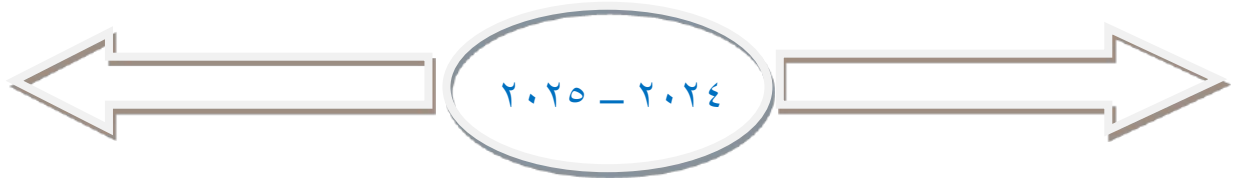




قناة الفلاح للرياضيات



الفصل الدراسي الثاني

مذكرة الفلاح

الصف الحادي عشر علمي



@MOH82FALAH

Imaginary Unit

الوحدة التخيلية

هي العدد الذي مربعه (-1) ويرمز إليه بالرمز i

$$i = \sqrt{-1} , i^2 = -1$$

حاول (1) ص 13: بسط كلاً مما يلي مستخدماً الوحدة التخيلية i

a) $\sqrt{-2}$

b) $-\sqrt{-12}$

c) $\sqrt{-36}$

Complex Number

تعريف: العدد المركب

العدد المركب هو عدد على الصورة $a + bi$ حيث a, b عدداً حقيقيين، i الوحدة التخيلية.

يمكن كتابة أي عدد مركب على الصورة $z = a + bi$
الصورة $a + bi$ تسمى الصورة الجبرية للعدد المركب.

$$z = a + bi$$

الجزء الحقيقي الجزء التخيلي

ويسمى a الجزء الحقيقي Real Part

ويسمى b الجزء التخيلي Imaginary Part

ويرمز لمجموعة الأعداد المركبة بالرمز $\mathbb{C}$.

في العدد المركب $z = a + bi$:

إذا كان $b = 0$ ، فإن $z = a$ يسمى عدداً حقيقياً.

إذا كان $a = 0$ ، $b \neq 0$ ، فإن $z = bi$ يسمى عدداً تخيلياً.



حاول (2) ص 14: اكتب كلاً من الأعداد المركبة التالية على الصورة الجبرية:

a) $\sqrt{-18} + 7$

b) $\frac{10 - \sqrt{-100}}{5}$

c) $\frac{\sqrt{-9} + 5}{7}$

مثال (3) ص 15: أوجد قيم كل من $x, y \in R$ في كل مما يلي:

a) $12 + 3i = 4x - 9yi$

b) $x^2 - y^2i = 9 - 25i$

c) $2x + yi = 1$



حاول (3) ص 15: أوجد قيم كل من $x, y \in R$ في كل مما يلي:

a) $12 + 3i = 4x - 9yi$

b) $x^2 - y^2i = 9 - 25i$

c) $2x + yi = 1$

حاول (4) ص 16: مثل كلاً مما يلي في المستوي المركب:

a) $z_1 = 4 - i$

b) $z_2 = -3i$

c) $z_3 = -4 - 3i$

d) $z_4 = 2$

حاول (5) ص 16: اكتب العدد المركب المناظر لكل من النقاط: $K(7,0), H(1, -2), N(-4, 1)$



مثال (6) صد 17: إذا كان $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 4 - 7i$, $z_3 = 2i$ فأوجد:

a) $z_1 + z_2$

b) $z_1 - z_2$

c) $z_3 + z_2 + z_1$

حاول (7) صد 19: أوجد الناتج:

a) $(6 - 5i)(4 - 3i)$

b) $(9 + 4i)(4 - 9i)$

c) $(12i)(7i)(i + 1)$



فأوجد: $z_1 = 2 - 3i$, $z_2 = 1 + 4i$

حاول (8) صد 20: إذا كان

a) $\frac{1}{2} z_1$

b) $z_1 \cdot z_2$

مثال (9) صد 20: إذا كان $z_1 = i$, $z_2 = -2i$, $z_3 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ فأوجد:

a) z_1^{21}

b) z_2^6

c) z_3^3

d) $5(i)^{73}$



قسمة الأعداد المركبة

مرافق العدد المركب

مرافق العدد المركب $z = a + bi$ هو العدد المركب $\bar{z} = a - bi$

خواص مرافق العدد المركب:

إذا كان $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$

فإن:

- $z_1 + \bar{z}_1 = 2a_1$
- $z_1 - \bar{z}_1 = 2bi$
- $z_1 \cdot \bar{z}_1 = a_1^2 + b_1^2$
- $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$
- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$
- $\overline{(\bar{z}_1)} = z_1$

حاول (10) ص 22: إذا كان $z_1 = 2 - 7i$, $z_2 = 3 + 5i$ فأوجد:

a) $\bar{z}_1 + \bar{z}_2$

b) $\overline{z_1 - z_2}$

c) $\overline{z_1 \cdot z_2}$

d) $\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$



المعكوس الضربي لعدد مركب غير صفري $z = a + bi$ يرمز له بالرمز z^{-1} :

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{a + bi} \times \frac{a - bi}{a - bi} \text{ ويكون:}$$

حاول (11) ص 23: أوجد المعكوس الضربي لكل من:

a) $z_1 = -3i - 7$

b) $z_2 = 5 + 11i$

c) $z_3 = 6i$



مثال (12) ص 24: أوجد ناتج قسمة $5 - 6i$ على $2 + 3i$

حاول (12) ص 24: أوجد ناتج قسمة $2i - 3$ على $1 + 2i$



مثال (13) ص 24: اكتب كلاً مما يلي في الصورة الجبرية للعدد المركب:

a) $\frac{2}{3-i}$

b) $\overline{\left(\frac{5+i}{2-3i}\right)}$



حاول (13) ص 24: اكتب كلاً مما يلي في الصورة الجبرية للعدد المركب:

a) $\frac{2+3i}{2+5i}$

b) $\frac{2-i}{2+i}$

c) $\frac{\overline{5+i}}{2-3i}$



امتحان سابق: (2014 – 2015) إذا كان $z_1 = 5 - 4i$, $z_2 = 3 + i$ فأوجد:

1) $z_1 \cdot z_2$

2) $\overline{z_2 + z_1}$

3) z_2^{-1}

امتحان سابق: (2018 – 2019) إذا كان $z_1 = 3 + 4i$, $z_2 = 5 - 2i$ فأوجد:

1) $\overline{3z_1 - 2z_2}$

2) $\frac{z_2}{z_1}$



الأعداد المركبة

بند (1-7)

في التمارين (1-4)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(a) (b)

(1) الصورة الجبرية للعدد: $\sqrt{-4} + 3$ هي: $3 + 2i$

(a) (b)

(2) مرافق العدد المركب: $z = 3 + 4i$ هو: $\bar{z} = -3 - 4i$

(a) (b)

(3) المعكوس الجمعي للعدد المركب $z = 3 - 2i$ هو: $-z = 3 + 2i$

(a) (b)

(4) الصورة المبسطة للتعبير: $(12 + 5i) - (2 - i)$ هي: $10 + 6i$

في التمارين (5-14)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

(5) العدد: $\sqrt{-225} + 32$ يكتب بالصورة الجبرية كما يلي:(a) $-15 + 6i$ (b) $6 + 15i$ (c) $6 - 15i$ (d) $32 + 15i$ (6) حل المعادلة: $2x + 3yi = -10 - 6i$ هو:(a) $x = 5, y = -2$ (b) $x = -5, y = -2$ (c) $x = -5, y = 2$ (d) $x = 5, y = 2$ (7) إذا كان $z_1 = 5i + 2$ ، $z_2 = -3 - i$ فإن $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$ تساوي:(a) $\frac{1}{10} + \frac{17}{10}i$ (b) $\frac{-1}{10} - \frac{17}{10}i$ (c) $\frac{-1}{10} + \frac{17}{10}i$ (d) $\frac{1}{10} - \frac{17}{10}i$ (8) إذا كان: $xi^2 + 3yi = 5 + 3i^5$ فإن (x, y) تساوي(a) $(5, 1)$ (b) $(-5, -1)$ (c) $(5, -1)$ (d) $(-5, 1)$ (9) أبسط صورة للتعبير: $(3 + \sqrt{-4})(4 + \sqrt{-9})$ هي:(a) $18 + 17i$ (b) $18 + 3\sqrt{-9} + 4\sqrt{-4}$ (c) $6 + 17i$

(d) 18

(10) الصورة الجبرية للعدد المركب: $z = (1 + 2i)^2$ هي:(a) $z = -3 + 4i$ (b) $z = 5 + 4i$ (c) $z = -3$ (d) $z = 5$ (11) الصورة الجبرية للعدد المركب: $z = (2 - i)^3$ هي:(a) $z = 14 + 13i$ (b) $z = 14 - 13i$ (c) $z = 2 - 11i$ (d) $z = 2 - 13i$ (12) الصورة الجبرية للعدد المركب: $z = \frac{i}{i+2}$ هي:(a) $z = \frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$ (b) $z = -\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$ (c) $z = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}i$ (d) $z = -\frac{1}{3} + \frac{2}{3}i$ (13) إذا كان $z = i$ فإن z^{250} يساوي:(a) $-i$ (b) i

(c) 1

(d) -1 (14) ليكن $x \in \mathbb{Z}^+$ فإن مجموعة قيم x التي تجعل العدد $(5 + i^x)$ عدداً حقيقياً هي:(a) $\mathbb{Z}^+$ (b) $\{0, 2, 4, 6, \dots\}$ (c) $\{1, 3, 5, \dots\}$ (d) $\{2, 4, 6, \dots\}$ 

الإحداثيات القطبية والصورة المثلثية لعدد مركب

بند (2 - 7)

القيمة المطلقة لعدد مركب

$$|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

حاول (1) ص 26: أوجد:

a) $|6 - 4i|$

b) $|-2 + 5i|$

الإحداثيات القطبية

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

مثال (2) ص 26: حول الاحداثيات القطبية إلى ديكارتية:

a) $M(5, \frac{\pi}{4})$

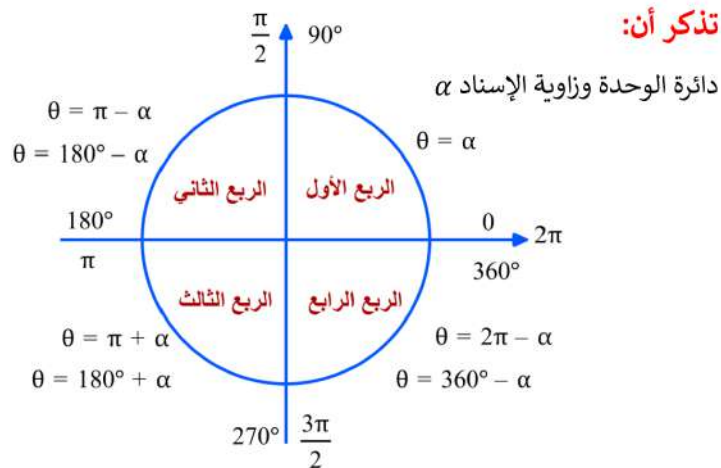
b) $N(\sqrt{2}, \frac{5\pi}{6})$



حاول (2) ص 26: أوجد الزوج المرتب (x, y) الذي يمثل الإحداثيات الديكارتية لكل من النقطتين:

a) $A(5, 300^\circ)$

b) $B(2, \frac{2\pi}{3})$



للتحويل من الإحداثيات الديكارتية (x, y) إلى الإحداثيات القطبية (r, θ) نوجد قيمة r باستخدام القاعدة: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ثم نوجد قياس زاوية الإسناد α باستخدام: $\tan \alpha = \left| \frac{y}{x} \right|$ بعد ذلك تحديد الربع الذي تقع فيه هذه الزاوية θ من إشارة كلٍّ من x, y ونوجدتها.

مثال (3) ص 27: حول من الإحداثيات الديكارتية إلى الإحداثيات القطبية لكل مما يلي:

a) $L(1, -\sqrt{3})$, $0 \leq \theta < 2\pi$

b) $M(-3, -4)$, $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$



حاول (3) صد 28: أوجد الزوج المرتب لكل نقطة مما يلي حيث $0 \leq \theta < 2\pi$

a) $D(3\sqrt{3}, 3)$

b) $C(4, -2\sqrt{5})$



الصورة المثلثية

يمكن كتابة العدد المركب $z = x + yi$ على الصورة:
 $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ وتعرف بالصورة المثلثية للعدد المركب z .

مثال (4) ص 29: ضع كلا مما يلي في الصورة المثلثية:

a) $z_1 = 1 + \sqrt{3}i$

b) $z_2 = -2 - 2i$

c) $z_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$



حاول (4) صد 30: ضع كلا مما يلي في الصورة المثلثية:

a) $z_1 = \frac{5}{\sqrt{2}} - \frac{5}{\sqrt{2}} i$

b) $z_2 = -1 - i$

c) $z_3 = -2 + 2\sqrt{3} i$



حاول (6) ص 31: ضع كلا مما يلي في الصورة الجبرية:

a) $z_1 = 4 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$

b) $z_2 = \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right)$

حاول (7) ص 32: ضع كلا مما يلي في الصورة المثلثية:

a) $z_1 = 2i$

b) $z_2 = 5$

c) $z_3 = -\frac{3}{4}$

d) $z_3 = -\frac{5}{2}i$



امتحان سابق: (2019 – 2018) اكتب العدد $\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}$ في الصورة الجبرية

ثم حوله للصورة المثلثية مستخدماً السعة الأساسية



في التمارين (1-6)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(a) (b)

(1) الإحداثيات الديكارتية للنقطة: $A(4, \frac{7\pi}{6})$ هي: $A(-2\sqrt{3}, 2)$

(a) (b)

(2) الإحداثيات الديكارتية للنقطة: $B(\sqrt{2}, 135^\circ)$ هي: $B(-1, 1)$

(a) (b)

(3) الإحداثيات القطبية للنقطة: $M(1, \frac{5\pi}{4})$ هي: $M(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2})$

(a) (b)

(4) العدد المركب: $z = \sqrt{3} - i$ بصورة المثلثية هو: $z = 2(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6})$

(a) (b)

(5) الصورة الجبرية للعدد المركب: $z = \sqrt{2}(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4})$ هي: $z = 1 - i$

في التمارين (7-13)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

(7) الإحداثيات الديكارتية للنقطة: $A(4, \frac{5\pi}{3})$ هي:

(a) $A(2, 2\sqrt{3})$ (b) $A(-2, 2\sqrt{3})$ (c) $A(-2, -2\sqrt{3})$ (d) $A(2, -2\sqrt{3})$

(8) الإحداثيات القطبية للنقطة: $B(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ هي:

(a) $B(1, \frac{-\pi}{4})$ (b) $B(1, \frac{\pi}{4})$ (c) $B(1, \frac{3\pi}{4})$ (d) $B(1, \frac{-3\pi}{4})$

(9) الصورة المثلثية للعدد المركب: $z = 2 - 2\sqrt{3}i$ حيث $\theta \in [0, 2\pi)$ هي:

(a) $z = 4(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3})$ (b) $z = 4(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3})$

(c) $z = 4(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6})$ (d) $z = 4(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3})$

(10) الصورة المثلثية للعدد المركب: $z = \frac{-4}{1-i}$ حيث $0 \leq \theta < 2\pi$ هي:

(a) $z = 4(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4})$ (b) $z = 2\sqrt{2}(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4})$

(c) $z = 2\sqrt{2}(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4})$ (d) $z = 2\sqrt{2}(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4})$

(11) الصورة الجبرية للعدد المركب: $z = 3(\cos \frac{2\pi}{3} - i \sin \frac{2\pi}{3})$ حيث $0 \leq \theta < 2\pi$ هي:

(a) $z = -\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$ (b) $z = -\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$

(c) $z = -\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$ (d) $z = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$

(12) $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ فإن قيمة $(i^{2n+2} + i^{2n+8})$ تساوي:

(a) 1 (b) 0 (c) -1 (d) i^{-2n}

(13) $(6 - 2i + 3i^5)^2$ تساوي:

(a) $35 - 12i$ (b) $35 + 12i$ (c) $81 - 12i$ (d) $81 + 12i$



حل معادلات

بند (3 - 7)

مثال (1) ص 33: أوجد مجموعة حل المعادلة: $3z + 1 - i = 7 + 3i$ في مجموعة الأعداد المركبة C

حاول (1) ص 33: أوجد مجموعة حل المعادلة: $2z + i = 3 + 2i$ في مجموعة الأعداد المركبة C



مثال (2) ص 34: أوجد مجموعة حل المعادلة: $2z + i\bar{z} = 5 - 2i$ في C

حاول (2) ص 34: أوجد مجموعة حل المعادلة: $z + i = 2\bar{z} + 1$ في C



حاول (3) صد 35: أوجد مجموعة حل كل معادلة مما يلي حيث $x \in C$:

a) $3x^2 + 48 = 0$

b) $-5x^2 - 150 = 0$

c) $8x^2 + 2 = 0$



مثال (4) ص 35: أوجد مجموعة حل المعادلة: $4z^2 + 16z + 25 = 0$ في C

حاول (4) ص 35: أوجد مجموعة حل المعادلة: $z^2 - 2z + 2 = 0$ في C



الجذر التربيعي لعدد مركب

حاول (6) ص 37: أوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب: $z = -3 - 4i$



