بعد سقوط الجسم، $d(t)$ المسافة المقطوعة بالأقدام. إذا أهملت مقاومة الهواء، فأوجد السرعة المتوسطة في كل من الفترتين الآتيتين.

a) من 0 إلى 2 ثانية **b)** من 2 إلى 4 ثوانٍ

فيزياء: قُذِفَ جسم إلى أعلى من ارتفاع 4 ft عن سطح الأرض، فإذا كان ارتفاعه عن سطح الأرض يُعطى بالدالة $d(t) = -16t^2 + 20t + 4$، حيث t الزمن بالثواني بعد قذفه و$d(t)$ المسافة التي يقطعها، إذا أهملت مقاومة الهواء، فأوجد السرعة المتوسطة للجسم في الفترة من 0.5 إلى 1 ثانية.

طقس: إذا كان متوسط درجات الحرارة السيليزية لكل شهر في المدينة المنورة في سنة ما معطى بالدالة: $f(x) = -0.5455x^2 + 7.09x + 21.45$، حيث x تمثّل رقم الشهر، فمثلًا $x = 1$ تمثّل شهر يناير، فأوجد متوسط معدل التغير في كل من الفترتين الآتيتين: وبرر إجابتك.

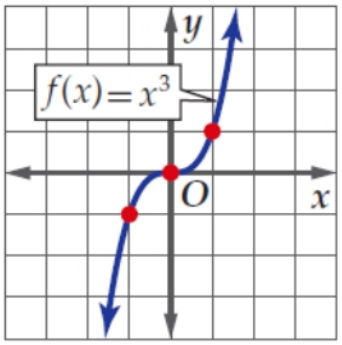
a) من أبريل إلى مايو. **b)** من يوليو إلى أكتوبر.

ورقة عمل الثاني عشر العام | 1-5 الدوال الأصلية والتحويلات | الاسم:_____

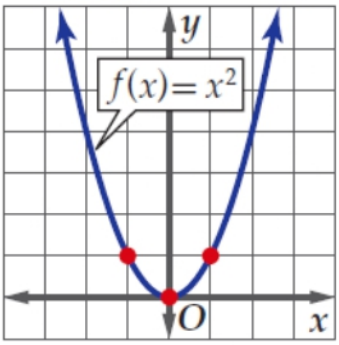
في هذا الدرس سوف أتعلم: 1- تحليل الدوال الأصلية وتمثيلها بيانيا ووصفها. 2- تحديد التحويلات للدوال الأصلية وتمثيلها بيانيا.

