



الصف الثاني عشر متقدم

2024/2023



الوحدة السابعة

طرائق التكامل



مع تمنياتي لكم بالنجاح والتفوق

إعداد : محمد عمر الخطيب

الوحدة السابعة: طرق التكامل /// الدرس الأول: مراجعة الصيغ وطرق التكامل

ملاحظة: راجع قواعد التكامل

صيغ وقواعد التكامل

$$(1) \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, n \neq -1$$

$$* \int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + c$$

$$(2) \int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$$

$$(3) \int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$* \int \sin(ax+b) dx = \frac{-\cos(ax+b)}{a} + c$$

$$(4) \int \cos x dx = \sin x + c$$

$$(5) \int \sec^2 x dx = \tan x + c$$

$$(6) \int \csc^2 x dx = -\cot x + c$$

$$(7) \int \sec x \tan x dx = \sec x + c$$

$$(8) \int \csc x \cot x dx = -\csc x + c$$

$$(9) \int e^x dx = e^x + c$$

$$* \int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + c$$

$$* \int f'(x) e^{f(x)} dx = e^{f(x)} + c$$

$$(10) \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$$

$$* \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c$$

$$(11) \int \frac{1}{x^2+1} dx = \tan^{-1} x + c$$

$$* \int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a} \tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

$$(12) \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sin^{-1} x + c$$

$$* \int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

$$(13) \int \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}} dx = \sec^{-1} x + c$$

$$* \int \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-a^2}} dx = \frac{1}{a} \sec^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

خواص التكامل غير المحدود

$$(1) \int k f(x) dx = k \int f(x) dx$$

$$(2) \int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

يتوزع التكامل على الجمع والطرح

ولا يتوزع على الضرب أو القسمة

مراجعة قواعد التكامل الأساسية و التكامل بالتعويض

أوجد التكاملات التالية:

$$(1) \int e^{ax} dx \quad a \neq 0 = \frac{e^{ax}}{a} + C = \frac{1}{a} e^{ax} + C$$

$$(2) \int \sin 6t \, dt = \frac{-\cos 6t}{6} + C = -\frac{1}{6} \cos 6t + C$$

$$(3) \int \sec 2t \tan 2t \, dt = \frac{\sec 2t}{2} + C = \frac{1}{2} \sec 2t + C.$$

$$(4) \int \cos(ax) dx \quad a \neq 0 = \frac{\sin ax}{a} + C = \frac{1}{a} \sin ax + C$$

$$(5) \int (x^2 + 4)^2 dx = \int (x^4 + 8x^2 + 16) dx = \frac{1}{5} x^5 + \frac{8}{3} x^3 + 16x + C$$

$$(6) \int \frac{2}{4+4x^2} dx = \frac{2}{4} \int \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \tan^{-1} x + C$$

$$(7) \int \frac{1}{\sqrt{4-4x^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{4(1-x^2)}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{1}{2} \sin^{-1} x + C$$

$$(8) \int x\sqrt{x} + \frac{1}{2x} dx = \int x^{3/2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{2}{5} x^{5/2} + \frac{1}{2} \ln|x| + C$$

$$(9) \int e^{3-2x} - \frac{1}{x^2} dx = \int e^{3-2x} + x^{-2} dx = \frac{e^{3-2x}}{-2} + \frac{x^{-1}}{-1} + C$$

$$= -\frac{1}{2} e^{3-2x} - \frac{1}{x} + C.$$

$$(10) \int \frac{x^2+1}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{x^2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{x^2}{x^{1/2}} + \frac{1}{x^{1/2}} dx$$

$$= \int x^{3/2} dx + \int x^{-1/2} dx = \frac{2}{5} x^{5/2} + 2x^{1/2} + C$$

$$(11) \int \frac{\sin t + 1}{\cos^2 t} dt = \int \frac{\sin t}{\cos^2 t} + \frac{1}{\cos^2 t} dt = \int \sec t \tan t + \sec^2 t dt$$

$$= \sec t + \tan t + C.$$

$$(1) \int \frac{4x^3 - 1}{x^4 - x} dx = \ln |x^4 - x| + C \quad \text{البط = مشتقة الباط}$$

$$(2) \int \frac{x^5}{1+x^6} dx = \frac{1}{6} \int \frac{6x^5}{1+x^6} dx = \frac{1}{6} \ln |1+x^6| + C$$

$$(3) \int \frac{e^{2x}}{7+e^{2x}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2e^{2x}}{7+e^{2x}} dx = \frac{1}{2} \ln |7+e^{2x}| + C$$

$$(4) \int \frac{t+1}{t^2+2t+2} dt = \frac{1}{2} \int \frac{2(t+1)}{t^2+2t+2} dt = \frac{1}{2} \ln |t^2+2t+2| + C$$

$$(5) \int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int \frac{-\sin x}{\cos x} dx = -\ln |\cos x| + C$$

$$(6) \int \cot 2x \, dx = \int \frac{\cos 2x}{\sin 2x} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2 \cos 2x}{\sin 2x} dx = \frac{1}{2} \ln |\sin 2x| + C$$

$$(7) \int \frac{1+x}{1+x^2} dx = \int \frac{1}{1+x^2} dx + \int \frac{x}{1+x^2} dx = \int \frac{1}{1+x^2} dx + \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} dx = \tan^{-1} x + \frac{1}{2} \ln |1+x^2| + C$$

