



HOSSAMBAYOUMI199

مادة الرياضيات

الفصل الدراسي الأول

٢٠٢٤ - ٢٠٢٥

نماذج محلولة لامتحان التقويمي الثاني

الصف الثاني عشر علمي

إعداد : أ. حسام بيومي



أولاً: الأسئلة المقالية:

السؤال الأول:

لتكن الدالة f : $f(x) = \sqrt{x^2 - 7x + 10}$

أوجد D_f (مجال الدالة f) ثم ادرس اتصال الدالة f على $[6, 10]$

أولاً: نوجد مجال الدالة f

نفرض أن $f(x) = \sqrt{g(x)}$ حيث $g(x) = x^2 - 7x + 10$

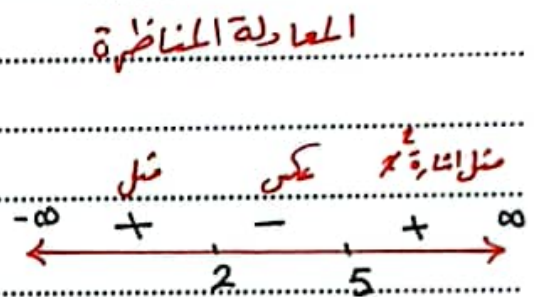
$$D_f = \{x : g(x) \geq 0\}$$

$$x^2 - 7x + 10 \geq 0$$

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$

$$(x-2)(x-5) = 0$$

$$x = 2, \quad x = 5$$



∴ مجال الدالة f هو $(-\infty, 2] \cup [5, \infty)$ أو $(2, 5) \cup \mathbb{R}$

ثانياً: ندرس اتصال الدالة f على $[6, 10]$

الدالة g : $g(x) = x^2 - 7x + 10$ كثيرة حدود متصلة على $[6, 10]$ ①

$$g(x) \geq 0 \quad \forall x \in (-\infty, 2] \cup [5, \infty)$$

∴ $[6, 10]$ مجموعة جزئية من $(-\infty, 2] \cup [5, \infty)$

$$② \leftarrow g(x) \geq 0 \quad \forall x \in [6, 10]$$

منه ①، ② نستنتج أن

الدالة f متصلة على $[6, 10]$

لتكن $f : \begin{cases} x^2 - 4 & : x \leq 2 \\ 3x - 2 & : x > 2 \end{cases}$ ابحث قابلية الاشتقاق عند $x = 2$

نبحث اتصال الدالة f عند $x = 2$

$$f(2) = 2^2 - 4 = 0$$

النهاية من جهة اليمين

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (3x - 2) = 3(2) - 2 = 4$$

النهاية من جهة اليسار

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 - 4) = 2^2 - 4 = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$$

الدالة f غير متصلة عند $x = 2$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \text{ غير موجودة}$$

الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند $x = 2$

ثانياً: الأسئلة الموضوعية:

أولاً: في البند التالي: ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة وظلل (b) إذا كانت العبارة خاطئة:



(b)

$$\frac{dy}{dx} = 1 + \sin x \text{ فإن } y = 1 + x - \cos x$$

ثانياً: في البند التالي ظلل الرمز الدال على الإجابة الصحيحة:

ميل مماس منحنى $y = x^2 + 5x$ عند $x = 3$ يساوي:

(a) 24

(b) $-\frac{5}{2}$

11

(d) 8

إعداد: أ. حسام بيومي

أولاً: الأسئلة المقالية:

السؤال الأول:

ادرس اتصال الدالة f على مجالها حيث:

$$f(x) = \begin{cases} x+3 & : x \leq -1 \\ \frac{4}{x+3} & : x > -1 \end{cases}$$

$$D_f = (-\infty, -1] \cup (-1, \infty) = \mathbb{R}$$

أولاً ندرس اتصال الدالة f على الفترة $[-\infty, -1]$

نفرض $g(x) = x+3$

الدالة g كثيرة حدود متصلة على $\mathbb{R}$

$$\therefore f(x) = g(x) \quad \forall x \in (-\infty, -1]$$

في الدالة f متصلة على $[-\infty, -1]$ ← ①

ثانياً ندرس اتصال الدالة f على الفترة $(-1, \infty)$

نفرض $h(x) = \frac{4}{x+3}$

الدالة h حدودية نسبية متصلة لكل $x \in \mathbb{R} - \{-3\}$

$$\therefore f(x) = h(x) \quad \forall x \in (-1, \infty)$$

في الدالة f متصلة على $(-1, \infty)$ ← ②

ثالثاً ندرس الدالة f عند $x = -1$ من جهة اليمين.

$$f(-1) = -1 + 3 = ②$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \left(\frac{4}{x+3} \right) = \frac{4}{2} = ②$$

$$\therefore f(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$$

في الدالة f متصلة عند $x = -1$ من جهة اليمين ③

مع أدلة وثانياً وثالثاً مبررات

الدالة f متصلة على $\mathbb{R}$

أي أن الدالة f متصلة على مجالها.