الدوال الرئيسة

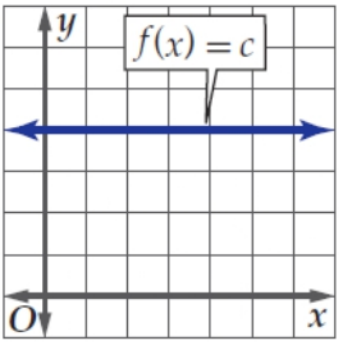
الدالة التكعيبية



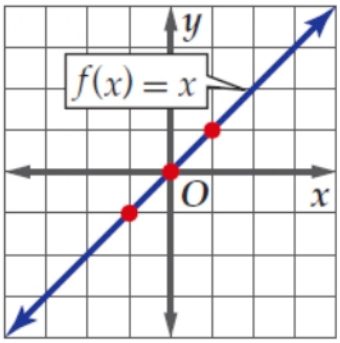
الدالة التربيعية



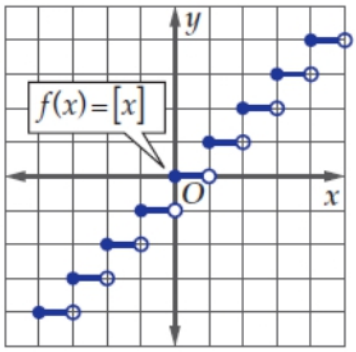
الدالة الثابتة



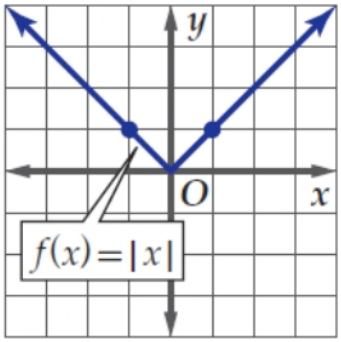
الدالة المحايدة



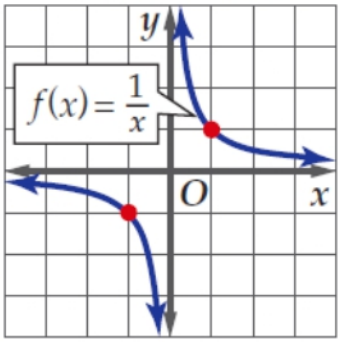
أكبر عدد صحيح



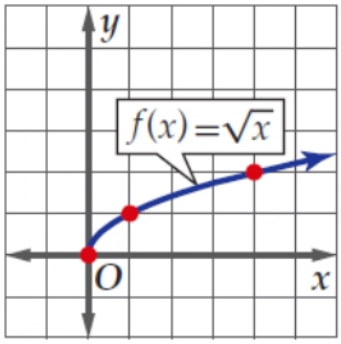
القيمة المطلقة



دالة المقلوب



دالة الجذر التربيعي



صف الخصائص التالية للتمثيل البياني للدالة الأصلية: المجال والمدى والتقاطعات والتماثل والاتصال والسلوك الطرفي وفترات تزايد/تناقص التمثيل البياني.

$f(x) = \sqrt{x}$

$f(x) = |x|$

$f(x) = [x]$

$f(x) = \frac{1}{x}$

إزاحة التمثيل البياني

الإزاحة الرأسية

منحنى $g(x) = f(x) + k$ هو منحنى $f(x)$ مزاحًا:

- k وحدة إلى أعلى عندما $k > 0$.
- $|k|$ من الوحدات إلى أسفل عندما $k < 0$.

الإزاحة الأفقية

منحنى $g(x) = f(x - h)$ هو منحنى $f(x)$ مزاحًا:

- h من الوحدات إلى اليمين عندما $h > 0$.
- $|h|$ من الوحدات إلى اليسار عندما $h < 0$.

استعمل منحنى الدالة الرئيسة (الأم) $f(x) = |x|$ لتمثيل كلّ دالة من الدوال الآتية بيانيًّا:

$g(x) = |x - 2| - 1$

$g(x) = |x + 3|$

$g(x) = |x| + 4$

استعمل منحنى الدالة الرئيسة (الأم) $f(x) = \sqrt{x}$ لتمثيل كل من الدالتين الآتيتين:

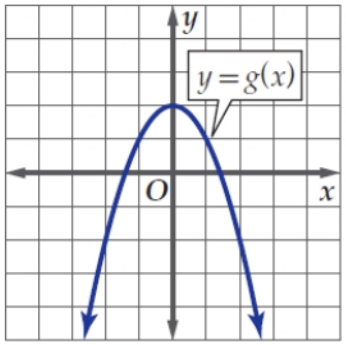
$g(x) = \sqrt{x - 7} + 3$

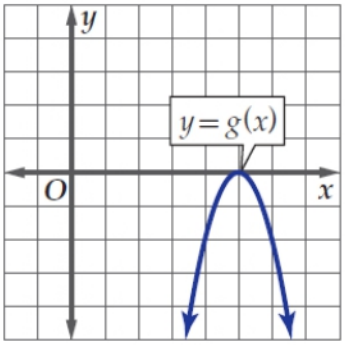
$g(x) = \sqrt{x - 4}$

الانعكاس حول المحورين الإحداثيين

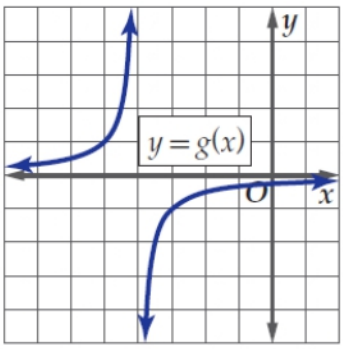
الانعكاس حول المحور x	الانعكاس حول المحور y
منحنى الدالة $g(x) = -f(x)$ هو انعكاس لمنحنى الدالة $f(x)$ حول المحور x .	منحنى الدالة $g(x) = f(-x)$ هو انعكاس لمنحنى الدالة $f(x)$ حول المحور y .