أوجد التكاملات التالية:

التكامل بالتعويض
نفرهن

$$(1) \int x(x^2-1)^3 dx$$

$$= \int x u^3 \frac{du}{2x}$$

$$= \frac{1}{2} \int u^3 du$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{u^4}{4} + C = \frac{1}{8} (x^2-1)^4 + C.$$

$$u = x^2 - 1$$

$$\frac{du}{dx} = 2x$$

$$\frac{du}{2x} = dx$$

$$(2) \int \frac{2x^3}{\sqrt{1-x^4}} dx = \int 2x^3 (1-x^4)^{-1/2} dx$$

$$= \int 2x^3 u^{-1/2} \frac{du}{-4x^3}$$

$$= -\frac{1}{2} \int u^{-1/2} du = -\frac{1}{2} \cdot 2 u^{1/2} + C = - (1-x^4)^{1/2} + C.$$

$$u = 1 - x^4$$

$$\frac{du}{dx} = -4x^3$$

$$\frac{du}{-4x^3} = dx$$

$$(3) \int \frac{\ln x}{2x} dx$$

$$= \int \frac{u}{2x} \cdot x du$$

$$= \frac{1}{2} \int u du = \frac{1}{2} \frac{u^2}{2} + C = \frac{1}{4} (\ln x)^2 + C$$

$$u = \ln x$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$x du = dx$$

$$(4) \int \frac{3}{16+x^2} dx = \frac{3}{16} \int \frac{1}{1+\frac{x^2}{16}} dx$$

$$= \frac{3}{16} \int \frac{1}{1+(\frac{x}{4})^2} dx$$

$$= \frac{3}{16} \int \frac{1}{1+u^2} 4 du = \frac{3}{4} \tan^{-1} u + C = \frac{3}{4} \tan^{-1} \left(\frac{x}{4} \right) + C.$$

ملاحظة: هذه صيغة تكامل (الأفضل حفظها)

$$\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a} \tan^{-1} \left(\frac{x}{a} \right) + C$$

$$u = \frac{x}{4}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{4}$$

$$4 du = dx$$

أوجد التكاملات التالية:

$$(1) \int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$$

$$= \int \frac{\sin u}{\sqrt{x}} \cdot 2\sqrt{x} du$$

$$= 2 \int \sin u du$$

$$= -2 \cos u + C = -2 \cos \sqrt{x} + C$$

$$u = \sqrt{x}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$2\sqrt{x} du = dx$$

$$(2) \int \frac{\cos(1/x)}{x^2} dx$$

$$= \int \frac{\cos u}{x^2} (-x^2) du$$

$$= - \int \cos u du$$

$$= -\sin u + C = -\sin\left(\frac{1}{x}\right) + C$$

$$u = \frac{1}{x}$$

$$\frac{du}{dx} = -\frac{1}{x^2}$$

$$-x^2 du = dx$$

$$(3) \int \frac{\tan^{-1} 2x}{1+4x^2} dx$$

$$= \int \frac{u}{1+4x^2} \cdot \frac{1+4x^2}{2} du$$

$$= \frac{1}{2} \int u du$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{u^2}{2} + C = \frac{1}{4} (\tan^{-1} 2x)^2 + C$$

$$u = \tan^{-1} 2x$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{1+(2x)^2} \cdot 2$$

$$\frac{1+4x^2}{2} du = dx$$

$$(4) \int \frac{\sin x \cos x}{\sin^2 x - 4} dx$$

$$= \int \frac{u \cos x}{u^2 - 4} \frac{du}{\cos x}$$

$$= \int \frac{u}{u^2 - 4} du$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{2u}{u^2 - 4} du = \frac{1}{2} \ln|u^2 - 4| + C = \frac{1}{2} \ln|\sin^2 x - 4| + C$$

$$u = \sin x$$

$$\frac{du}{dx} = \cos x$$

$$\frac{du}{\cos x} = dx$$

حكم حل الجوال على انه لايحل = مستنقذ اناس

أوجد التكاملات التالية:

$$u = \frac{2}{x^2} = -2x^{-2}$$

$$\frac{du}{dx} = -4x^{-3} = \frac{4}{x^3}$$

$$\frac{x^3}{4} du = dx$$

$$(1) \int \frac{e^{\frac{-2}{x^2}}}{x^3} dx$$

$$= \int \frac{e^u}{x^3} \cdot \frac{x^3}{4} du$$

$$= \frac{1}{4} \int e^u du$$

$$= \frac{1}{4} e^u + C$$

$$= \frac{1}{4} e^{-2/x^2} + C$$

$$(2) \int \frac{e^{\tan x}}{1 - \sin^2 x} dx = \int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x} dx$$

$$= \int \sec^2 x e^{\tan x} dx$$

$$= e^{\tan x} + C$$

أو التعويض

$$u = \tan x$$

$$(3) \int \frac{e^x}{\sqrt{1 - e^{2x}}} dx = \int \frac{e^x}{\sqrt{1 - (e^x)^2}} dx$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} \frac{du}{e^x}$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} du = \sin^{-1} u + C = \sin^{-1} e^x + C$$

$$u = e^x$$

$$\frac{du}{dx} = e^x$$

$$\frac{du}{e^x} = dx$$

$$(4) \int \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx = \int \frac{e^x}{1 + (e^x)^2} dx$$