حاول (7) صد 38: أوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب: $z = 5 + 12i$



حاول (8) ص 38: أوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب: $z = 7 + 24i$



كراسة ص 15 رقم (11): أوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب: $z = -3 + 4i$



في التمارين (1-6)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(a) (b)

(1) حل المعادلة: $\bar{z} + 2 = 5 - i$ هو: $z = 3 + i$

(a) (b)

(2) حل المعادلة: $2z + \bar{z} - 3 - 5i = 0$ هو: $z = 1 - 5i$

(a) (b)

(3) مجموعة حل المعادلة: $z^2 - 4z + 5 = 0$ هي: $\{-2 - i, 2 + i\}$

(a) (b)

(4) الجذران التربيعيان للعدد -1 هما: $1, -1$

(a) (b)

(5) الجذران التربيعيان للعدد المركب: $z = 16 + 30i$ هما: $z_1 = 5 + 3i, z_2 = -5 - 3i$

(a) (b)

(6) إذا كان z_1, z_2 جذران تربيعيان للعدد z فإن $z_1 + z_2 = 0$

في التمارين (7-10)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

(7) حل المعادلة: $2z - 5 + 6i = -3\bar{z}$ هو:

(a) $z = 1 + 6i$

(b) $z = -1 + 6i$

(c) $z = 1 - 6i$

(d) $z = -1 - 6i$

(8) مجموعة حل المعادلة: $z^2 - 4z + 20 = 0$ هي:

(a) $\{2 - 4i, -2 - 4i\}$

(b) $\{-2 + 4i, -2 - 4i\}$

(c) $\{2 - 4i, -2 + 4i\}$

(d) $\{2 - 4i, 2 + 4i\}$

(9) الجذران التربيعيان للعدد المركب: $z = 33 - 56i$ هما:

(a) $\begin{cases} z_1 = -7 - 4i \\ z_2 = 7 + 4i \end{cases}$

(b) $\begin{cases} z_1 = 7 - 4i \\ z_2 = -7 + 4i \end{cases}$

(c) $\begin{cases} z_1 = 7 + 4i \\ z_2 = 7 - 4i \end{cases}$

(d) $\begin{cases} z_1 = -7 - 4i \\ z_2 = -7 + 4i \end{cases}$

(10) حل المعادلة $(3 - 4i)z = 5 - 2i$ هو:

(a) $\frac{5}{3} + \frac{1}{2}i$

(b) $\frac{5}{3} - \frac{1}{2}i$

(c) $\frac{23}{25} + \frac{14}{25}i$

(d) $\frac{23}{25} - \frac{14}{25}i$



التمثيل البياني للدوال المثلثية

بند (8-1)

الوحدة الثامنة : حساب المثلثات

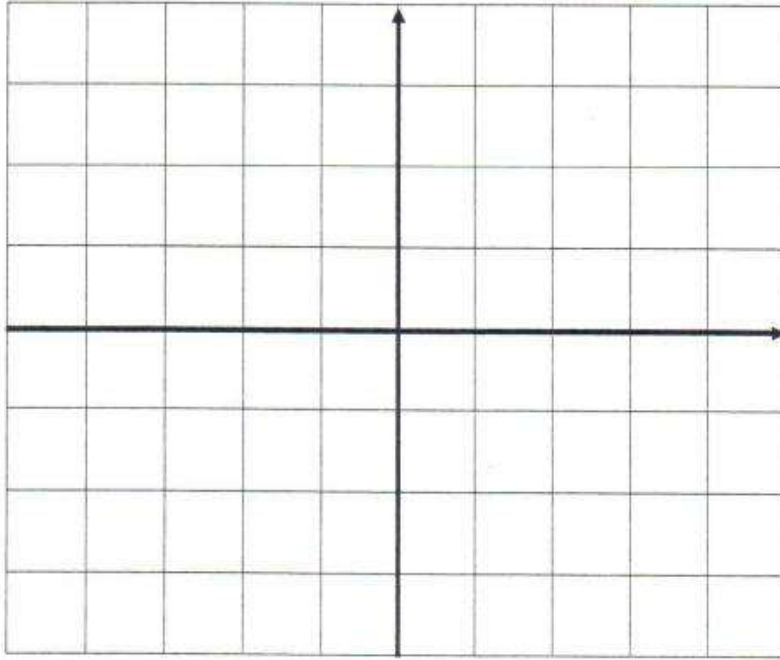
1 تسمى $|a|$ سعة الدالة الجيبية.2 $|b|$ تمثل عدد الدورات في الفترة $[0, 2\pi]$ 3 $\frac{2\pi}{|b|}$ تمثل دورة الدالة.**حاول (1) ص 46:** أوجد الدورة والسعة لكل دالة مما يلي:

a) $y = -2 \cos 5x$

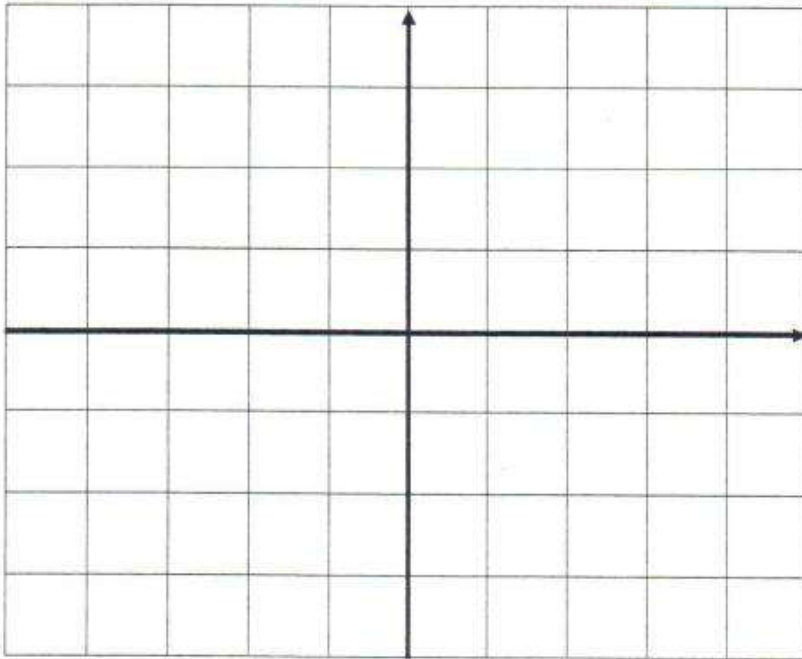
b) $y = \frac{1}{2} \cos(-x)$

حاول (2) ص 46: اكتب معادلة الدالة على الصورة $y = a \cos bx$ إذا كانت:(a) الدورة هي $\frac{\pi}{3}$ ، $a = -2$ (b) الدورة هي π ، $a = 0.25$ © الدورة هي 2 ، $a = 1$ 

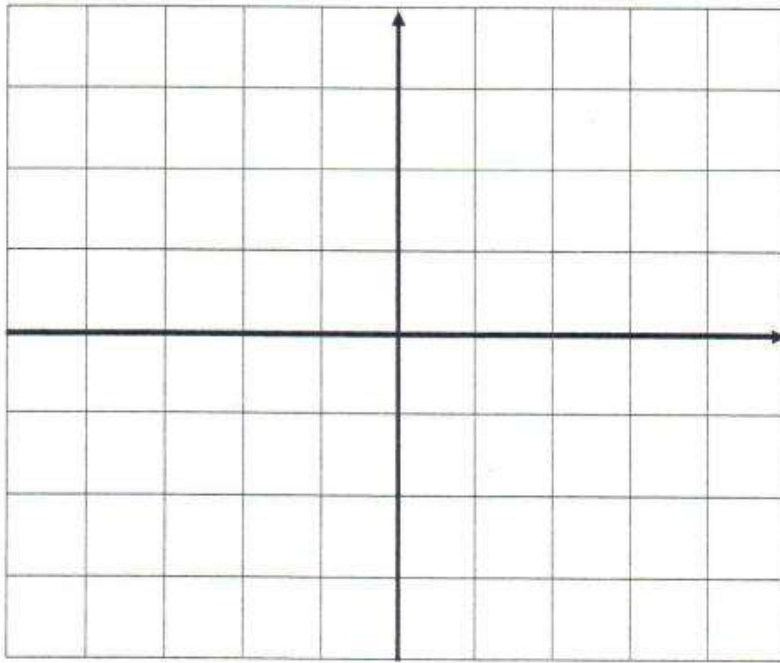
مثال (3) ص 47: a) أوجد السعة والدورة ثم ارسم بيان الدالة: $y = 3 \sin 2x$



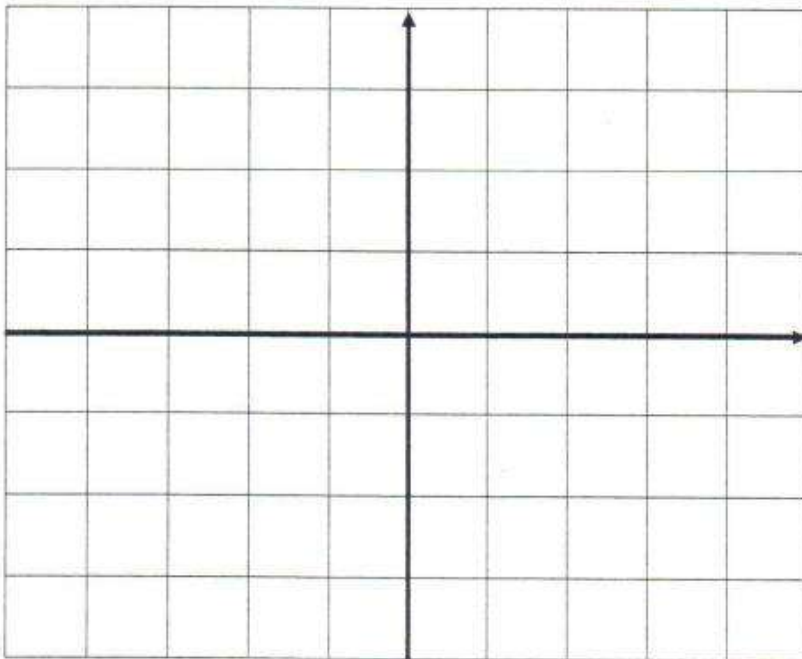
مثال (3) ص 47: b) أوجد السعة والدورة للدالة: $y = 3 \sin \left(\frac{1}{2}x\right)$, $-4\pi \leq x \leq 4\pi$ ثم ارسم بيانها.



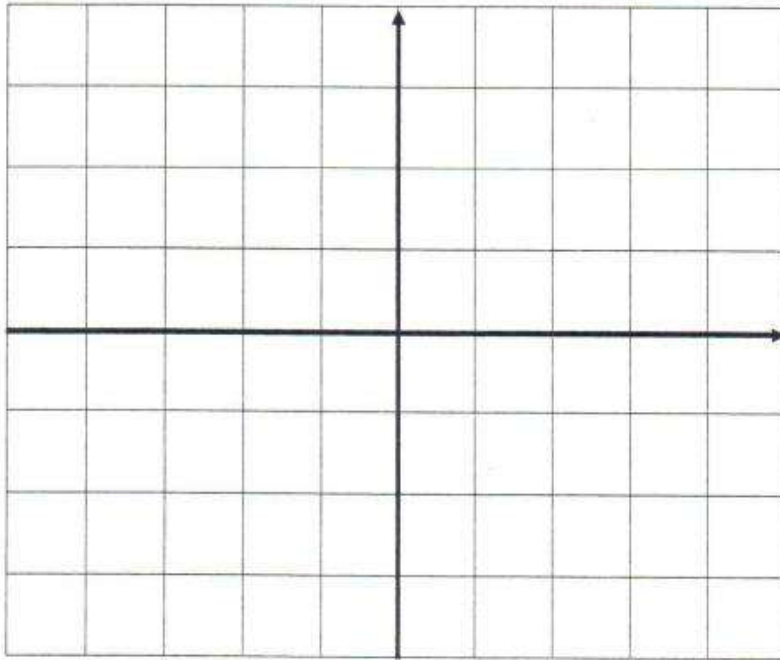
حاول (3) ص 48: a أوجد السعة والدورة ثم ارسم بيان الدالة: $y = \frac{1}{2} \sin 4x$



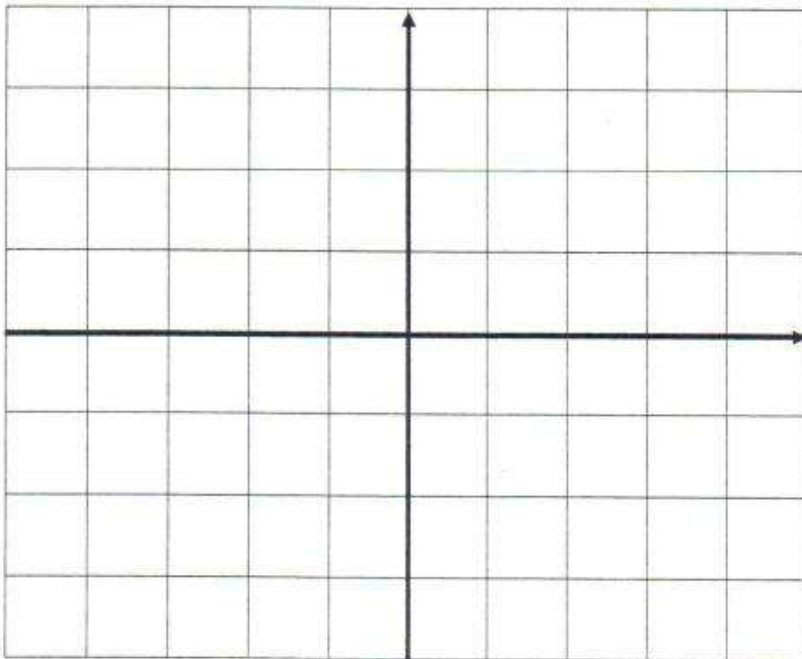
حاول (3) ص 48: b أوجد السعة والدورة للدالة: $y = -4 \sin x$, $x \in [-\pi, 2\pi]$ ثم ارسم بيانها.



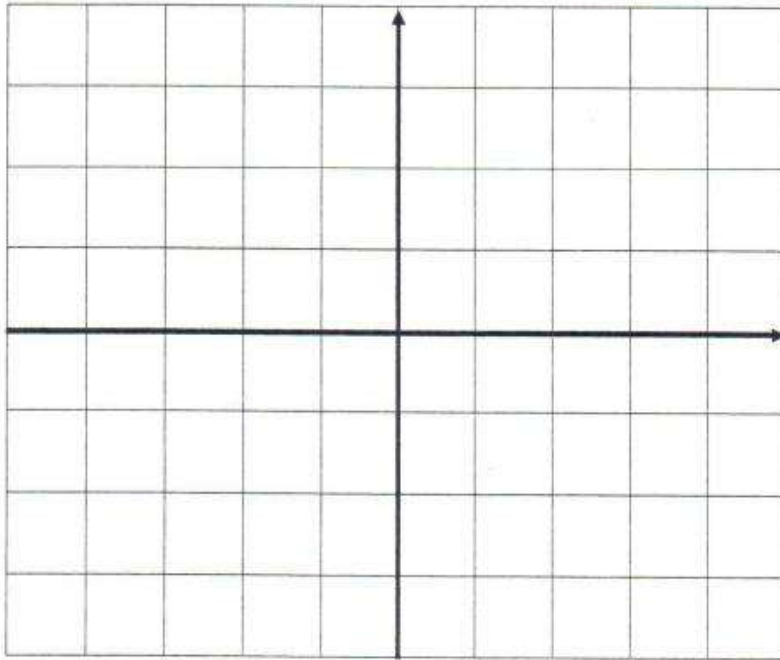
مثال (4) ص 49: a) أوجد السعة والدورة ثم ارسم بيان الدالة: $y = 2 \cos 4x$



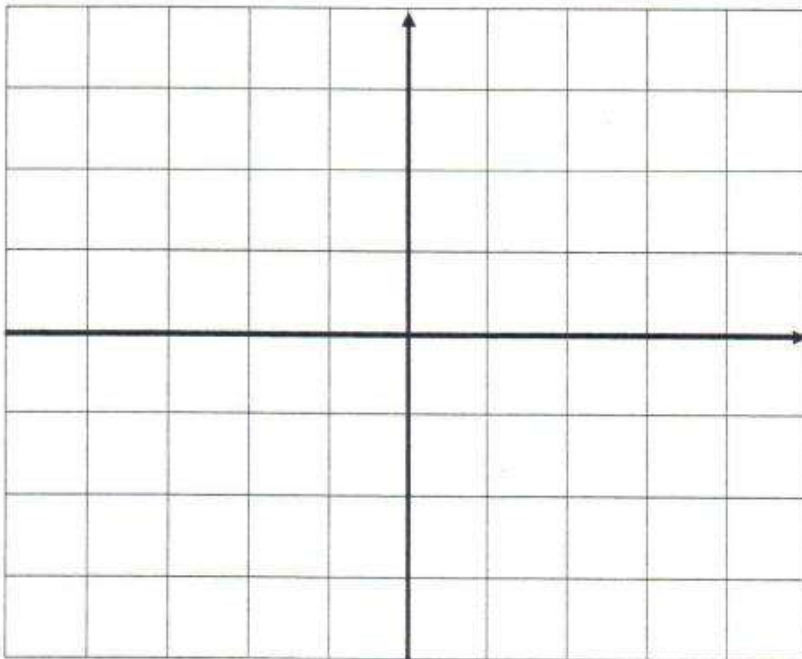
مثال (4) ص 49: b) أوجد السعة والدورة للدالة: $y = -5 \cos\left(\frac{2}{3}x\right)$, $x \in [-3\pi, 3\pi]$ ثم ارسم بيانها.



