



المقرر رياضيات 6

1-3 الضرب الداخلي Dot Product

الصفحة ٢٦

يقدمه الأستاذ/

عبد الوهاب نوفيق العوهلي

$$v + u = \langle x_1 + x_2, y_1 + y_2 \rangle$$

$$v - u = \langle x_1 - x_2, y_1 - y_2 \rangle$$

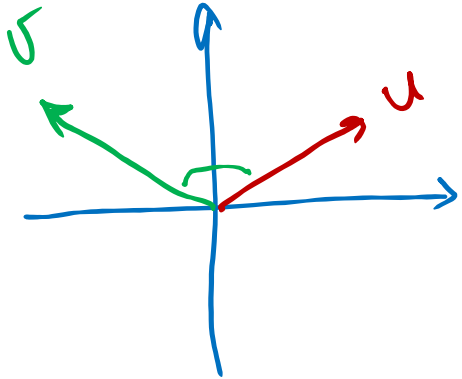
$$k \cdot v = \langle kx_1, ky_1 \rangle$$

$v \cdot u$ ضرب داخلي

$v \times u$ ضرب خارجي

المقرر رياضيات 6 1-3 الضرب الداخلي

سنتعرف في هذا الدرس على ..



٢
الزاوية بين
متجهين →

١
الضرب الداخلي $u \cdot v$

٤
التقويم

٣
حساب الشغل

$$W = \vec{F} \cdot \vec{u}$$

المقرر رياضيات 6

1-3 الضرب الداخلي



وزارة التعليم
Ministry of Education

لماذا؟



تحمل كلمة الشغل معانٍ متعددة في الحياة اليومية، إلا أن لها معنى محددًا في الفيزياء، وهو مقدار القوة المؤثرة في جسم مضروبة في المسافة، التي يتحركها الجسم في اتجاه القوة. ومثال ذلك: الشغل المبذول لدفع سيارة مسافة محددة. ويمكن حساب هذا الشغل باستعمال عملية على المتجهات تسمى الضرب الداخلي.

المقرر رياضيات 6

1-3 الضرب الداخلي



وزارة التعليم
Ministry of Education

مفهوم أساسي

الضرب الداخلي لمتجهين في المستوى الإحداثي

يُعرف الضرب الداخلي للمتجهين $a = \langle a_1, a_2 \rangle$, $b = \langle b_1, b_2 \rangle$ كالآتي :

$$\underline{a \cdot b = a_1 b_1 + a_2 b_2} = 0 \quad (\text{محدد})$$

لاحظ أنه خلافاً لعمليتي الجمع والضرب في عدد حقيقي على المتجهات، فإن حاصل الضرب الداخلي لمتجهين يكون عددًا وليس متجهًا. ويتعامد متجهان غير صفريين، إذا وفقط إذا كان حاصل ضربهما الداخلي صفرًا. ويقال للمتجهين اللذين حاصل ضربهما الداخلي صفرًا: متجهان متعامدان.

مفهوم أساسي

المتجهان المتعامدان

يكون المتجهان غير الصفريين a, b متعامدين، إذا وفقط إذا كان $\underline{a \cdot b = 0}$.

المقرر رياضيات 6

1-3 الضرب الداخلي



وزارة التعليم
Ministry of Education

مثال ١

استعمال الضرب الداخلي للتحقق من تعامد متجهين

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين u, v ، ثم تحقق مما إذا كانا متعامدين .

$$u = \langle 2, 5 \rangle, v = \langle 8, 4 \rangle \quad (b)$$

$$\begin{aligned} u \cdot v &= (2)(8) + (5)(4) \\ &= 16 + 20 = 36 \quad \checkmark \end{aligned}$$

المتجهان غير متعامدين

$$u = \langle 3, 6 \rangle, v = \langle -4, 2 \rangle \quad (a)$$

$$\begin{aligned} u \cdot v &= (3)(-4) + (6)(2) \\ &= -12 + 12 = 0 \end{aligned}$$

