

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

هيكل

مادة

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

الرياضيات

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

الصف الثاني عشر متقدم

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

الفصل الدراسي الثالث

2024/2023

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

اسم الطالب :

المدرسة :

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

مع تمنياتي لكم بالنجاح والتفوق

إعداد : محمد عمر الخطيب

ملاحظة: في الامتحان الاسئلة من 1 الى 15 هي اسئلة اختيار من متعدد ومن 15 الى 20 هي اسئلة كتابية

اسئلة الاختيار من متعدد (الدوائر) من 1 الى 15

تمارين 1 - 18 صفحة 414 من الكتاب

احد هذه الاسئلة يكون السؤال الأول

السؤال الأول

ملاحظة: ممكن في بعض الاسئلة تكون الدوال لها تمثيل بياني وغير ذلك يفضل رسم تقريبي للدوال

(1) اوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين $y = x^3$, $y = x^2 - 1$ على الفترة $1 \leq x \leq 3$

لا بد انه لا يوجد تقاطع بين الدالتين في الفترة المعطى.
* عوض اى عدد في الفترة لتحديد الدالة الأعلى

$$A = \int_1^3 (x^3 - (x^2 - 1)) dx$$
$$= \frac{40}{3}$$

(2) اوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين $y = \cos x$, $y = x^2 + 2$ على الفترة $0 \leq x \leq 2$

$$A = \int_0^2 (x^2 + 2 - \cos x) dx$$
$$= \frac{20}{3} - \sin 2$$
$$= 5.76$$

(3) اوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين $y = e^x$, $y = x - 1$ على الفترة $-2 \leq x \leq 0$

$$A = \int_{-2}^0 (e^x - (x - 1)) dx$$
$$= 5 - e^{-2}$$
$$= 4.86$$

(4) اوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين $y = e^{-x}$, $y = x^2$ على الفترة $1 \leq x \leq 4$

$$A = \int_1^4 (x^2 - e^{-x}) dx$$
$$= 21 + e^{-4} - e^{-1}$$
$$= 20.65$$

(5) ارسم و اوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين $y = x^2 - 1$, $y = 7 - x^2$

$$A = \int_{-2}^2 (7 - x^2) - (x^2 - 1) dx$$

$$= \frac{64}{3}$$

او

$$A = 2 \int_0^2 (7 - x^2) - (x^2 - 1) dx$$

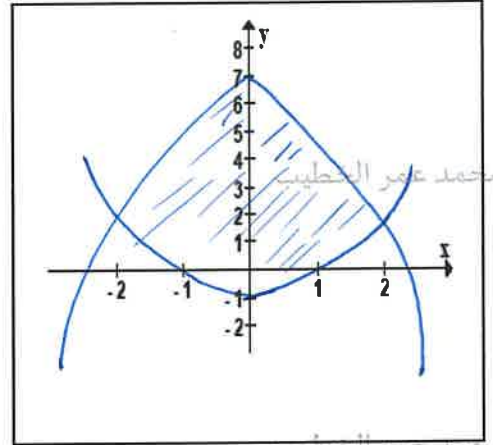
نقاط التقاطع

$$x^2 - 1 = 7 - x^2$$

$$2x^2 = 8$$

$$x^2 = 4$$

$$x = \pm 2$$



(6) ارسم و اوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين $y = x^2 - 1$, $y = \frac{1}{2}x^2$

$$A = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \frac{1}{2}x^2 - (x^2 - 1) dx$$

$$= \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

نقاط التقاطع

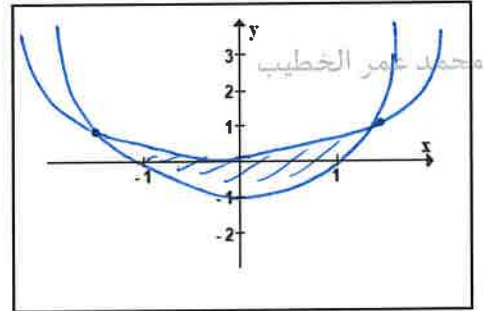
$$x^2 - 1 = \frac{1}{2}x^2$$

$$x^2 - \frac{1}{2}x^2 = 1$$

$$\frac{1}{2}x^2 = 1$$

$$x^2 = 2$$

$$x = \pm \sqrt{2}$$



(7) اوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين $y = x^3$, $y = 3x + 2$

$$A = \int_{-1}^2 3x + 2 - x^3 dx$$

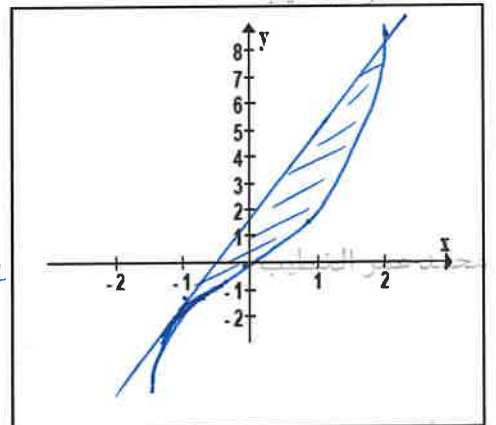
$$= \frac{27}{4}$$

$$x^3 = 3x + 2$$

$$x^3 - 3x - 2 = 0$$

من الآلة

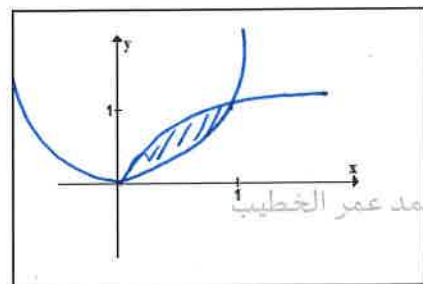
$$x = -1, x = 2$$



$$A = \int_0^1 \sqrt{x} - x^2 dx$$

$$= \frac{1}{3}$$

محمد عمر الخطيب



$$x^2 = \sqrt{x}$$

$$x^4 = x$$

$$x^4 - x = 0$$

$$x(x^3 - 1) = 0$$

$$x = 0, x = 1$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

(9) أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين $y = 4xe^{-x^2}$, $y = |x|$

$$A = \int_0^{\sqrt{\ln 4}} 4xe^{-x^2} - |x| dx$$

محمد عمر الخطيب

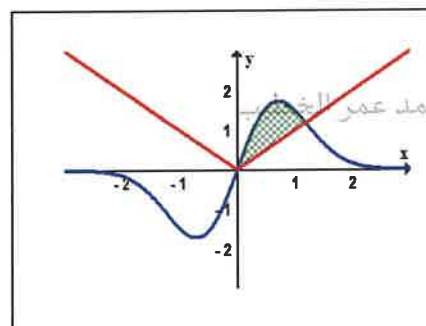
$$= \int_0^{\sqrt{\ln 4}} 4xe^{-x^2} - x dx$$

محمد عمر الخطيب

$$= \frac{3 - \ln 4}{2}$$

$$= \frac{3}{2} - \ln 2$$

محمد عمر الخطيب



نظام التقاطع

$$4xe^{-x^2} = |x|$$

عندما $x > 0$ فقط

$$4xe^{-x^2} = x$$

$$4xe^{-x^2} - x = 0$$

$$x(4e^{-x^2} - 1) = 0$$

$$x = 0$$

$$4e^{-x^2} - 1 = 0$$

$$4e^{-x^2} = 1$$

محمد عمر الخطيب

$$e^{-x^2} = \frac{1}{4}$$

$$\ln e^{-x^2} = \ln \frac{1}{4}$$

$$-x^2 = -\ln 4$$

$$x^2 = \ln 4$$

$$x = \pm \sqrt{\ln 4}$$

نقط التقاطع

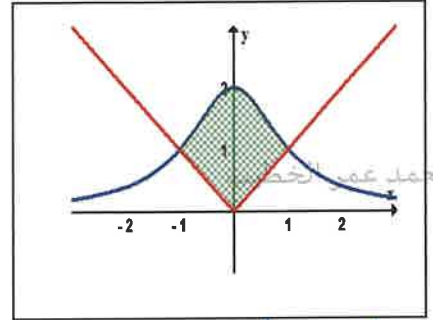
محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

(10) اوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين $y = \frac{2}{x^2+1}$, $y = |x|$



$$A = \int_{-1}^1 \frac{2}{x^2+1} - |x| dx$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$= \int_{-1}^0 \frac{2}{x^2+1} - (-x) dx + \int_0^1 \frac{2}{x^2+1} - x dx$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$= \frac{1}{2}(\pi - 1) + \frac{1}{2}(\pi - 1)$$

$$= \pi - 1$$

أو

$$A = 2 \int_0^1 \frac{2}{x^2+1} - x dx$$

محمد عمر الخطيب

نقاط التقاطع

$$\frac{2}{x^2+1} = |x|$$

محمد عمر الخطيب
عندما $x > 0$

$$\frac{2}{x^2+1} = x$$

$$2 = x^3 + x$$

$$x^3 + x - 2 = 0$$

محمد عمر الخطيب
من الآلة $x = 1$

عندما $x < 0$

$$\frac{2}{x^2+1} = -x$$

$$2 = -x^3 - x$$

$$x^3 + x + 2 = 0$$

محمد عمر الخطيب
من الآلة $x = -1$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

لا نرسم

(11) اوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين $y = \frac{5x}{x^2+1}$, $y = x$

$$A_1 = \int_{-2}^0 x - \frac{5x}{x^2+1} dx$$

محمد عمر الخطيب

$$= \frac{5}{2} \ln 5 - 2$$

$$A_2 = \int_0^2 \frac{5x}{x^2+1} - x dx$$

محمد عمر الخطيب

$$= \frac{5}{2} \ln 5 - 2$$

$$A = A_1 + A_2$$

$$= 5 \ln 5 - 4$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

نقاط التقاطع

$$\frac{5x}{x^2+1} = x$$

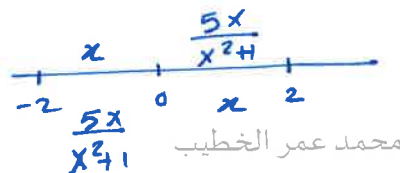
$$5x = x^3 + x$$

$$x^3 - 4x = 0$$

$$x(x^2 - 4) = 0$$

$$x = 0, x = -2, 2$$

يوجد جذرين سادة



محمد عمر الخطيب (12) اوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين $y = \sin x$, $y = \cos x$ حيث $0 \leq x \leq 2\pi$

$$A_1 = \int_0^{\pi/4} \cos x - \sin x \, dx = \sqrt{2} - 1$$

$$A_2 = \int_{\pi/4}^{5\pi/4} \sin x - \cos x \, dx = 2\sqrt{2}$$

$$A_3 = \int_{5\pi/4}^{2\pi} \cos x - \sin x \, dx = \sqrt{2} + 1$$

$$A = A_1 + A_2 + A_3 = 4\sqrt{2}$$

نقاط التقاطع

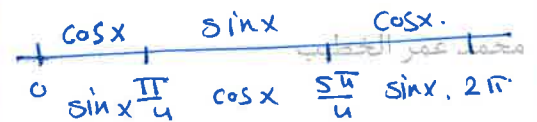
$$\sin x = \cos x$$

$$\tan x = 1$$

$$\phi_1 \rightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

$$\phi_4 \rightarrow x = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$$

يوجد جبراً واحدة



نجد نقاط التقاطع من الآلة الحاسبة بالخطوات

التالية

ادخل المعادلة على الآلة الحاسبة

(1) اعمل shift solve للحصول على الحل الاول

(2) للحصول على الحل الثاني اعمل shift solve

واضغط على الرقم 1 او الرقم -1 او الرقم 2

نقاط التقاطع من الآلة هي

$$x = -0.715, x = 0$$

عوض أي عدد ضمن نقاط التقاطع في الدالتين لتحديد

الدالة الأعلى

واحتمالية هذا النوع من الأسئلة بالامتحان ضعيفة جداً

محمد عمر الخطيب (13) اوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين

$$y = e^x, y = 1 - x^2$$

$$A = \int_0^1 (1 - x^2) - e^{-x} \, dx$$

$$\approx 0.082$$

نقاط التقاطع من الآلة هي

$$x = -1.221$$

$$x = 0.725$$

محمد عمر الخطيب (14) اوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين $y = x^4$, $y = 1 - x$

$$A = \int_{-1.221}^{0.725} (1 - x) - x^4 \, dx$$

$$\approx 1.845$$

(15) اوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين $y = \sin x$, $y = x^2$

نقاط التقاطع هي

$$x = 0, x = 0.877$$

$$A = \int_0^{0.877} \sin x - x^2 dx$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$\approx 0.1357$$

محمد عمر الخطيب

(16) اوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين $y = \cos x$, $y = x^4$

نقاط التقاطع هي

$$x = -0.891$$

$$x = 0.891$$

$$A = \int_{-0.891}^{0.891} \cos x - x^4 dx$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$\approx 1.33$$