$$= \int \frac{1}{1 + u^2} \cdot \frac{du}{e^x}$$

$$= \int \frac{1}{1 + u^2} du = \tan^{-1} u + C = \tan^{-1}(e^x) + C$$

$$u = e^x$$

$$\frac{du}{dx} = e^x$$

$$\frac{du}{e^x} = dx$$

$$(1) \int \frac{x^2}{x^6+1} dx = \int \frac{x^2}{(x^3)^2+1} dx$$

$$u = x^3$$

$$\frac{du}{dx} = 3x^2$$

$$\frac{du}{3x^2} = dx$$

$$= \int \frac{\cancel{x}}{u^2+1} \cdot \frac{du}{3\cancel{x^2}}$$

$$= \frac{1}{3} \int \frac{1}{u^2+1} du$$

$$= \frac{1}{3} \tan^{-1} u + c = \frac{1}{3} \tan^{-1}(x^3) + c$$

$$(2) \int \frac{x^3}{x^8+1} dx = \int \frac{x^3}{(x^4)^2+1} dx$$

$$u = x^4$$

$$\frac{du}{dx} = 4x^3$$

$$\frac{du}{4x^3} = dx$$

$$= \int \frac{\cancel{x^3}}{u^2+1} \cdot \frac{du}{4\cancel{x^3}}$$

$$= \frac{1}{4} \int \frac{1}{u^2+1} du$$

$$= \frac{1}{4} \tan^{-1}(u) + c = \frac{1}{4} \tan^{-1}(x^4) + c$$

$$(3) \int \frac{x}{\sqrt{4-x^4}} dx = \int \frac{x}{\sqrt{4-(x^2)^2}} dx$$

$$u = x^2$$

$$\frac{du}{dx} = 2x$$

$$\frac{du}{2x} = dx$$

$$\frac{du}{2x} \quad * a=2$$

$$= \int \frac{\cancel{x}}{\sqrt{4-u^2}} \cdot \frac{du}{2\cancel{x}}$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{4-u^2}} du$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sin^{-1}\left(\frac{u}{2}\right) + c = \frac{1}{2} \sin^{-1}\left(\frac{x^2}{2}\right) + c$$

$$(1) \int x(x-1)^5 dx$$

$$= \int x u^5 du$$

$$= \int (u+1) u^5 du$$

$$= \int u^6 + u^5 du = \frac{1}{7} u^7 + \frac{1}{6} u^6 + C$$

$$= \frac{1}{7} (x-1)^7 + \frac{1}{6} (x-1)^6 + C$$

$$u = x-1$$

$$\frac{du}{dx} = 1$$

$$du = dx$$

$$x-1 = u$$

$$x = u+1$$

$$(2) \int x\sqrt{x-3} dx = \int x(x-3)^{1/2} dx$$

$$= \int x u^{1/2} du$$

$$= \int (u+3) u^{1/2} du$$

$$= \int u^{3/2} + 3u^{1/2} du$$

$$= \frac{2}{5} u^{5/2} + 3 \cdot \frac{2}{3} u^{3/2} + C = \frac{2}{5} (x-3)^{5/2} + 2 (x-3)^{3/2} + C$$

$$u = x-3$$

$$\frac{du}{dx} = 1$$

$$du = dx$$

$$x-3 = u$$

$$x = u+3$$

$$(3) \int \frac{3}{x+\sqrt{x}} dx$$

$$= \int \frac{3}{x+u} \cdot 2\sqrt{x} du$$

$$= \int \frac{3}{u^2+u} \cdot 2 \cdot u du$$

$$= \int \frac{6u}{u(u+1)} du = 6 \ln|u+1| + C$$

$$= 6 \ln|\sqrt{x}+1| + C$$

$$u = \sqrt{x}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$2\sqrt{x} du = dx$$

$$\sqrt{x} = u$$

$$x = u^2$$

$$(1) \int x^3 \sqrt{x^2 - 1} dx$$

$$= \int x^3 \sqrt{u} \frac{du}{2x}$$

$$= \frac{1}{2} \int x^2 \sqrt{u} du$$

$$= \frac{1}{2} \int (u+1) u^{\frac{1}{2}} du$$

$$= \frac{1}{2} \int u^{\frac{3}{2}} + u^{\frac{1}{2}} du$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{2}{5} u^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \right] + C$$

$$= \frac{1}{5} (x^2 - 1)^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{3} (x^2 - 1)^{\frac{3}{2}} + C$$

$$u = x^2 - 1$$

$$\frac{du}{dx} = 2x$$

$$\frac{du}{2x} = dx$$

$$x^2 - 1 = u$$

$$x^2 = u + 1$$

$$(2) \int \frac{\sqrt{x}}{x+1} dx$$

$$= \int \frac{u}{u^2 + 1} \cdot 2\sqrt{x} du$$

$$= \int \frac{2u^2}{u^2 + 1} du$$

$$= \int 2 - \frac{2}{u^2 + 1} du$$

$$= 2u - 2 \tan^{-1} u + C$$

$$= 2\sqrt{x} - 2 \tan^{-1} \sqrt{x} + C$$

$$u = \sqrt{x}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$2\sqrt{x} du = dx$$

$$\sqrt{x} = u$$

$$x = u^2$$

$$\frac{2u^2}{u^2 + 1} = \frac{2u^2 + 2 - 2}{u^2 + 1} = 2 - \frac{2}{u^2 + 1}$$

ملاحظة: هذه صيغة تكامل (الافضل حفظها)