المتجهان متعامدان

المقرر رياضيات 6

1-3 الضرب الداخلي



وزارة التعليم
Ministry of Education

تحقق من فهمك ١

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين u, v ، ثم تحقق مما إذا كانا متعامدين .

$$u = \langle -2, -3 \rangle, v = \langle 9, -6 \rangle \quad (1B)$$

$$\begin{aligned} u \cdot v &= (-2)(9) + (-3)(-6) \\ &= -18 + 18 = 0 \end{aligned}$$

المتجهان متعامدان

$$u = \langle 3, -2 \rangle, v = \langle -5, 1 \rangle \quad (1A)$$

$$\begin{aligned} u \cdot v &= (3)(-5) + (-2)(1) \\ &= -15 + (-2) \\ &= -17 \end{aligned}$$

المتجهان غير متعامدين

$$u \cdot v = \langle -18, 18 \rangle$$

طريقة خاطئة

المقرر رياضيات 6

1-3 الضرب الداخلي



وزارة التعليم
Ministry of Education

نظرية

خصائص الضرب الداخلي

إذا كانت u, v, w متجهات، وكان k عدداً حقيقياً، فإن الخصائص الآتية صحيحة:

✓ $u \cdot v = v \cdot u$

$$u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$$

$$k(u \cdot v) = k u \cdot v = u \cdot (k v)$$

ملحظة (صفرية) $\rightarrow 0 \cdot u = 0$ ← مكرر

$$u \cdot u = |u|^2$$

الخاصية الإبدالية

خاصية التوزيع

خاصية الضرب في عدد حقيقي

خاصية الضرب الداخلي في المتجه الصفري

العلاقة بين الضرب الداخلي وطول المتجه

$$\langle 0, 0 \rangle \cdot \langle a, b \rangle = 0 + 0 = 0$$

مكرر
ممكن

$$\langle a, b \rangle \cdot \langle a, b \rangle = a^2 + b^2 = |u|^2$$

المقرر رياضيات 6

1-3 الضرب الداخلي



وزارة التعليم
Ministry of Education

مثال ٢

استعمال الضرب الداخلي لإيجاد طول المتجه

استعمل الضرب الداخلي؛ لإيجاد طول $a = \langle -5, 12 \rangle$.

$$|a|^2 = a \cdot a = 25 + 144 = 169$$

$$|a| = \sqrt{169} = 13$$



$$\begin{aligned} |a| &= \sqrt{(-5)^2 + (12)^2} \\ &= \sqrt{25 + 144} \\ &= \sqrt{169} \\ &= 13 \end{aligned}$$



المقرر رياضيات 6

1-3 الضرب الداخلي



وزارة التعليم
Ministry of Education

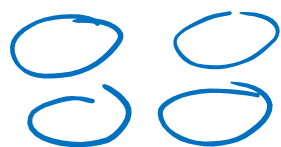
تحقق من فهمك ٢

استعمل الضرب الداخلي؛ لإيجاد طول كلٍّ من المتجهات الآتية :