محمد عمر الخطيب

(17) اوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين $y = x^4$, $y = 2 + x$

نقاط التقاطع هي

$$x = -1, x = 1.350$$

$$A = \int_{-1}^{1.35} 2 + x - x^4 dx$$

$$= 4.014$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

(18) اوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين $y = \ln x$, $y = x^2 - 2$

نقاط التقاطع هي

$$x = 0.138$$

$$x = 1.565$$

$$A = \int_{0.138}^{1.565} \ln x - (x^2 - 2) dx$$

$$= 1.124$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

(1) اوجد حجم الجسم الذي مقطعه العرضي $A(x) = x + 2$ حيث $-1 \leq x \leq 3$

$$\begin{aligned}
 V &= \int_{-1}^3 A(x) dx \\
 &= \int_{-1}^3 (x + 2) dx \\
 &= 12
 \end{aligned}$$

(2) اوجد حجم الجسم الذي مقطعه العرضي $A(x) = 10e^{0.01x}$ حيث $0 \leq x \leq 10$

$$\begin{aligned}
 V &= \int_0^{10} 10e^{0.01x} dx \\
 &= 1000(e^{0.1} - 1) \\
 &= 105.17
 \end{aligned}$$

(3) اوجد حجم الجسم الذي مقطعه العرضي $A(x) = \pi(4-x)^2$ حيث $0 \leq x \leq 2$

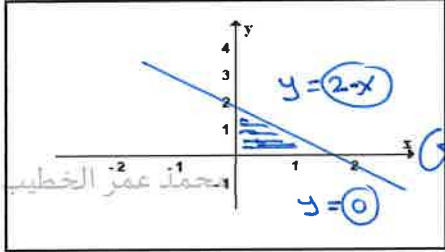
$$\begin{aligned}
 V &= \int_0^2 A(x) dx \\
 &= \int_0^2 \pi(4-x)^2 dx \\
 &= \frac{56\pi}{3}
 \end{aligned}$$

(4) اوجد حجم الجسم الذي مقطعه العرضي $A(x) = 2(x+1)^2$ حيث $1 \leq x \leq 4$

$$\begin{aligned}
 V &= \int_1^4 A(x) dx \\
 &= \int_1^4 2(x+1)^2 dx \\
 &= 78
 \end{aligned}$$

(17) اوجد حجم الجسم الناتج عن دوران المنطقة المحدودة بالمستقيمات

$x=0$, $y=0$, $y=2-x$ حول المحور x

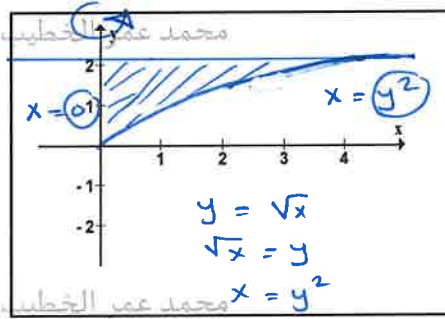


$$\begin{aligned} V &= \pi \int r_o^2 - r_i^2 dx \\ &= \pi \int_0^2 (2-x)^2 dx \\ &= \frac{8\pi}{3} \end{aligned}$$

أقراص dx

$$\begin{aligned} r_o &= 2-x-0 \\ r_i &= 0-0 \end{aligned}$$

(19) اوجد حجم الجسم الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بالدوال $x=0$, $y=2$, $y=\sqrt{x}$

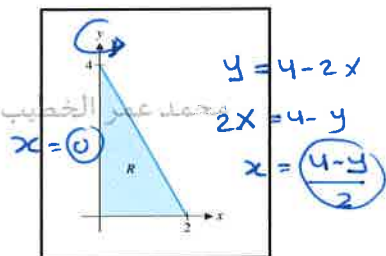


$$\begin{aligned} V &= \pi \int r_o^2 - r_i^2 dy \\ &= \pi \int_0^2 (y^2)^2 dy \\ &= \frac{32\pi}{5} \end{aligned}$$

أقراص dy حول المحور y

$$\begin{aligned} r_o &= y^2-0 \\ r_i &= 0-0 \end{aligned}$$

(25) اوجد حجم الجسم الناتج عن دوران المنطقة R المحدودة بواسطة $y=4-2x$ والمحورين

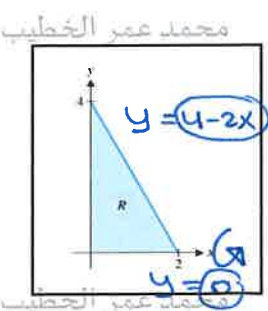


$$\begin{aligned} V &= \pi \int r_o^2 - r_i^2 dy \\ &= \pi \int_0^4 \left(\frac{4-y}{2}\right)^2 dy \\ &= \frac{16\pi}{3} \end{aligned}$$

(a) حول محور y

أقراص dy

$$\begin{aligned} r_o &= \frac{4-y}{2} - 0 \\ r_i &= 0 - 0 \end{aligned}$$



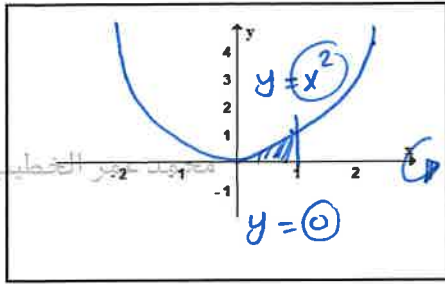
$$\begin{aligned} V &= \pi \int r_o^2 - r_i^2 dx \\ &= \pi \int_0^2 (4-2x)^2 dx \\ &= \frac{32\pi}{3} \end{aligned}$$

(b) حول محور x

أقراص dx

$$\begin{aligned} r_o &= 4-2x-0 \\ r_i &= 0-0 \end{aligned}$$

(27) اوجد حجم الجسم الناتج عن دوران المنطقة R المحدودة بواسطة $x=1$ و $y=x^2$, $y=0$



$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int r_o^2 - r_i^2 dx \\
 &= \pi \int_0^1 (x^2)^2 dx \\
 &= \frac{\pi}{5}
 \end{aligned}$$

(b) حول محور x

اقرأ من dx
محمد عمر الخطيب

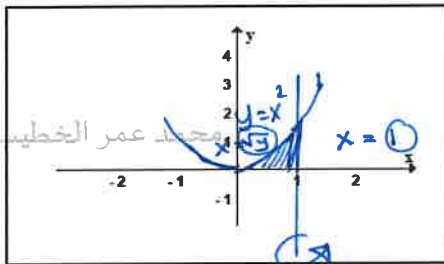
$$\begin{aligned}
 r_o &= x^2 - 0 \\
 r_i &= 0 - 0
 \end{aligned}$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

(c) حول $x=1$



$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int r_o^2 - r_i^2 dy \\
 &= \pi \int_0^1 (1 - \sqrt{y})^2 dy \\
 &= \frac{\pi}{6}
 \end{aligned}$$

اقرأ من dy
محمد عمر الخطيب

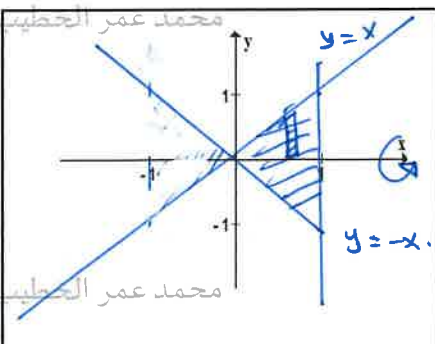
$$\begin{aligned}
 r_o &= 1 - \sqrt{y} \\
 r_i &= 1 - 1 = 0
 \end{aligned}$$

محمد عمر الخطيب

$$\begin{aligned}
 y &= x^2 \\
 x^2 &= y \\
 x &= \pm \sqrt{y}
 \end{aligned}$$

محمد عمر الخطيب

(28) اوجد حجم الجسم الناتج عن دوران المنطقة R المحدودة بواسطة $x=+1$ و $y=x$, $y=-x$



$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int r_o^2 - r_i^2 dx \\
 &= \pi \int_0^1 (x)^2 dx \\
 &= \frac{\pi}{3}
 \end{aligned}$$

(a) حول محور x
محمد عمر الخطيب

$$\begin{aligned}
 r_o &= x - 0 \\
 r_i &= 0 - 0
 \end{aligned}$$

محمد عمر الخطيب

$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_0^1 (x)^2 dx \\
 &= \frac{\pi}{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 r_o &= 0 - (-x) = x \\
 r_i &= 0 - 0
 \end{aligned}$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

(5) احسب طول المنحنى للدالة $y = 2x + 1$ حيث $0 \leq x \leq 2$

$$\begin{aligned}
 S &= \int_0^2 \sqrt{1 + (y')^2} dx \\
 &= \int_0^2 \sqrt{1 + 4} dx \\
 &= 2\sqrt{5}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y &= 2x + 1 \\
 y' &= 2 \\
 (y')^2 &= 4
 \end{aligned}$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

(6) احسب طول المنحنى للدالة $y = \ln(\sec x)$ حيث $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$

$$\begin{aligned}
 S &= \int_0^{\pi/4} \sqrt{1 + (y')^2} dx \\
 &= \int_0^{\pi/4} \sqrt{1 + \tan^2 x} dx \\
 &= \int_0^{\pi/4} |\sec x| dx = \int_0^{\pi/4} \sec x dx = \ln(\sqrt{2} + 1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y &= \ln(\sec x) \\
 y' &= \frac{\sec x \tan x}{\sec x} \\
 y' &= \tan x \\
 (y')^2 &= \tan^2 x
 \end{aligned}$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

(7) احسب طول المنحنى للدالة $y = 4x^{3/2} + 1$ حيث $1 \leq x \leq 2$

$$\begin{aligned}
 S &= \int_1^2 \sqrt{1 + (y')^2} dx \\
 &= \int_1^2 \sqrt{1 + 36x} dx \\
 &= 7.4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y &= 4x^{3/2} + 1 \\
 y' &= 6x^{1/2} \\
 (y')^2 &= 36x
 \end{aligned}$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

(8) احسب طول المنحنى للدالة $y = \frac{1}{4}(e^{2x} + e^{-2x})$ حيث $0 \leq x \leq 1$

$$\begin{aligned}
 S &= \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{1}{4}(e^{2x} - e^{-2x})^2} dx \\
 &= 3.06
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y' &= \frac{1}{4}(e^{2x}(2) + e^{-2x}(-2)) \\
 &= \frac{2}{4}(e^{2x} - e^{-2x}) \\
 (y')^2 &= \frac{1}{4}(e^{2x} - e^{-2x})^2
 \end{aligned}$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

(9) احسب طول المنحنى للدالة $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x$ حيث $1 \leq x \leq 2$

$$S = \int_1^2 \sqrt{1 + \frac{1}{4}\left(x - \frac{1}{x}\right)^2} dx$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$= 1.1$$

$$y' = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2x}$$

$$= \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{x} \right)$$

$$(y')^2 = \frac{1}{4} \left(x - \frac{1}{x} \right)^2$$

(10) احسب طول المنحنى للدالة $y = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2x}$ حيث $1 \leq x \leq 3$

$$S = \int_1^3 \sqrt{1 + \frac{1}{4}\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)^2} dx$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$= 5.15$$

$$y' = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2x^2}$$

$$= \frac{1}{2} \left(x^2 - \frac{1}{x^2} \right)$$

$$(y')^2 = \frac{1}{4} \left(x^2 - \frac{1}{x^2} \right)^2$$

(11) احسب طول المنحنى للدالة $x = \frac{1}{8}y^4 + \frac{1}{4y^2}$ حيث $-2 \leq y \leq -1$

$$S = \int_{-2}^{-1} \sqrt{1 + (x')^2} dy$$

$$= \int_{-2}^{-1} \sqrt{1 + \frac{1}{4}\left(y^3 - \frac{1}{y^3}\right)^2} dy$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$= \frac{33}{16}$$

$$x = \frac{1}{8}y^4 + \frac{1}{4}y^{-2}$$

$$x' = \frac{1}{2}y^3 - \frac{1}{2}y^{-3}$$

$$= \frac{1}{2} \left(y^3 - \frac{1}{y^3} \right)$$

$$(x')^2 = \frac{1}{4} \left(y^3 - \frac{1}{y^3} \right)^2$$

(12) احسب طول المنحنى للدالة $x = e^{y/2} + e^{-y/2}$ حيث $-1 \leq y \leq 1$

$$s = \int_{-1}^1 \sqrt{1 + (x')^2} dy$$

$$x' = \frac{y/2}{e^{y/2}} + \frac{-y/2}{e^{-y/2}} = \frac{1}{2} (e^{y/2} - e^{-y/2})$$

$$= \frac{1}{2} (e^{y/2} - e^{-y/2})$$

$$(x')^2 = \frac{1}{4} (e^{y/2} - e^{-y/2})^2$$

$$s = \int_{-1}^1 \sqrt{1 + \frac{1}{4} (e^{y/2} - e^{-y/2})^2} dy$$

$$= \frac{2(e-1)}{\sqrt{e}} = 2.08$$

(13) احسب طول المنحنى للدالة $y = \frac{1}{3}x^{3/2} - x^{1/2}$ حيث $1 \leq x \leq 4$

$$s = \int_1^4 \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

$$y' = \frac{1}{2} x^{1/2} - \frac{1}{2} x^{-1/2}$$

$$= \frac{1}{2} (\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}})$$

$$(y')^2 = \frac{1}{4} (\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}})^2$$

$$s = \int_1^4 \sqrt{1 + \frac{1}{4} (\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}})^2} dx$$

$$= \int_1^4 \sqrt{1 + \frac{1}{4} (\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}})^2} dx$$

$$= \frac{10}{3}$$

(14) احسب طول المنحنى للدالة $y = 2 \ln(4 - x^2)$ حيث $0 \leq x \leq 1$

$$s = \int_0^1 \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

$$y' = 2 \cdot \frac{-2x}{4 - x^2}$$

$$= \frac{-4x}{4 - x^2}$$

$$(y')^2 = \frac{16x^2}{(4 - x^2)^2}$$

$$s = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{16x^2}{(4 - x^2)^2}} dx$$

$$= 2 \ln 3 - 1$$

(29) اكتب التكامل الذي يمثل مساحة السطح المتولد عن دوران الدالة $y = x^2$ حول المحور x