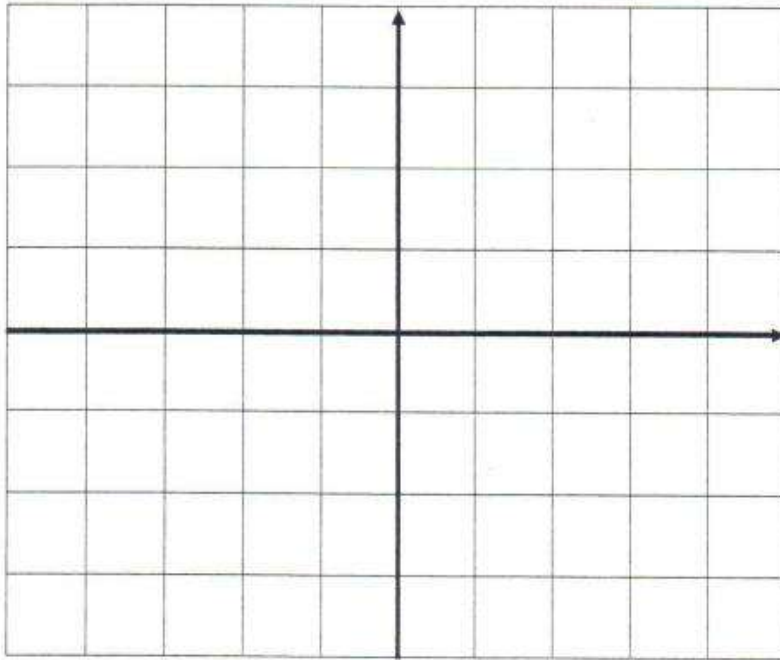
حاول (4) ص 49: a أوجد السعة والدورة ثم ارسم بيان الدالة: $y = 3 \cos 2x$



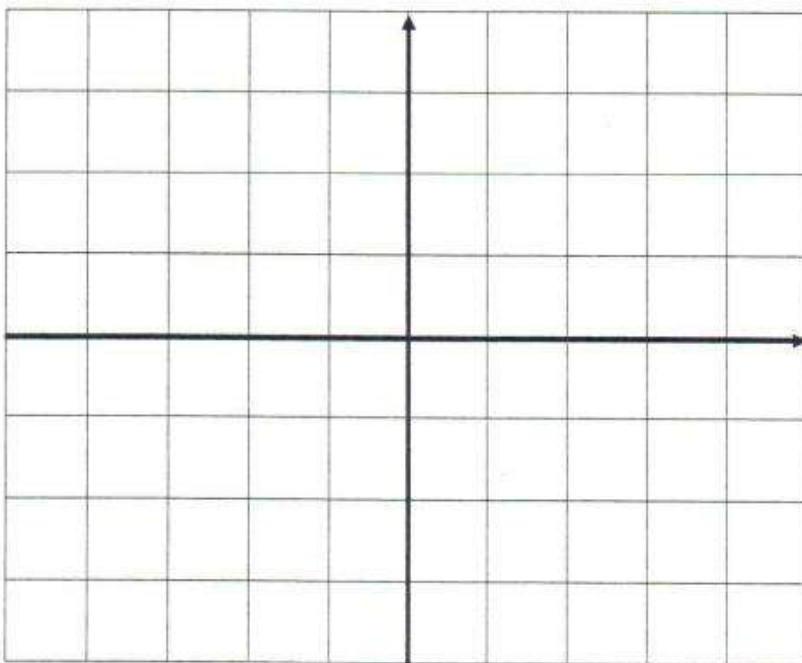
حاول (4) ص 49: b أوجد السعة والدورة للدالة: $y = -2 \cos\left(\frac{3}{4}x\right)$, $0 \leq x \leq 2\pi$ ثم ارسم بيانها.



حاول (5) ص 51: a) أوجد الدورة ثم ارسم بيان الدالة: $y = -\tan x$



حاول (5) ص 51: b) أوجد الدورة ثم ارسم بيان الدالة: $y = \frac{1}{2} \tan x$



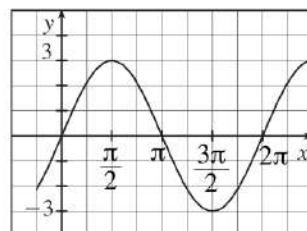
في التمارين (1-7)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

- (1) معادلة الدالة المثلثية $y = a \sin(b\theta)$ حيث السعة 5 والدورة 3π هي $y = 5 \sin\left(\frac{2}{3}\theta\right)$ (a) (b)
- (2) الدالة التي دورتها $\frac{\pi}{2}$ وسعتها 3 يمكن أن تكون $y = 3 \sin\left(\frac{\pi\theta}{2}\right)$ (a) (b)
- (3) الدالة $y = 3 \tan\left(\frac{3}{4}x\right)$ دورتها $\frac{4}{3}\pi$ (a) (b)
- (4) الدالة التي دورتها $\frac{\pi}{3}$ وسعتها 4 يمكن أن تكون $y = -4 \cos(6x)$ (a) (b)
- (5) سعة الدالة $y = -5 \cos 2x$ هي -5 (a) (b)
- (6) في الدالة f حيث $f(x) = a \cos bx$ يكون: $2|a| = \max f + \min f$ (a) (b)
- (7) الدالتان f, g حيث $f(x) = \cos 8x$ ، $g(x) = \tan 4x$ لهما نفس الدورة. (a) (b)

في التمارين (8-17)، ظلّل رمز الدائرة الدالّ على الإجابة الصحيحة.

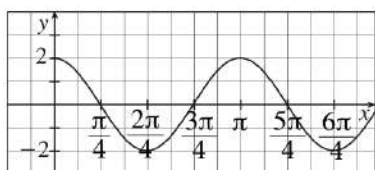
(8) البيان التالي يمثل بيان الدالة:

- (a) $f(x) = 3 \cos x$ (b) $f(x) = 3 \sin x$
- (c) $f(x) = -3 \sin x$ (d) $f(x) = \sin 3x$



(9) لتكن $f(x) = 3 \tan 2x$ فإن:

- (a) السعة = 1 (b) السعة = 2 (c) السعة = 3 (d) ليس لها سعة



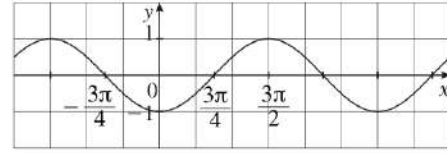
(10) ليكن بيان f كما في الشكل التالي:

فإن f يمكن أن تكون:

- (a) $2 \cos 2x$ (b) $\cos 2x$ (c) $\cos \frac{x}{2}$ (d) $\sin 2x$

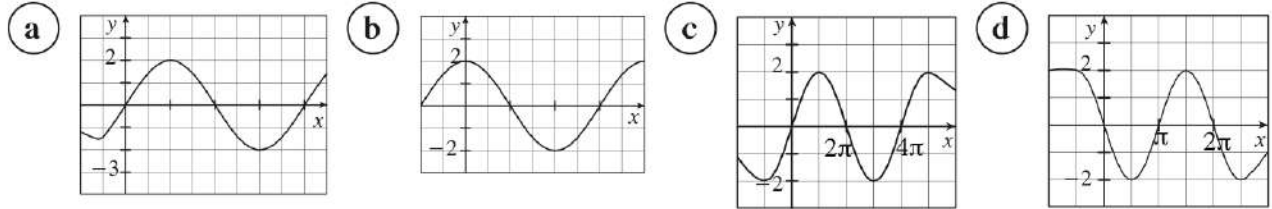


(11) ليكن g دالة دورية بيانها كما في الشكل التالي فإن الدورة تساوي:



- (a) π (b) 2π (c) 3π (d) $\frac{6\pi}{4}$

(12) لتكن الدالة g حيث: $g(x) = a \sin bx$ فإن بيان g لا يمكن أن يكون:



(13) معادلة الدالة المثلثية $y = a \cos(bx)$ حيث السعة 4 والدورة 6 يمكن أن تكون:

- (a) $y = \frac{1}{4} \cos\left(\frac{x}{3}\right)$ (b) $y = -4 \cos\left(\frac{\pi}{3}x\right)$
(c) $y = -4 \cos\left(\frac{3}{\pi}x\right)$ (d) $y = 4 \cos\left(\frac{x}{3}\right)$

(14) الدالة $y = a \cos(bx)$ حيث $a = 2$ ودورتها $\frac{\pi}{4}$ يمكن أن تكون:

- (a) $y = 2 \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)$ (b) $y = 8 \cos(8x)$
(c) $y = 2 \cos(8x)$ (d) $y = 8 \cos\left(\frac{x}{4}\right)$

(15) معادلة الدالة المثلثية $y = a \sin(bx)$ حيث السعة 3 والدورة $\frac{\pi}{2}$ يمكن أن تكون:

- (a) $y = 3 \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ أو $y = -3 \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ (b) $y = 3 \sin\left(\frac{2}{\pi}x\right)$ أو $y = -3 \sin\left(\frac{2}{\pi}x\right)$
(c) $y = 3 \sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)$ أو $y = -3 \sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)$ (d) $y = 3 \sin(4x)$ أو $y = -3 \sin(4x)$

(16) معادلة الدالة المثلثية $y = \tan(bx)$ حيث الدورة $\frac{3}{4}$ يمكن أن تكون:

- (a) $y = \tan\left(\frac{4}{3}\pi x\right)$ (b) $y = \tan\left(\frac{3}{4}x\right)$
(c) $y = \tan\left(\frac{4}{3}x\right)$ (d) $y = \tan\left(\frac{3}{4}\pi x\right)$

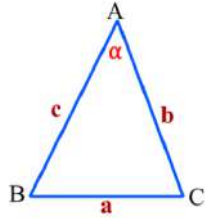
(17) في الدالة المثلثية $y = -2 \sin\left(\frac{3}{5}x\right)$ السعة والدورة هما:

- (a) $-2, \frac{3\pi}{5}$ (b) $2, \frac{10\pi}{3}$
(c) $2, \frac{3\pi}{5}$ (d) $2, \frac{2\pi}{15}$



قانون الجيب

بند (3 - 8)



$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}$$

قانون الجيب

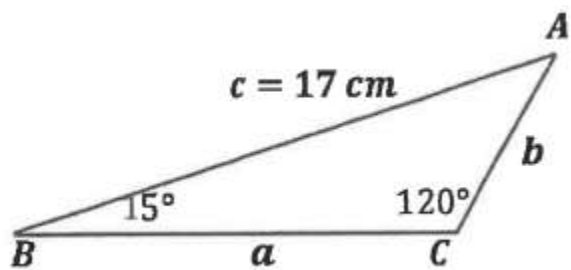
في أي مثلث ABC :

مثال (1) ص 64: حل ΔABC حيث: $\alpha = 40^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $a = 4 \text{ cm}$

حاول (1) ص 64: حل ΔABC حيث: $\alpha = 36^\circ$, $\beta = 48^\circ$, $a = 8 \text{ cm}$



كراسة ص 25 رقم (1): حل المثلث ABC :



مثال (2) ص 66: حل ΔABC حيث: $a = 3 \text{ cm}$, $b = 2 \text{ cm}$, $\alpha = 40^\circ$



حاول (2) صد 66: حل ΔABC حيث: $a = 7 \text{ cm}$, $b = 6 \text{ cm}$, $\alpha = 26.3^\circ$



حاول (3) صد 67: حل ΔABC حيث: $a = 6 \text{ cm}$, $b = 7 \text{ cm}$, $\alpha = 45^\circ$



في التمارين (1-3)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) في المثلث ABC : $m(\widehat{A}) = 100^\circ$, $m(\widehat{B}) = 30^\circ$, $BC = 20$ cm, فإنّ $AC = 10.154$ cm (a) (b)

(2) في المثلث ABC : $m(\widehat{B}) = 80^\circ$, $AB = 12$ cm, $AC = 16$ cm, فإنّ $m(\widehat{C}) = 50^\circ$ (a) (b)

(3) في كل مثلث ABC يكون: $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$ (a) (b)

في التمارين (4-9)، ظلّل رمز الدائرة الدالّ على الإجابة الصحيحة.

(4) في المثلث ABC : $m(\widehat{A}) = 80^\circ$, $m(\widehat{B}) = 40^\circ$, $AC = 10$ cm, فإنّ طولَي $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ يساويان:

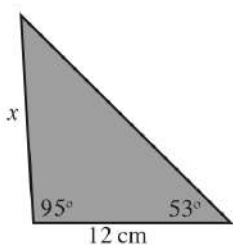
(a) 7.43 cm, 15.32 cm

(b) 6.53 cm, 13.47 cm

(c) 13.47 cm, 15.32 cm

(d) 7.43 cm, 6.53 cm

(5) في المثلث المقابل، x تساوي حوالى:



(a) 8.6 cm

(b) 15 cm

(c) 18.1 cm

(d) 19.2 cm

(6) مثلث قياسات زواياه: 50° , 60° , 70° , طول أصغر ضلع فيه هو 9 cm

طول أطول ضلع حوالى:

(a) 11 cm

(b) 11.5 cm

(c) 12 cm

(d) 12.5 cm

(7) القياسات المعطاة في المثلث ABC : $m(\widehat{A}) = 56^\circ$, $AB = 19$ cm, $AC = 23$ cm, طول $\overline{BC}$ يساوي:

(a) 12 cm

(b) 18 cm

(c) 19 cm

(d) لا يمكن استخدام قانون الجيب



بند (4 - 8)

قانون جيب التمام

قانون جيب التمام:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

مثال (1) ص 71: حل ΔABC حيث: $a = 2 \text{ cm}$, $b = 3 \text{ cm}$, $\gamma = 60^\circ$



حاول (1) ص 72: حل ΔABC حيث: $a = 11 \text{ cm}$, $b = 5 \text{ cm}$, $\gamma = 20^\circ$

مثال (2) ص 72: حل ΔABC حيث: $a = 4 \text{ cm}$, $b = 3 \text{ cm}$, $c = 6 \text{ cm}$



حاول (2) صد 72: في ΔABC حيث: $a = 9 \text{ cm}$, $b = 7 \text{ cm}$, $c = 5 \text{ cm}$
أوجد قياس الزاوية الأكبر.

حاول (3) صد 73: حل ΔABC حيث: $a = 5 \text{ cm}$, $b = 6.5 \text{ cm}$, $\alpha = 25^\circ$



امتحان سابق: (2021 – 2022)

ABC مثلث فيه: $\alpha = 32^\circ$, $b = 11 \text{ cm}$, $a = 17 \text{ cm}$ أوجد γ

امتحان سابق: (2022 – 2023) حل ΔABC حيث: $m(\hat{c}) = 95^\circ$, $b = 21$, $a = 12$



في التمارين (1-4)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) في المثلث ABC : $AB = 24 \text{ cm}$, $AC = 19 \text{ cm}$, $BC = 27 \text{ cm}$ فإنّ: $m(\widehat{A}) \approx 76.82^\circ$ (a) (b)

(2) في المثلث ABC : $m(\widehat{A}) = 60^\circ$, $BC = 44 \text{ cm}$, $AB = 20 \text{ cm}$ فإنّ: $AC \approx 50.5 \text{ cm}$ (a) (b)

(3) في المثلث ABC : $b^2 + c^2 < 2bc \cos A$ (a) (b)

(4) إذا كانت أطوال أضلاع مثلث تساوي 5 cm , 8 cm , 12 cm فإنّ قياس الزاوية الكبرى

في هذا المثلث يساوي حوالي 133.4° (a) (b)

في التمارين (5-10)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

(5) في المثلث ABC : $m(\widehat{C}) = 60^\circ$, $AC = 10 \text{ cm}$, $BC = 20 \text{ cm}$ فإنّ طول $\overline{AB}$ يساوي:

(a) $AB = 10\sqrt{7} \text{ cm}$ (b) $AB = 10\sqrt{3} \text{ cm}$ (c) $AB = 12.4 \text{ cm}$ (d) $AB = 29 \text{ cm}$

(6) في المثلث ABC : $m(\widehat{A}) = 120^\circ$, $AB = 30 \text{ cm}$, $AC = 40 \text{ cm}$ فإنّ طول $\overline{BC}$ يساوي:

(a) $BC \approx 60.8 \text{ cm}$ (b) $BC \approx 36 \text{ cm}$ (c) $BC \approx 68 \text{ cm}$ (d) $BC \approx 21 \text{ cm}$

(7) إذا كان $AB = 12 \text{ cm}$, $AC = 17 \text{ cm}$, $BC = 25 \text{ cm}$ فإنّ قياس الزاوية الكبرى في المثلث ABC يساوي

حوالي:

(a) 118° (b) 110° (c) 125° (d) 100°



مساحة المثلث

بند (5 - 8)