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

$$(1) \int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \int \frac{1}{a^2 \left(\frac{x^2}{a^2} + 1 \right)} dx$$

$$= \frac{1}{a^2} \int \frac{1}{\left(\frac{x}{a} \right)^2 + 1} dx$$

$$= \frac{1}{a^2} \int \frac{1}{u^2 + 1} \cdot a du = \frac{1}{a} \tan^{-1} u + c$$

$$= \frac{1}{a} \tan^{-1} \left(x/a \right) + c$$

$$u = \frac{x}{a} = \frac{1}{a} x$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{a}$$

$$a du = dx$$

ملاحظة: هذه صيغة تكامل (الافضل حفظها)

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

$$(2) \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \int \frac{1}{a \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a} \right)^2}}$$

$$= \frac{1}{a} \int \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} \cdot a du$$

$$= \sin^{-1} u + c$$

$$= \sin^{-1} \left(x/a \right) + c$$

$$u = \frac{x}{a} = \frac{1}{a} x$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{a}$$

$$a du = dx$$

ملاحظة: هذه صيغة تكامل (الافضل حفظها)

$$\int \frac{1}{|x| \sqrt{x^2 - a^2}} dx = \frac{1}{a} \sec^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

$$(3) \int \frac{1}{|x| \sqrt{x^2 - a^2}} dx$$

$$= \int \frac{1}{a} \frac{1}{|x| \sqrt{\left(\frac{x}{a} \right)^2 - 1}} dx$$

$$= \int \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{|x| \sqrt{u^2 - 1}} \cdot a du$$

$$= \int \frac{1}{|au| \sqrt{u^2 - 1}} du$$

$$= \frac{1}{a} \sec^{-1} u + c$$

$$= \frac{1}{a} \sec^{-1} \left(x/a \right) + c$$

$$u = \frac{x}{a} = \frac{1}{a} x$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{a}$$

$$a du = dx$$

$$\frac{x}{a} = u$$

$$x = au$$

أكمال المربع (درجة البسط اصغر من درجة المقام والمقام لا يحلل)

أوجد التكاملات التالية:

$$(1) \int \frac{4}{5+2x+x^2} dx = \int \frac{4}{x^2+2x+5} dx$$

إكمال المربع

$$= \int \frac{4}{(x+1)^2+4} dx$$

استخدم الصيغة

$$= 4 \cdot \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{x+1}{2} \right) + C$$

$$u = x+1$$

$$a = 2$$

$$= 2 \tan^{-1} \left(\frac{x+1}{2} \right) + C$$

عند إكمال المربع يجب إضافة وطرح

نصف معامل x تربيع

بشرط أن معامل x تربيع واحد

$$x^2+2x+5$$

$$= x^2+2x+1+5-1$$

$$= (x+1)^2+4$$

$$(2) \int \frac{1}{x^2-4x+8} dx = \int \frac{1}{(x-1)^2+4} dx$$

أكمل المربع

$$x^2-4x+8$$

$$x^2-4x+4+8-4$$

$$(x-2)^2+4$$

$$= \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{x-1}{2} \right) + C$$

$$u = x-1$$

$$a = 2$$

$$(3) \int \frac{1}{2x^2+20x+52} dx$$

$$2x^2+20x+52$$

$$2(x^2+10x+26)$$

$$2(x^2+10x+25+26-25)$$

$$= 2((x+5)^2+1)$$

$$= \int \frac{1}{2((x+5)^2+1)} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{1}{(x+5)^2+1} dx$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \tan^{-1}(x+5) + C$$

$$u = x+5$$

$$a = 1$$

أوجد التكاملات التالية:

$$(1) \int \frac{2t}{t^2+2t+5} dt = \int \frac{2t}{(t+1)^2+4} dt$$

$$\begin{aligned} t^2+2t+5 &= t^2+2t+1+5-1 \\ &= (t+1)^2+4 \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{4} \int \frac{t}{\left(\frac{t+1}{2}\right)^2+1} dt$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{2u-1}{u^2+1} du$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{2u}{u^2+1} - \frac{1}{u^2+1} du$$

$$= \frac{1}{2} [\ln |u^2+1| - \tan^{-1} u] + C$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left| \left(\frac{t+1}{2}\right)^2+1 \right| - \tan^{-1} \left(\frac{t+1}{2}\right) + C \quad t = 2u-1$$

$$u = \frac{t+1}{2} = \frac{1}{2}(t+1)$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{2}$$

$$2 du = dt$$

$$t+1 = 2u$$

$$t = 2u-1$$

$$(2) \int \frac{x+1}{x^2+6x+10} dx = \int \frac{x+1}{(x+3)^2+1} dx$$

$$\begin{aligned} x^2+6x+10 &= x^2+6x+9+10-9 \\ &= (x+3)^2+1 \end{aligned}$$

$$u = x+3$$

$$= \int \frac{u-3+1}{u^2+1} du$$

$$\frac{du}{dx} = 1$$

$$du = dx$$

$$x = u-3$$

$$= \int \frac{u-2}{u^2+1} du$$

$$= \int \frac{u}{u^2+1} - \frac{2}{u^2+1} du$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{2u}{u^2+1} du - \int \frac{2}{u^2+1} du$$