حيث $0 \leq x \leq 1$ ثم اوجد قيمة التكامل بطريقة عددية (بالآلة الحاسبة)

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$S = 2\pi \int_0^1 y \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

$$y = x^2$$

$$y' = 2x$$

$$(y')^2 = 4x^2$$

$$= 2\pi \int_0^1 x^2 \sqrt{1 + 4x^2} dx$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$= 3.8$$

(30) اكتب التكامل الذي يمثل مساحة السطح المتولد عن دوران الدالة $y = \sin x$ حول المحور x

حيث $0 \leq x \leq \pi$ ثم اوجد قيمة التكامل بطريقة عددية (بالآلة الحاسبة)

$$y = \sin x$$

$$y' = \cos x$$

$$(y')^2 = \cos^2 x$$

$$S = 2\pi \int_0^{\pi} y \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$= 2\pi \int_0^{\pi} \sin x \sqrt{1 + \cos^2 x} dx$$

$$= 14.4$$

(31) اكتب التكامل الذي يمثل مساحة السطح المتولد عن دوران الدالة $y = 2x - x^2$ حول المحور x

حيث $0 \leq x \leq 2$ ثم اوجد قيمة التكامل بطريقة عددية

$$y = 2x - x^2$$

$$y' = 2 - 2x$$

$$(y')^2 = (2 - 2x)^2$$

$$S = 2\pi \int_0^2 y \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$= 2\pi \int_0^2 (2x - x^2) \sqrt{1 + (2 - 2x)^2} dx$$

$$= 10.97$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

(32) اكتب التكامل الذي يمثل مساحة السطح المتولد عن دوران الدالة $y = x^3 - 4x$ حول المحور x

حيث x $-2 \leq x \leq 0$ ثم اوجد قيمة التكامل بطريقة عددية

$$S = 2\pi \int_{-2}^0 y \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

$$y' = 3x^2 - 4$$

$$(y')^2 = (3x^2 - 4)^2$$

$$= 2\pi \int_{-2}^0 (3x^2 - 4) \sqrt{1 + (3x^2 - 4)^2} dx$$

$$= 67$$

(33) اكتب التكامل الذي يمثل مساحة السطح المتولد عن دوران الدالة $y = e^x$ حول المحور x حيث

$0 \leq x \leq 1$ ثم اوجد قيمة التكامل بطريقة عددية

$$S = \int_0^1 2\pi y \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

$$y = e^x$$

$$y' = e^x$$

$$(y')^2 = (e^x)^2$$

$$= 2\pi \int_0^1 e^x \sqrt{1 + e^{2x}} dx$$

$$= e^{2x}$$

$$= 22.9$$

(34) اكتب التكامل الذي يمثل مساحة السطح المتولد عن دوران الدالة $y = \ln x$ حول المحور x

حيث $1 \leq x \leq 2$ ثم اوجد قيمة التكامل بطريقة عددية

$$S = 2\pi \int_1^2 y \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

$$y = \ln x$$

$$y' = \frac{1}{x}$$

$$(y')^2 = \frac{1}{x^2}$$

$$= 2.87$$

(35) اكتب التكامل الذي يمثل مساحة السطح المتولد عن دوران الدالة $y = \cos x$ حول المحور x

حيث $0 \leq x \leq \pi/2$ ثم اوجد قيمة التكامل بطريقة عددية

$$S = \int_0^{\pi/2} 2\pi y \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

$$y = \cos x$$

$$y' = -\sin x$$

$$(y')^2 = \sin^2 x$$

$$= 2\pi \int_0^{\pi/2} \cos x \sqrt{1 + \sin^2 x} dx$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

7.2

(36) اكتب التكامل الذي يمثل مساحة السطح المتولد عن دوران الدالة $y = \sqrt{x}$ حول المحور x

حيث $1 \leq x \leq 2$ ثم اوجد قيمة التكامل بطريقة عددية

$$S = 2\pi \int_1^2 y \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

$$y = \sqrt{x}$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$y' = \frac{1}{4x}$$

$$= 2\pi \int_1^2 \sqrt{x} \sqrt{1 + \frac{1}{4x}} dx$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$= 2\pi \int_1^2 \sqrt{x(1 + \frac{1}{4x})} dx$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$= 2\pi \int_1^2 \sqrt{\frac{4x+1}{4}} dx$$

$$= \pi \int_1^2 \sqrt{4x+1} dx$$

$$= 8.3$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

(1) اكتب الشروط الابتدائية $y(0)$ و $y'(0)$ عند سقوط جسم من ارتفاع 80 ft

$$y(0) = 80, \quad y'(0) = 0$$

محمد عمر الخطيب

(2) اكتب الشروط الابتدائية $y(0)$ و $y'(0)$ عند سقوط جسم من ارتفاع 100 ft

$$y(0) = 100, \quad y'(0) = 0$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

(3) اكتب الشروط الابتدائية $y(0)$ و $y'(0)$ عند اطلاق جسم من ارتفاع 60 ft للأعلى (صعوداً)

بسرعة متجهة 10 ft/s

$$y(0) = 60, \quad y'(0) = 10$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

(4) اكتب الشروط الابتدائية $y(0)$ و $y'(0)$ عند اطلاق جسم من ارتفاع 20 ft نزولاً (للاسفل)

بسرعة متجهة 4 ft/s

$$y(0) = 20, \quad y'(0) = -4$$

محمد عمر الخطيب

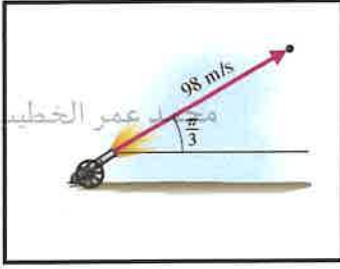
محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب



(17) تطلق قذيفة من الأرض بسرعة ابتدائية متجهة قدرها 98 m/s ،

محمد عمر الخطيب

ويزاوية ميل مع الأفق قدرها $\theta = \frac{\pi}{3}$

محمد عمر الخطيب

$$g = 9.8, \quad v_0 = 98, \quad y_0 = 0, \quad \theta = \pi/3.$$

أوجد زمن التحليق والمدى الأفقي

$$\begin{aligned} y(t) &= -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 \sin \theta t + y_0 \\ &= -4.9 t^2 + 98 \sin \frac{\pi}{3} t + 0 \\ &= -4.9 t^2 + 49\sqrt{3} t. \end{aligned}$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$y(t) = 0$$

$$-4.9 t^2 + 49\sqrt{3} t = 0$$

$$t = 0, \quad t = 10\sqrt{3}$$

زمن التحليق

محمد عمر الخطيب

المدى الأفقي

محمد عمر الخطيب

$$\begin{aligned} x(t) &= v_0 \cos \theta t + x_0 \\ &= 98 \cos \frac{\pi}{3} t + 0 \\ &= 49 t \end{aligned}$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$x(10\sqrt{3}) = 49 (10\sqrt{3})$$

$$= 490\sqrt{3}$$

$$= 848.7 \text{ m}$$

(18a) أوجد زمن التحليق والمدى الأفقي لجسم اطلق بزاوية 30° مع سرعة ابتدائية 40 m/s

$$g = 9.8, \quad v_0 = 40, \quad y_0 = 0, \quad \theta = 30^\circ$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 \sin \theta t + y_0 \\ &= -4.9 t^2 + 20 t. \end{aligned}$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$y(t) = 0$$

$$-4.9 t^2 + 20 t = 0$$

$$t = 0, \quad t = 4.082$$

المدى الأفقي

محمد عمر الخطيب

$$\begin{aligned} x &= v_0 \cos \theta t + x_0 \\ &= 20\sqrt{3} t \end{aligned}$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$\begin{aligned} x(4.082) &= 20\sqrt{3} (4.082) \\ &= 141.4 \text{ m} \end{aligned}$$

(18b) أوجد زمن التحليق والمدى الأفقي لجسم اطلق بزاوية 60° مع سرعة ابتدائية 40 m/s

$$g = 9.8, \quad v_0 = 40, \quad y_0 = 0, \quad \theta = 60^\circ$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

زمن التحليق

محمد عمر الخطيب

$$y = -4.9 t^2 + 20\sqrt{3} t$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$y(t) = 0$$

$$-4.9 t^2 + 20\sqrt{3} t = 0$$

$$t = 0, \quad t = 7.07$$

المدى الأفقي

محمد عمر الخطيب

$$x = 20 t$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$x(7.07) = 20(7.07)$$

$$= 141.4 \text{ m}$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

احتمالية السؤال في الامتحان قليلة جداً

(19) يطلق لاعب، كرة تنس من ارتفاع 10 ft

وبسرعة ابتدائية 176 ft/s

وبزاوية ميل أسفل الخط الأفقي قياسها 6°

كما هو موضح بالشكل

أوجد المدى الأفقي للكرة وهل ستكون الكرة داخل أم خارج الحد (على بعد 60 ft من اللاعب)

$$g = 32, v_0 = 176, y_0 = 10, \theta = -6^\circ$$

$$y = 10 + \tan(-6^\circ) x - \frac{32}{2[176 \cos(-6^\circ)]^2} x^2$$

يمكن استخدام معادلة المسار التربيعية التي تربط بين المتغيرين x و y في هذا النوع من المسائل وهي

$$y = y_0 + \tan \theta x - \frac{g}{2[v_0 \cos \theta]^2} x^2$$

نمكّن من الحوال بمعادلة المسار كما ستره. وذلك بجعل $y = 0$ لإيجاد دويحة $x = 70.4$

$$g = 32, v_0 = 176, y_0 = 10, \theta = -6^\circ$$

ارتفاع الكرة عند وصول الكرة للشبكة

$$y(0.2223) = 5.12$$

سحر الكرة فوق الشبكة

$$y(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 \sin \theta t + y_0$$

$$= -16 t^2 + 18.4 t + 10$$

$$x(t) = v_0 \cos \theta t$$

$$= 175 t$$

$$x(t) = 39$$

$$175 t = 39$$

$$t = 0.2228$$

$$y(t) = 0$$

$$-16 t^2 + 18.4 t + 10 = 0$$

$$t = 0.4$$

$$x(0.4) = 175(0.4)$$

$$\approx 70$$

خارج الحظ

عوض الخيارات مكان x في معادلة المسار حتى تحصل على $y = 0$

في السؤال السابق ان المدى الأفقي للكرة هو

(a) 55 ft

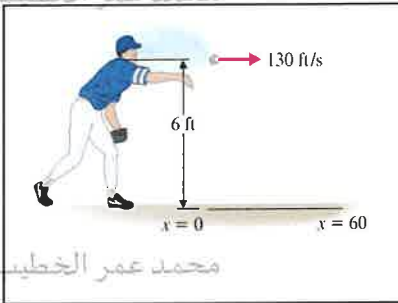
(b) 81 ft

(c) 43 ft

(d) 70 ft

الجواب الصحيح 70

(21) يطلق لاعب، كرة بيسبول من ارتفاع 6 ft وبسرعة أفقية ابتدائية قدرها 130 ft/s أوجد ارتفاع الكرة عندما تصل إلى القاعدة (المنصة) على بعد 60 ft



$$g = 32, v_0 = 130, y_0 = 6, \theta = 0$$

$$y = 6 + \tan(0) x - \frac{32}{2[176 \cos(0)]^2} x^2$$

يمكن استخدام معادلة المسار التربيعية التي تربط بين المتغيرين x, y في هذا النوع من المسائل وهي

$$y = y_0 + \tan \theta x - \frac{g}{2[v_0 \cos \theta]^2} x^2$$

$$g = 32, v_0 = 130, y_0 = 6, \theta = 0$$

$$y(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 \sin \theta t + y_0$$

$$= -16 t^2 + 6$$

$$x(t) = v_0 \cos \theta t$$

$$= 130 t$$

زمن الوصول إلى القاعدة (بعد 60)

$$x(t) = 60$$

$$130 t = 60$$

$$t = \frac{6}{13}$$

الارتفاع عند القاعدة

$$y\left(\frac{6}{13}\right) = -16\left(\frac{6}{13}\right)^2 + 6$$

$$= 2.6$$

* ملاحظة: من الحوال من معادلة المسار ووضع مكان $x=60$ لا يجار $y=2.6$

(22) يطلق لاعب، كرة بيسبول من ارتفاع 6 ft وبسرعة أفقية ابتدائية قدرها 80 ft/s أوجد ارتفاع الكرة عندما تصل إلى القاعدة (المنصة) على بعد 60 ft

$$y(t) = -16 t^2 + 6$$

$$x(t) = 80 t$$

زمن الوصول إلى القاعدة

$$x(t) = 60$$

$$80 t = 60 \rightarrow t = \frac{3}{4}$$

الارتفاع عند القاعدة

$$y\left(\frac{3}{4}\right) = -16\left(\frac{3}{4}\right)^2 + 6$$

$$= -3$$

وهذا يعني ان الكرة اصطفت بالأرض

محمد عمر الخطيب قبل الوصول إلى القاعدة

اوجد كل من التكاملات التالية

$$(1) \int e^{ax} dx \quad a \neq 0 = \frac{e^{ax}}{a} + C = \frac{1}{a} e^{ax} + C$$