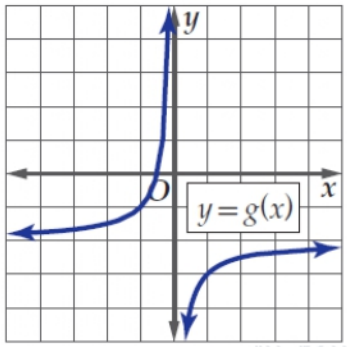
صف العلاقة بين منحنى الدالة $f(x) = x^2$ ومنحنى $g(x)$ في كل مما يأتي، ثم اكتب معادلة $g(x)$:



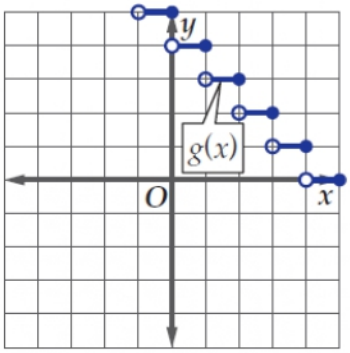


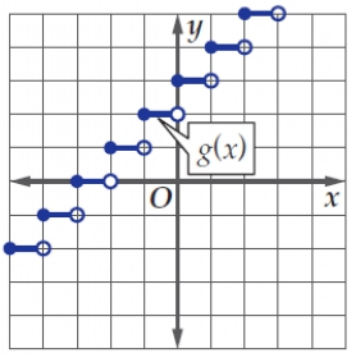
صف العلاقة بين منحنيي $f(x) = \frac{1}{x}$ و $g(x)$ ثم اكتب معادلة $g(x)$ في كلٍّ من السؤالين الآتيين :





صف العلاقة بين منحنيي $f(x) = [x]$ و $g(x)$ في كلٍّ من الحالتين الآتيتين، ثم اكتب معادلة الدالة $g(x)$.





مفهوم أساسي — التمدد الرأسي والتمدد الأفقي

التمدد الرأسي

إذا كان a عددًا حقيقيًّا موجبًا، فإن منحنى الدالة $g(x) = a\,f(x)$ هو:

- توسع رأسي لمنحنى $f(x)$، إذا كانت $a > 1$.
- تضيق رأسي لمنحنى $f(x)$، إذا كانت $0 < a < 1$

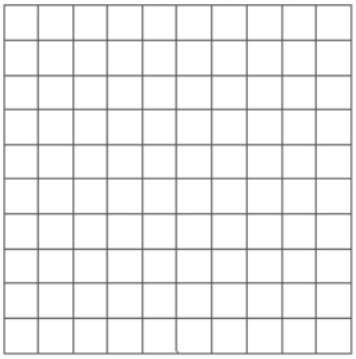
التمدد الأفقي

إذا كان a عددًا حقيقيًّا موجبًا، فإن منحنى الدالة $g(x) = f(ax)$ هو:

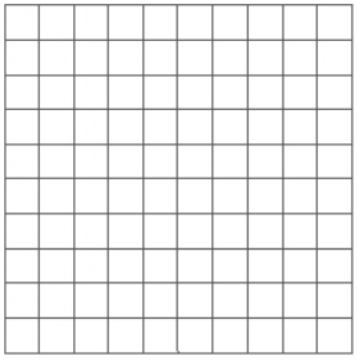
- تضيق أفقي لمنحنى $f(x)$، إذا كانت $a > 1$.
- توسع أفقي لمنحنى $f(x)$، إذا كانت $0 < a < 1$

عيِّن الدالة الرئيسة (الأم) $f(x)$ للدالة $g(x)$ في كل مما يأتي، ثم صف العلاقة بين المنحنيين، ومثلهما بيانيًّا في المستوى الإحداثي.

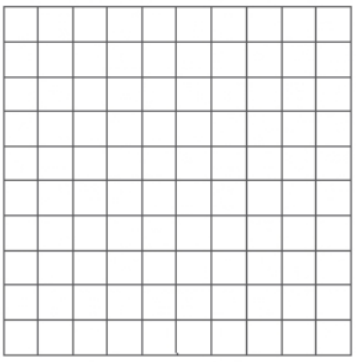
$g(x) = -(2x)^2$



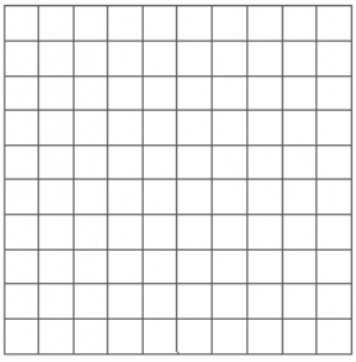
$g(x) = \frac{1}{4}x^3$



$g(x) = \frac{1}{2}[x]$

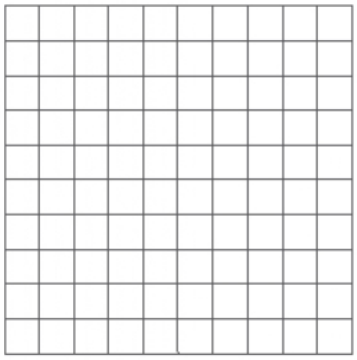


$g(x) = \frac{5}{x} + 3$

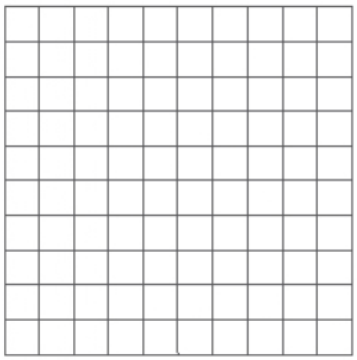


مثّل الدالة بيانيًّا:

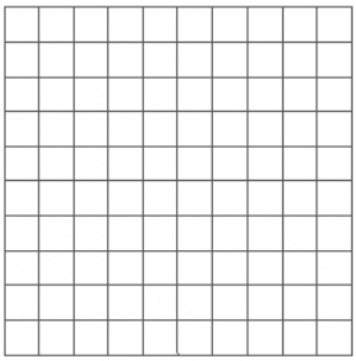
$$f(x)=\begin{cases} 3x^2 & , \quad x<-1 \\ -1 & , \quad -1\le x<4 \\ (x-5)^3+2 & , \quad x\ge 4 \end{cases}.$$



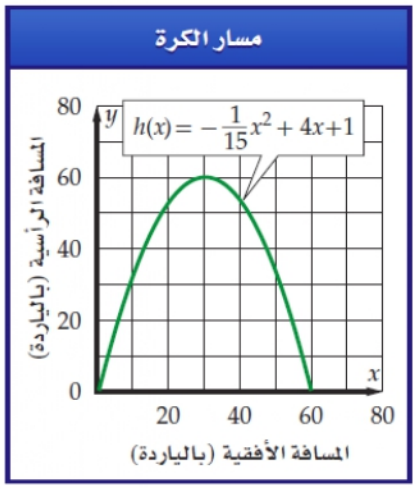
$$g(x)=\begin{cases} x-5 & , \quad x\le 0 \\ x^3 & , \quad 0<x\le 2 \\ \frac{2}{x} & , \quad x>2 \end{cases}$$



$$h(x)=\begin{cases} (x+6)^2 & , \quad x<-5 \\ 7 & , \quad -5\le x\le 2 \\ |4-x| & , \quad x>2 \end{cases}$$



كرة قدم: ضرب لاعب كرة قدم، فكان مسارها معطى بالدالة $h(x) = -\frac{1}{15}x^2 + 4x + 1$ ، حيث $h(x)$ يمثل ارتفاع الكرة باليادرة عن سطح الأرض، وتمثل x المسافة الأفقية باليادرة التي تقطعها الكرة حيث $x = 0$ ترتبط بخط منتصف الملعب. صف التحويلات التي تمت على الدالة الرئيسة (الأم) $f(x) = x^2$ للحصول على $h(x)$.



كهرباء: إذا كانت شدة التيار $I(x)$ بالأمبير الذي يمر بجهاز DVD تعطى بالدالة $I(x) = \sqrt{\frac{x}{11}}$ ، حيث x القدرة بالواط والعدد 11 هو المقاومة بالأوم.

A) صف التحويلات التي تمت على الدالة $f(x) = \sqrt{x}$ للحصول على الدالة $I(x)$.

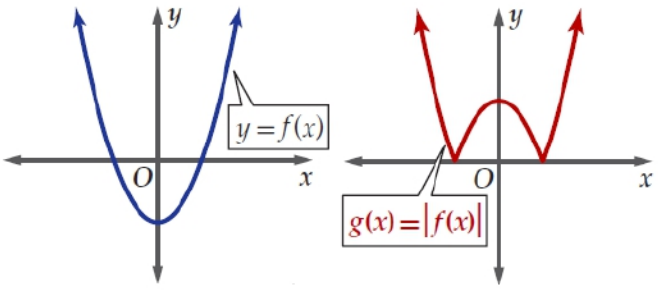
B) اكتب دالة تصف مرور تيار في مصباح مقاومته 15 أوم.

مفهوم أساسي

التحويلات الهندسية مع دوال القيمة المطلقة

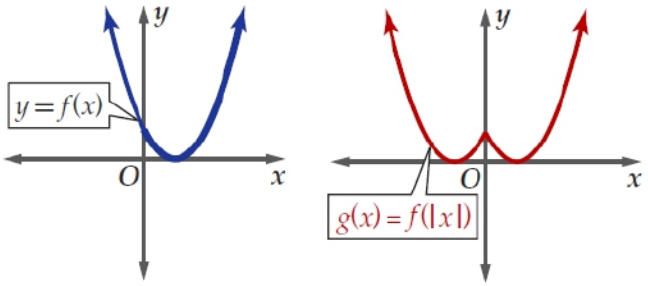
$$g(x) = |f(x)|$$

يُغير هذا التحويل الهندسي أي جزء من منحنى الدالة يقع تحت المحور x ليصبح فوقه بالانعكاس حول المحور x.