قاعدة هيرون

تعطى مساحة مثلث ABC أطوال أضلاعه a, b, c بالقاعدة:

$$\text{Area}(ABC) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

حيث: (نصف محيط المثلث) $s = \frac{1}{2}(a+b+c) = \text{semiperimeter}$ **حاول (1) صد 75:** أوجد مساحة المثلث ABC حيث: $a = 5 \text{ cm}$, $b = 6 \text{ cm}$, $c = 8 \text{ cm}$ **حاول (2) صد 75:** أوجد مساحة المثلث ABC حيث: $a = 4 \text{ cm}$, $b = 4 \text{ cm}$, $c = 3 \text{ cm}$ 

امتحان سابق: (2016 – 2017)

ABC مثلث فيه: $a = 9 \text{ cm}$, $b = 7 \text{ cm}$, $c = 5 \text{ cm}$ أوجد:

- (1) قياس أكبر زاوية
(2) مساحة سطح المثلث ABC مستخدماً قاعدة هيرون



في التمارين (1-6)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

- (1) إذا عرفت أطوال أضلاع مثلث فيمكن استخدام قاعدة هيرون لإيجاد مساحته. (a) (b)
- (2) لا يمكن إيجاد مساحة مثلث بمعلومية قياسات زواياه الثلاثة. (a) (b)
- (3) لا يمكن استخدام قاعدة هيرون إذا كان المثلث قائم الزاوية. (a) (b)
- (4) إن معرفة قياس إحدى زوايا مثلث هو شرط ضروري لإيجاد مساحته. (a) (b)
- (5) إذا كان a, b طولاً ضلعين متتاليين في متوازي أضلاع و θ قياس الزاوية بينهما فإن مساحة متوازي الأضلاع تساوي $ab \sin \theta$ (a) (b)

(6) في المثلث ABC : $AC = 9 \text{ cm}$, $AB = 7 \text{ cm}$, $BC = 5 \text{ cm}$

- فإن مساحة المثلث ABC تساوي حوالي 15 cm^2 (a) (b)

في التمارين (7-10)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

(7) إذا كان: $a = 2 \text{ cm}$, $b = 3 \text{ cm}$, $m(\widehat{C}) = 40^\circ$ فإن مساحة المثلث ABC تساوي حوالي:

- (a) 4.6 cm^2 (b) 3.86 cm^2
- (c) 1.93 cm^2 (d) 2.3 cm^2

(8) مساحة المثلث الذي أطوال أضلاعه 9 cm , 8 cm , 7 cm هي:

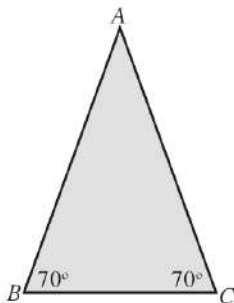
- (a) $6\sqrt{15} \text{ cm}^2$ (b) $12\sqrt{5} \text{ cm}^2$
- (c) $16\sqrt{3} \text{ cm}^2$ (d) $18\sqrt{3} \text{ cm}^2$

(9) مساحة مثلث متطابق الأضلاع طول ضلعه a هي:

- (a) $\frac{a^2\sqrt{3}}{4} \text{ units}^2$ (b) $a^2 \text{ units}^2$
- (c) $\frac{1}{2} a^2 \text{ units}^2$ (d) $\frac{a^2\sqrt{3}}{2} \text{ units}^2$

(10) إذا كانت مساحة المثلث ABC تساوي حوالي 8 cm^2 فإن طول $\overline{AB}$ هو حوالي:

- (a) 5 cm (b) 8 cm
- (c) 4 cm (d) 6 cm



إثبات صحة متطابقة مثلثية

بند (9-2)

الوحدة التاسعة : تطبيقات على حساب المثلثات

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \quad , \quad \cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} \quad , \quad \csc \theta = \frac{1}{\sin \theta} \quad , \quad \cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$$

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 \quad , \quad 1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta \quad , \quad 1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta$$

$$\frac{(1 - \cos \theta)(1 + \cos \theta)}{\cos^2 \theta} = \tan^2 \theta$$

مثال (1) ص 88: أثبت صحة المتطابقة:

$$\frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} + \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} = 2 \csc \theta$$

حاول (1) ص 88: أثبت صحة المتطابقة:



$$2 \cot x \csc x = \frac{1}{\sec x - 1} + \frac{1}{\sec x + 1}$$

مثال (2) صـ 88: أثبت صحة المتطابقة:

$$\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} + \frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} = 4 \tan x \cdot \sec x$$

حاول (2) صـ 89: أثبت صحة المتطابقة:



$$\frac{\cos x}{1 - \sin x} = \frac{1 + \sin x}{\cos x}$$

مثال (3) ص 89: أثبت صحة المتطابقة:

$$\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} = (\csc x - \cot x)^2$$

حاول (3) ص 90: أثبت صحة المتطابقة:



$$\frac{\sec x + \tan x}{\cot x + \cos x} = \sin x + \sin x \tan^2 x$$

حاول (4) ص 90: أثبت صحة المتطابقة:

كراسة ص 36 رقم (1): أثبت صحة المتطابقة: $(\cos x)(\tan x + \sin x \cot x) = \sin x + \cos^2 x$



كراسة صـ 36 رقم (4): أثبت صحة المتطابقة: $\tan x + \cot x = \sec x \cdot \csc x$

كراسة صـ 36 رقم (6): أثبت صحة المتطابقة: $\frac{1}{1-\cos x} + \frac{1}{1+\cos x} = 2 \csc^2 x$



امتحان سابق: (2015 – 2016)

$$\tan^2 x - \sin^2 x = \sin^2 x \cdot \tan^2 x$$

أثبت صحة المتطابقة:

$$\frac{\sec^2 x - 1}{\sin x} = \tan x \sec x$$

امتحان سابق: (2017 – 2018) أثبت صحة المتطابقة:

في التمارين (1-4)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(a) (b)

(1) $3 \sin x = \sin(3x)$ تمثل متطابقة.

(a) (b)

(2) $\cos 2x = \sin^2 x - \cos^2 x$ تمثل متطابقة.

(a) (b)

(3) $\sec x - \cos x = \tan x \sin x$ تمثل متطابقة.

في التمارين (5-10)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

(5) المقدار: $\frac{\sec^2 x - 1}{\sin x}$ متطابق مع المقدار:

(a) $\sin x \tan x$

(b) $\sin x \sec^2 x$

(c) $\cos x \sec^2 x$

(d) $\sin x \csc x$

(6) المقدار: $(\cos x + \sin x)^2 - (\cos x - \sin x)^2$ متطابق مع المقدار:

(a) $-4 \sin x \cos x$

(b) 2

(c) -2

(d) $4 \sin x \cos x$

(7) المقدار: $\frac{1}{\tan x} + \tan x$ متطابق مع المقدار:

(a) $\sec x \csc x$

(b) $\sec x \sin x$

(c) $\sec x \cos x$

(d) $\sin x \cos x$

(8) المقدار: $\tan^2 x - \sin^2 x$ متطابق مع المقدار:

(a) $\tan^2 x$

(b) $\cot^2 x$

(c) $\tan^2 x \sin^2 x$

(d) $\cot^2 x \cos^2 x$

(9) المقدار: $\frac{\sin x}{\csc x} + \frac{\cos x}{\sec x} + 1$ متطابق مع المقدار:

(a) 1

(b) -1

(c) 2

(d) -2

(10) المقدار: $\frac{\cos^2 x - 1}{\cos x}$ متطابق مع المقدار:

(a) $-\tan x \sin x$

(b) $-\tan x$

(c) $\tan x \sin x$

(d) $\tan x$



حل معادلات مثلثية

بند (3 - 9)

مثال (1) ص 93: حل المعادلة : $2 \cos x = \sqrt{3}$ 

حاول (1) صد 93: حل المعادلة : $\sqrt{2} \cos x = 1$



امتحان سابق: (2021 – 2022) حل المعادلة : $\cos x = -\frac{1}{2}$ حيث $0 \leq x \leq 2\pi$



امتحان سابق: (2016 – 2017) حل المعادلة : $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$



امتحان سابق: (2022 – 2023) حل المعادلة: $3 \sin \theta + 1 = \sin \theta$ حيث $0 \leq \theta < 2\pi$

مثال (2) ص 94: حل المعادلة: $4 \sin \theta + 1 = \sin \theta$ حيث $0 \leq \theta < 2\pi$



حاول (2) صد 94: حل المعادلة: $5 \sin \theta - 3 = \sin \theta$



$$2 \cos \theta \sin \theta = -\sin \theta$$

مثال (4) ص 95: حل المعادلة:



حاول (4) صد 96: حل المعادلة: $\sin \theta \cos \theta - \cos \theta = 0$

مثال (5) صد 96: حل المعادلة: $4 \sin^2 x - 8 \sin x + 3 = 0$



حاول (5) صد 97: حل المعادلة: $\cos^2 x + 3 \cos x + 2 = 0$

مثال (3) صد 94: حل المعادلة: $\tan x = \sqrt{3}$

حاول (3) صد 95: حل المعادلة: $\tan x = 1$



في التمارين (1-5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

- (1) حل المعادلة $\sin x = \frac{1}{2}$ هو: $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ، حيث k عدد صحيح. (a) (b)
- (2) حل المعادلة $\cos x = \sqrt{2}$ هو: $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ أو $x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ، حيث k عدد صحيح. (a) (b)
- (3) حل المعادلة $\tan x = -\sqrt{3}$ هو: $x = +\frac{5\pi}{6} + k\pi$ ، حيث k عدد صحيح. (a) (b)
- (4) حلول المعادلة $\sin x \tan^2 x = \sin x$ على الفترة $(0, \pi)$ هي: $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{3\pi}{4}$. (a) (b)
- (5) حلول المعادلة $2 \sin^2 x = 1$ على الفترة $[0, 2\pi)$ هي: $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{5\pi}{4}$. (a) (b)

في التمارين (6-11)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

(6) إذا كان $\sin x + \cos x = 0$ فإن x تقع في الربع:

- (a) الأول (b) الأول أو الثالث
- (c) الثالث (d) الثاني أو الرابع

(7) حلول المعادلة: $2 \sin^2 x + 3 \sin x + 1 = 0$ على الفترة $[0, 2\pi)$ هي:

- (a) $-\frac{\pi}{6}$, $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{3\pi}{2}$ (b) $\frac{4\pi}{3}$, $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{3}$
- (c) $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{11\pi}{6}$ (d) $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{11\pi}{6}$

(8) حلول المعادلة: $2\sqrt{2} \sin x \cos x - \sqrt{2} \cos x - 2 \sin x = -1$ على الفترة $[0, 2\pi)$ هي:

- (a) $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$ (b) $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{7\pi}{4}$
- (c) $\frac{\pi}{6}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{4}$ (d) $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$, $\frac{7\pi}{4}$



متطابقات المجموع والفرق

بند (4 - 9)

متطابقات الدوال المتكافئة

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) &= \sin \theta & \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) &= \cot \theta & \sec\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) &= \csc \theta \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) &= \cos \theta & \cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) &= \tan \theta & \csc\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) &= \sec \theta \end{aligned}$$

حاول (1) صد 100: أثبت أن: $\cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = -\sec \theta$

حاول (2) صد 100: أثبت أن: $\sec\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \csc \theta$

متطابقات المجموع	متطابقات الفرق
$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$	$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$
$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$	$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$
$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$	$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$



حاول (3) صد 103: أوجد دون استخدام الآلة الحاسبة كلاً مما يلي:

a) $\sin 15^\circ$

b) $\cos 75^\circ$

c) $\tan 105^\circ$



مثال (4) ص 103:

إذا كان: $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $\cos \beta = \frac{-12}{13}$, $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$, فأوجد

- 1) $\sin (\alpha + \beta)$ 2) $\cos (\alpha - \beta)$ 3) $\tan (\alpha - \beta)$ 4) $\tan 2\beta$



امتحان سابق: (2016 – 2017)

إذا كان: $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, $\cos \beta = \frac{24}{25}$ حيث α , β زاويتين حادتين، أوجد كلا مما يلي:

1) $\cos (\alpha - \beta)$

2) $\sin (\frac{\pi}{2} - \beta)$



في التمارين (1-4)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(a) (b)

$$\sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \quad (1)$$

(a) (b)

$$\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \quad (2)$$

$$(3) \cos\left(h + \frac{\pi}{2}\right) = -\cos h$$

(a) (b)

$$(4) \tan^2 \frac{\pi}{12} + \tan^2 \frac{5\pi}{12} = 14$$

(a) (b)

في التمارين (5-11)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

$$(5) \tan \frac{7\pi}{12} \text{ تساوي:}$$

(a) $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{\sqrt{2} + \sqrt{6}}$

(b) $\sqrt{2} + \sqrt{6}$

(c) $2 + \sqrt{3}$

(d) $-2 - \sqrt{3}$

$$(6) \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \text{ تساوي:}$$

(a) $\frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x$

(b) $\frac{1}{2} (\sin x + \cos x)$

(c) $\frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x$

(d) $\frac{\sqrt{3}}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos x$

$$(7) \tan\left(h + \frac{\pi}{4}\right) \text{ تساوي:}$$

(a) $1 + \tan h$

(b) $\frac{1 - \tan h}{1 + \tan h}$

(c) $\frac{1 + \tan h}{1 - \tan h}$

(d) $1 - \tan h$

$$(8) \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \text{ تساوي:}$$

(a) $\frac{\sqrt{2}}{2} (\cos x - \sin x)$

(b) $\sqrt{2} (\cos x + \sin x)$

(c) $\frac{\sqrt{3}}{2} (\cos x + \sin x)$

(d) $\frac{\sqrt{2}}{2} (\cos x + \sin x)$

$$(9) \cos 94^\circ \cos 18^\circ + \sin 94^\circ \sin 18^\circ \text{ تساوي:}$$

(a) $\cos 112^\circ$

(b) $\cos 76^\circ$

(c) $\sin 112^\circ$

(d) $\sin 76^\circ$

$$(10) \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{7} - \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{\pi}{3} \text{ تساوي:}$$

(a) $\cos \frac{4\pi}{21}$

(b) $\sin \frac{4\pi}{21}$

(c) $\cos \frac{10\pi}{21}$

(d) $\sin \frac{10\pi}{21}$

$$(11) \frac{\tan \frac{\pi}{5} - \tan \frac{\pi}{3}}{1 + \tan \frac{\pi}{5} \tan \frac{\pi}{3}} \text{ تساوي:}$$

(a) $\tan \frac{2\pi}{15}$

(b) $\tan \frac{8\pi}{15}$

(c) $\tan\left(-\frac{8\pi}{15}\right)$

(d) $\tan\left(-\frac{2\pi}{15}\right)$



متطابقات ضعف الزاوية ونصفها

بند (5 - 9)

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

$$\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1$$

$$\cos 2\theta = 1 - 2 \sin^2 \theta$$

مثال (2) ص 106: إذا كان: $\cos x = \frac{3}{5}$ استخدام متطابقة جيب تمام الزاوية لإيجاد $\cos 2x$

حاول (2) ص 106: إذا كان: $\sin x = \frac{5}{13}$ استخدام متطابقة جيب تمام الزاوية لإيجاد $\cos 2x$



$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

مثال (3) صد 106: إذا كان: $\sin \theta = \frac{-1}{\sqrt{2}}$, $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ فأوجد $\sin 2\theta$.

حاول (3) صد 106: إذا كان: $\cos \theta = \frac{3}{5}$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ فأوجد $\sin 2\theta$.