محمد عمر الخطيب

$$(2) \int \cos(ax) dx \quad a \neq 0 = \frac{\sin(ax)}{a} + C = \frac{1}{a} \sin(ax) + C.$$

محمد عمر الخطيب

$$(5) \int \sin 6t dt = -\frac{\cos(6t)}{6} + C = -\frac{1}{6} \cos(6t) + C.$$

محمد عمر الخطيب

$$(6) \int \sec 2t \tan 2t dt = \frac{\sec 2t}{2} + C = \frac{1}{2} \sec 2t + C.$$

محمد عمر الخطيب

$$(7) \int (x^2 + 4)^2 dx = \int x^4 + 8x^2 + 16 dx$$

$$= \frac{1}{5} x^5 + \frac{8}{3} x^3 + 16x + C.$$

محمد عمر الخطيب

$$(8) \int x(x^2 + 4)^2 dx = \int x (x^4 + 8x^2 + 16) dx$$

$$= \int x^5 + 8x^3 + 16x dx$$

$$= \frac{1}{6} x^6 + 2x^4 + 8x^2 + C$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

* ملاحظة: حل السؤال بالتعويض، حسب خيارات السؤال.

$$\int x(x^2 + 4)^2 dx = \frac{1}{6} (x^2 + 4)^3 + C.$$

محمد عمر الخطيب

$$(9) \int \frac{3}{16+x^2} dx$$

$$a^2=16$$

$$a=4.$$

ملاحظة: هذه صيغة تكامل (الافضل حفظها)

$$\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a} \tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

$$= 3 \int \frac{1}{16+x^2} dx$$

$$= 3 \cdot \frac{1}{4} \tan^{-1}\left(\frac{x}{4}\right) + c$$

$$= \frac{3}{4} \tan^{-1}\left(\frac{x}{4}\right) + c$$

$$(10) \int \frac{2}{4+4x^2} dx$$

$$= \int \frac{2}{4(1+x^2)} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$= \frac{1}{2} \tan^{-1} x + c$$

أوجد كل من التكاملات التالية

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$(17) \int e^{3-2x} dx = \frac{e^{3-2x}}{-2} + C = -\frac{1}{2} e^{3-2x} + C.$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$(18) \int \frac{3}{e^{6x}} dx = \int 3 e^{-6x} dx = 3 \frac{e^{-6x}}{-6} + C = -\frac{1}{2} \frac{1}{e^{6x}} + C.$$

$$(25) \int_{-\pi/4}^0 \frac{\sin t}{\cos^2 t} dt$$

محمد عمر الخطيب

$$= \int_{-\pi/4}^0 \sec t \cdot \tan t dt$$

$$\sec t \int_{-\pi/4}^0 = 1 - \sqrt{2}$$

محمد عمر الخطيب

كوسينج

محمد عمر الخطيب

$$\frac{\sin t}{\cos^2 t} = \frac{1}{\cos t} \cdot \frac{\sin t}{\cos t} = \sec t \cdot \tan t.$$

محمد عمر الخطيب

$$(26) \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1}{\sin^2 t} dt = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \csc^2 t dt$$

محمد عمر الخطيب

$$= -\cot t \Big|_{\pi/4}^{\pi/2} = 1$$

محمد عمر الخطيب

$$(33) \int \frac{1+x}{1+x^2} dx = \int \frac{1}{1+x^2} + \frac{x}{1+x^2} dx$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$= \int \frac{1}{1+x^2} dx + \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} dx$$

$$= \tan^{-1} x + \frac{1}{2} \ln |1+x^2| + C.$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$(36) \int_1^3 e^{2 \ln x} dt = \int_1^3 e^{\ln x^2} dx = \int_1^3 x^2 dx$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$= \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^3 = \frac{26}{3}$$

محمد عمر الخطيب

$$(38) \int_0^1 x(x-3)^2 dx$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$= \int x(x^2 - 6x + 9) dx$$

$$= \int x^3 - 6x^2 + 9x dx$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$= \left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + \frac{9x^2}{2} \right]_0^1$$

$$= \frac{11}{4}$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$(39) \int_0^4 \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x}} dx = \int_0^4 \frac{x^2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$= \int_0^4 \frac{x^2}{x^{1/2}} + \frac{1}{x^{1/2}} dx$$

$$= \int_0^4 x^{3/2} + x^{-1/2} dx$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$= \left[\frac{2}{5} x^{5/2} + 2 x^{1/2} \right]_0^4$$

$$= \frac{72}{5}$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

اوجد كل من التكاملات التالية

$$(27) \int \frac{x^2}{1+x^6} dx = \int \frac{x^2}{1+(x^3)^2} dx$$

$$= \int \frac{x^2}{1+u^2} \cdot \frac{du}{3x^2}$$

$$u = x^3$$

$$\frac{du}{dx} = 3x^2$$

$$\frac{du}{3x^2} = dx$$

$$= \frac{1}{3} \int \frac{1}{1+u^2} du = \frac{1}{3} \tan^{-1} u + c = \frac{1}{3} \tan^{-1} (x^3) + c$$

$$(30) \int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx = \int \frac{e^x}{\sqrt{1-(e^x)^2}} dx$$

$$u = e^x$$

$$\frac{du}{dx} = e^x$$

$$\frac{du}{e^x} = dx$$

$$= \int \frac{e^x}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{e^x} = \int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du$$

$$= \sin^{-1} u + c = \sin^{-1} (e^x) + c$$

$$(31) \int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} dx = \int \frac{x}{\sqrt{1-(x^2)^2}} dx$$

$$u = x^2$$

$$\frac{du}{dx} = 2x$$

$$\frac{du}{2x} = dx$$

$$= \int \frac{x}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{2x}$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du = \frac{1}{2} \sin^{-1} u + c = \frac{1}{2} \sin^{-1} (x^2) + c$$

$$(32) \int \frac{2x^3}{\sqrt{1-x^4}} dx = \int \frac{2x^3}{\sqrt{u}} \cdot \frac{du}{-4x^3}$$

$$u = 1-x^4$$

$$\frac{du}{dx} = -4x^3$$

$$\frac{du}{-4x^3} = dx$$

$$= -\frac{1}{2} \int u^{-1/2} du$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot 2u^{1/2} + c = -\sqrt{1-x^4} + c$$

اكتب اسم الطريقة فقط لايجاد كل من التكاملات التالية (هل هو التكامل بالتعويض ام بالاجزاء)

$$(53a) \int x \sin x^2 dx$$

تعويض (الزيادة ليس خطية) محمد عمر الخطيب

$$(53b) \int x^2 \sin x dx$$

اجزاء

$$(53c) \int x \ln x dx$$

اجزاء

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$(53d) \int \frac{\ln x}{x} dx$$

تعويض

$$(54a) \int x^3 e^{4x} dx$$

اجزاء

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$(54b) \int x^3 e^{x^4} dx$$

تعويض

$$(54c) \int x^{-2} e^{4/x} dx$$

تعويض

$$(54d) \int x^2 e^{-4x} dx$$

اجزاء

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

ممكّن ان يكون السؤال بهذه الطريقة

أي من التكاملات التالية يمكن ايجاده باستخدام طريقة التكامل بالتعويض

$$(a) \int x^2 \sin x dx$$

$$(b) \int x^2 e^{-4x} dx$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$(c) \int x \ln x dx$$

$$(d) \int x^3 e^{x^4} dx$$

أي من التكاملات التالية يمكن ايجاده باستخدام طريقة التكامل بالاجزاء

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$(a) \int x \sin x^2 dx$$

$$(b) \int x^2 e^{-4x} dx$$

$$(c) \int x^{-2} e^{4/x} dx$$

$$(d) \int x^3 e^{x^4} dx$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

اوجد التكاملات التالية بطريقة الجدول (التكامل الجدولي)

(56) $\int x^4 \sin x \, dx$

محمد عمر الخطيب

u	dv
x^4	$\sin x$
$\downarrow +$	
$4x^3$	$-\cos x$
$\downarrow -$	
$12x^2$	$-\sin x$
$\downarrow +$	
$24x$	$\cos x$
$\downarrow -$	
24	$\sin x$
$\downarrow +$	
0	$-\cos x$

$= -x^4 \cos x + 4x^3 \sin x$

$+ 12x^2 \cos x - 24x \sin x$

$- 24 \cos x + C.$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

(57) $\int x^4 \cos x \, dx$

محمد عمر الخطيب

u	dv
x^4	$\cos x$
$\downarrow +$	
$4x^3$	$\sin x$
$\downarrow -$	
$12x^2$	$-\cos x$
$\downarrow +$	
$24x$	$-\sin x$
$\downarrow -$	
24	$\cos x$
$\downarrow +$	
0	$\sin x$

$= x^4 \sin x + 4x^3 \cos x$

$- 12x^2 \sin x - 24 \cos x$

$+ 24 \sin x + C.$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$(58) \int x^4 e^x dx$$

$$= x^4 e^x - 4x^3 e^x + 12x^2 e^x - 24x e^x + 24 e^x + c$$

$$= e^x (x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x + 24) + c$$

في كتاب بهذه الاضمار

u	dv
x^4	e^x
$4x^3$	e^x
$12x^2$	e^x
$24x$	e^x
24	e^x
0	e^x

$$(59) \int x^4 e^{2x} dx$$

$$= \frac{1}{2} x^4 e^{2x} - x^3 e^{2x} + \frac{3}{2} x^2 e^{2x} - \frac{3}{2} x e^{2x} + \frac{3}{4} e^{2x} + c$$

$$= \left(\frac{1}{2} x^4 - x^3 + \frac{3}{2} x^2 - \frac{3}{2} x + \frac{3}{4} \right) e^{2x} + c$$

$$= \frac{1}{4} e^{2x} (2x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 6x + 3) + c$$

u	dv
x^4	e^{2x}
$4x^3$	$\frac{e^{2x}}{2}$
$12x^2$	$\frac{e^{2x}}{4}$
$24x$	$\frac{e^{2x}}{8}$
24	$\frac{e^{2x}}{16}$
0	$\frac{e^{2x}}{32}$

$$(60) \int x^5 \cos 2x \, dx$$

$$= \frac{1}{2} x^5 + \frac{5}{4} x^4 \cos 2x$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$- \frac{20}{8} x^3 \sin 2x - \frac{60}{16} x^2 \cos 2x$$

$$+ \frac{120}{32} x \sin 2x + \frac{120}{64} \cos 2x + C$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

<u>u</u>	<u>dv</u>
x^5	$\cos 2x$
$5x^4$	$-\frac{\sin 2x}{2}$
$20x^3$	$-\frac{\cos 2x}{4}$
$60x^2$	$-\frac{\sin 2x}{8}$
$120x$	$\frac{\cos 2x}{16}$
120	$\frac{\sin 2x}{32}$
0	$-\frac{\cos 2x}{64}$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$(61) \int x^3 e^{-3x} \, dx$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$= \frac{1}{3} x^3 e^{-3x} - \frac{1}{3} x^2 e^{-3x}$$

$$+ \frac{2}{9} x e^{-3x} - \frac{2}{27} e^{-3x} + C$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$= \left(-\frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{3} x^2 - \frac{2}{9} x - \frac{2}{27} \right) e^{-3x} + C$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

