

United Arab Emirates



دولة الإمارات العربية المتحدة
معلم الرياضيات: أ/ عمرو البيومي



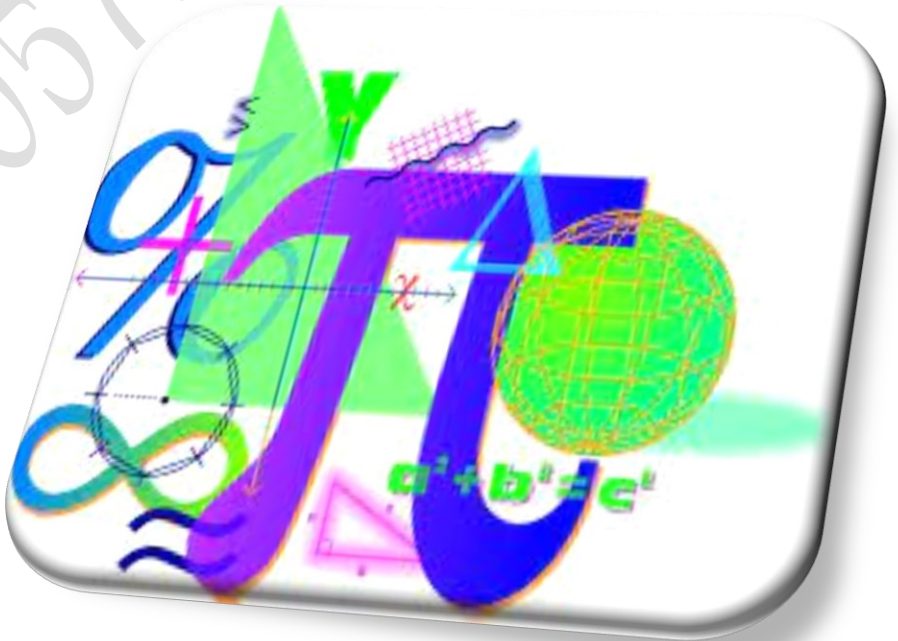
مؤسسة الإمارات للتعليم المدرسي
EMIRATES SCHOOLS ESTABLISHMENT

الصف الحادي عشر المتقدم

2022/2023

مراجعة الوحدة الخامسة (حل الانظمة الخطية باستخدام المعكوسات وقاعدة كرامر)

Student Name:



@AMRMATH7

المفهوم الأساسي الأنظمة الخطية المربعة التي لها معكوس

لنفرض أن A هو مصفوفة المعاملات لنظام n من المعادلات الخطية في n من المتغيرات تحدها المعادلة $AX = B$ ، حيث X هو مصفوفة المتغيرات و B هو مصفوفة الثوابت، إذا كانت A لها معكوس، يكون لنظام المعادلات حل وحيد تحده المعادلة $X = A^{-1}B$.



مثال 1

باستخدام مصفوفة عكسية ايجاد حل النظام 2×2

استخدام المصفوفة العكسية لحل نظام المعادلات، ان امكن.

$$2x - 3y = -1$$

$$-3x + 5y = 3$$

$AX = B$ اكتب النظام في مصفوفة بالشكل

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad AX = B$$

A-1 لايجاد المعكوس 2×2 استخدم هذه الصيغة مع معكوس مصفوفة



$$A^{-1} = \frac{1}{ad - cb} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

صيغة معكوس مصفوفة 2×2 هي $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$$= \frac{1}{2(5) - (-3)(-3)} \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A=2, b=-3, c=-3, d=5$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

بسط

لحل النظام B في A-1 اضرب

$$X = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B$$

لذلك، يكون حل النظام هو (4,3)

تمرين موجه

استخدم المصفوفة العكسية لحل نظام المعادلات، ان امكن.