$$c = \langle -1, -7 \rangle \quad (2B)$$

$$|c|^2 = 1 + 49 = 50$$

$$|c| = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$



$$b = \langle 12, 16 \rangle \quad (2A)$$

$$|b|^2 = 144 + 256 = 400$$

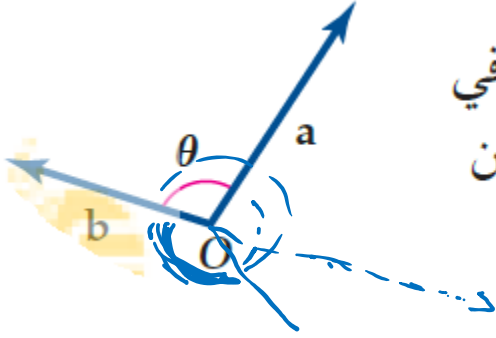
$$|b| = \sqrt{400} = 20$$

المقرر رياضيات 6

1-3 الضرب الداخلي



وزارة التعليم
Ministry of Education



الزاوية θ بين أي متجهين غير صفريين a, b هي الزاوية بين هذين المتجهين، عندما يكونان في وضع قياسي كما في الشكل المجاور، حيث إن: $0 \leq \theta \leq \pi$ ، أو $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ ، ويمكن استعمال الضرب الداخلي؛ لإيجاد قياس الزاوية بين متجهين غير صفريين.

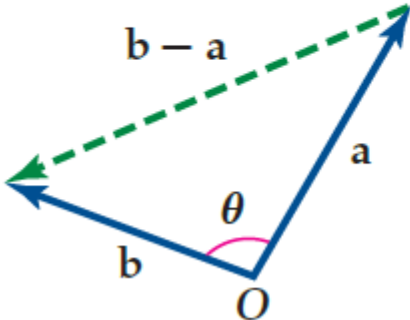
مفهوم أساسي

الزاوية بين متجهين

إذا كانت θ هي الزاوية بين متجهين غير صفريين a, b ، فإن:

$$\cos \theta = \frac{a \cdot b}{|a| |b|}$$

$$\theta = \cos^{-1} \frac{a \cdot b}{|a| |b|}$$



المقرر رياضيات 6

1-3 الضرب الداخلي



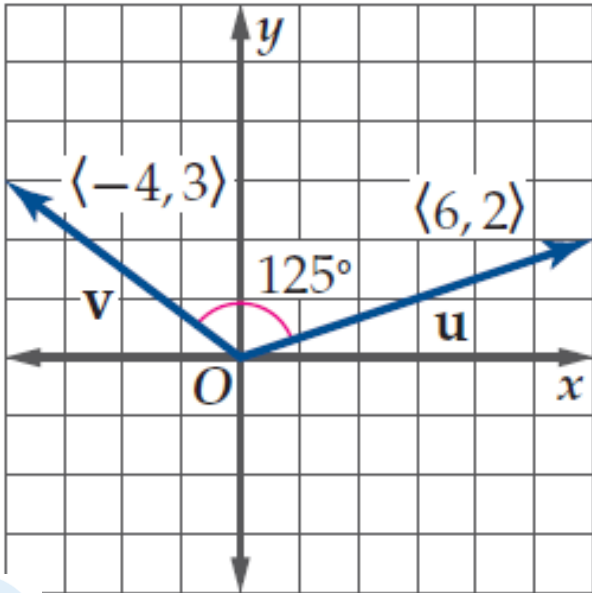
وزارة التعليم
Ministry of Education

مثال ٣

إيجاد قياس الزاوية بين متجهين

أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين u, v في كل مما يأتي:

(a) $u = \langle 6, 2 \rangle, v = \langle -4, 3 \rangle$



$$\theta = \cos^{-1} \frac{u \cdot v}{|u||v|}$$

$$= \cos^{-1} \frac{(6)(-4) + (2)(3)}{\sqrt{6^2 + 2^2} \sqrt{(-4)^2 + 3^2}} = \cos^{-1} \frac{-24 + 6}{\sqrt{36 + 4} \sqrt{16 + 9}}$$