<u>u</u>	<u>dv</u>
x^3	e^{-3x}
$3x^2$	$-\frac{e^{-3x}}{3}$
$6x$	$\frac{e^{-3x}}{9}$
6	$-\frac{e^{-3x}}{27}$
0	$\frac{e^{-3x}}{81}$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

اوجد التكاملات التالية

(1) $\int \cos x \sin^4 x \, dx$

$$= \int \cancel{\cos x} \, u^4 \cdot \frac{du}{\cancel{\cos x}}$$

$$= \int u^4 \, du$$

$$= \frac{1}{5} u^5 + C$$

$$= \frac{1}{5} \sin^5 x + C.$$

$$u = \sin x$$

$$\frac{du}{dx} = \cos x$$

$$\frac{du}{\cos x} = dx$$

(2) $\int \cos^3 x \sin^4 x \, dx$

$$= \int \cos^2 x \, u^4 \frac{du}{\cos x}$$

$$= \int \cos^2 x \, u^4 \, du$$

$$= \int (1 - u^2) u^4 \, du$$

$$= \int u^4 - u^6 \, du$$

$$= \frac{1}{5} u^5 - \frac{1}{7} u^7 + C$$

$$= \frac{1}{5} \sin^5 x - \frac{1}{7} \sin^7 x + C$$

الفرض الحلاه ذات لقوى زوجية

$$u = \sin x$$

$$\frac{du}{dx} = \cos x$$

$$\frac{du}{\cos x} = dx$$

$$\rightarrow \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

$$= 1 - u^2$$

$$(3) \int_0^{\pi/4} \cos 2x \sin^3 2x \, dx$$

$$= \int \cos 2x \cdot u^3 \cdot \frac{du}{2 \cos 2x}$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 u^3 \, du$$

$$= \frac{1}{8} u^4 \Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{8}$$

كلاهما فردى (أقوى لكبرى)

$$u = \sin 2x$$

$$\frac{du}{dx} = \cos 2x \cdot 2$$

$$\frac{du}{2 \cos 2x} = dx$$

تغير كندر

$$x = 0 \Rightarrow u = \sin 2(0) = 0$$

$$x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow u = 1$$

$$(4) \int_{\pi/4}^{\pi/3} \cos^3 3x \sin^3 3x \, dx$$

$$= \int u^3 \cdot \sin^2 3x \cdot \frac{du}{-3 \sin 3x}$$

$$= -\frac{1}{3} \int u^3 \cdot \sin^2 3x \, du$$

$$= -\frac{1}{3} \int_{-1/\sqrt{2}}^{-1} u^3 (1 - u^2) \, du$$

$$= -\frac{1}{3} \int_{-1/\sqrt{2}}^{-1} (u^3 - u^5) \, du$$

$$= -\frac{1}{3} \left[\frac{u^4}{4} - \frac{u^6}{6} \right]_{-1/\sqrt{2}}^{-1} = -\frac{1}{72}$$

افرض اى واحد صرح

$$u = \cos 3x$$

$$\frac{du}{dx} = -3 \sin 3x$$

$$\frac{du}{-3 \sin 3x} = dx$$

$$\sin^2 3x = 1 - \cos^2 3x = 1 - u^2$$

$$x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow u = -1/\sqrt{2}$$

$$x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow u = -1$$

$$(5) \int_0^{\pi/2} \cos^2 x \sin x \, dx$$

$$= \int u^2 \cdot \sin x \cdot \frac{du}{-\sin x}$$

$$= - \int_1^0 u^2 \, du$$

$$= \int_0^1 u^2 \, du$$

$$= \frac{1}{3}$$

$$u = \cos x$$

$$\frac{du}{dx} = -\sin x$$

$$\frac{du}{-\sin x} = dx$$

$$x=0 \Rightarrow u=1$$

$$x=\frac{\pi}{2} \Rightarrow u=0$$

$$(6) \int_{-\pi/2}^0 \cos^3 x \sin x \, dx$$

$$= \int_{-\pi/2}^0 u^3 \cdot \sin x \cdot \frac{du}{-\sin x}$$

$$= - \int_1^0 u^3 \, du$$

$$= \int_0^1 u^3 \, du$$

$$= \left[\frac{u^4}{4} \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{4}$$

$$u = \cos x$$

$$\frac{du}{dx} = -\sin x$$

$$\frac{du}{-\sin x} = dx$$

$$x = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow u=0$$

$$x=0 \Rightarrow u=1$$

اوجد التكاملات التالية

(9) $\int \tan x \sec^3 x \, dx$

قوة $\sec x$ فردية

$$u = \sec x.$$

$$\frac{du}{dx} = \sec x \tan x$$

$$\frac{du}{\sec x \tan x} = dx$$

$$= \int \tan x \cdot u^3 \cdot \frac{du}{\sec x \tan x}$$

$$= \int u^3 \frac{du}{u}$$

$$= \int u^2 \, du$$

$$= \frac{1}{3} u^3 + C$$

$$= \frac{1}{3} \sec^3 x + C.$$

(11) $\int x \tan^3(x^2+1) \sec(x^2+1) \, dx$

* يمكن حل السؤال بتعويض واحد

محمد عمر الخطيب

$$= \int x \tan^2(x^2+1) \cdot u \cdot \frac{du}{2x \sec(x^2+1) \tan(x^2+1)}$$

$$u = \sec(x^2+1)$$

$$\frac{du}{dx} = 2x \sec(x^2+1) \tan(x^2+1)$$

$$= \frac{1}{2} \int \tan^2(x^2+1) \cdot u \cdot \frac{du}{u}$$

$$\frac{du}{2x \sec(x^2+1) \tan(x^2+1)} = dx$$

$$= \frac{1}{2} \int (u^2 - 1) \, du$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{u^3}{3} - u \right) + C$$

$$= \frac{1}{6} \sec^3(x^2+1) - \frac{1}{2} \sec(x^2+1) + C.$$

$$\begin{aligned} * \tan^2(x^2+1) &= \sec^2(x^2+1) - 1 \\ &= u^2 - 1 \end{aligned}$$

$$(12) \int \tan(2x+1) \sec^3(2x+1) dx$$

$$= \int \tan(2x+1) \cdot u^3 \frac{du}{2 \sec(2x+1) \tan(2x+1)}$$

$$u = \sec(2x+1)$$

$$\frac{du}{dx} = 2 \sec(2x+1) \tan(2x+1)$$

$$\frac{du}{2 \sec(2x+1) \tan(2x+1)} = dx$$

$$= \frac{1}{2} \int u^3 \frac{du}{u}$$

$$= \frac{1}{2} \int u^2 du$$

$$= \frac{1}{6} u^3 + C$$

$$= \frac{1}{6} \sec^3(2x+1) + C$$

$$(15) \int_0^{\pi/4} \tan^4 x \sec^4 x dx$$

$$= \int u^4 \sec^2 x \frac{du}{\sec^2 x}$$

$$= \int u^4 \sec^2 x du$$

$$= \int_0^1 u^4 \cdot (u^2 + 1) du$$

$$= \int_0^1 u^6 + u^4 du$$

$$= \left[\frac{1}{7} u^7 + \frac{1}{5} u^5 \right]_0^1$$

$$= \frac{12}{35}$$

$$u = \tan x$$

$$\frac{du}{dx} = \sec^2 x$$

$$\frac{du}{\sec^2 x} = dx$$

$$\sec^2 x = \tan^2 x + 1 = u^2 + 1$$

$$x = 0 \Rightarrow u = 0$$

$$x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow u = 1$$

$$(16) \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \tan^4 x \sec^2 x \, dx$$

$$= \int u^4 \cdot \sec^2 x \frac{du}{\sec^2 x}$$

$$= \int_{-1}^1 u^4 \, du$$

$$= \frac{1}{5} u^5 \Big|_{-1}^1$$

$$= \frac{2}{5}$$

$$u = \tan x$$

$$\frac{du}{dx} = \sec^2 x$$

$$\frac{du}{\sec^2 x} = dx$$

$$x = -\frac{\pi}{4} \Rightarrow u = -1$$

$$x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow u = 1$$

* ادس هذ السؤال بزكاي .

تمارين 33-36 , 38-40
صفحة 507 من الكتاب

احد هذه الاسئلة يكون السؤال 15

السؤال 15

* من الصعب ان يطلب مني السؤال كمال اكل .
دعوني اسئله ابداعي .

اوجد التكاملات التالية

$$(33) \int \frac{x^2}{\sqrt{9+x^2}} dx$$

$$x = 3 \tan \theta$$

$$dx = 3 \sec^2 \theta d\theta$$

$$= \int \frac{9 \tan^2 \theta}{\sqrt{9+9 \tan^2 \theta}} \cdot 3 \sec^2 \theta d\theta$$

$$= \int \frac{9 \tan^2 \theta}{3 \sec \theta} 3 \sec \theta d\theta$$

$$= \int 9 \tan^2 \theta \sec \theta d\theta$$

$$= \int 9 (\sec^2 \theta - 1) \sec \theta d\theta$$

$$= \int 9 \sec^3 \theta d\theta - \int 9 \sec \theta d\theta$$

* في هذ السؤال لانه
من اسئله ابداعي
كامي اى هذ كذا .

ممك ان يكون السؤال بهذه الطريقة

هذه الاقمار لهم في هذ السؤال .

لايجاد التكامل $\int \frac{x^2}{\sqrt{9+x^2}} dx$ نستخدم التعويض المثلثي

(a) $x = \tan \theta$

(b) $x = 3 \sin \theta$

(c) $x = 3 \sin \theta$

(d) $x = 3 \tan \theta$

باستخدام التعويض المثلثي المناسب يمكن كتابة التكامل $\int \frac{x^2}{\sqrt{9+x^2}} dx$ بالصورة

(a) $\int 9 \tan^2 \theta d\theta$

(b) $\int 3 \tan^2 \theta \sec \theta d\theta$

(c) $\int 3 \tan^2 \theta \sec \theta d\theta$

(d) $\int 9 \tan^2 \theta \sec \theta d\theta$

* من هذا السؤال بالتعويض بإعدادي أفضل

$$(34) \int x^3 \sqrt{8+x^2} dx$$

$$x = \sqrt{8} \tan \theta$$

$$dx = \sqrt{8} \sec^2 \theta d\theta$$

$$= \int 16\sqrt{2} \tan^3 \theta \cdot \sqrt{8+8\tan^2 \theta} \cdot \sqrt{8} \sec^2 \theta d\theta$$

$$= \int 16\sqrt{2} \tan^3 \theta \cdot \sqrt{8} \sec \theta \cdot \sqrt{8} \sec^2 \theta d\theta$$

$$= 128\sqrt{2} \int \tan^3 \theta \sec^3 \theta d\theta$$

يكفي

$$(35) \int \sqrt{16+x^2} dx$$

$$x = 4 \tan \theta$$

$$dx = 4 \sec^2 \theta d\theta$$

$$= \int \sqrt{16+16 \tan^2 \theta} \cdot 4 \sec^2 \theta d\theta$$

$$= \int 4 \sec \theta \cdot 4 \sec^2 \theta d\theta$$

$$= \int 16 \sec^3 \theta d\theta$$

يكفي

$$(36) \int \frac{1}{\sqrt{4+x^2}} dx$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{4+4\tan^2\theta}} \cdot 2\sec^2\theta d\theta$$

$$= \int \frac{1}{2\sec\theta} \cdot 2\sec^2\theta d\theta$$

$$= \int \sec\theta d\theta$$

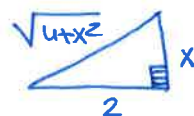
$$= \ln|\sec\theta + \tan\theta| + c = \ln\left|\frac{\sqrt{4+x^2}}{2} + \frac{x}{2}\right| + c$$

$$x = 2 \tan \theta$$

$$dx = 2 \sec^2 \theta \cdot d\theta$$

* مثلث التحويل

$$\tan \theta = x/2$$



$$(38) \int_0^2 x^2 \sqrt{x^2+9} dx$$

$$x = 3 \tan \theta$$

$$dx = 3 \sec^2 \theta d\theta$$

$$= \int 9 \tan^2 \theta \sqrt{9 \tan^2 \theta + 9} \cdot 3 \sec^2 \theta d\theta$$

$$= \int 81 \tan^2 \theta \cdot \sec^3 \theta d\theta$$

$$= \int 81 (\sec^2 \theta - 1) \sec^3 \theta d\theta$$

$$= 81 \int \sec^5 \theta - \sec^3 \theta d\theta$$

كيف ان هذا كد

$$(39) \int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} dx$$

لتعريف ابعادي افضل في هذا السؤال

$$= \int \frac{\tan^3 \theta}{\sqrt{1+\tan^2 \theta}} \cdot \sec^2 \theta d\theta$$