السؤال الثاني:

لتكن الدالة f :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x & : x \leq -1 \\ x^2 - x - 2 & : x > -1 \end{cases}$$

$$f(-1) = (-1)^2 + (-1) = 0$$

أوجد إن أمكن $f'(-1)$.

المشتقة من جهة اليسار

المشتقة من جهة اليمين

$$f'_-(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)}$$

$$f'_+(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 + x - 0}{x + 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 - x - 2 - 0}{x + 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x(x+1)}{x+1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{(x+1)(x-2)}{x+1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1^-} x = -1$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1^+} (x-2) = -1-2 = -3$$

$$\therefore f'_-(-1) \neq f'_+(-1)$$

$\therefore f'(-1)$ غير موجودة

ثانياً: الأسئلة الموضوعية:

أولاً: في البند التالي: ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة وظلل (b) إذا كانت العبارة خاطئة:

(a)



إذا كانت $y = -x^2 + 3$ فإن $\frac{dy}{dx} = -2$

ثانياً: في البند التالي ظلل الرمز الدال على الإجابة الصحيحة:

إذا كانت $f(x) = 3x + x \tan x$ فإن $f'(0)$ يساوي:

(a) -3

(b) 0

(c) 1

3

إعداد: أ. حسام بيومي

أولاً: الأسئلة المعقالية:

السؤال الأول:

أوجد معادلة المماس ومعادلة النازم عند النقطة $(1, \frac{2}{3})$ لمنحنى الدالة $f(x) = \frac{x^3+1}{x^2+2}$ حيث

$$(x^3+1)' = 3x^2$$

$$(x^2+2)' = 2x$$

$$f'(x) = \frac{(3x^2)(x^2+2) - (x^3+1)(2x)}{(x^2+2)^2}$$

الميل $\downarrow$

$$m = f'(1) = \frac{(3(1)^2)(1^2+2) - (1^3+1)(2(1))}{(1^2+2)^2}$$

$$m = \frac{5}{9} \Rightarrow \frac{-1}{m} = \frac{-1}{\frac{5}{9}} = -\frac{9}{5}$$

معادلة النازم

$$y - y_1 = \frac{-1}{m}(x - x_1)$$

$$y - \frac{2}{3} = -\frac{9}{5}(x - 1)$$

$$y = -\frac{9}{5}x + \frac{9}{5} + \frac{2}{3}$$

$$y = -\frac{9}{5}x + \frac{37}{15}$$

معادلة المماس

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - \frac{2}{3} = \frac{5}{9}(x - 1)$$

$$y = \frac{5}{9}x - \frac{5}{9} + \frac{2}{3}$$

$$y = \frac{5}{9}x + \frac{1}{9}$$

السؤال الثاني:

$$f(x) = \begin{cases} -2 & : x = 1 \\ x^2 - 3 & : 1 < x < 3 \\ 6 & : x = 3 \end{cases} \quad \text{ادرس اتصال الدالة } f \text{ على } [1, 3] \text{ حيث:}$$

$$x^2 - 3$$

أولاً ندرس اتصال الدالة f على $(1, 3)$

$$g(x) = x^2 - 3 \quad \text{نفرض}$$

الدالة g كثيرة حدود مستمرة على $\mathbb{R}$

$$\therefore f(x) = g(x) \quad \forall x \in (1, 3)$$

$\therefore$ الدالة f مستمرة على $(1, 3)$ ①

ثانياً ندرس اتصال الدالة f عند $x = 1$ من اليمين

من اليسار

$$f(3) = 6$$

$$f(1) = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (x^2 - 3) = 3^2 - 3 = 6$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 - 3) = 1 - 3 = -2$$

$$f(3) = \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$$

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$$

$\therefore$ الدالة f مستمرة عند $x = 3$ من اليسار

$\therefore$ الدالة f مستمرة عند $x = 1$ من اليمين

مع أمثلة وثانياً وثالثاً

الدالة f مستمرة على $[1, 3]$

ثانياً: الأسئلة الموضوعية:

أولاً: في البند التالي: ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة وظلل (b) إذا كانت العبارة خاطئة:



(b)

إذا كانت f ، $f(x) = 3x - 12$ فإن $f'(x) = 3$.

ثانياً: في البند التالي ظلل الرمز الدال على الإجابة الصحيحة:

إذا كانت $y = \frac{1}{\sin x}$ فإن y' تساوي:

(a) $\cot x \cdot \csc x$

(b) $\cos x$

(c) $-\cot x \cdot \csc x$

(d) $-\cos x$

إعداد: أ. حسام بيومي

أولاً: الأسئلة المقالية:

السؤال الأول:

لتكن الدالة f : $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & : x \leq 2 \\ 4x - 3 & : x > 2 \end{cases}$ دالة متصلة على مجالها.