1A. $6x + y = -8$
 $-4x - 5y = -12$



1B. $-3x + 9y = 36$
 $7x - 8y = -19$

مثال 2

من الحياة اليومية إيجاد حل نظام باستخدام مصفوفة عكسية 3×3

المعرفة المالية تستثمر بدرجة 20000 درهم بشراء ثلاثة سندات ذات عوائد سنوية متوقعة نسبتهما 10% و 8% و 6%. وتكون الاستثمارات ذات العائد المتوقع الاعلى اكثر خطورة غالبا من الاستثمارات الاخرى. وترغب بدرجة في تحقيق متوسط عائد سنوي يبلغ 1340-درهم. فاذا كانت تريد استثمار مبلغ في السند ذي العائد 6% يساوي ثلاثة اضعاف المبلغ المستثمر في السنتين الاخرين مجتمعين, فكم يكون المبلغ اللازم استثماره في كل سند؟



تمرين موجه

2. الصناعة خلال ثلاثة أعوام متتالية، انتج مصنع لتجميع السيارات اجمالي 720000 سيارة. فاذا كان عدد السيارات التي انتجت في العام الثاني تزيد عن العام الأول بعدد 50000 سيارة، وكان عدد السيارات التي انتجت في العام الثالث تزيد عن الثاني بعدد 80000، فكم عدد السيارات التي انتجت في كل عام ؟

استخدام قاعدة كرامر

طريقة اخري لحل الأنظمة المربعة تعرف باسم قاعدة كرامة، وفيها تستخدم المحددات بدلا من تقليل الصفوف او المصفوفات العكسية (معكوس المصفوفات)

المفهوم الأساسي قاعدة كرامر

لنفرض أن A هو مصفوفة المعاملات في نظام n من المعادلات الخطية في n من المتغيرات، وتحددها المعادلة $AX = B$. فإذا كان $\det(A) \neq 0$ فإن الحل الوحيد للنظام تعبر عنه المعادلة

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}, x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}, x_3 = \frac{|A_3|}{|A|}, \dots, x_n = \frac{|A_n|}{|A|},$$

حيث يتم الحصول على A_i باستبدال العمود i^{th} الخاص بـ A بعمود الحدود الثابتة B . وإذا كان المحدد $(A) = 0$ فإن $AX = B$ إما ليس لها حل أو لها عدد لا نهائي من الحلول.



مثال 3 استخدام قاعدة كرامة لحل نظام 3×3
استخدام قاعدة كرامة لايجاد حل نظام المعادلات الخطية، ان وجد
حل وحيد.

$$3x_1 + 2x_2 = 6$$

$$-4x_1 - x_2 = -13$$

تمرين موجه

استخدام قاعدة كرامة لايجاد حل نظام المعادلات الخطية، ان وجد حل وحيد.

3A. $2x - y = 4$

$$5x - 3y = -6$$



3B. $-9x + 3y = 8$

$2x - y = -3$

3C. $12x - 9y = -5$

$$4x - 3y = 11$$



مثال 4 استخدام قاعدة كرامر لحل نظام 3×3

استخدم قاعدة كرامر لايجاد حل نظام المعادلات الخطية، ان وجد حل وحيد.

$$-x - 2y = -4z + 12$$

$$3x - 6y + z = 15$$

$$2x + 5y + 1 = 0$$



تمرين موجه

استخدام قاعدة كرامر لايجاد. حل كل نظام من المعادلات الخطية، ان وجد حل وحيد.

4A. $8x + 12y - 24z = -40$
 $3x - 8y + 12z = 23$
 $2x + 3y - 6z = -10$



4B. $-2x + 4y - z = -3$
 $3x + y + 2z = 6$
 $x - 3y = 1$



تمارين إضافية

1. $5x - 2y = 11$
 $-4x + 7y = 2$



$$\begin{aligned} 2. \quad & 2x + 3y = 2 \\ & x - 4y = -21 \end{aligned}$$

أ. عمرو البيومي



3. $-3x + 5y = 33$

$$2x - 4y = -26$$

أحمد البيومي

0544560575



4. $-4x + y = 19$

$$3x - 2y = -18$$



5. $2x + y - z = -13$
 $3x + 2y - 4z = -36$
 $x + 6y - 3z = 12$

6. $3x - 2y + 8z = 38$
 $6x + 3y - 9z = -12$
 $4x + 4y + 20z = 0$



7. $x + 2y - z = 2$
 $2x - y + 3z = 4$
 $3x + y + 2z = 6$

8. $4x + 6y + z = -1$
 $-x - y + 8z = 8$
 $6x - 4y + 11z = 21$