$$= \cos^{-1} \frac{-18}{\sqrt{40} \sqrt{25}} \approx \underline{124.7^\circ}$$



المقرر رياضيات 6

1-3 الضرب الداخلي



وزارة التعليم
Ministry of Education

مثال ٣

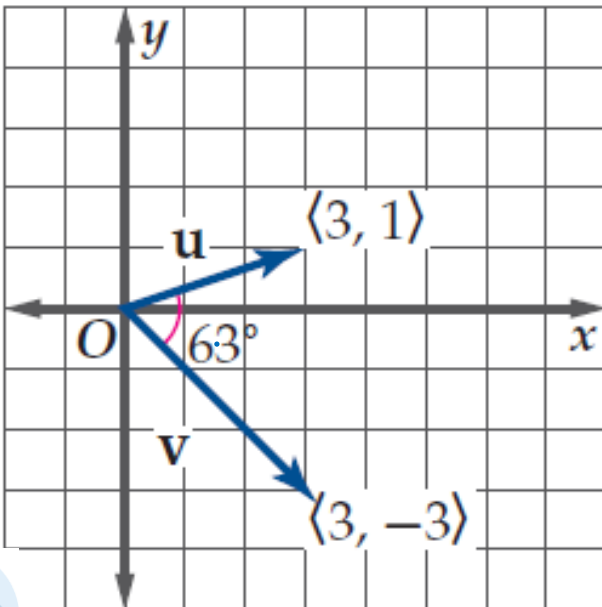
إيجاد قياس الزاوية بين متجهين

أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كل مما يأتي:

$$\mathbf{u} = \langle 3, 1 \rangle, \mathbf{v} = \langle 3, -3 \rangle \quad (\text{b})$$

$$\theta = \cos^{-1} \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}| |\mathbf{v}|} = \cos^{-1} \frac{9 - 3}{\sqrt{9+1} \sqrt{9+9}}$$

$$= \cos^{-1} \frac{6}{\sqrt{10} \sqrt{18}} = 63.4^\circ \quad \checkmark$$



المقرر رياضيات 6

1-3 الضرب الداخلي

تحقق من فهمك ٣

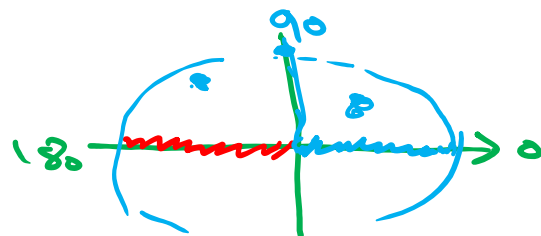
$$\theta = \cos^{-1} \frac{(u \cdot v)}{\|u\| \|v\|} \leftarrow$$

أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين u, v في كل مما يأتي:

(3B) $u = \langle 9, 5 \rangle, v = \langle -6, 7 \rangle$

$$\theta = \cos^{-1} \frac{-54 + 35}{\sqrt{81+25} \sqrt{36+49}} \leftarrow$$

$$= \cos^{-1} \frac{-19}{\sqrt{106} \sqrt{85}} \approx 102^\circ$$



(3A) $u = \langle -5, -2 \rangle, v = \langle 4, 4 \rangle$

$$\theta = \cos^{-1} \frac{-20 - 8}{\sqrt{25+4} \sqrt{16+16}}$$

$$= \cos^{-1} \frac{-28}{\sqrt{29} \sqrt{32}}$$

$$\approx 157^\circ$$

المقرر رياضيات 6

1-3 الضرب الداخلي



وزارة التعليم
Ministry of Education

الزاوية بين متجهين

إذا كان لدينا المتجهين (غير صفريين) u و v فإن:

$$u \cdot v < 0$$

زاوية منفرجة

$$90^\circ < \theta \leq 180^\circ$$

$$u \cdot v = 0$$

زاوية قائمة

$$\theta = 90^\circ$$

$$u \cdot v > 0$$

زاوية حادة

$$0^\circ < \theta < 90^\circ$$

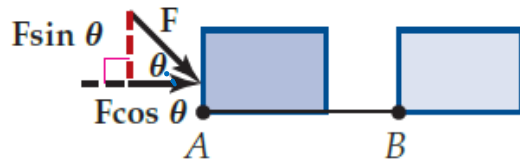
المقرررياضيات 6

1-3 الضرب الداخلي



وزارة التعليم
Ministry of Education

من التطبيقات على الضرب الداخلي للمتجهات، حساب الشغل الناتج عن قوة، فإذا كانت F قوة مؤثرة في جسم لتحريكه من النقطة A إلى B كما في الشكل أدناه، وكانت F موازية لـ $\overrightarrow{AB}$ ، فإن الشغل W الناتج عن F يساوي مقدار القوة F مضروباً في المسافة من A إلى B ، أو $W = |F||\overrightarrow{AB}|$.