$$= \frac{1}{2} \ln |u^2+1| - 2 \tan^{-1} u + C$$

$$= \frac{1}{2} \ln |(x+3)^2+1| - 2 \tan^{-1} (x+3) + C$$

$$= \frac{1}{2} \ln |x^2+6x+10| - 2 \tan^{-1} (x+3) + C$$

$$(1) \int \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}} dx$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{1-(x-1)^2}} dx$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du$$

$$= \sin^{-1} u + C$$

$$= \sin^{-1}(x-1) + C$$

$$2x - x^2$$

$$= -(x^2 - 2x)$$

$$= -(x^2 - 2x + 1 - 1)$$

$$= -(x-1)^2 - 1$$

$$= 1 - (x-1)^2$$

$$u = x-1$$

$$\frac{du}{dx} = 1$$

$$du = dx$$

$$(2) \int \frac{1}{\sqrt{3-2x-x^2}} dx$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{4-(x+1)^2}} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x+1}{2}\right)^2}} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} 2 du$$

$$= \sin^{-1} u + C$$

$$= \sin^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right) + C$$

$$3-2x-x^2$$

$$= -(x^2 + 2x - 3)$$

$$= -(x^2 + 2x + 1 - 3 - 1)$$

$$= -(x+1)^2 - 4$$

$$= 4 - (x+1)^2$$

$$u = \frac{x+1}{2} = \frac{1}{2}(x+1)$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2}$$

$$2 du = dx$$

القسمة المطولة (درجة البسط أكبر من أو تساوي درجة المقام)

أوجد التكاملات التالية:

يمكن كتابة الدالة النسبية $f(x)$ التي فيها درجة البسط أكبر من أو تساوي درجة المقام على الشكل التالي

$$f(x) = \frac{\text{الناتج}}{\text{المقسوم عليه}} + \frac{\text{الباقى}}{\text{المقسوم عليه}}$$

$$(1) \int \frac{x+2}{x-1} dx = \int 1 + \frac{3}{x-1} dx$$

$$= x + 3 \ln|x-1| + C.$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ x-1 \overline{) x+2} \\ \underline{\ominus x-1} \\ 3 \end{array}$$

$$(2) \int \frac{x^2+7}{x^2+1} dx = \int 1 + \frac{6}{x^2+1} dx$$

$$= x + 6 \tan^{-1}(x) + C$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ x^2+1 \overline{) x^2+7} \\ \underline{\ominus x^2+1} \\ 6 \end{array}$$

$$(3) \int \frac{2x^3}{x^2+1} dx = \int 2x - \frac{2x}{x^2+1} dx$$

$$= x^2 - \ln|x^2+1| + C.$$

$$\begin{array}{r} 2x \\ x^2+1 \overline{) 2x^3} \\ \underline{\ominus 2x^3+2x} \\ -2x \end{array}$$

أوجد التكاملات التالية:

* كتاب متطابقات

$$(1) \int \sin^2 2x \, dx = \int \frac{1}{2} (1 - \cos 4x) \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \left(x - \frac{\sin 4x}{4} \right) + C$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$(2) \int \sin^2 x - \cos^2 x \, dx = \int -\cos 2x \, dx$$

$$= -\frac{\sin 2x}{2} + C$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$(3) \int (\sin x + \cos x)^2 \, dx = \int \sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x \, dx$$

$$= \int 1 + 2 \sin x \cos x \, dx$$

$$= \int 1 + \sin 2x \, dx = x - \frac{\cos 2x}{2} + C$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$(4) \int (\sec x + \tan x)^2 \, dx = \int \sec^2 x + \sec x \tan x + \tan^2 x \, dx$$

$$= \int \sec^2 x + \sec x \tan x + \sec^2 x - 1 \, dx$$

$$= \int 2 \sec^2 x + \sec x \tan x - 1 \, dx$$

$$= 2 \tan x + \sec x - x + C$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$(5) \int \cos^3 x \, dx = \int \cos x \cos^2 x \, dx = \int \cos x (1 - \sin^2 x) \, dx$$

$$= \int \cos x (1 - u^2) \frac{du}{\cos x}$$

$$= \int (1 - u^2) \, du$$

$$= u - \frac{u^3}{3} + C$$

$$= \sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x + C$$

$$u = \sin x$$

$$\frac{du}{dx} = \cos x$$

$$\frac{du}{\cos x} = dx$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \int \frac{1}{1 + \cos 2x} dx \\
 &= \int \frac{1}{2 \cos^2 x} dx \\
 &= \int \frac{1}{2} \sec^2 x dx \\
 &= \frac{1}{2} \tan x + c
 \end{aligned}$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} (1 + \cos 2x)$$

$$2 \cos^2 x = 1 + \cos 2x$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad & \int \frac{1}{1 - \sin x} dx \\
 &= \int \sec^2 x + \sec x \tan x dx \\
 &= \tan x + \sec x + c
 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{1 - \sin x} \times \frac{1 + \sin x}{1 + \sin x}$$

$$= \frac{1 + \sin x}{1 - \sin^2 x}$$

$$= \frac{1 + \sin x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

$$= \sec^2 x + \sec x \tan x$$

$$(3) \quad \int \sec x dx \times \frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x}$$

$$= \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x} dx = \ln |\sec x + \tan x| + c$$

$$(4) \quad \int \csc x dx \times \frac{\csc x - \cot x}{\csc x - \cot x}$$

$$= \int \frac{\csc^2 x - \csc x \cot x}{\csc x - \cot x} dx = \ln |\csc x - \cot x| + c$$