$$x = \tan \theta$$

$$dx = \sec^2 \theta d\theta$$

$$= \int \frac{\tan^3 \theta}{\sec \theta} \cdot \sec^2 \theta d\theta$$

$$= \int \tan^3 \theta \cdot \sec \theta d\theta \quad \text{كثير}$$

$$(40) \int \frac{x+1}{\sqrt{4+x^2}} dx$$

$$x = 2 \tan \theta$$

$$dx = 2 \sec^2 \theta \cdot d\theta$$

$$= \int \frac{2 \tan \theta + 1}{\sqrt{4+4 \tan \theta}} \cdot 2 \sec^2 \theta d\theta$$

$$= \int \frac{2 \tan \theta + 1}{2 \sec \theta} \cdot 2 \sec^2 \theta d\theta$$

$$= \int (2 \tan \theta + 1) \sec \theta d\theta$$

$$= \int 2 \sec \theta \tan \theta + \sec \theta d\theta$$

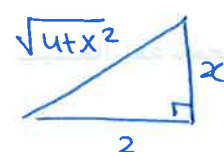
$$= 2 \sec \theta + \ln |\sec \theta + \tan \theta| + C$$

$$= 2 \cdot \frac{\sqrt{4+x^2}}{2} + \ln \left| \frac{\sqrt{4+x^2}}{2} + \frac{x}{2} \right| + C$$

$$= \sqrt{4+x^2} + \ln |\sqrt{4+x^2} + x| + C$$

مثلث التحويل

$$\tan \theta = \frac{x}{2}$$



اسئلة المقال (المسائل الكتابية) من 16 الى 20

مثال 1.6 صفحة 413 من الكتاب

احد هذه الاسئلة يكون السؤال 16

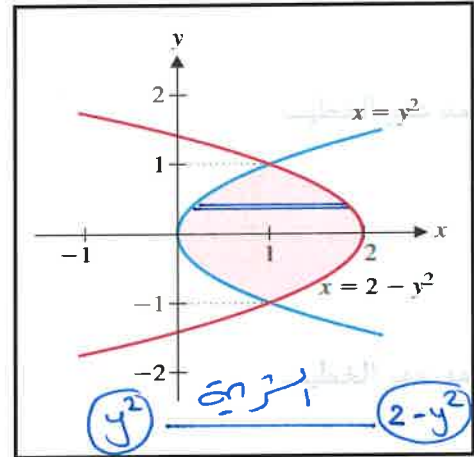
السؤال 16

تمارين 19, 20, 22, 24 صفحة 414 من الكتاب

(مثال 1.6) عبر عن المساحة المحصورة بين العلاقتين بتكامل منفرد ثم اوجد قيمة هذه المساحة

استراتيجية (الكامل) dy

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^1 2 - y^2 - y^2 \, dy \\ &= \int_{-1}^1 2 - 2y^2 \, dy \\ &= \left[2y - \frac{2y^3}{3} \right]_{-1}^1 \\ &= \left(2 - \frac{2}{3} \right) - \left(-2 + \frac{2}{3} \right) \\ &= \frac{8}{3} \end{aligned}$$

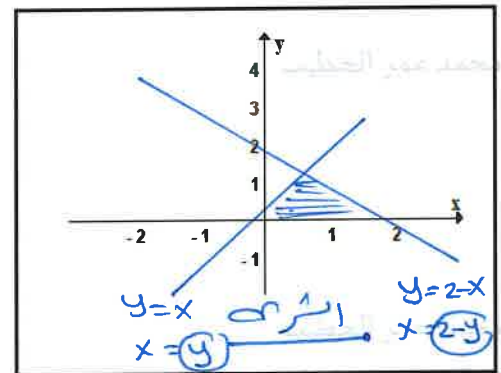


(19) اكتب تكامل منفرد (تكامل واحد) يعبر عن المساحة المحصورة بين الدوال

$y=0$, $y=2-x$, $y=x$ ثم اوجد المساحة

استراتيجية (الكامل) dy

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 2 - y - y \, dy \\ &= \int_0^1 2 - 2y \, dy \\ &= \left[2y - y^2 \right]_0^1 \\ &= 2 - 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$



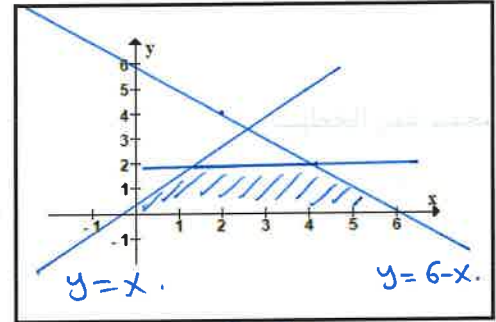
(20) اكتب تكامل منفرد يعبر عن المساحة المحصورة بين الدوال

$$y = x \text{ و } y = 2 \text{ و } y = 6 - x \text{ و } y = 0$$

ارسم أولاً ثم نحلل المنطق

الشريحة يد

$$\begin{aligned} A &= \int_0^2 6 - y - y \, dy \\ &= \int_0^2 6 - 2y \, dy \\ &= [6y - y^2]_0^2 \\ &= 8 - 0 = 8 \end{aligned}$$



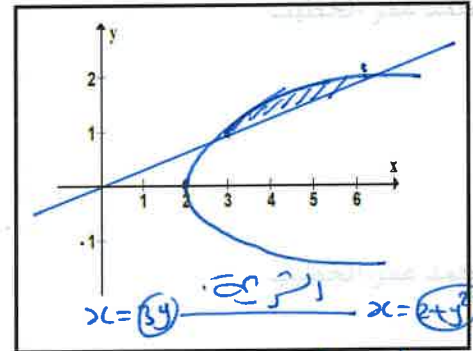
$$x = (y) \text{ الشريحة } x = (6-y)$$

(22) اكتب تكامل منفرد يعبر عن المساحة المحصورة بين المنحنيات $x = 3y$, $x = 2 + y^2$

ارسم ونحلل المنطق

الشريحة يد

$$\begin{aligned} A &= \int_1^2 3y - (2 + y^2) \, dy \\ &= \left[\frac{3y^2}{2} - 2y - \frac{y^3}{3} \right]_1^2 \\ &= -\frac{2}{3} - \left(-\frac{5}{6}\right) \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$



$$2 + y^2 = 3y$$

$$y^2 - 3y + 2 = 0$$

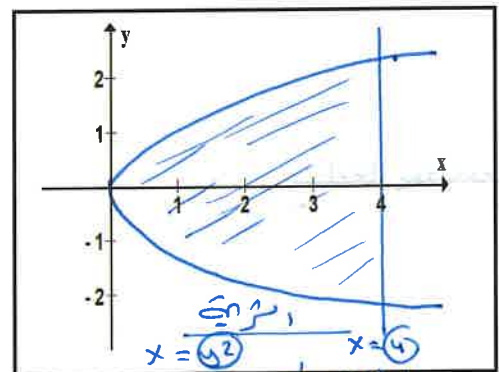
$$y = 1, y = 2$$

(24) اكتب تكامل منفرد يعبر عن المساحة المحصورة بين الدوال $x = y^2$, $x = 4$ ، ثم أوجد المساحة

ارسم ونحلل المنطق

الشريحة يد

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^2 4 - y^2 \, dy \\ &= \left[4y - \frac{y^3}{3} \right]_{-2}^2 \\ &= \frac{16}{3} - \left(-\frac{16}{3}\right) = \frac{32}{3} \end{aligned}$$



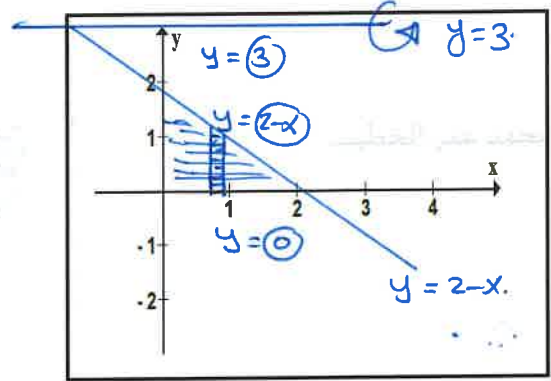
$$y^2 = 4$$

$$y = \pm 2$$

(17) اوجد حجم الجسم الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بواسطة $y = 0$ ، $y = 2 - x$ و $x = 0$

(ب) حول $y = 3$

$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int r_o^2 - r_i^2 dx \\
 &= \pi \int_0^2 3^2 - (1+x)^2 dx \\
 &= \pi \left[9x - \frac{(1+x)^3}{3} \right]_0^2 \\
 &= \pi \left[(18 - 9) - \left(-\frac{1}{3}\right) \right] \\
 &= \frac{28\pi}{3}
 \end{aligned}$$



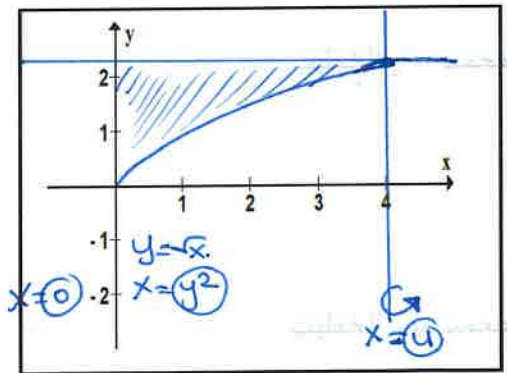
ملفات dx

$$\begin{aligned}
 r_o &= 3 - 0 \\
 r_i &= 3 - (2 - x) \\
 &= 1 + x
 \end{aligned}$$

(19) اوجد حجم الجسم الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بواسطة $y = \sqrt{x}$ ، $y = 2$ و $x = 0$

(ب) حول $x = 4$

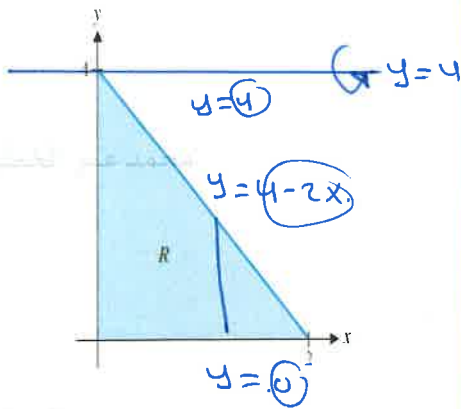
$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int r_o^2 - r_i^2 dy \\
 &= \pi \int_0^2 4^2 - (4 - y^2)^2 dy \\
 &= \pi \int_0^2 16 - (16 - 8y^2 + y^4) dy \\
 &= \pi \int_0^2 8y^2 - y^4 dy \\
 &= \pi \left[\frac{8y^3}{3} - \frac{y^5}{5} \right]_0^2 = \frac{32\pi}{5}
 \end{aligned}$$



ملفات dy

$$\begin{aligned}
 r_o &= 4 - 0 \\
 r_i &= 4 - y^2
 \end{aligned}$$

(25) اوجد حجم الجسم الناتج عن دوران المنطقة R المحدودة بواسطة $y = 4 - 2x$ والمحورين