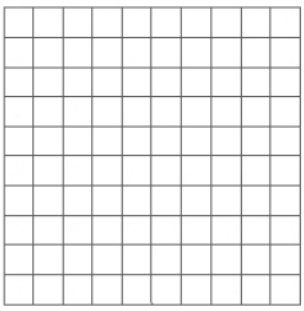
$$g(x) = f(|x|)$$

يغير هذا التحويل الهندسي جزء منحنى الدالة الموجود إلى يسار المحور y ويضع مكانه صورة جزء المنحنى الواقع إلى يمين المحور y بالانعكاس حول المحور y.

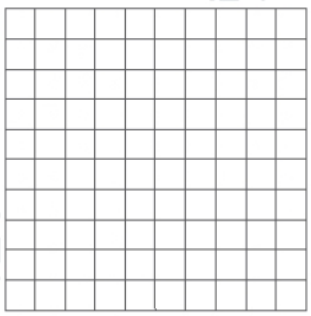


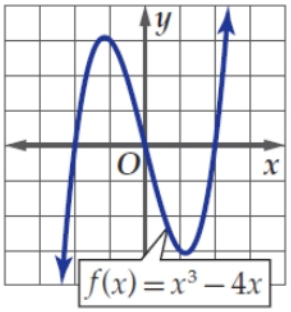
استعمل منحنى الدالة $f(x) = x^3 - 4x$ لتمثيل كل من الدالتين الآتيتين بيانيًّا:

$g(x) = |f(x)|$

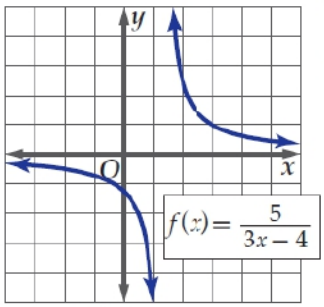


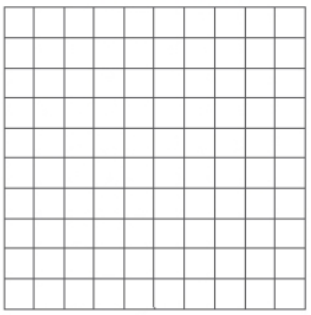
$h(x) = f(|x|)$

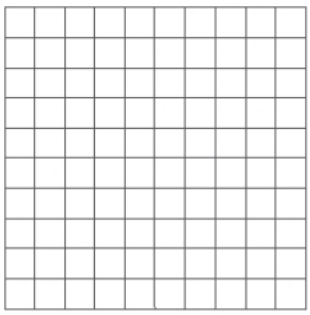


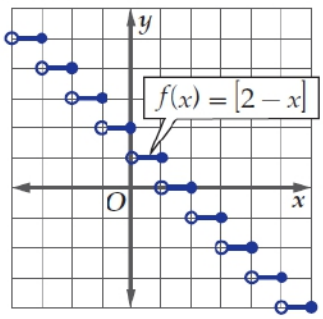


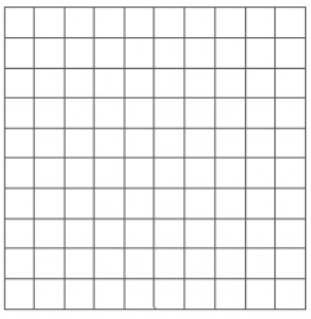
استعمل منحنى الدالة $f(x)$ في كلٍّ من الشكلين أدناه؛ لتمثيل كلٍّ من الدالتين $g(x) = |f(x)|$ و $h(x) = f(|x|)$ بيانيًّا:

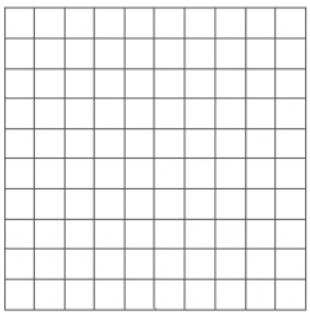












ورقة عمل الثاني عشر العام | 1-6 العمليات على الدوال وتركيب الدوال | الاسم:_____

في هذا الدرس سوف أتعلم: 1- إجراء العمليات على الدوال. 2- إيجاد تركيب الدوال.