أوجد التكاملات التالية:

تذكر

$$(1) \sin A \cos B = \frac{1}{2} [\sin(A-B) + \sin(A+B)]$$

$$(2) \sin A \sin B = \frac{1}{2} [\cos(A-B) - \cos(A+B)]$$

$$(3) \cos A \cos B = \frac{1}{2} [\cos(A-B) + \cos(A+B)]$$

هذه التمارين من الدرس الثاني... لكن الأفضل أن تكون بهذا الدرس

$$(1) \int \sin 3x \cos 2x dx$$

$$= \int \frac{1}{2} [\sin(3x-2x) + \sin(3x+2x)] dx$$

$$= \int \frac{1}{2} [\sin x + \sin 5x] dx$$

$$= \frac{1}{2} \left[-\cos x - \frac{\cos 5x}{5} \right] + c$$

$$(2) \int \cos mx \cos nx dx$$

$$m \neq n$$

$$= \int \frac{1}{2} [\cos(m-n)x + \cos(m+n)x] dx$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(m-n)x}{m-n} + \frac{\sin(m+n)x}{m+n} \right] + c$$

$$(3) \int \sin 2x \cos x dx = \frac{1}{2} \int [\sin x + \sin 3x] dx$$

$$= \frac{1}{2} \left[-\cos x - \frac{\cos 3x}{3} \right] + c$$

أو

$$\int \sin 2x \cos x dx$$

$$u = \cos x$$

$$= \int 2 \sin x \cos x \cdot \cos x dx$$

$$\frac{du}{dx} = -\sin x$$

$$= \int 2 \sin x \cos^2 x dx$$

$$\frac{du}{-\sin x} = dx$$

$$= \int 2 \sin x u^2 \frac{du}{-\sin x} = -2 \int u^2 du = -\frac{2}{3} u^3 + c$$

$$= -\frac{2}{3} \cos^3 x + c$$

أوجد قيمة كل مما يلي:

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin x}} dx$

$$\begin{aligned} &= \int \frac{\cos x}{\sqrt{u}} \cdot \frac{du}{\cos x} \\ &= \int u^{-1/2} du \\ &= 2 u^{1/2} \Big|_1^2 = 2\sqrt{2} - 2 \end{aligned}$$

$$u = 1 + \sin x$$

$$\frac{du}{dx} = + \cos x$$

$$\frac{du}{\cos x} = dx$$

$$x = 0 \rightarrow u = 1$$

$$x = \frac{\pi}{2} \rightarrow u = 2$$

(2) $\int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{(3-e^x)^2} dx$

$$\begin{aligned} &= \int \frac{e^x}{u^2} \cdot \frac{du}{-e^x} \\ &= \int_2^1 -u^{-2} du \\ &= \int_1^2 u^{-2} du \\ &= \left[\frac{u^{-1}}{-1} \right]_1^2 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$u = 3 - e^x$$

$$\frac{du}{dx} = -e^x$$

$$\frac{du}{-e^x} = dx$$

$$x = 0 \rightarrow u = 2$$

$$x = \ln 2 \rightarrow u = 1$$

(37) $\int_3^4 x \sqrt{x-3} dx$

$$\begin{aligned} &= \int_0^1 (u+3) u^{1/2} du \\ &= \int_0^1 u^{3/2} + 3u^{1/2} du \\ &= \left[\frac{2}{5} u^{5/2} + 3 \cdot \frac{2}{3} u^{3/2} \right]_0^1 = \frac{12}{5} \end{aligned}$$

$$u = x - 3$$

$$\frac{du}{dx} = 1$$

$$du = dx$$

$$\rightarrow x = u + 3$$

$$x = 3 \Rightarrow u = 0$$

$$x = 4 \Rightarrow u = 1$$

(38) $\int_0^1 x(x-3)^2 dx$

$$\begin{aligned} &= \int_{-3}^{-2} (u+3) u^2 du \\ &= \int_{-3}^{-2} u^3 + 3u^2 du \\ &= \left[\frac{u^4}{4} + u^3 \right]_{-3}^{-2} = \frac{11}{4} \end{aligned}$$

$$u = x - 3$$

$$\frac{du}{dx} = 1$$

$$du = dx$$

$$x = u + 3$$

$$x = 0 \Rightarrow u = -3$$

$$x = 1 \Rightarrow u = -2$$

الوحدة السابعة : طرق التكامل /// الدرس الثاني : التكامل بالأجزاء

التكامل بالأجزاء

$$\int u dv = u v - \int v du$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$(1) \int x \sin x dx$$

$$\begin{array}{ccc} u = x & + & dv = \sin x dx \\ du = dx & \leftarrow & v = -\cos x \end{array}$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$\int x \sin x dx = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + C$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

ويمكن استخدام التكامل الجدولي لتسهيل عملية التكامل وهو كالآتي

$$(2) \int x^2 \cos x dx$$

$f(x)$ ومشتقاتها

$g(x)$ وتكاملاتها

$$\begin{array}{ccc} f \Rightarrow x^2 & + & \cos x \\ f' \Rightarrow 2x & - & \sin x \\ f'' \Rightarrow 2 & + & -\cos x \\ f''' \Rightarrow 0 & \leftarrow & -\sin x \end{array}$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

السهم الراجع (الأفقي) يجب أن يكون معه تكامل

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$\int x^2 \cos x dx = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C$$