ولحساب الشغل الناتج من قوة ثابتة F ، بأي اتجاه لتحريك جسم من النقطة A إلى B ، كما في الشكل المجاور، يمكنك استعمال الصيغة:

$$W = \mathbf{F} \cdot \overrightarrow{AB}$$

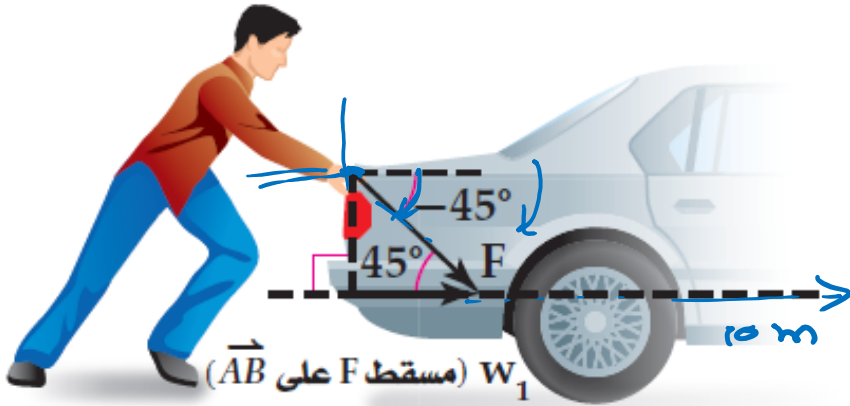
أي أنه يمكن حساب هذا الشغل بإيجاد الضرب الداخلي بين القوة الثابتة F ، والمسافة المتجهة $\overrightarrow{AB}$ بعد كتابتهما في الصورة الإحداثية.

المقرر رياضيات 6

1-3 الضرب الداخلي



وزارة التعليم
Ministry of Education



حساب الشغل

مثال ٤

$$\theta = -45^\circ$$

سيارة: يدفع شخص سيارة بقوة ثابتة مقدارها 120 N بزاوية 45° كما في الشكل المجاور، أوجد الشغل المبذول بالجلول لتحريك السيارة 10 m (بإهمال قوة الاحتكاك).

$$\vec{F} = \langle 120 \cos(-45) , 120 \sin(-45) \rangle$$

$$\vec{F} = \langle 60\sqrt{2} , -60\sqrt{2} \rangle$$

$$\vec{AB} = \langle 10 , 0 \rangle$$

$$\begin{aligned} W &= \vec{F} \cdot \vec{AB} = \langle 60\sqrt{2} , -60\sqrt{2} \rangle \cdot \langle 10 , 0 \rangle = 600\sqrt{2} + 0 \\ &= 848.5 \text{ J} \end{aligned}$$