مفهوم أساسي — العمليات على الدوال

إذا كانت f, g دالتين يتقاطع مجالاهما، فإننا نعرف عمليات الجمع، والضرب، والطرح، والقسمة لجميع قيم x الموجودة في تقاطع المجالين على النحو الآتي:

الجمع: $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$ **الضرب:** $(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$

الطرح: $(f-g)(x)=f(x)-g(x)$ **القسمة:** $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}, g(x)\neq 0$

في كل من الحالات السابقة مجال الدالة الجديدة يساوي تقاطع مجالي الدالتين f و g، باستثناء القيم التي تجعل $g(x)=0$ في دالة القسمة.

العمليات على الدوال

إذا كانت $f(x)=x^2+4x, g(x)=\sqrt{x+2}, h(x)=3x-5$، فأوجد كلًّا من الدوال الآتيةِ، ثم حدد مجالها:

a) $(f+g)(x)$

b) $(f-h)(x)$

c) $(f\cdot h)(x)$

d) $\left(\frac{h}{f}\right)(x)$

العمليات على الدوال

أوجد $(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$, $(f \cdot g)(x)$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ في كل مما يأتي، ثم أوجد مجال كل دالة من الدوال الناتجة.

$f(x) = x - 4, g(x) = \sqrt{9 - x^2}$

$f(x) = x^2 - 6x - 8, g(x) = \sqrt{x}$

تركيب دالتين

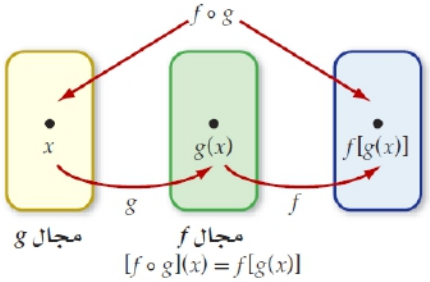
مفهوم أساسي

تركيب دالتين

يعرف تركيب الدالتين f وَ g على النحو الآتي:

$$[f \circ g](x) = f[g(x)]$$

ويتكون مجال الدالة $f \circ g$ من جميع قيم x في مجال الدالة g على أن تكون $g(x)$ في مجال f.



تقرأ الدالة $f \circ g$ على النحو f تركيب g أو f بعد g، حيثُ تُطبَّقُ الدالة g أولًا ثم الدالة f.

إرشادات للدراسة

تحديد مجالي الدالتين:

من المهم تعرّف مجالي الدالتين قبل تركيبهما؛ لأن القيود على مجالات الدوال قد لا تكون واضحة بعد إجراء عملية التركيب وتبسيطها.

إذا كانت $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = x - 4$، فأوجد كلًّا مما يأتي:

a) $[f \circ g](x)$

b) $[g \circ f](x)$

c) $[f \circ g](2)$

أوجد $[f \circ g](3)$, $[g \circ f](x)$, $[f \circ g](x)$ في كل مما يأتي:

$f(x) = 3x + 1, g(x) = 5 - x^2$

$f(x) = 6x^2 - 4, g(x) = x + 2$

عند وجود قيود على مجال f أو مجال g فإن مجال $f \circ g$ يكون مقيدًا بكل قيم x في مجال g التي تكون صورها $g(x)$ موجودةً في مجال f.

حدّد مجال الدالة $f \circ g$ متضمنًا القيود الضرورية، ثم أوجد $f \circ g$ في كل من الحالتين الآتيتين:

$f(x) = x^2 - 2, g(x) = \sqrt{x-3}$

$f(x) = \frac{1}{x+1}, g(x) = x^2 - 9$

$f(x) = \frac{5}{x}, g(x) = x^2 + x$

$f(x) = \sqrt{x+1}, g(x) = x^2 - 1$

أوجد دالتين f, g بحيث يكون $h(x) = [f \circ g](x)$، وعلى ألّا تكون أي منهما الدالة المحايدة $I(x) = x$ في كلٍّ مما يأتي:

$h(x) = \sqrt{-7x} + 9x$

$h(x) = 2x^2 + 20x + 50$

$h(x) = \frac{1}{x+7}$

$h(x) = x^2 - 2x + 1$

$h(x) = \frac{\sqrt{4+x}}{x-2}$

$h(x) = [-3(x-9)]$

مؤثرات حركية : تُصمَّمُ إحدى ألعاب الحاسوب بحيث تبدأ بصورة مستطيلة بعداها 60 بكسل في 20 بكسل. ثم يزداد كل بُعد بمقدار 15 بكسل لكل ثانية.