ملاحظة: يمكن استخدام التكامل الجدولي

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

لكل التكاملات بالأجزاء مع الإنتباه إلى

استخدام التكامل عند التوقف في أي صف (نفس المستوى)

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

(1) $\int x^2 \sin ax \, dx \quad a \neq 0$

$$= -\frac{1}{a} x^2 \cos ax + \frac{2}{a^2} x \sin ax + \frac{2}{a^3} \cos ax + C$$

$$\begin{array}{r} \underline{u} \quad \underline{dv} \\ x^2 \quad \sin ax \\ 2x \quad -\frac{\cos ax}{a} \\ 2 \quad -\frac{\sin ax}{a^2} \\ 0 \quad \frac{\cos ax}{a^3} \end{array}$$

(2) $\int x^2 e^{2x} \, dx$

$$= \frac{1}{2} x^2 e^{2x} - \frac{1}{2} x e^{2x} + \frac{1}{4} e^{2x} + C$$

$$\begin{array}{r} \underline{u} \quad \underline{dv} \\ x^2 \quad e^{2x} \\ 2x \quad \frac{e^{2x}}{2} \\ 2 \quad \frac{e^{2x}}{4} \\ 0 \quad \frac{e^{2x}}{8} \end{array}$$

(3) $\int \frac{x^2 + x}{\sec 3x} \, dx = \int (x^2 + x) \cos 3x \, dx$

$$= \frac{1}{3} (x^2 + x) \sin 3x + \frac{1}{9} (2x + 1) \cos 3x - \frac{2}{27} \sin 3x + C$$

$$\begin{array}{r} \underline{u} \quad \underline{dv} \\ x^2 + x \quad \cos 3x \\ 2x + 1 \quad \frac{1}{3} \sin 3x \\ 2 \quad -\frac{1}{9} \cos 3x \\ 0 \quad -\frac{1}{27} \sin 3x \end{array}$$

(1) $\int 8x \sin x \cos x \, dx$

$= \int 4x \cdot \sin 2x \, dx$
 $= -2x \cos 2x + \sin 2x + c$

$\begin{array}{l} u \\ 4x \\ 4 \\ 0 \end{array} \begin{array}{l} (+) \\ (-) \end{array} \begin{array}{l} dv \\ \sin 2x \\ -\frac{\cos 2x}{2} \\ -\frac{\sin 2x}{4} \end{array}$

(2) $\int x \sec^2 x \, dx$

$= x \tan x + \ln |\cos x| + c$

$\begin{array}{l} u \\ x \\ 1 \\ 0 \end{array} \begin{array}{l} (+) \\ (-) \end{array} \begin{array}{l} dv \\ \sec^2 x \\ \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \\ -\ln |\cos x| \end{array}$

(3) $\int x(2x-1)^5 \, dx$

يمكن حل السؤال بالجزء

أو التعويض (أول)

$= \frac{1}{12} x (2x-1)^6 - \frac{1}{168} (2x-1)^7 + c$

$\begin{array}{l} u \\ x \\ 1 \\ 0 \end{array} \begin{array}{l} (+) \\ (-) \end{array} \begin{array}{l} dv \\ (2x-1)^5 \\ \frac{(2x-1)^6}{6(2)} \\ \frac{(2x-1)^7}{6(2)(7)(2)} \end{array}$

$$(1) \int \ln x \, dx$$

$$= x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx$$

$$= x \ln x - \int 1 \, dx$$

$$= x \ln x - x + c$$

$$\begin{array}{l} \underline{u} \quad \underline{dv} \\ \ln x \quad 1 \\ \swarrow (+) \\ \frac{1}{x} \quad \nwarrow (-) \quad x \end{array}$$

$$(2) \int \ln(x-1) \, dx$$

$$= x \ln(x-1) - \int \frac{x}{x-1} \, dx$$

$$= x \ln(x-1) - \int 1 + \frac{1}{x-1} \, dx$$

$$= x \ln(x-1) - x - \ln|x-1| + c$$

$$\begin{array}{l} \underline{u} \quad \underline{dv} \\ \ln(x-1) \quad 1 \\ \swarrow (+) \\ \frac{1}{x-1} \quad \nwarrow (-) \quad x \\ \hline x-1 \overline{) 1} \\ \underline{\ominus x-1} \\ 1 \end{array}$$

$$(3) \int x^4 \ln x \, dx$$

$$= \frac{1}{5} x^5 \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{x^5}{5} \, dx$$

$$= \frac{1}{5} x^5 \ln x - \int \frac{1}{5} x^4 \, dx$$

$$= \frac{1}{5} x^5 \ln x - \frac{1}{25} x^5 + c$$

$$\begin{array}{l} \underline{u} \quad \underline{dv} \\ \ln x \quad x^4 \\ \swarrow (+) \\ \frac{1}{x} \quad \nwarrow (-) \quad \frac{x^5}{5} \end{array}$$

$$(4) \int x \ln x^2 \, dx = \int 2x \ln x \, dx$$

$$= x^2 \ln x - \int x \, dx$$

$$= x^2 \ln x - \frac{1}{2} x^2 + c$$

$$\begin{array}{l} \underline{u} \quad \underline{dv} \\ \ln x \quad 2x \\ \swarrow (+) \\ \frac{1}{x} \quad \nwarrow (-) \quad x^2 \end{array}$$