(c) حول المستقيم $y = 4$ حلقات dx

$$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 dx$$

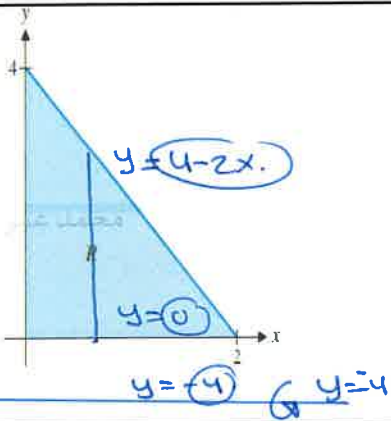
$$= \pi \int_0^2 4^2 - (2x)^2 dx$$

$$= \pi \int_0^2 16 - 4x^2 dx$$

$$= \pi \left[16x - \frac{4}{3}x^3 \right]_0^2$$

$$= \frac{64\pi}{3}$$

$r_o = 4 - 0$
 $r_i = 4 - (4 - 2x)$
 $= 2x$



(d) حول المستقيم $y = -4$ حلقات dx

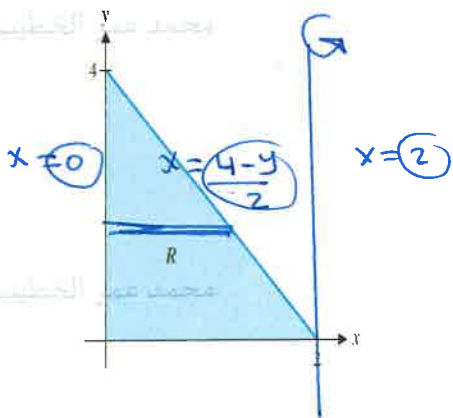
$$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 dx$$

$$= \pi \int_0^2 (8 - 2x)^2 - 4^2 dx$$

$$= \pi \int_0^2 64 - 32x + 4x^2 - 16 dx$$

$$= \pi \left[48x - 16x + \frac{4}{3}x^3 \right]_0^2 = \frac{128\pi}{3}$$

$r_o = 4 - 2x - (-4)$
 $= 8 - 2x$
 $r_i = 0 - (-4)$
 $= 4$



(e) حول المستقيم $x = 2$ حلقات dy

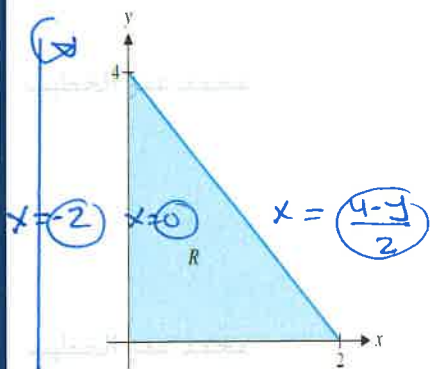
$$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 dy$$

$$= \pi \int_0^4 2^2 - \left(\frac{y}{2}\right)^2 dy$$

$$= \pi \left[4y - \frac{y^3}{12} \right]_0^4$$

$$= \frac{32\pi}{3}$$

$r_o = 2 - 0$
 $r_i = 2 - \left(\frac{y}{2}\right)$
 $= \frac{y}{2}$



(f) حول المستقيم $x = -2$ حلقات dy

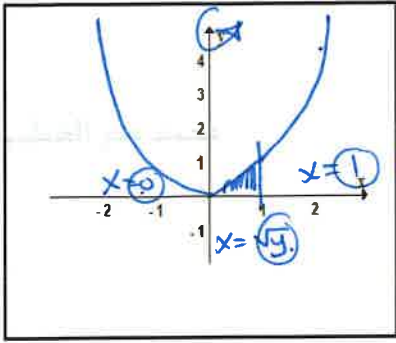
$$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 dy$$

$$= \pi \int_0^4 \left(4 - \frac{y}{2}\right)^2 - 2^2 dy$$

$$= \pi \left[\frac{\left(4 - \frac{y}{2}\right)^3}{3(-\frac{1}{2})} - 4y \right]_0^4 = \frac{256\pi}{3}$$

$r_o = \frac{4-y}{2} - (-2)$
 $= 4 - \frac{y}{2}$
 $r_i = 0 - (-2)$
 $= 2$

(27) اوجد حجم الجسم الناتج عن دوران المنطقة R المحدودة بواسطة $x=1$ و $y=x^2$, $y=0$



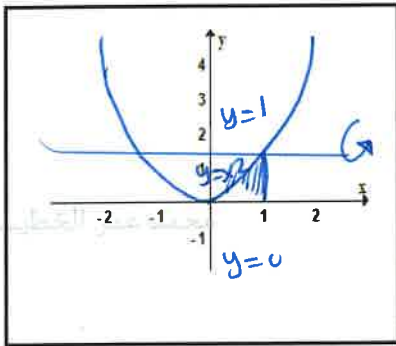
$$\begin{aligned} V &= \pi \int r_o^2 - r_i^2 dy \\ &= \pi \int_0^1 1^2 - (\sqrt{y})^2 dy \\ &= \pi \int_0^1 1 - y dy \\ &= \pi \left[y - \frac{y^2}{2} \right]_0^1 = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

(a) حول محور y

حلقات dy

$$r_o = 1 - 0$$

$$r_i = \sqrt{y} - 0$$



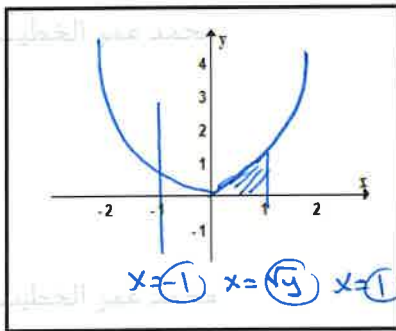
$$\begin{aligned} V &= \pi \int r_o^2 - r_i^2 dx \\ &= \pi \int_0^1 1^2 - (1-x^2)^2 dx \\ &= \pi \int_0^1 1 - (1 - 2x^2 + x^4) dx \\ &= \pi \int_0^1 2x^2 - x^4 dx = \pi \left[\frac{2}{3} x^3 - \frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \frac{7\pi}{15} \end{aligned}$$

(d) حول $y=1$

حلقات dx

$$r_o = 1 - 0$$

$$r_i = 1 - x^2$$



$$\begin{aligned} V &= \pi \int r_o^2 - r_i^2 dy \\ &= \pi \int_0^1 2^2 - (\sqrt{y} + 1)^2 dy \\ &= \pi \int_0^1 4 - (y + 2\sqrt{y} + 1) dy \\ &= \pi \int_0^1 3 - y - 2\sqrt{y} dy \\ &= \pi \left[3y - \frac{y^2}{2} - \frac{4}{3} y^{3/2} \right]_0^1 = \frac{7\pi}{6} \end{aligned}$$

(e) حول $x=-1$

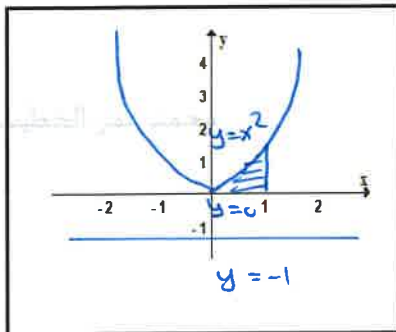
حلقات dy

$$r_o = 1 - (-1)$$

$$= 2$$

$$r_i = \sqrt{y} - (-1)$$

$$= \sqrt{y} + 1$$



$$\begin{aligned} V &= \pi \int r_o^2 - r_i^2 dx \\ &= \pi \int_0^1 (x^2 + 1)^2 - 1^2 dx \\ &= \pi \int_0^1 x^4 + 2x^2 dx \\ &= \pi \left[\frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{13\pi}{15} \end{aligned}$$

(f) حول $y=-1$

حلقات dx

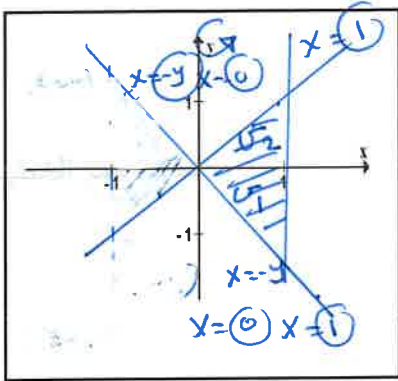
$$r_o = x^2 - (-1)$$

$$= x^2 + 1$$

$$r_i = 0 - (-1)$$

$$= 1$$

(28) اوجد حجم الجسم الناتج عن دوران المنطقة R المحدودة بواسطة $x = +1$ و $y = x$, $y = -x$ بواسطة



يوجد تجزئته مساحة مع dy ليكامل

$$V_1 = \pi \int_{-1}^0 1^2 - (y)^2 dy$$

$$= \pi \left[y - \frac{y^3}{3} \right]_{-1}^0 = \frac{2\pi}{3}$$

$$V_2 = \pi \int_{-1}^0 1^2 - (y)^2 dy$$

$$= \pi \left[y - \frac{y^3}{3} \right]_0^{-1} = \frac{2\pi}{3}$$

$$V = V_1 + V_2 = \frac{2\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$$

(b) حول محور y

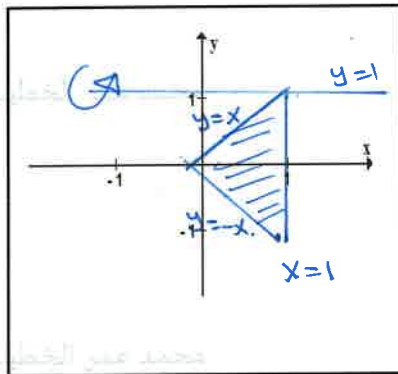
حلقات dy

$$r_o = 1 - 0 = 1$$

$$r_i = -y - 0 = -y$$

$$r_o = 1 - 0 = 1$$

$$r_i = y - 0 = y$$



$$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 dx$$

$$= \pi \int_0^1 (1+x)^2 - (1-x)^2 dx$$

$$= \pi \left[\frac{(1+x)^3}{3} - \frac{(1-x)^3}{3(-1)} \right]_0^1$$

$$= 2\pi$$

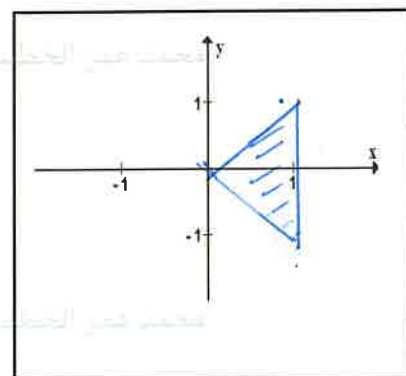
(c) حول المستقيم $y = 1$

حلقات dx

$$r_o = 1 - (-x)$$

$$= 1 + x$$

$$r_i = 1 - x$$



$$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 dx$$

$$= \pi \int_0^1 (x+1)^2 - (1-x)^2 dx$$

$$= \pi \left[\frac{(x+1)^3}{3} - \frac{(1-x)^3}{3(-1)} \right]_0^1$$

$$= 2\pi$$

(d) حول المستقيم $y = -1$

حلقات dx

$$r_o = x - (-1)$$

$$= x + 1$$

$$r_i = -x - (-1)$$

$$= 1 - x$$

(23) عند تعليق حبل بين عمودين البعد بينهما 40 ft اذا كان شكل الحبل يتخذ منحنى معادلته

$$y = 10(e^{x/20} + e^{-x/20}) \quad \text{حيث} \quad -20 \leq x \leq 20$$

اوجد طول الحبل

ملاحظة: عند تعليق حبل بين عمودين البعد بينهما $2L \text{ ft}$ ، و معادلته $y = \frac{2L}{4}(e^{x/L} + e^{-x/L})$ حيث $-L \leq x \leq L$ فان التكامل الذي يمثل طول الحبل هو

$$s = \frac{1}{2} \int_{-L}^L (e^{x/L} + e^{-x/L}) dx = \int_0^L (e^{x/L} + e^{-x/L}) dx$$

$$\begin{aligned} S &= \int_{-20}^{20} \sqrt{1 + (y')^2} dx \\ &= 2 \int_0^{20} \sqrt{1 + (y')^2} dx \\ &= 2 \int_0^{20} \sqrt{1 + \frac{1}{4}((e^{x/20})^2 - 2 + (e^{-x/20})^2)} dx \\ &= 2 \int_0^{20} \sqrt{\frac{4 + (e^{x/20})^2 - 2 + (e^{-x/20})^2}{4}} dx \\ &= \frac{2}{2} \int_0^{20} \sqrt{(e^{x/20})^2 + 2 + (e^{-x/20})^2} dx \\ &= \int_0^{20} \sqrt{(e^{x/20} + e^{-x/20})^2} dx \\ &= \int_0^{20} (e^{x/20} + e^{-x/20}) dx = \left[\frac{e^{x/20}}{1/20} + \frac{e^{-x/20}}{-1/20} \right]_0^{20} = 20(e - e^{-1}) = 47. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= 10(e^{x/20} + e^{-x/20}) \\ y' &= 10(e^{x/20} \cdot \frac{1}{20} + e^{-x/20} \cdot (-\frac{1}{20})) \\ &= \frac{10}{20}(e^{x/20} - e^{-x/20}) \\ &= \frac{1}{2}(e^{x/20} - e^{-x/20}) \\ (y')^2 &= \frac{1}{4}(e^{x/20} - e^{-x/20})^2 \\ &= \frac{1}{4}((e^{x/20})^2 - 2e^{x/20} \cdot e^{-x/20} + (e^{-x/20})^2) \\ &= \frac{1}{4}((e^{x/20})^2 - 2 + (e^{-x/20})^2) \end{aligned}$$