a) أوجد دالتين تعطي إحداهما مساحة المستطيل A كدالة في عرضه L ، وتعطي الأخرى عرضه بعد t ثانية.

b) أوجد $A \circ L$. وماذا تمثل هذه الدالة؟

c) كم من الوقت يلزم لتصبح مساحة المستطيل 3 أضعاف مساحته الأصلية؟

أعمال : أعلن محل تجاري عن خصم مقداره 15% على ثمن أجهزة الحاسوب لطلاب الجامعات، كما وزّع قسائم يستفيد حاملها بخصم مقداره 100 ريال من ثمن الحاسوب.

5A) عبّر عن هذه البيانات بدالتين c و d .

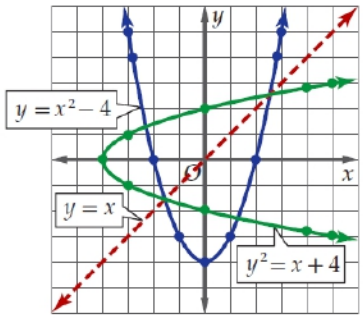
5B) أوجد $[c \circ d](x)$ و $[d \circ c](x)$. وماذا يعني كلٌّ منهما؟

5C) أي التركيبين $c \circ d$ أو $d \circ c$ يعطي سعرًا أقل؟ وضح إجابتك.

ورقة عمل الثاني عشر العام | 1-7 العلاقات والدوال العكسية | الاسم: _____

في هذا الدرس سوف أتعلم: 1- استخدام اختبار الخط الأفقي على منحنى الدالة لتحديد إن كان لدالة ما دالة عكسية أم لا. 2- إيجاد الدوال العكسية جبريا وبيانيا.

الدالة العكسية: يقال: إن كلًا من العلاقتين A, B **علاقة عكسية** للأخرى إذا وفقط إذا تحقق الشرط التالي: إذا كان الزوج المرتب (a, b) ينتمي إلى إحدى العلاقتين؛ فإن الزوج المرتب (b, a) ينتمي إلى العلاقة الأخرى. وإذا مُثِّلت العلاقة بمعادلة، فيمكن إيجاد علاقتها العكسية بتبديل المتغير المستقل بالمتغير التابع.

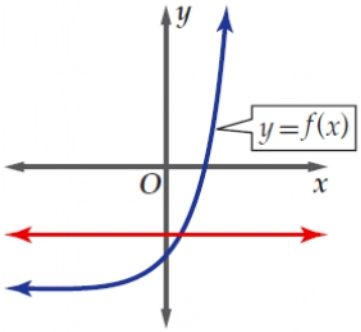


العلاقتين المتعاكستين هي انعكاس للأخرى حول المستقيم $y = x$.

ليس من الضروري أن تكون العلاقة العكسية دالة.

مفهوم أساسي

اختبار الخط الأفقي



التعبير اللفظي: يوجد للدالة f دالة عكسية f^{-1} إذا وفقط إذا كان كل خط أفقي يتقاطع مع منحنى الدالة عند نقطة واحدة على الأكثر.

مثال: بما أنه لا يوجد خط أفقي يقطع منحنى الدالة f بأكثر من نقطة، فإن الدالة العكسية f^{-1} موجودة.

تطبيق اختبار الخط الأفقي

مثّل كلًّا من الدوال الآتية بيانيًّا باستعمال الحاسبة البيانيّة. ثم طبِّق اختبار الخط الأفقي لتحديد إن كانت الدالة العكسية موجودة أم لا.

$f(x) = |x - 1|$

$g(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$

$h(x) = \frac{4}{x}$

$f(x) = x^2 + 5x - 7$

مفهوم أساسي — إيجاد الدالة العكسية

الخطوة 1: تحقّق من وجود دالة عكسية للدالة المعطاة بالتحقق من أنها متباينة بالاعتماد على اختبار الخط الأفقي.

الخطوة 2: ضع y مكان $f(x)$، ثم بدّل موقعي x, y.

الخطوة 3: حل المعادلة بالنسبة للمتغير y، ثم ضع $f^{-1}(x)$ مكان y.

الخطوة 4: اذكر أية شروط على مجال f^{-1}. وبيّن أن مجال f يساوي مدى f^{-1}، وأن مدى f يساوي مجال f^{-1}.

في كل مما يأتي أوجد الدالة العكسية f^{-1} إن أمكن، وحدد مجالها والقيود عليه، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا فاكتب غير موجودة.