امتحان سابق: (2019 – 2018)

إذا كان: $\sin \theta = \frac{-12}{13}$, $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$ فأوجد $\sin 2\theta$.

$$\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$$

حاول (4) صد 107: إذا كان: $\tan \theta = \sqrt{3}$ استخدم متطابقة ضعف الزاوية لإيجاد $\tan 2\theta$



مثال (5) صد 107: أثبت صحة المتطابقة: $\cos 2\theta = \frac{1 - \tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta}$

حاول (5) صد 107: أثبت صحة المتطابقة: $2\cos 2\theta = 4\cos^2 \theta - 2$



مثال (6) صد 108: أثبت صحة المتطابقة: $\cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$

حاول (5) صد 108: أثبت صحة المتطابقة: $\sin 3\theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta$



متطابقات نصف الزاوية

$$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \mp \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}}$$

$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \mp \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}}$$

$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \mp \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}}$$

حاول (5) ص 109: استخدام متطابقات نصف الزاوية لإيجاد $\cos 15^\circ$

كراسة ص 42 رقم (12): إذا كان: $\sin x = -\frac{12}{13}$, $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ فأوجد $\sin \frac{x}{2}$



مثال (58) صد 109: إذا كان: $\sin \theta = -\frac{12}{13}$, $180^\circ < \theta < 270^\circ$

فأوجد $\sin \frac{\theta}{2}$, $\cos \frac{\theta}{2}$, $\tan \frac{\theta}{2}$



امتحان سابق: (2017 – 2018)

إذا كان: $\sin \theta = \frac{-3}{5}$, $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ فأوجد $\sin \frac{\theta}{2}$, $\tan 2\theta$



في التمارين (1-5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $\sin 4x = 2 \sin 2x \cos 2x$

(a) (b)

(2) $\sin 4x = -4 \cos x \sin^3 x + 4 \cos^3 x \sin x$

(a) (b)

(3) $\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}$

(a) (b)

(4) $\cos 6x = 2 \cos^2 3x - 1$

(a) (b)

(5) $\cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1$

(a) (b)

في التمارين (6-8)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

(6) $2 \cos^2 \frac{x}{2}$ تساوي:

(a) $\frac{1 + \cos x}{2}$

(b) $1 + \cos x$

(c) $1 + \cos 2x$

(d) $\frac{1 - \cos 2x}{2}$

(7) $\cos \frac{\pi}{8}$ تساوي:

(a) $\frac{2 + \sqrt{2}}{2}$

(b) $\sqrt{2} - 1$

(c) $\frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$

(d) $\sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{2}}$

(8) إذا كان: $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ ، فإن $\cos \theta = \frac{-7}{25}$ ، $\cos \frac{\theta}{2}$ يساوي:

(a) $\frac{2}{5}$

(b) $\frac{-2}{5}$

(c) $\frac{-3}{5}$

(d) $\frac{3}{5}$



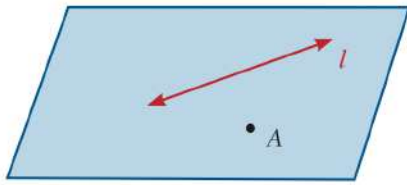
المستقيمات والمستويات في الفضاء

بند (10-1)

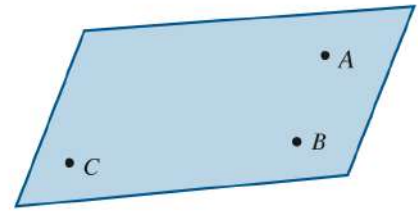
الوحدة العاشرة : الهندسة الفراغية (هندسة الفضاء)

حالات تعيين المستوي في الفضاء

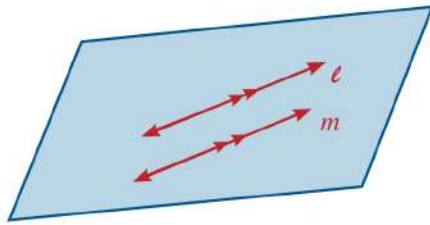
- أي ثلاث نقاط مختلفة ليست على استقامة واحدة تعين مستويًا واحدًا فقط.
- أي مستقيم ونقطة خارجة عنه يعينان مستويًا واحدًا فقط.
- أي مستقيمان متقاطعان يعينان مستويًا واحدًا فقط.
- أي مستقيمان متوازيان مختلفان يعينان مستويًا واحدًا فقط.



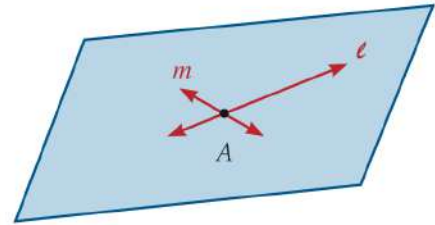
مستقيم ونقطة خارجة عنه



ثلاث نقاط غير مستقيمة



مستقيمان متوازيان

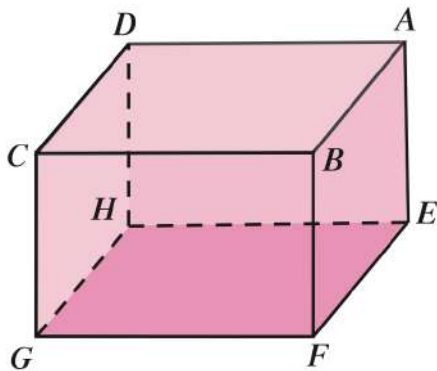


مستقيمان متقاطعان

تدريب (1)

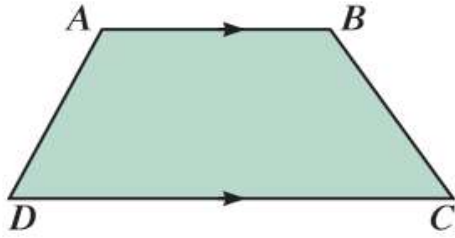
في الشكل المقابل شبه مكعب. أكمل:

- المستوي $ABCD$ يتعين بالمستقيمين المتوازيين ،
- المستوي HFG يتعين بالمستقيمين المتقاطعين ،
- المستوي $DBFH$ يتعين بالمستقيمين ، المتوازيين.
- المستوي $AEHD$ يتعين بالمستقيم والنقطة
- المستوي ABC ، هو نفس المستوي أو

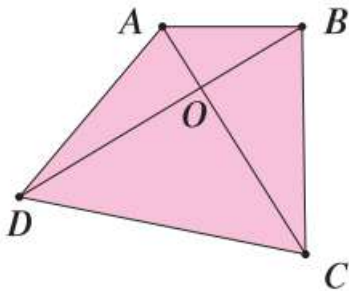


مثال (1) ص 119:

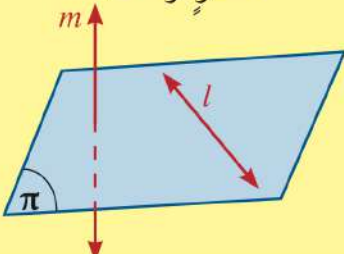
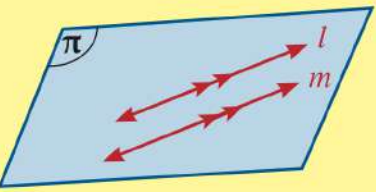
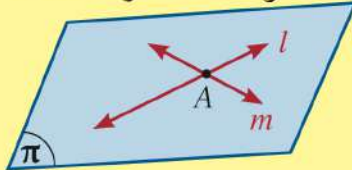
أثبت أن أضلاع شبه منحرف تقع جميعها في مستو واحد.

**حاول (1) ص 119:**

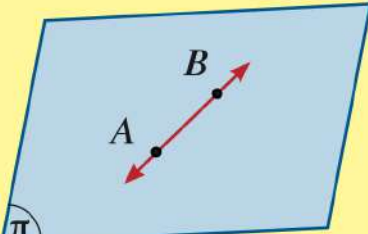
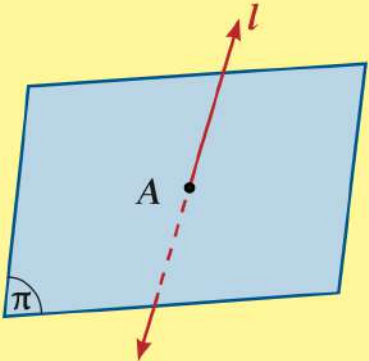
في الشكل المقابل $\overline{AC}$, $\overline{BD}$ يتقاطعان في O
أثبت أن أضلاع الرباعي $ABCD$ تقع جميعها في مستو واحد.



أوضاع المستقيمت في الفضاء

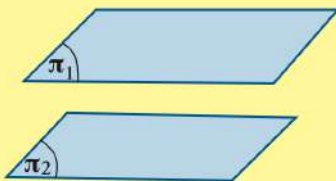
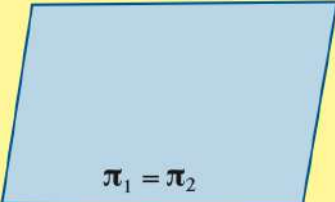
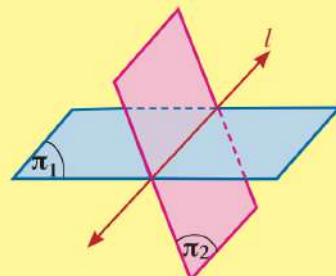
c متخالفان إذا كان لا يحويهما مستوي واحد. 	b متوازيان إذا وقع في مستوي واحد وكانا غير متقاطعين. 	a متقاطعان إذا وقع في مستوي واحد وكان بينهما نقطة واحدة مشتركة فقط. 
$\vec{l} \subset \pi, m \not\subset \pi$ $\Rightarrow \vec{l} \cap \vec{m} = \emptyset$ مستقيمان متخالفان	$\vec{l} \subset \pi, \vec{m} \subset \pi,$ $\vec{l} \cap \vec{m} = \emptyset \Rightarrow \vec{l} \parallel \vec{m}$ مستقيمان متوازيان	$\vec{l} \cap \vec{m} = \{A\}$ مستقيمان متقاطعان

أوضاع مستقيم ومستوي في الفضاء

c نقطتان مختلفتان متركتان على الأقل المستقيم يقع بكامله (بتمامه) في المستوي (المستقيم يوازي المستوي). 	b نقطة مشتركة واحدة: المستقيم يقطع المستوي. 	a صفر نقطة مشتركة: المستقيم موازي للمستوي (في هذه الحالة يكون البعد بينهما ثابت). 
$\overrightarrow{AB} \cap \pi = \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \subset \pi$ $\therefore \overrightarrow{AB} \parallel \pi$	$\vec{l} \cap \pi = \{A\}$	$\vec{l} \cap \pi = \emptyset \Rightarrow \vec{l} \parallel \pi$

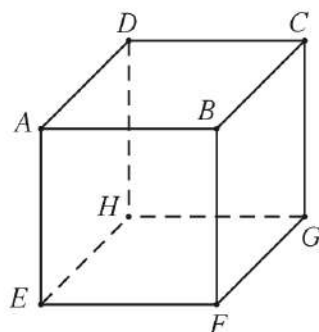


أوضاع مستويين في الفضاء

c المستويان متوازيان (لا توجد نقاط مشتركة بينهما). 	b المستويان منطبقان (يحتويان على جميع النقاط). 	a المستويان متقاطعان في مستقيم. 
$\pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset \Rightarrow \pi_1 \parallel \pi_2$	$\pi_1 = \pi_2 \Rightarrow \pi_1 \parallel \pi_2$	$\pi_1 \cap \pi_2 \neq \emptyset \Rightarrow \pi_1 \cap \pi_2 = \vec{l}$

في التمارين (1-5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

مكعب $ABCDEFGH$.



- | | |
|-----|-----|
| (a) | (b) |
| (a) | (b) |
| (a) | (b) |
| (a) | (b) |
| (a) | (b) |

(1) المستقيمان AB , HG يعينان مستويًا.

(2) النقاط B , D , H , F تعين مستويًا.

(3) النقاط A , B , G , C تعين مستويًا.

(4) المستقيمان GC , EF يعينان مستويًا.

(5) المستقيمان BC , AB يعينان مستويًا.

في التمرينين (6-7)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

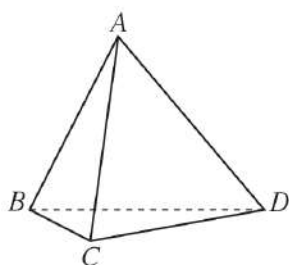
(6) النقاط B , C , D تعين:

(a) مستويًا واحدًا

(b) مستويين مختلفين

(c) عدد لا منته من المستويات المختلفة

(d) لا يمكن أن تعين مستويًا

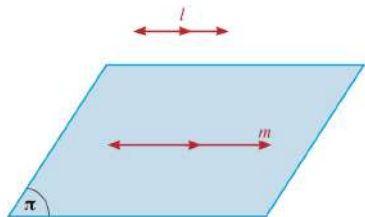


المستقيمات والمستويات المتوازية في الفضاء

بند (2 - 10)

نظرية (1)

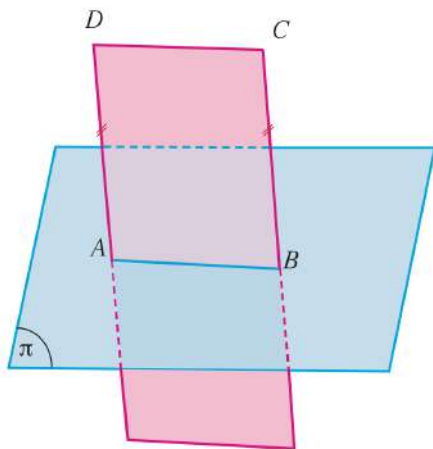
إذا وازى مستقيم خارج مستوي مستقيماً في المستوي، فإنه يوازي المستوي.



مثال (1) ص 125: في الشكل المقابل:

$$\overrightarrow{AB} \subset \pi, \overrightarrow{AD} \parallel \overrightarrow{BC}, AD = BC$$

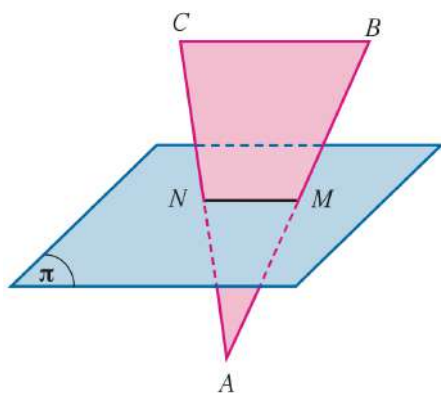
أثبت أن: $\overrightarrow{CD} \parallel \pi$



حاول (1) ص 125: في الشكل المقابل: المثلث ABC فيه، M منتصف $\overline{AB}$ ،

N منتصف $\overline{AC}$ ، M, N تنتميان إلى المستوي π .

أثبت أن $\overrightarrow{BC} \parallel \pi$

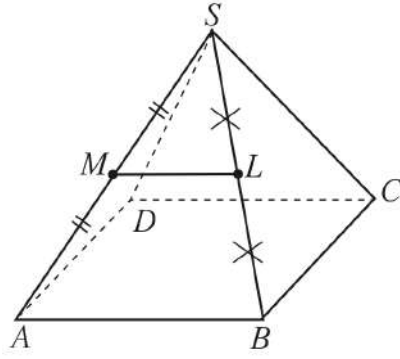


كراسة ص 51 رقم (3):

$SABCD$ هرم قاعدته $ABCD$ مربعة الشكل

M منتصف SA ، L منتصف SB

أثبت أن $ABCD$ يوازي $\overrightarrow{ML}$



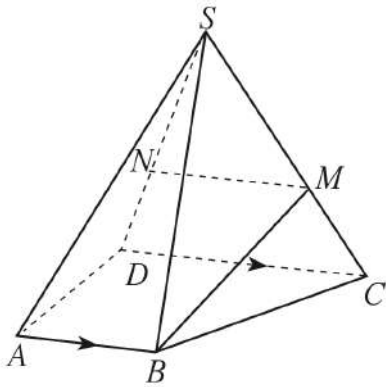
كراسة ص 51 رقم (5):

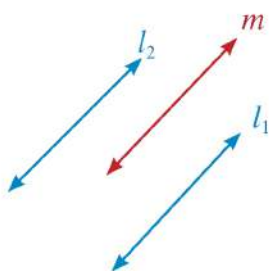
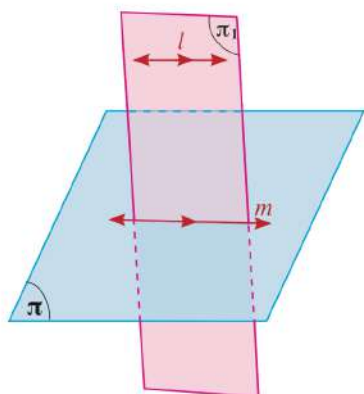
$SABCD$ هرم قاعدته شبه المنحرف $ABCD$ حيث إن $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{DC}$

$M \in \overline{SC}$ ، المستوي ABM يقطع $\overrightarrow{SD}$ في N

(1) أثبت أن: $\overrightarrow{AB}$ يوازي المستوي SDC

(2) أثبت أن: $\overrightarrow{MN} \parallel \overrightarrow{CD}$





نظرية (2)

إذا وازى مستقيم مستويًا، فكل مستوٍ مار بالمستقيم ويقطع المستوي، يقطعه في مستقيم موازٍ للمستقيم المعلوم.

$$\because \vec{l} \parallel \pi, \vec{l} \subset \pi_1, \pi_1 \cap \pi = \vec{m}$$

$$\therefore \vec{m} \parallel \vec{l}$$

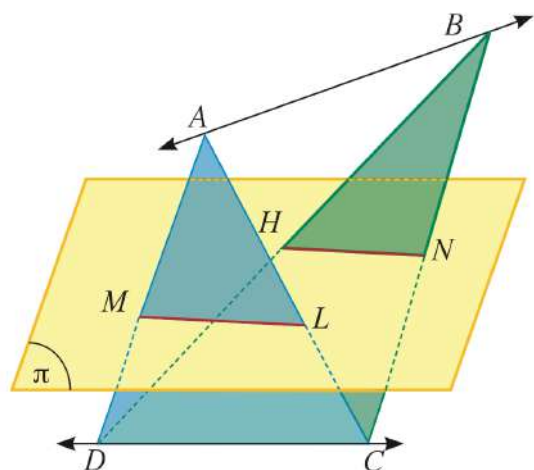
نظرية (3)

المستقيمان الموازيان لمستقيم ثالث في الفضاء متوازيان.

$$\because \vec{l}_1 \parallel \vec{m}, \vec{l}_2 \parallel \vec{m}$$

$$\therefore \vec{l}_1 \parallel \vec{l}_2$$

مثال (2) ص 126:



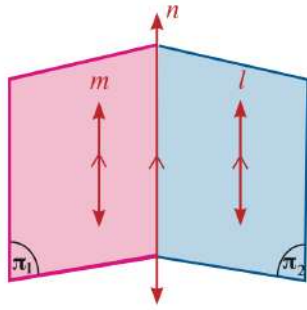
في الشكل المقابل: إذا كان $\vec{AB}, \vec{CD} \parallel \pi$ متخالفان،

$\vec{AD}$ تقطع π في M ، $\vec{AC}$ تقطع π في L .

$\vec{BD}$ تقطع π في H ، $\vec{BC}$ تقطع π في N .