المقرر رياضيات 6

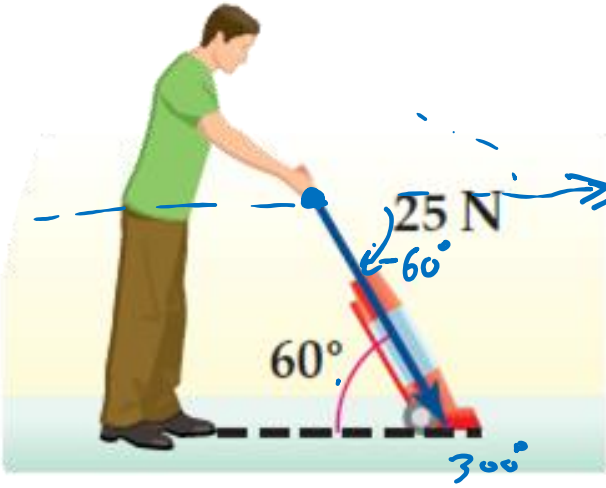
1-3 الضرب الداخلي



وزارة التعليم
Ministry of Education

تحقق من فهمك ٤

(4) **تنظيف:** يدفع إبراهيم مكنسة كهربائية بقوة مقدارها 25 N، إذا كان قياس الزاوية بين ذراع المكنسة وسطح الأرض 60° ، فأوجد الشغل بالجول الذي بذله إبراهيم عند تحريك المكنسة مسافة 6 m؟



$$\vec{F} = \langle 25 \cos(60), 25 \sin(60) \rangle$$
$$= \langle 12.5, -\frac{25\sqrt{3}}{2} \rangle$$

$$\vec{AB} = \langle 6, 0 \rangle$$

$$W = \vec{F} \cdot \vec{AB} = \langle 12.5, -\frac{25\sqrt{3}}{2} \rangle \cdot \langle 6, 0 \rangle = 75 + 0$$
$$= 75 \text{ J}$$



المقرر رياضيات 6

1-3 الضرب الداخلي



وزارة التعليم
Ministry of Education

تعرفنا على..

٢

الزاوية بين
متجهين

$$\theta = \cos^{-1} \frac{u \cdot v}{|u||v|}$$

١

الضرب الداخلي

$$u \cdot v$$

٤

التقويم

٣

حساب الشغل

$$W = \vec{F} \cdot \vec{AB}$$

المقرر رياضيات 6

1-3 الضرب الداخلي



وزارة التعليم
Ministry of Education

التقويم

أوجد حاصل الضرب الداخلي للمتجهين u, v ، ثم تحقق مما إذا كانا متعامدين أم لا.

$$u = \langle 9, -3 \rangle, v = \langle 1, 3 \rangle \quad (2)$$

$$u \cdot v = 9 - 9 = 0$$

متعامدان

$$u = \langle 3, -5 \rangle, v = \langle 6, 2 \rangle \quad (1)$$

$$u \cdot v = 18 + (-10) = 8$$

غير متعامدين

المقرر رياضيات 6

1-3 الضرب الداخلي



وزارة التعليم
Ministry of Education

التقويم

أوجد حاصل الضرب الداخلي للمتجهين u, v ، ثم تحقق مما إذا كانا متعامدين أم لا.

$$u = 11i + 7j, v = -7i + 11j \quad (4)$$

$$u \cdot v = -77 + 77 = 0$$

المتجهان متعامدان

$$u = \langle 4, -4 \rangle, v = \langle 7, 5 \rangle \quad (3)$$

$$u \cdot v = 28 - 20 = 8$$

غير متعامدين

المقرر رياضيات 6

1-3 الضرب الداخلي

التقويم

استعمل الضرب الداخلي؛ لإيجاد طول المتجه المعطى.

$$\mathbf{r} = \langle -9, -4 \rangle \quad (8)$$

$$|\mathbf{r}|^2 = 81 + 16 = 97$$

$$|\mathbf{r}| = \sqrt{97}$$

$$\mathbf{m} = \langle -3, 11 \rangle \quad (7)$$

$$|\mathbf{m}|^2 = 9 + 121 = 130$$

$$|\mathbf{m}| = \sqrt{130}$$

المقرر رياضيات 6

1-3 الضرب الداخلي



وزارة التعليم
Ministry of Education

التقويم

أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين u, v في كل مما يأتي، وقرب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة.

$$\theta = \cos^{-1} \frac{u \cdot v}{|u||v|} \quad u = \langle 0, -5 \rangle, v = \langle 1, -4 \rangle \quad (11)$$

$$= \cos^{-1} \frac{0 + 20}{\sqrt{0+25} \sqrt{1+16}} = \cos^{-1} \frac{20}{\sqrt{25} \sqrt{17}} \approx 14^\circ$$