$f(x) = -16 + x^3$

$f(x) = \frac{x-1}{x+2}$

$f(x) = \frac{x+7}{x}$

$f(x) = \sqrt{x-4}$

إثبات صحة الدوال العكسيّة

مفهوم أساسي — **تركيب الدالة ودالتها العكسية**

تكون كل من الدالتين f و f^{-1}، دالة عكسية للأخرى، إذا وفقط إذا تحقق الشرطان الآتيان:

- $f[f^{-1}(x)] = x$ لجميع قيم x في مجال $f^{-1}(x)$.
- $f^{-1}[f(x)] = x$ لجميع قيم x في مجال $f(x)$.

أثبت جبريًّا أن كلًّا من الدالتين f, g تمثل دالة عكسية للأخرى في كل مما يأتي:

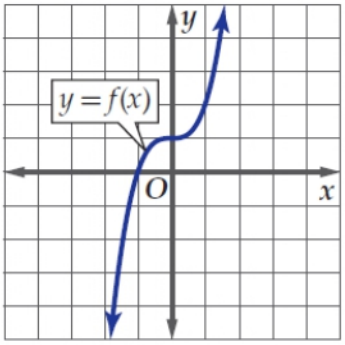
$f(x) = \frac{6}{x-4}$ و $g(x) = \frac{6}{x} + 4$

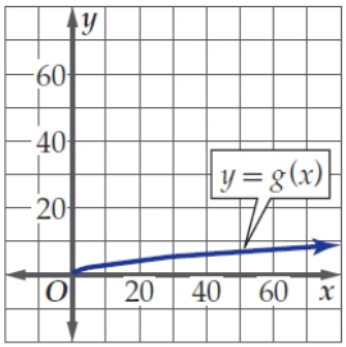
$f(x) = 18 - 3x, g(x) = 6 - \frac{x}{3}$

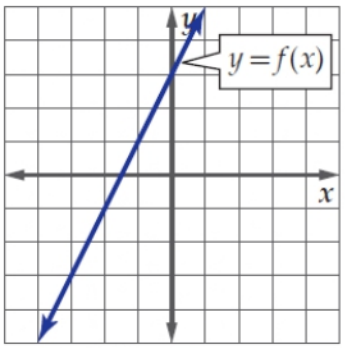
$f(x) = x^2 + 10, x \geq 0, g(x) = \sqrt{x - 10}$

إيجاد الدوال العكسيّة بيانيًا

استعمل التمثيل البياني للدالة $f(x)$ لتمثيل $f^{-1}(x)$.







استخدام الدالة العكسيّة من الحياة اليومية

أعمال: يتقاضى شخص 16 ريالًا عن كل ساعة عمل، ويعمل في الأسبوع عددًا من الساعات لا يقل عن 40 ساعة ولا يزيد على 105 ساعات، ويتقاضى أجرًا إضافيًّا مقداره 24 ريالًا عن كل ساعة عمل إضافية تزيد على الـ40 ساعة. ويمكن حساب دخله الأسبوعي مقابل x ساعة عمل بالدالة $f(x) = 640 + 24(x - 40)$.

a) أثبت أن $f^{-1}(x)$ موجودة، ثمَّ أوجدها.

b) ماذا تمثّل كل من x و $f^{-1}(x)$ في الدالة العكسية؟

c) حدّد القيود المفروضة على مجال $f(x)$ ومجال $f^{-1}(x)$ إن وجدت؟ وضِّح إجابتك.

d) أوجد عدد الساعات التي عملها الشخص في أسبوع كان دخله فيه 760 ريالًا.

توفير: يتبقى لأحمد بعد سداد أقساط منزله وبعض الالتزامات 65% من راتبه الشهري، فإذا خصّص منها 1800 ريال لنفقات المعيشة، وقدّر أن بإمكانه توفير 20% من المبلغ المتبقي تقريبًا، فإن مقدار التوفير الشهري يعطى بالدالة: $f(x) = 0.2(0.65x - 1800)$، حيث x الراتب الشهري.

5A) أثبت أن $f^{-1}(x)$ موجودة، ثم أوجدها.

5B) ماذا تمثّل كل من $f^{-1}(x)$, x في الدالة العكسية؟

5C) حدد أية قيود على كل من مجال $f^{-1}(x)$, $f(x)$ إن وجدت. وبرِّر إجابتك.

5D) إذا وفّر أحمد 500 ريالًا في الشهر، فأوجد راتبه الشهري.