أثبت أن: $\vec{LM} \parallel \vec{NH}$





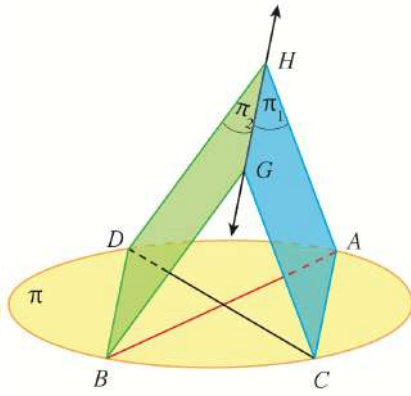
نتيجة (1)

إذا توازي مستقيمان ومَرَّ بهما مستويان متقاطعان،
فإن تقاطعهما هو مستقيم يوازي كلًّا من هذين المستقيمين.

$$(\vec{m} \parallel \vec{l}, \vec{m} \subset \pi_1, \vec{l} \subset \pi_2, \pi_1 \cap \pi_2 = \vec{n}) \Rightarrow (\vec{m} \parallel \vec{l} \parallel \vec{n})$$

مثال (3) ص 127:

في الشكل المقابل: $\overline{AB}, \overline{CD}$ قطران في مستوي الدائرة π
أثبت أن مستوي الدائرة π يوازي $\overline{GH}$. $\pi_1 \cap \pi_2 = \overline{GH}$

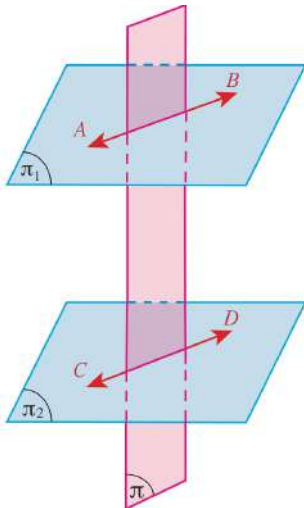
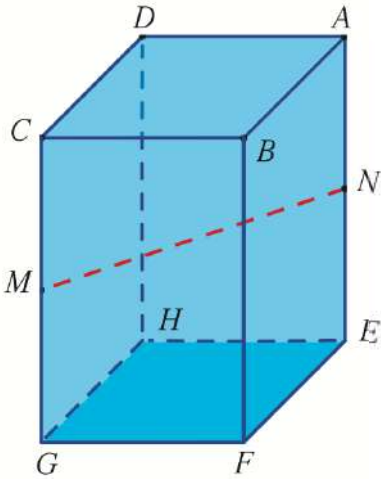


حاول (3) ص 127:

$ABCDEFGH$ شبه مكعب.

M منتصف CG ، N منتصف AE

أثبت أن $(EFGH)$ يوازي $\overrightarrow{MN}$



نظرية (4)
إذا قطع مستوي مستويين متوازيين فإن خطي تقاطعه معهما يكونان متوازيين.



مثال (4) ص 128:

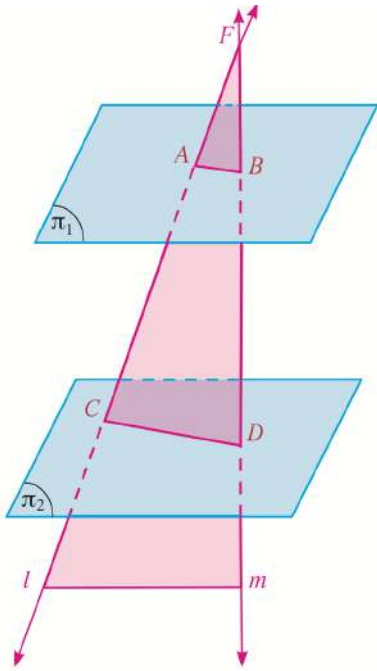
في الشكل المقابل: π_1 , π_2 مستويين متوازيين

$\vec{l}, \vec{m}$ مستقيمان متقاطعان في F

ويقطعان كلا من π_1 في A, B ، π_2 في C, D

إذا كان $FB = 5 \text{ cm}$, $CD = 9 \text{ cm}$, $AC = 6 \text{ cm}$

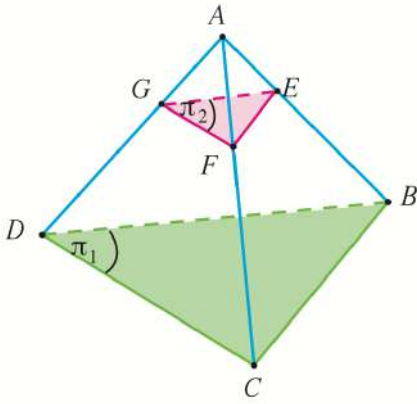
فأوجد محيط المثلث FAB



حاول (4) ص 129:

في الشكل المقابل ، هرم ثلاثي. المستويان π_1 , π_2 متوازيان.

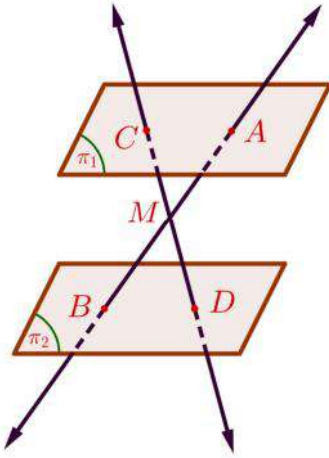
إذا كان $\frac{AE}{EB} = \frac{1}{3}$, $FG = 6 \text{ cm}$ فأوجد DC



كراسة ص 52 رقم (9):

في الشكل المقابل: π_1 , π_2 مستويين متوازيين M نقطة

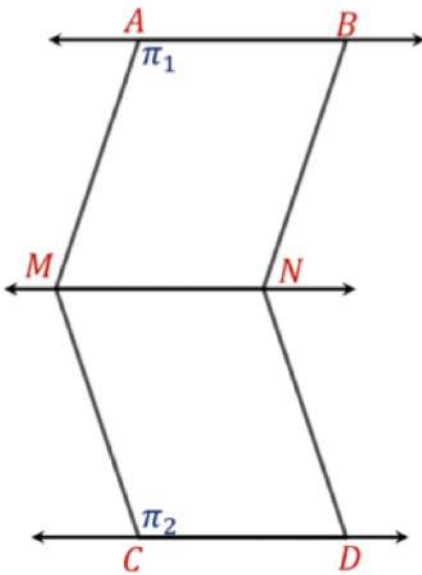
واقعة بينهما، حيث $\overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{CD} = \{M\}$ ، أثبت أن: $\frac{AM}{MB} = \frac{AC}{BD}$



كراسة ص 52 رقم (7): ليكن π_1 , π_2 مستويان متقاطعان في $\overrightarrow{MN}$

حيث $\overrightarrow{CD} \subset \pi_2$, $\overrightarrow{CD} \parallel \pi_1$ و $\overrightarrow{AB} \subset \pi_1$, $\overrightarrow{AB} \parallel \pi_2$

أثبت أن $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$



في التمارين (1-5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(a) (b)

(1) يكون المستويان متوازيين إذا اشتركا في نقطة واحدة على الأقل.

(a) (b)

(2) إذا وازى مستقيم مستويًا فإنهما لا يشتركان في أي نقطة من نقاطهما.

(a) (b)

(3) إذا وازى مستقيم l مستوي π فإن $\vec{l}$ يوازي مستقيمًا وحيدًا في π

(a) (b)

(4) إذا كان: $\vec{m} \parallel \pi$, $\vec{l} \parallel \pi$ فإن $\vec{l} \parallel \vec{m}$

(a) (b)

(5) إذا توازى مستقيمان ومرّ بهما مستويان متقاطعان فإن تقاطعهما

هو مستقيم يوازي كلّاً من هذين المستقيمين.

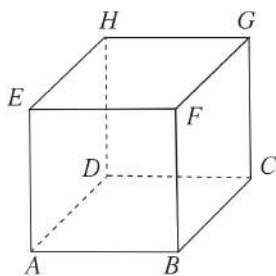
في التمارين (6-8)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

(6) إذا توازى مستويان مختلفان وقطعهما مستو ثالث فإن خطّي التقاطع:

(a) متقاطعان (b) متخالفان

(c) متوازيان (d) متعامدان

(8) في المكعب $ABCDEFGH$, $\vec{BD}$, $\vec{EG}$ هما:



(b) متقاطعان

(a) متوازيان

(d) يحويهما مستو واحد

(c) متخالفان



تعامد مستقيم مع مستو

بند (3 - 10)

نظرية (5)

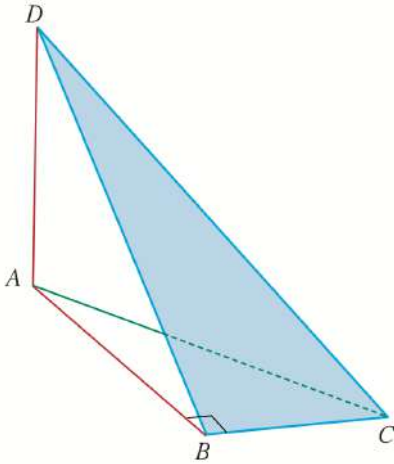
المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين يكون عمودياً على مستويهما.

نتيجة (2)

جميع المستقيمات العمودية على مستقيم معلوم من نقطة تنتمي إلى هذا المستقيم تكون محتواة في مستوٍ واحد عمودياً على المستقيم المعلوم.

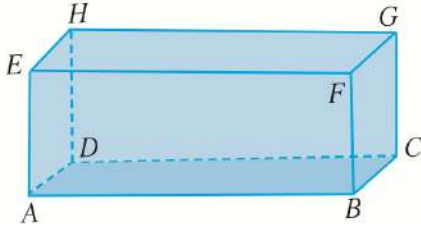
مثال (1) ص 131: في الشكل المقابل المثلث ABC قائم في $\hat{B}$

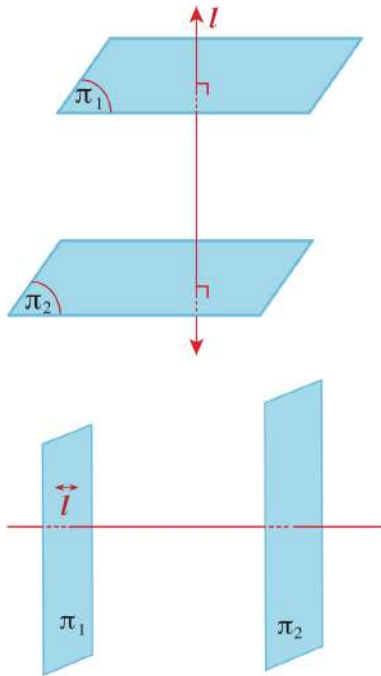
$\overrightarrow{AD} \perp (ABC)$ أثبت أن المثلث DBC قائم في $\hat{B}$



حاول (1) صد 132: في شبه المكعب المقابل

أثبت أن المثلث BEH قائم في $\hat{E}$





نظرية (6)

إذا كان مستقيم عمودياً على كلٍّ من مستويين مختلفين فإنهما يكونان متوازيين.

$$\vec{l} \perp \pi_1, \vec{l} \perp \pi_2 \Rightarrow \pi_1 \parallel \pi_2$$

نظرية (7)

إذا كان مستقيم عمودياً على أحد مستويين متوازيين فإنه يكون عمودياً على المستوي الآخر.

$$\vec{l} \perp \pi_1, \pi_1 \parallel \pi_2 \Rightarrow \vec{l} \perp \pi_2$$

نظرية (8)

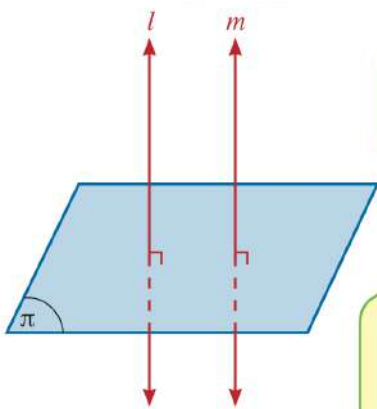
المستقيمان العموديان على مستوي متوازيان.

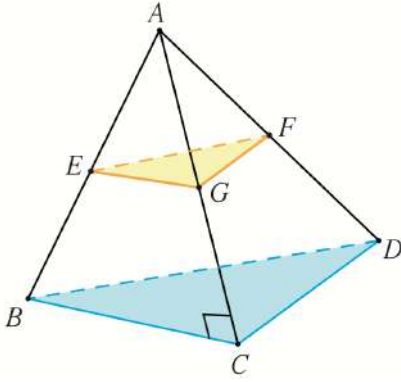
$$\vec{l} \perp \pi, \vec{m} \perp \pi \Rightarrow \vec{l} \parallel \vec{m}$$

نظرية (9)

إذا توازى مستقيمان أحدهما عمودياً على مستوي كان المستقيم الآخر عمودياً على المستوي أيضاً.

$$\vec{l} \parallel \vec{m}, \vec{l} \perp \pi \Rightarrow \vec{m} \perp \pi$$





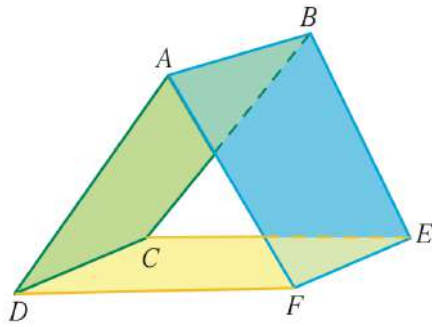
مثال (2) صد 132: في الشكل المقابل A نقطة خارج المستوى BCD

في والنقاط E, G, F منصفات $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ على الترتيب
إذا كان $\overline{AC} \perp \overline{CB}$

وكان $CD = 5 \text{ cm}$, $AC = 12 \text{ cm}$, $AD = 13 \text{ cm}$

فأثبت أن: $(EGF) \parallel (BCD)$





حاول (2) ص 133: في الشكل المقابل:

مستطيلان $ABEF, ABCD$

أثبت أن: $(AFD) \parallel (BEC)$

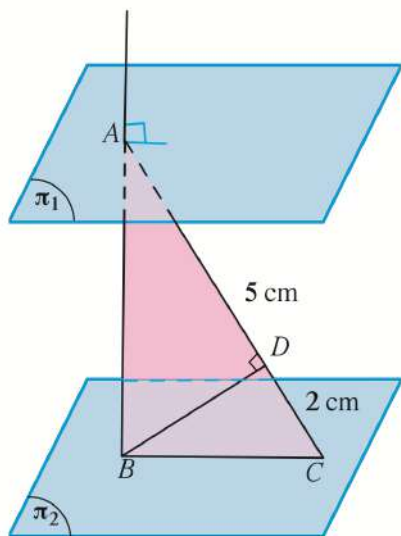


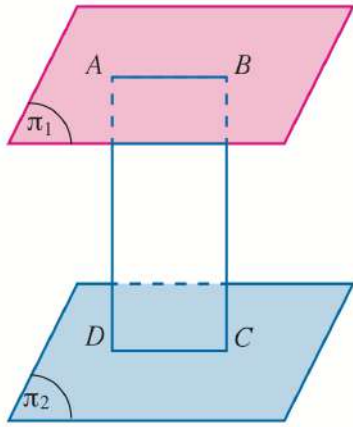
مثال (3) ص 134: في الشكل المقابل

$$\pi_1 // \pi_2, \overrightarrow{AB} // \pi_1, A \in \pi_1, \overrightarrow{BC} \subset \pi_2$$

في رسم: $\overrightarrow{BD} \perp \overrightarrow{AC}$ في المستوي ABC

إذا كان $AD = 5 \text{ cm}$, $DC = 2 \text{ cm}$ أوجد BD



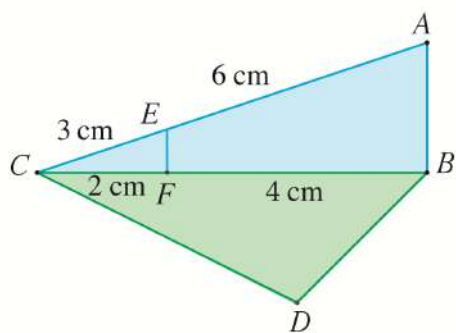


حاول (3) ص 134: في الشكل المقابل: $\pi_1 \parallel \pi_2$ ، A, B نقطتان في π_1

C, D نقطتان في π_2 حيث A, B, C, D في مستوي واحد

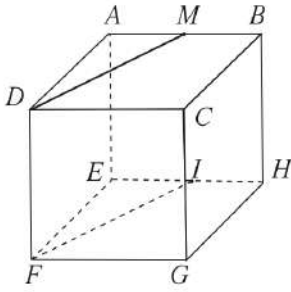
أثبت أن $\overline{AD} \perp \pi_2$ ، $\overline{BC} \perp \pi_2$ مستطيل.





مثال (4) صد 135: في الشكل المقابل إذا كان $\overline{AB} \perp (BCD)$ وكان $CE = 3 \text{ cm}$, $EA = 6 \text{ cm}$, $CF = 2 \text{ cm}$, $FB = 4 \text{ cm}$ أثبت أن: $\overline{EF} \perp \overline{DB}$





في التمارين (1-7)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

أسئلة التمرينين (1-2)، على الشكل المقابل حيث $ABCDEFHG$ مكعب، النقطة M منتصف $\overline{AB}$ ، I منتصف $\overline{EH}$.