أوجد $f'(x)$ إن أمكن.

$$D_f = (-\infty, 2] \cup (2, \infty) = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & : x < 2 \\ 4 & : x = 2 \\ 4 & : x > 2 \end{cases}$$

$$f(2) = 2^2 + 1 = 5$$

$$f'_-(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \quad \text{انوجدت} \quad f'_+(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \quad \text{انوجدت}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 + 1 - 5}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^-} (x+2) = 2+2 = 4$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{4x - 3 - 5}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{4x - 8}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{4(x-2)}{x-2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^+} 4 = 4$$

$$f'_-(2) = f'_+(2) = 4 \Rightarrow f'(2) = 4$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & : x < 2 \\ 4 & : x = 2 \\ 4 & : x > 2 \end{cases}$$

السؤال الثاني:

أوجد معادلة المماس ومعادلة الناقص لمنحنى الدالة $y = \frac{8}{4+x^2}$ عند النقطة $(2, 1)$.

$$f'(x) = \frac{-8(4+x^2)^{-1}}{(4+x^2)^2} = \frac{-8(2x)}{(4+x^2)^2}$$

$$= \frac{-16x}{(4+x^2)^2}$$

الميل

$$m = f'(2) = \frac{-16(2)}{(4+(2)^2)^2} = -\frac{1}{2}$$

معادلة الناقص

$$y - y_1 = \frac{-1}{m}(x - x_1)$$

$$y - 1 = \frac{-1}{-\frac{1}{2}}(x - 2)$$

$$y - 1 = 2(x - 2)$$

$$y = 2x - 4 + 1$$

$$y = 2x - 3$$

معادلة المماس

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 2)$$

$$y = -\frac{1}{2}x + 1 + 1$$

$$y = -\frac{1}{2}x + 2$$

ثانياً: الأسئلة الموضوعية:

أولاً: في البند التالي: ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة وظلل (b) إذا كانت العبارة خاطئة:

(a)



إذا كانت f دالة متصلة على كل من $[1, 3]$, $[3, 5]$ فإن f متصلة على $[1, 5]$

ثانياً: في البند التالي ظلل الرمز الدال على الإجابة الصحيحة:

إذا كانت $y = \frac{1}{x} + 5 \sin x$ فإن $\frac{dy}{dx}$ تساوي:

(a)

$$-\frac{1}{x^2} - 5 \cos x$$

(b)

$$\frac{1}{x^2} + 5 \cos x$$

(c)

$$-\frac{1}{x^2} + 5 \cos x$$

(d)

$$\frac{1}{x^2} - 5 \cos x$$

إعداد: أ. حسام بيومي

أولاً: الأسئلة المقالية:

السؤال الأول:

لتكن $f(x) = x^3$. أوجد $f'(x)$ باستخدام تعريف المشتقة إن وجدت.

إن وجدت $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$$\begin{aligned} f(x+h) &= (x+h)^3 \\ &= (x+h)(x+h)^2 \\ &= (x+h)(x^2 + 2xh + h^2) \\ &= x^3 + 2x^2h + xh^2 + x^2h + 2xh^2 + h^3 \\ &= x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 \end{aligned} \quad \left| \quad f(x) = x^3 \right.$$

بالتعويض من التعريف

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(3x^2 + 3xh + h^2)}{h}$$

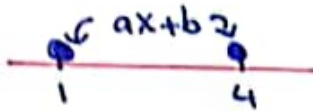
$$= 3x^2 + 3x(0) + (0)^2$$

$$= 3x^2$$

إعداد: أ. حسام بيومي

السؤال الثاني :

لتكن الدالة f :
 $f(x) = \begin{cases} 5 & : x = 1 \\ ax + b & : 1 < x < 4 \\ b + 8 & : x = 4 \end{cases}$ متصلة على $[1, 4]$.



أوجد قيم الثابتين a, b .

:- الدالة f متصلة على $[1, 4]$.

الدالة f متصلة عند $x=1$ من اليمين : الدالة f متصلة عند $x=4$ من اليسار :

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = f(4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} (ax + b) = b + 8$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (ax + b) = 5$$

$$4a + b = b + 8$$

$$a(1) + b = 5$$

$$4a = \cancel{b} + 8 - \cancel{b}$$

$$a + b = 5 \quad \text{نضع من } a = 2$$

$$4a = 8$$

$$2 + b = 5$$

$$a = 2$$

$$b = 5 - 2$$

$$b = 3$$

ثانياً: الأسئلة الموضوعية:

أولاً: في البند التالي: ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة وظلل (b) إذا كانت العبارة خاطئة:



(b)

إذا كانت $y = 1 + x - \cos x$ فإن $\frac{dy}{dx} = 1 + \sin x$

ثانياً: في البند التالي ظلل الرمز الدال على الإجابة الصحيحة:

الدالة : $f(x) = x + \sqrt{x^2} + 2$ ليست قابلة للاشتقاق عند $x = 0$ والسبب هو

- (a) ناب (b) ركن (c) مماس عمودي (d) غير متصلة