(24) عند تعليق حبل بين عمودين البعد بينهما 60 ft إذا كان شكل الحبل يتخذ منحنى معادلته

$$y = 15(e^{x/30} + e^{-x/30}) \quad \text{حيث} \quad -30 \leq x \leq 30$$

أوجد طول الحبل

$$S = \int_{-30}^{30} \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

$$= 2 \int_0^{30} \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

$$= 2 \int_0^{30} \sqrt{1 + \frac{1}{4} \left((e^{x/30})^2 - 2 + (e^{-x/30})^2 \right)} dx$$

$$= 2 \int_0^{30} \sqrt{\frac{4 + (e^{x/30})^2 - 2 + (e^{-x/30})^2}{4}} dx$$

$$= \frac{2}{2} \int_0^{30} \sqrt{(e^{x/30})^2 + 2 + (e^{-x/30})^2} dx$$

$$= \int_0^{30} \sqrt{(e^{x/30} + e^{-x/30})^2} dx$$

$$= \int_0^{30} e^{x/30} + e^{-x/30} dx$$

$$= \left[\frac{e^{x/30}}{1/30} + \frac{e^{-x/30}}{-1/30} \right]_0^{30}$$

$$= 30 [e - e^{-1}]$$

$$= 70.5'$$

$$y = 15(e^{x/30} + e^{-x/30})$$

$$y' = 15 \left(e^{x/30} \cdot \left(\frac{1}{30}\right) + e^{-x/30} \left(-\frac{1}{30}\right) \right)$$

$$= \frac{15}{30} (e^{x/30} - e^{-x/30})$$

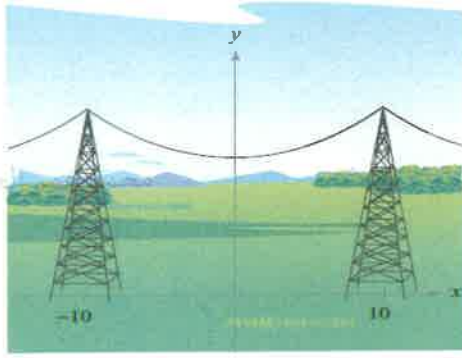
$$= \frac{1}{2} (e^{x/30} - e^{-x/30})$$

$$(y')^2 = \frac{1}{4} (e^{x/30} - e^{-x/30})^2$$

$$= \frac{1}{4} \left((e^{x/30})^2 - 2e^{x/30} \cdot e^{-x/30} + (e^{-x/30})^2 \right)$$

$$= \frac{1}{4} \left((e^{x/30})^2 - 2 + (e^{-x/30})^2 \right)$$

(25) يمثل الشكل المجاور كابل كهربائي يمتد بين عمودين للكهرباء والمسافة بينهم 20 m



حيث تمثل المعادلة

$$y = 5(e^{x/10} + e^{-x/10})$$

ارتفاع الكابل عند أي مسافة x حيث $-10 \leq x \leq 10$

الارتخاء

$$sag = y(10) - y(0)$$

أوجد طول الكابل ثم أوجد قيمة الارتخاء

(الفرق بين ارتفاع الكابل عند الأطراف والوسط)

$$S = \int_{-10}^{10} \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

$$= 2 \int_0^{10} \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

$$= 2 \int_0^{10} \sqrt{1 + \frac{1}{4}((e^{x/10})^2 - 2 + (e^{-x/10})^2)} dx$$

$$= 2 \int_0^{10} \sqrt{\frac{4 + (e^{x/10})^2 - 2 + (e^{-x/10})^2}{4}} dx$$

$$= \frac{2}{2} \int_0^{10} \sqrt{(e^{x/10})^2 + 2 + (e^{-x/10})^2} dx$$

$$= \int_0^{10} \sqrt{(e^{x/10} + e^{-x/10})^2} dx$$

$$= \int_0^{10} (e^{x/10} + e^{-x/10}) dx = \left[\frac{e^x}{1/10} + \frac{e^{-x}}{-1/10} \right]_0^{10} = 10(e - e^{-1}) = 23.5$$

$$* Sag = y(10) - y(0) = 5(e + e^{-1}) - 5(e^0 + e^0) = 5.43$$

$$y = 5(e^{x/10} + e^{-x/10})$$

$$y' = 5(e^{x/10} \cdot \frac{1}{10} + e^{-x/10} \cdot (-\frac{1}{10}))$$

$$= \frac{5}{10}(e^{x/10} - e^{-x/10})$$

$$= \frac{1}{2}(e^{x/10} - e^{-x/10})$$

$$(y')^2 = \frac{1}{4}(e^{x/10} - e^{-x/10})^2$$

$$= \frac{1}{4}((e^{x/10})^2 - 2e^{x/10} \cdot e^{-x/10} + (e^{-x/10})^2)$$

$$= \frac{1}{4}((e^{x/10})^2 - 2 + (e^{-x/10})^2)$$

اوجد كل من التكاملات التالية

(9) $\int e^x \sin 4x \, dx$

استخدم التكامل الجبري (الطريقة بالكررة)

$$I = \int e^x \sin u x \, dx.$$

$$\begin{array}{rcl} \frac{u}{e^x} & & \frac{dv}{\sin 4x} \\ & \searrow + & \\ e^x & & -\frac{\cos 4x}{4} \\ & \searrow - & \\ e^x & & -\frac{\sin 4x}{16} \end{array}$$

$$I = -\frac{1}{4} e^x \cos u x + \frac{1}{16} e^x \sin u x - \int \frac{1}{16} e^x \sin u x \, dx.$$

$$= -\frac{1}{4} e^x \cos u x + \frac{1}{16} e^x \sin u x - \frac{1}{16} I$$

$$I + \frac{1}{16} I = -\frac{1}{4} e^x \cos u x + \frac{1}{16} e^x \sin u x + c$$

$$\frac{17}{16} I = -\frac{1}{4} e^x \cos u x + \frac{1}{16} e^x \sin u x + c$$

$$I = -\frac{4}{17} e^x \cos 4x + \frac{1}{17} e^x \sin 4x + c.$$

(10) $\int e^{2x} \cos x \, dx$

$$I = \int e^{2x} \cos x \, dx$$

$$\begin{array}{rcl} \frac{u}{e^{2x}} & & \frac{dv}{\cos x} \\ & \searrow + & \\ 2e^{2x} & & \sin x \\ & \searrow - & \\ u e^{2x} & & -\cos x \end{array}$$

$$I = e^{2x} \sin x + 2e^{2x} \cos x - 4 \int e^{2x} \cos x \, dx$$

$$= e^{2x} \sin x + 2e^{2x} \cos x - 4I$$

$$I + 4I = e^{2x} \sin x + 2e^{2x} \cos x + c.$$

$$5I = e^{2x} \sin x + 2e^{2x} \cos x + c$$

$$I = \frac{1}{5} e^{2x} \sin x + \frac{2}{5} e^{2x} \cos x + c$$

$$\int e^{2x} \cos x \, dx = \frac{1}{5} e^{2x} \sin x + \frac{2}{5} e^{2x} \cos x + c.$$

$$(11) \int \cos x \cos 2x \, dx$$

$$I = \int \cos x \cos 2x \, dx$$

<u>u</u>	<u>du</u>
$\cos x$	$\cos 2x$
$-\sin x$	$\frac{\sin 2x}{2}$
$-\cos x$	$-\frac{\cos 2x}{4}$

$$I = \frac{1}{2} \cos x \sin 2x - \frac{1}{4} \sin x \cos 2x + \frac{1}{4} \int \cos x \cdot \cos 2x \, dx$$

$$I = \frac{1}{2} \cos x \sin 2x - \frac{1}{4} \sin x \cos 2x + \frac{1}{4} I$$

نقل الى الطرف الايسر.

$$I - \frac{1}{4} I = \frac{1}{2} \cos x \sin 2x - \frac{1}{4} \sin x \cos 2x + C$$

$$\frac{3}{4} I = \frac{1}{2} \cos x \sin 2x - \frac{1}{4} \sin x \cos 2x + C$$

$$I = \frac{2}{3} \cos x \sin 2x - \frac{1}{3} \sin x \cos 2x + C$$

$$\therefore \int \cos x \cos 2x \, dx = \frac{2}{3} \cos x \sin 2x - \frac{1}{3} \sin x \cos 2x + C$$

$$(14) \int (\ln x)^2 \, dx$$

هذا اهم سؤال في هذه المجموعة

$$= \int u^2 \cdot x \, du$$

$$= \int u^2 e^u \, du$$

$$= u^2 e^u - 2u e^u + 2e^u + C$$

$$= (\ln x)^2 \cdot x - 2(\ln x) \cdot x + 2x + C$$

$$= x(\ln x)^2 - 2 \ln x + 2x + C$$

تعويض

$$\begin{aligned} u &= \ln x \\ \frac{du}{dx} &= \frac{1}{x} \\ x \, du &= dx \\ \ln x &= u \\ x &= e^u \end{aligned}$$

اجزاء

u^2	e^u
$2u$	e^u
2	e^u
0	e^u

أوجد التكاملات التالية

$$(21) \int \frac{1}{x^2 \sqrt{9-x^2}} dx$$

$$x = 3 \sin \theta, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

$$dx = 3 \cos \theta d\theta$$

$$= \int \frac{1}{9 \sin^2 \theta \sqrt{9 - 9 \sin^2 \theta}} \cdot 3 \cos \theta d\theta$$

$$= \int \frac{1}{9 \sin^2 \theta \cdot 3 \cos \theta} \cdot 3 \cos \theta d\theta$$

$$= \int \frac{1}{9 \sin^2 \theta} d\theta$$

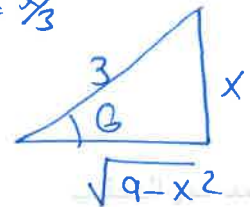
$$= \frac{1}{9} \int \csc^2 \theta d\theta$$

$$= -\frac{1}{9} \cot \theta + C$$

$$= -\frac{1}{9} \frac{\sqrt{9-x^2}}{x} + C = -\frac{\sqrt{9-x^2}}{9x} + C$$

مثلث التحويل

$$\sin \theta = \frac{x}{3}$$



$$(22) \int \frac{1}{x^2 \sqrt{16-x^2}} dx$$

$$x = 4 \sin \theta, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

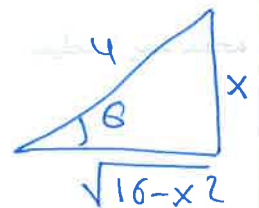
$$dx = 4 \cos \theta d\theta$$

$$= \int \frac{1}{16 \sin^2 \theta \sqrt{16 - 16 \sin^2 \theta}} \cdot 4 \cos \theta d\theta$$

$$= \int \frac{1}{16 \sin^2 \theta \cdot 4 \cos \theta} \cdot 4 \cos \theta d\theta$$

$$= \frac{1}{16} \int \csc^2 \theta d\theta$$

$$= -\frac{1}{16} \cot \theta + C = -\frac{1}{16} \frac{\sqrt{16-x^2}}{x} + C$$



$$(23) \int \frac{x^2}{\sqrt{16-x^2}} dx$$

$$x = 4 \sin \theta \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

$$dx = 4 \cos \theta d\theta$$

$$= \int \frac{16 \sin^2 \theta}{\sqrt{16-16 \sin^2 \theta}} \cdot 4 \cos \theta d\theta$$

$$= \int \frac{16 \sin^2 \theta}{4 \cos \theta} \cdot 4 \cos \theta d\theta$$

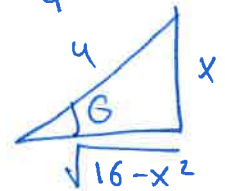
$$= 16 \int \sin^2 \theta d\theta$$

$$= 16 \cdot \int \frac{1}{2} (1 - \cos 2\theta) d\theta$$

$$= 8(\theta - \frac{\sin 2\theta}{2}) + C$$

$$= 8(\theta - \sin \theta \cos \theta) + C = 8\left(\sin^{-1}\left(\frac{x}{4}\right) - \frac{x}{4} \cdot \frac{\sqrt{16-x^2}}{4}\right)$$

$$= 8 \sin^{-1}\left(\frac{x}{4}\right) - \frac{1}{2} x \sqrt{16-x^2} + C$$



$$(24) \int \frac{x^3}{\sqrt{9-x^2}} dx$$

$$x = 3 \sin \theta$$

$$dx = 3 \cos \theta d\theta$$

$$= \int \frac{27 \sin^3 \theta}{\sqrt{9-9 \sin^2 \theta}} \cdot 3 \cos \theta d\theta$$

$$= 27 \int \frac{\sin^3 \theta}{3 \cos \theta} \cdot 3 \cos \theta d\theta$$

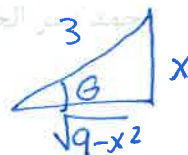
$$= 27 \int \sin^3 \theta d\theta$$

$$= 27 \int \sin \theta \sin^2 \theta d\theta$$

$$= 27 \int \sin \theta (1 - \cos^2 \theta) d\theta$$

$$= 27 \int \sin \theta (1 - u^2) \frac{du}{-\sin \theta}$$

$$= 27 \int (u^2 - 1) du = 27\left(\frac{u^3}{3} - u\right) + C$$



$$u = \cos \theta$$

$$\frac{du}{d\theta} = -\sin \theta$$

$$\frac{du}{-\sin \theta} = d\theta$$

$$= 9 \cos^3 \theta - 27 \cos \theta + C$$

$$= 9 \left(\frac{\sqrt{9-x^2}}{3}\right)^3 - 27 \frac{\sqrt{9-x^2}}{3}$$

$$= \frac{1}{3} (\sqrt{9-x^2})^3 - 9 \sqrt{9-x^2} + C$$

انتهت الأسئلة ... نتمنى لكم التوفيق والنجاح