(1) $\overrightarrow{MI} \perp (EFGH)$

(a) (b)

(2) $\overrightarrow{MD} \perp (BCGH)$

(a) (b)

(a) (b)

(3) إذا كان $ABCD$ هرم ثلاثي القاعدة جميع أحرفه متطابقة فإن: $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$

(a) (b)

(4) إذا كان $\vec{m} \subset \pi$ ، $\vec{n} \perp \pi$ فإن $\vec{m} \perp \vec{n}$

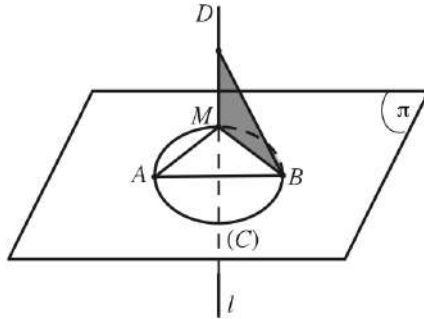
(a) (b)

(5) إذا كان المستقيمان l, m متخالفان وكان $\vec{n} \perp \vec{m}$ فإن $\vec{n} \perp l$

(a) (b)

(6) إذا كان المستقيمان l, m متخالفان وكان $\vec{n} \perp \vec{m}$ فإن $\vec{n} \perp l$ متخالفان.

في التمارين (8-11)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

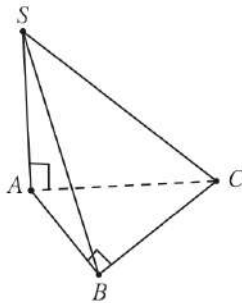


(7) في الشكل المقابل :

إذا كان $\vec{AB} \perp \vec{BD}$ ، $\vec{AB} \perp (AMB)$ فإن:

(a) $\vec{AB} \perp \vec{BD}$ (b) $\vec{AB} \perp (BMD)$

(c) $\vec{AM} \perp (BMD)$ (d) $\vec{AB} \perp \vec{BM}$



(8) في الشكل المقابل إذا كان $m(\widehat{B}) = 90^\circ$ ، $\vec{SA} \perp (ABC)$ فإن:

(a) المثلث SAB قائم في $\widehat{B}$

(b) $\vec{CB} \perp (SAB)$

(c) المثلث SAB متطابق الضلعين.

(d) المثلث SCB قائم في $\widehat{C}$

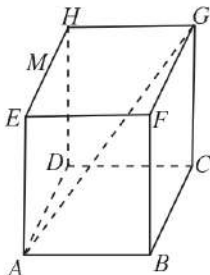
(9) يمثل الشكل المقابل مكعباً، إذا كان طول حرفه 3 cm فإن طول قطره $\overline{AG}$ يساوي:

(a) $\sqrt{3}$ cm

(b) $3\sqrt{3}$ cm

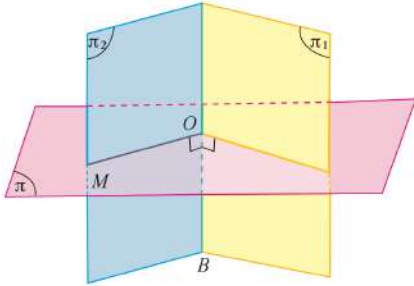
(c) 9 cm

(d) 18 cm



الزاوية الزوجية

بند (4 - 10)



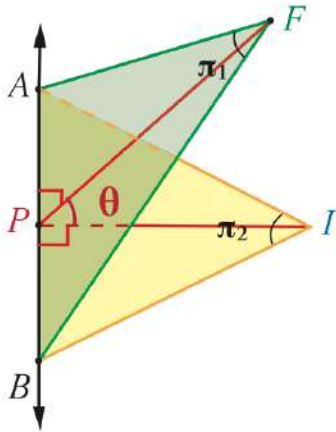
تعريف: الزاوية المستوية لزاوية زوجية

هي الزاوية التي تنشأ من تقاطع الزاوية الزوجية مع مستوٍ عمودي على حافتها.

تدريب (1)

في كل من الأشكال التالية عيّن الزاوية المستوية للزاوية الزوجية بين المستويين π_1, π_2 .

1



$$\overline{FP} \perp \overline{AB} , \quad \overline{IP} \perp \overline{AB}$$

حافة الزاوية الزوجية

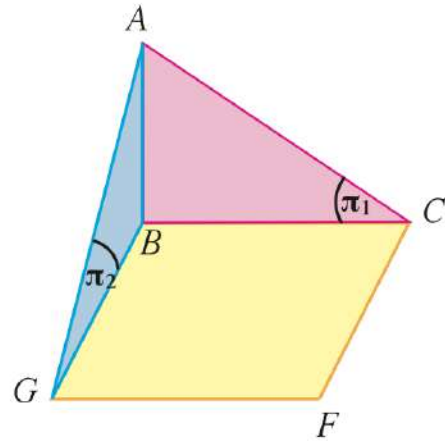
$$\dots \subset \pi_1 , \quad \dots \perp \overline{AB}$$

وكذلك $\dots \subset \pi_2 , \quad \dots \perp \overline{AB}$

$\therefore$ هي الزاوية المستوية

للزاوية الزوجية بين π_1, π_2

2



$$\overline{AB} \perp (\overline{CBGF})$$

حافة الزاوية الزوجية

$$\overline{BC} \subset \pi_1 , \quad \dots \perp \overline{AB}$$

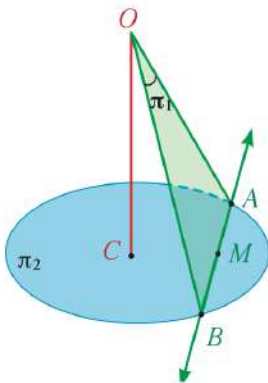
وكذلك $\dots \subset \pi_2 , \quad \dots \perp \overline{AB}$

$\therefore$ هي الزاوية المستوية

للزاوية الزوجية بين π_1, π_2



3



$\overline{OC} \perp \pi_2$ ، $\overline{AB}$ منتصف M

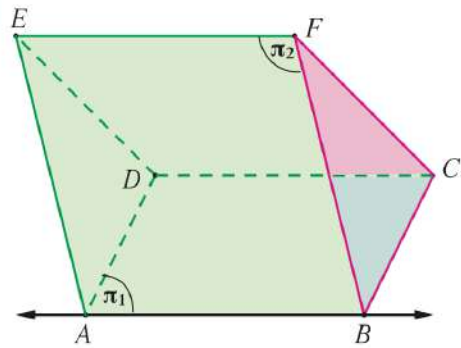
.....

.....

.....

.....

4



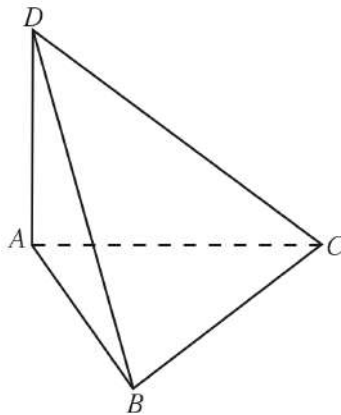
$\overrightarrow{FC} \perp (ABCD)$ ، مستطيل $ABCD$

.....

.....

.....

.....

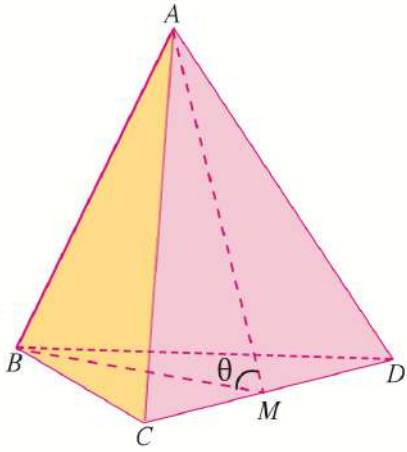


كراسة صد 57 رقم (2): ABC مثلث متطابق الأضلاع

$\overrightarrow{AD}$ متعامد مع المستوي ABC

مع أوجد قياس الزاوية الزوجية $(DAB, \overrightarrow{AD}, DAC)$





مثال (1) ص 139: يبين الشكل المقابل هرمًا ثلاثي القاعدة أوجهه مثلثات

متطابقة الأضلاع طول حرفه 8 cm ، M منتصف $\overline{DC}$

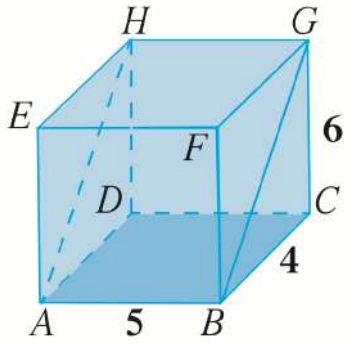
(1) حدد الزاوية المستوية بين المستويين ADC , BDC

(2) أوجد قياس الزاوية المستوية للزاوية الزوجية $\overleftrightarrow{DC}$



حاول (1) ص 140: في شبه المكعب المقابل ،

أثبت أن الزاوية GBC هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية للمستويين $(ABGH)$ ، $(ABCD)$ ثم أوجد قياسها.



مثال (2) ص 140:

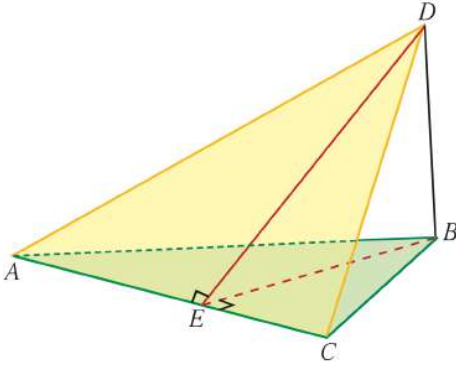
في الشكل المقابل D نقطة خارج مستوى المثلث ABC

$$DB = 5 \text{ cm} , \quad AB = 10 \text{ cm} , \quad m(\hat{BAC}) = \frac{\pi}{6}$$

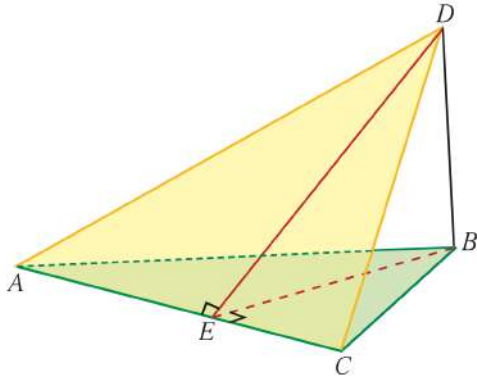
$$\overline{DB} \perp (ABC) , \quad \overline{BE} \perp \overline{AC} , \quad \overline{DE} \perp \overline{AC}$$

أوجد: (1) BE , DE

(2) قياس الزاوية الزوجية بين المستويين BAC , DAC



حاول (2) ص 141:



في الشكل المقابل D نقطة خارج مستوى المثلث ABC

$$DB = 5 \text{ cm} , AB = 10 \text{ cm} , m(\hat{BAC}) = 45^\circ$$

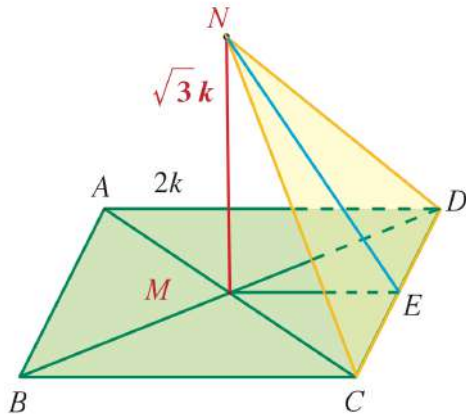
$$\overline{DB} \perp (ABC) , \overline{BE} \perp \overline{AC} , \overline{DE} \perp \overline{AC}$$

أوجد: (1) BE

(2) قياس الزاوية الزوجية بين المستويين BAC , DAC



مثال (3) ص 142:



$ABCD$ مستطيل تقاطع قطراه في M

وفيه $AD = 2k$ أقيم $\overline{NM}$ عموداً على $(ABCD)$

حيث N خارج مستواه بحيث $MN = \sqrt{3}k$

أوجد قياس الزاوية الزوجية بين المستويين $ABCD$, NCD



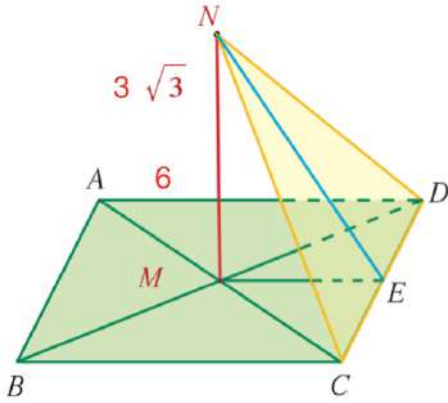
امتحان سابق: (2018 – 2019)

$ABCD$ مستطيل تقاطع قطراه في M

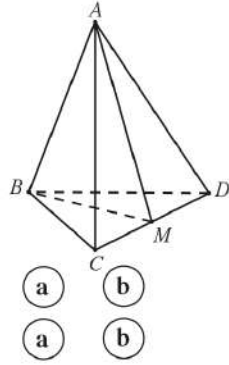
وفيه $AD = 6 \text{ cm}$ أقيم $\overline{NM}$ عموداً على $(ABCD)$

حيث N خارج مستواه بحيث $MN = 3\sqrt{3}$ ، E منتصف $\overline{CD}$

أوجد قياس الزاوية الزوجية بين المستويين $ABCD$ ، NCD



المجموعة B تمارين موضوعية



في التمارين (1-4)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

أسئلة التمرينين (1-2)، على الشكل المقابل.

إذا كان $ABCD$ هرم جميع حروفه متساوية الطول، M منتصف CD

فإن:

(1) $\overline{CD}$ عمودي على $\overline{AB}$

(2) الزاوية المستوية للزاوية الزوجية $(ADC, \overrightarrow{DC}, BDC)$ هي $\widehat{AMD}$

أسئلة التمرينين (3-4)، على الشكل المقابل.

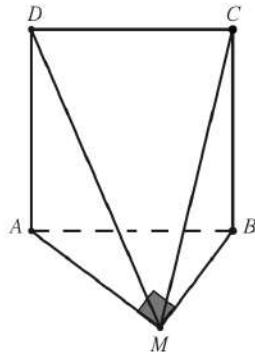
المثلث AMB قائم الزاوية في M ، $\overline{AD}$ متعامد مع المستوي AMB

إذا أخذنا النقطة C بحيث يكون $ABCD$ مربعًا.

فإن:

(3) $\overline{BM}$ متعامد مع (MAD)

(4) $\overline{CB}$ متعامد مع (AMB)



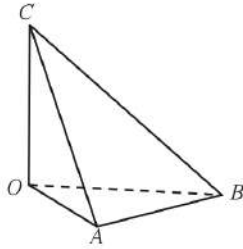
أسئلة التمرينين (8-9) على الشكل المقابل.

إذا كان OAB مثلث فيه:

$$m(\widehat{AOB}) = 60^\circ, OB = 2x, OA = x$$

$\overline{OC}$ متعامد مع المستوي OAB

(8) طول $\overline{AB}$ يساوي:



(a) x

(b) $x\sqrt{2}$

(c) $x\sqrt{3}$

(d) $\frac{x}{2}$

(9) قياس الزاوية الزوجية $(AOC, \overrightarrow{OC}, BOC)$ هو:

(a) 30°

(b) 45°

(c) 60°

(d) 90°

(10) في الشكل المقابل، المثلث DBC قائم الزاوية في B ،

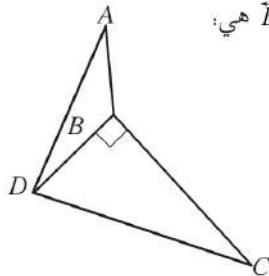
فإذا كان $\overline{AB}$ عمودي على (DBC) فإن الزاوية المستوية للزاوية الزوجية $\overline{BD}$ هي:

(a) $\widehat{DBC}$

(b) $\widehat{ABC}$

(c) $\widehat{ABD}$

(d) $\widehat{ADC}$





الوحدة الحادية عشر : الجبر المنقطع

بند (11-1)

مبدأ العد والتباديل والتوافق

مثال + حاول (1) ص 152:

لتكن: $A = \{1, 2, 4, 5, 6\}$ يراد تكوين أعداد ذات ثلاثة منازل باستخدام عناصر A

أوجد: (1) عدد الأعداد الممكن تكوينها (2) عدد الأعداد مختلفة الأرقام الممكن تكوينها.

(3) عدد الأعداد الفردية الممكن تكوينها. (4) عدد الأعداد الفردية مختلفة الأرقام الممكن تكوينها.

(5) عدد الأعداد الزوجية الممكن تكوينها. (6) عدد الأعداد الزوجية مختلفة الأرقام الممكن تكوينها.



مثال + حاول (2) ص 153:

- لتكن: $B = \{0, 3, 4, 5, 7, 9\}$ تم تكوين أعداد ذات أربعة منازل باستخدام عناصر B
- أوجد: (1) عدد الأعداد الممكن تكوينها (2) عدد الأعداد مختلفة الأرقام الممكن تكوينها
- (3) عدد الأعداد التي تقبل القسمة على 5 الممكن تكوينها
- (4) عدد الأعداد التي تقبل القسمة على 10 الممكن تكوينها
- (5) عدد الأعداد مختلفة الأرقام والمحصورة بين 7000 ، 4000 الممكن تكوينها .
- (6) عدد الأعداد مختلفة الأرقام والأكبر من 5000 الممكن تكوينها .