المقرر رياضيّات 6

1-3 الضرب الداخلي



وزارة التعليم
Ministry of Education

التقويم

أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين u, v في كلٍّ مما يأتي، وقرب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة.

$$\theta = \cos^{-1} \frac{28 - 40}{\sqrt{49 + 100} \sqrt{16 + 16}}$$

$$u = \langle 7, 10 \rangle, v = \langle 4, -4 \rangle \quad (12)$$

$$= \cos^{-1} \frac{-12}{\sqrt{149} \sqrt{32}} = 100^\circ$$

المقرر رياضيات 6

1-3 الضرب الداخلي



وزارة التعليم
Ministry of Education

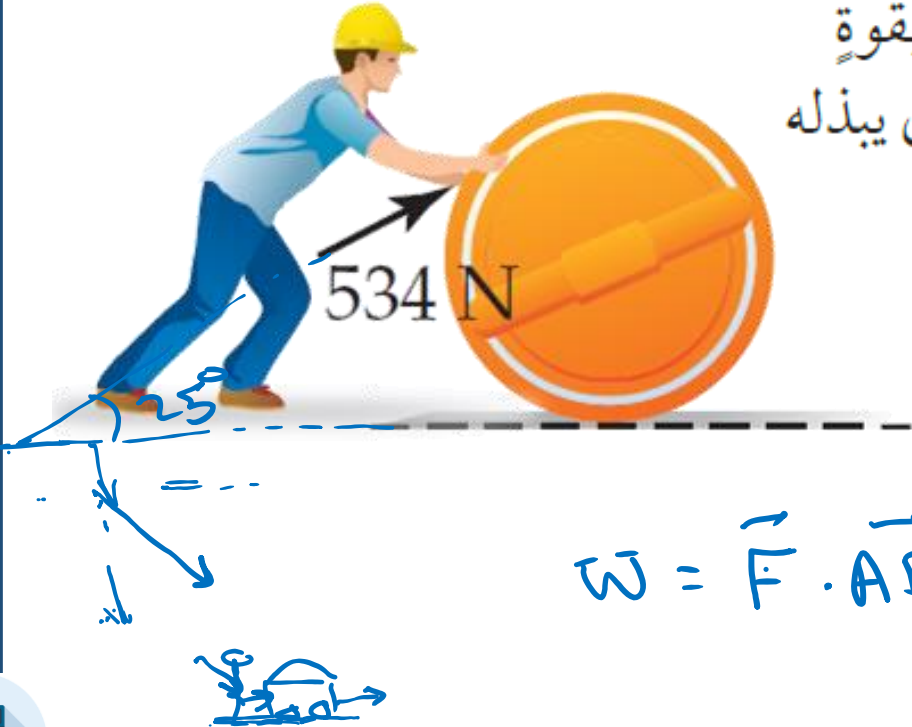
التقويم

(16) فيزياء: يدفع طارق برميلاً على أرضٍ مستوية مسافة 1.5 m بقوة مقدارها 534 N؛ بزاوية 25° ، أوجد مقدار الشغل بالجول الذي يبذله طارق، وقرّب الناتج إلى أقرب عدد صحيح.

$$\vec{F} = \langle 534 \cos 25^\circ, 534 \sin 25^\circ \rangle$$

$$\vec{AB} = \langle 1.5, 0 \rangle$$

$$\begin{aligned} W &= \vec{F} \cdot \vec{AB} = (534)(\cos 25^\circ)(1.5) + (534)(\sin 25^\circ)(0) \\ &= 726 + 0 = 726 \text{ J} \end{aligned}$$





وزارة التعليم

Ministry of Education

شكراً لمتابعتكم
إلى اللقاء في الدروس القادمة

أخوكم

عبد الوهاب نوفيتو العوهلي