التباديل

Law of Permutations

قانون التباديل

$${}_nP_r = n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)$$

$${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$n, r \in \mathbb{Z}^+, n \geq r \quad \text{حيث:}$$

مثال (4) ص 156:

اشتركت 7 يخوت في سباق. بكم طريقة مختلفة يمكن توقع وصول اليخوت الثلاثة الأوائل بالترتيب؟

حاول (4) ص 156:

اشتركت 10 يخوت في سباق. بكم طريقة مختلفة يمكن توقع وصول اليخوت الثلاثة الأوائل بالترتيب؟



مثال (5) صد 156: حل المعادلات التالية:

a) ${}_nP_5 = 6 \times {}_nP_4, n \geq 5$

b) ${}_6P_r = 4 \times {}_6P_{r-1}$

c) $\frac{{}_2nP_{n+2}}{{}_2nP_{n-1}} = 60$



حاول (5) صد 157: حل المعادلات التالية:

a) ${}_nP_7 = 12 \times {}_nP_5$

b) ${}_8P_r = 4 \times {}_8P_{r-1}$



كراسة ص 67 رقم (8): حل المعادلات التالية:

$$a) {}_nP_4 = 5 \times {}_nP_3, n \geq 4 \quad b) {}_5P_r = 12 \times {}_5P_{r-2} \quad b) \frac{{}_np_{n-2}}{{}_np_{n-4}} = \frac{n^2}{12}$$



التوافيق

Law of Combinations

قانون التوافيق

$${}_nC_r = \frac{nPr}{r!}$$

$${}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

حيث: $n, r \in \mathbb{Z}^+, n \geq r$

خواص أخرى للتوافيق

$${}_nC_m = {}_nC_{n-m}$$

$${}_nC_m = {}_{n-1}C_m + {}_{n-1}C_{m-1}$$

مثال+حاول (6) ص 158:

في مكتبة المدرسة 15 كتاباً مختلفاً من مجموعة روايات التاريخ الإسلامي

(1) بكم طريقة يمكنك اختيار 4 كتب منها للمطالعة؟

(2) بكم طريقة يمكنك اختيار 7 كتب منها للمطالعة؟

(3) بكم طريقة يمكنك اختيار 8 كتب منها للمطالعة؟



مثال (10) صد 160: أوجد قيمة n في كل مما يلي:

a) ${}_nC_3 = {}nC_4$

b) $\frac{{}_nC_7}{{}_{(n-1)}C_6} = \frac{8}{7}$

حاول (10) صد 161: أوجد قيمة n في كل مما يلي:

a) ${}_nC_2 = 105$

b) ${}_nC_4 = {}nC_5$



كراسة ص 69 رقم (17): حل المعادلات التالية:

a) ${}_nC_3 = {}nC_2 = 3n(n-1)$

b) ${}_nC_4 = {}nC_{n-2}$

b) ${}_2nC_4 = \frac{1}{2} {}_2nC_5$



في التمارين (1-5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

- | | |
|-----|-----|
| (a) | (b) |
| (a) | (b) |
| (a) | (b) |
| (a) | (b) |
| (a) | (b) |

(1) قيمة المقدار $10!$ هي 3 628 800

(2) قيمة المقدار $4! \times 5!$ هي 360

(3) عدد طرق جلوس 4 أشخاص على 4 مقاعد في صفّ هو $4!$

(4) قيمة المقدار ${}^5C_4 \times 3$ هي 15

(5) $(n - r)! = n! - r!$

في التمارين (6-15)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

(6) قيمة المقدار $\frac{10!}{7!3!}$ هي:

- | | | | |
|---------------------|---------------------|---------|-------|
| (a) $\frac{10}{21}$ | (b) $\frac{1}{120}$ | (c) 120 | (d) 1 |
|---------------------|---------------------|---------|-------|

(7) قيمة المقدار ${}_{10}C_6 \times {}_6P_4$ هي:

- | | | | |
|------------|-----------|---------|---------|
| (a) 75 600 | (b) 7 560 | (c) 2.5 | (d) 210 |
|------------|-----------|---------|---------|

(8) قيمة المقدار $\frac{{}_7C_4}{{}_9C_4} \times {}_9C_2$ هي:

- | | | | |
|--------|-----------|--------|---------|
| (a) 18 | (b) 5.184 | (c) 10 | (d) 735 |
|--------|-----------|--------|---------|

(9) بكم طريقة مختلفة يمكن اختيار 5 لاعبين لفريق السلة من بين 12 لاعبًا إذا كان ترتيب المراكز في الفريق مهمًا؟

- | | | | |
|------------|-------------|---------|----------------|
| (a) 95 040 | (b) 475 200 | (c) 392 | (d) 11 404 800 |
|------------|-------------|---------|----------------|

(10) بكم طريقة مختلفة يمكن اختيار 3 أعلام من مجموعة من 7 أعلام مختلفة؟

- | | | | |
|---------|--------|---------|--------|
| (a) 210 | (b) 35 | (c) 840 | (d) 24 |
|---------|--------|---------|--------|

(14) إذا كان: ${}_nP_3 = 60$ فإن n تساوي

- | | | | |
|-------|-------|-------|-------|
| (a) 6 | (b) 5 | (c) 4 | (d) 2 |
|-------|-------|-------|-------|

(15) مجموعة حلّ المعادلة: ${}_6C_r = 15$ هي:

- | | | | |
|---------|---------|------------|---------|
| (a) {2} | (b) {4} | (c) {2, 4} | (d) {3} |
|---------|---------|------------|---------|



نظرية ذات الحدين

بند (11 - 2)

نظرية ذات الحدين

لأي عدد صحيح موجب n ,

$$(x + y)^n = {}_nC_0 x^n + {}_nC_1 x^{n-1} y + {}_nC_2 x^{n-2} y^2 + \dots + {}_nC_r x^{n-r} y^r + \dots + {}_nC_{n-1} x y^{n-1} + {}_nC_n y^n$$

مثال (1) ص 164: استخدم نظرية ذات الحدين لفك كل من:

$$a) (x + y)^5 \quad b) (x - 2y)^3 \quad c) (x^2 + 3y)^4 \quad d) (2x - 3y^2)^5$$



الحد العام

$$T_{r+1} = {}^nC_r \cdot x^{n-r} \cdot y^r$$

مثال (2) ص 165: في مفكوك: $(2x - 3y^2)^{10}$ أوجد الحد السابع.

حاول (2) ص 165: في مفكوك: $(3x^2 - y)^{15}$ أوجد معامل T_{12} .



مثال (3) صد 165: أوجد الحد الذي يحتوي على $x^3 y^4$ في مفكوك $(2x + 3y)^7$

حاول (3) صد 166: أوجد الحد الذي يحتوي على $x^2 y^3$ في مفكوك $(3x - y)^5$

كراسة صد 70 رقم (10): أوجد الحد الذي يحتوي على $x^2 y^3$ في مفكوك $(3x - 7y)^5$



في التمارين (5-1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

- (1) مفكوك $(c+1)^5$ هو: $c^5 + 5c^4 + 10c^3 + 10c^2 + 5c + 1$
- (2) إذا كان الحد $126c^4d^5$ أحد حدود مفكوك $(c+d)^n$ ، فإن قيمة n هي 5
- (3) إذا كان معامل الحد الثاني في مفكوك $(r+x)^n$ هو 7 فإن قيمة n هي 7
- (4) الحد الثاني من $(x+3)^9$ هو $54x^8$
- (5) معامل الحد السابع في مفكوك $(x-y)^7$ هو عدد سالب.

- (a) (b)
- (a) (b)
- (a) (b)
- (a) (b)
- (a) (b)

في التمارين (11-6)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة:

(6) مفكوك $(a-b)^3$ هو:

- (a) $a^3 + a^2b + ab^2 + b^3$
- (c) $a^3 - a^2b + ab^2 - b^3$

- (b) $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- (d) $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

(7) الحد الثالث من مفكوك $(a-b)^7$ هو:

- (a) $-21a^5b^2$
- (c) $7a^6b$

- (b) $-7a^6b$
- (d) $21a^5b^2$

(8) في مفكوك $(2a-3b)^6$ الحد الذي معاملته 2 160 هو:

- (a) الحد الثاني
- (c) الحد الرابع

- (b) الحد الثالث
- (d) الحد الخامس

(9) معامل الحد الثالث في مفكوك $(3c-4b)^5$ هو:

- (a) 5 170
- (c) 4 320

- (b) 3 312
- (d) 2 316

(10) في مفكوك $(x+y)^9$ تكون رتبة الحد: $126x^5y^4$ هي:

- (a) الرابعة (b) الخامسة (c) السادسة (d) التاسعة

(11) في مفكوك $(3x+2y)^8$ الحد الذي يحوي x^3y^5 هو:

- (a) T_3 (b) T_6 (c) T_5 (d) T_8



بند (3- 11)

الاحتمال

حاول (1) ص 170:

في أحد المخيمات الصيفية يشارك الطالب في مجموعة من الأنشطة وهي: كرة القدم، كرة السلة، كرة المضرب، الكرة الطائرة، السباحة وركوب الدراجات.

a اكتب وحدد نوع كل من الأحداث التالية:

- (1) A: المشاركة في كرة المضرب فقط.
- (2) B: المشاركة في الأنشطة التي تستخدم فيها كرة كبيرة.
- (3) C: المشاركة في الأنشطة التي لا تستخدم فيها كرة.

b (1) يبين فيما إذا كان الحدثان B, C متتامان أم لا.

(2) أعط مثالاً عن حدثين متنافيين.

الاحتمال

$$P(E) = \frac{\text{عدد نواتج الحدث } E}{\text{عدد نواتج فضاء العينة } S} = \frac{n(E)}{n(S)}$$

Properties of the Probability of an Event

خواص الاحتمال لحدث ما

E حدث في فضاء عينة S حيث S منته وغير خالٍ

a $0 \leq P(E) \leq 1$

b إذا كان E حدثاً مستحيلاً، فإن $P(E) = 0$

c إذا كان E حدثاً مؤكداً، فإن $P(E) = 1$

d مجموع احتمالات كل الأحداث البسيطة في فضاء العينة = 1



مثال (2) ص 171:

وسيلة النقل	الشعبة A	الشعبة B	المجموع
الحافلة المدرسية	16	15	31
مع الأهل	6	8	14
سيارة نقل عام	2	5	7
المجموع	24	28	52

يبيّن الجدول المقابل وسيلة النقل التي يستخدمها طلاب الصف الحادي عشر بشعبتيه للمجيء إلى المدرسة.

اختير طالب عشوائيًا من بين طلاب شعبتي الصف الحادي عشر.

١- ما احتمال أن يكون هذا الطالب من الذين يستقلون الحافلة المدرسية للمجيء إلى المدرسة؟

٢- ما احتمال أن يكون هذا الطالب من الذين يقلونهم أهلهم إلى المدرسة؟

٣- ما احتمال أن يكون هذا الطالب من الشعبة B؟



معلومة:

$$P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B)$$

$$P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cap B) = 0$$

 $\iff$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

 $\iff$

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

 $\iff$ A, B حدثان فإن A, B حدثان متنافيان A, B حدثان مستقلان $\overline{A}$ هو الحدث المتمم للحدث A **مثال (6) ص 174:**

رمي حجر نرد منتظم . ما احتمال الحصول على أحد مضاعفات العدد 3 أو عدد زوجي؟

حاول (6) ص 174: رمي حجر نرد منتظم . ما احتمال الحصول على عدد زوجي أو عدد أولي؟

كراسة ص 72 رقم (5): يحتوي كيس على 4 كرات زرقاء اللون وكرتين حمراء اللون. أخذت كرتان معا

من دون النظر إلى داخل الكيس. أوجد احتمال كل حدث مما يلي:

- (1) الكرتان زرقاوان (2) كرة زرقاء وكرة حمراء (3) الكرتان من نفس اللون

كراسة ص 73 رقم (7): من إذا كان الحدثان r, t متنافيان. حيث $P(t) = \frac{5}{8}$, $P(r) = \frac{1}{8}$

أوجد $P(t \cup r)$

كراسة ص 73 رقم (8): من إذا كان الحدثان n, m مستقلا. حيث $P(m) = 0.6$, $P(n) = 0.9$

أوجد $P(m \cap n)$



Binomial Probability

احتمال ذات الحدين

إقامة تجربة n مَرَّةً وتسجيل نتائجها علمًا أن هناك فقط لكل تجربة نتيجتين H أو T
إذا كان $P(H) = m$ ، الحدث E تحقق فقط k مَرَّةً، فالتالي:

$$\begin{aligned} P(E) &= {}_nC_k \cdot P(H)^k \cdot P(T)^{n-k} \\ &= {}_nC_k \cdot m^k (1 - m)^{n-k} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot m^k (1 - m)^{n-k} \end{aligned}$$

احتمال ذات الحدين:

$$P(E) = {}_nC_k (m)^k (1 - m)^{n-k}$$

يستخدم احتمال ذات الحدين:

■ في حالة تكرار حدث عدة مرات.

■ إذا كان للحدث ناتجان فقط:

ربح - خسارة، نجاح - فشل، كتابة - صورة، ...

مثال (7) ص 175: خلال شهر التسوق يقدم أحد المحلات العرض التالي: عند شراء كل صنف تحصل على بطاقة. تفوز 40% من البطاقات بجوائز ويتم اختيار هذه البطاقات الرابحة بشكل عشوائي. مع راشد ثلاث بطاقات. ما احتمال أن يفوز راشد بجائزتين؟

حاول (7) ص 175: خلال شهر التسوق يقدم أحد المحلات العرض التالي: عند شراء كل صنف تحصل على بطاقة. تفوز 40% من البطاقات بجوائز ويتم اختيار هذه البطاقات الرابحة بشكل عشوائي. مع راشد ثلاث بطاقات. ما احتمال أن يفوز راشد بجائزة واحدة فقط؟



مثال (8) ص 175: في إحدى الآلات الحاسبة 4 بطاريات. احتمال أن تخدم كل بطارية مدة عام كامل يساوي 90% . ما احتمال أن تخدم كل من البطاريات الأربع مدة عام؟

حاول (8) ص 175: في إحدى الآلات الحاسبة 4 بطاريات. احتمال أن تخدم كل بطارية مدة عام كامل يساوي 90% . ما احتمال أن تخدم 3 بطاريات فقط مدة عام؟



كراسة ص 73 رقم (11): في إحدى المدن . وافق 40% من السكان على مرور القطار السريع في الغابة قرب مدينتهم. احتير 10 أشخاص عشوائياً من سكان المدينة، ما احتمال أن يكون 4 منهم قد وافقوا على مرور القطار السريع ؟

كراسة ص 73 رقم (12): يستخدم حوالي 11% من الطلاب في أحد المدارس اليد اليسرى للكتابة. يوجد في أحد الصفوف 30 طالباً، فما احتمال أن يكون 4 طلاب من هذا الصف يستخدمون اليد اليسرى للكتابة.



في التمارين (1-4)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) إن اختيار لون السيارة عشوائياً، اختيار الدواليب عشوائياً هما حدثان مستقلان. (a) (b)

(2) الحدثان m, n مستقلان، $P(m) = \frac{12}{17}$ ، $P(n) = \frac{3}{8}$ ، إذاً $P(m \cap n) = \frac{9}{17}$ (a) (b)

(3) عند رمي حجر نرد، فإن احتمال ظهور العدد 4 أو ظهور عدد زوجي يساوي $\frac{1}{2}$ (a) (b)

(4) في اختبار صح - خطأ، أجبت عن 5 أسئلة عشوائياً. احتمال أن تكون 3 من إجاباتك صحيحة هو $\frac{5}{16}$ (a) (b)

في التمارين (5-11)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

(5) الحدثان m, n مستقلان، $P(m) = \frac{1}{3}$ ، $P(n) = \frac{9}{10}$ ، إذاً $P(m \cap n)$ تساوي: (a) $\frac{1}{3}$ (b) $\frac{25}{30}$

(c) $\frac{3}{10}$ (d) $\frac{11}{30}$

(6) الحدثان r, t متنافيان $P(t) = \frac{3}{5}$ ، $P(r) = \frac{1}{3}$ ، إذاً $P(t \cup r)$ تساوي: (a) $\frac{1}{5}$ (b) $\frac{14}{15}$

(c) $\frac{4}{15}$ (d) 0

(7) الحدثان r, t متنافيان $P(t) = \frac{1}{7}$ ، $P(r) = 60\%$ ، إذاً $P(t \cup r)$ تساوي: (a) 28% (b) 42%

(c) $\frac{16}{35}$ (d) $\frac{26}{35}$

(8) عند رمي حجر نرد فإن احتمال ظهور عدد زوجي أو عدد أولي يساوي: (a) $\frac{2}{3}$ (b) $\frac{5}{6}$

(c) $\frac{1}{2}$ (d) 1

(9) يحتوي كيس على 5 كرات من اللون الأزرق، 3 كرات من اللون الأحمر. أخذت عشوائياً كرتان معاً من الكيس. احتمال الحدث: «أن تكون كرة حمراء والأخرى كرة زرقاء» هو: (a) $\frac{1}{14}$ (b) $\frac{28}{15}$

(c) $\frac{2}{7}$ (d) $\frac{15}{28}$