$$(1) \int \tan^{-1} x \, dx$$

$$= x \tan^{-1} x - \int \frac{x}{x^2+1} \, dx$$

$$= x \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} \, dx$$

$$= x \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \ln |x^2+1| + C$$

$$\begin{array}{rcl} \underline{u} & & \underline{dv} \\ \tan^{-1} x & & 1 \\ \swarrow (+) & & \searrow (-) \\ \frac{1}{x^2+1} & \leftarrow & x \end{array}$$

$$(2) \int \sin^{-1} x \, dx$$

$$= x \sin^{-1} x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$$

$$= x \sin^{-1} x - \int x (1-x^2)^{-1/2} \, dx$$

$$= x \sin^{-1} x - \int x \cdot u^{-1/2} \cdot \frac{du}{-2x}$$

$$= x \sin^{-1} x + \int \frac{1}{2} u^{1/2} \, du$$

$$= x \sin^{-1} x + u^{1/2} + C = x \sin^{-1} x + \sqrt{1-x^2} + C$$

$$\begin{array}{rcl} \underline{u} & & \underline{dv} \\ \sin^{-1} x & & 1 \\ \swarrow (+) & & \searrow (-) \\ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \leftarrow & x \end{array}$$

$$u = 1 - x^2$$

$$\frac{du}{dx} = -2x$$

$$\frac{du}{-2x} = dx$$

$$(3) \int x \tan^{-1} x \, dx$$

$$= \frac{1}{2} x^2 \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{x^2+1} \, dx$$

$$= \frac{1}{2} x^2 \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right) \, dx$$

$$= \frac{1}{2} x^2 \tan^{-1} x - \frac{1}{2} (x - \tan^{-1} x) + C$$

$$\begin{array}{rcl} \underline{u} & & \underline{dv} \\ \tan^{-1} x & & x \\ \swarrow (+) & & \searrow (-) \\ \frac{1}{1+x^2} & \leftarrow & x^2/2 \end{array}$$

$$\frac{x^2+1}{x^2} \cdot \frac{1}{x^2+1} = \frac{1}{x^2} = -1$$

$$(1) \int \cos x \ln(\sin x) dx$$

$$= \int \cos x \ln u \cdot \frac{du}{\cos x}$$

$$= \int \ln u \, du$$

$$= u \ln u - \int 1 \, du$$

$$= u \ln u - u + C$$

$$= \sin x \ln |\sin x| - \sin x + C$$

$$u = \sin x$$

$$\frac{du}{dx} = \cos x$$

$$\frac{du}{\cos x} = dx$$

$$\ln u \quad du$$

$$\frac{1}{u} \leftarrow u$$

$$(2) \int x \ln(4+x^2) dx$$

$$= \int x \ln u \cdot \frac{du}{2x}$$

$$= \frac{1}{2} \int \ln u \, du$$

$$= \frac{1}{2} \left[u \ln u - \int 1 \, du \right]$$

$$= \frac{1}{2} u \ln u - \frac{1}{2} u + C$$

$$= \frac{1}{2} (4+x^2) \ln(4+x^2) - \frac{1}{2} (4+x^2) + C$$

$$u = 4 + x^2$$

$$\frac{du}{dx} = 2x$$

$$\frac{du}{2x} = dx$$

$$\ln u \quad du$$

$$\frac{1}{u} \leftarrow u$$

$$(3) \int e^{\sqrt{x}} dx$$

الاحصائيات

$$u = \sqrt{x}$$

$$= \int e^u \cdot 2\sqrt{x} \, du$$

$$= \int 2u e^u \, du$$

$$= 2u e^u - 2e^u + C$$

$$= 2\sqrt{x} e^{\sqrt{x}} - 2e^{\sqrt{x}} + C$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$2\sqrt{x} \, du = dx$$

$$2u \quad e^u$$

$$2 \quad e^u$$

$$0 \quad e^u$$

$$(1) \int \sin \sqrt{x} dx$$

$$= \int \sin u \cdot 2\sqrt{x} du$$

$$= \int 2u \sin u du$$

$$= -2u \cos u + 2 \sin u + C$$

$$= -2\sqrt{x} \cos \sqrt{x} + 2 \sin \sqrt{x} + C$$

$$u = \sqrt{x}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$2\sqrt{x} du = dx$$

$$\rightarrow \sqrt{x} = u$$

$$2u \xrightarrow{+} \sin u$$

$$2 \xrightarrow{-} -\cos u$$

$$0 \xrightarrow{+} -\sin u$$

$$(2) \int (\ln x)^2 dx$$

$$= \int u^2 \cdot x du$$

$$= \int u^2 e^u du$$

$$= u^2 e^u - 2u e^u + 2e^u + C$$

$$= (\ln x)^2 e^{\ln x} - 2(\ln x) e^{\ln x} + 2e^{\ln x} + C$$

$$= x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x + C$$

$$u = \ln x$$

$$\frac{du}{dx} = 1/x$$

$$x du = dx$$

$$x = e^u$$

$$u^2 \xrightarrow{+} e^u$$

$$2u \xrightarrow{-} e^u$$

$$u \xrightarrow{+} e^u$$

$$0 \xrightarrow{+} e^u$$

$$(3) \int 2x^3 e^{x^2} dx$$

$$= \int 2x^3 e^u \cdot \frac{du}{2x}$$

$$= \int x^2 e^u du$$

$$= \int u e^u du$$

$$= u e^u - e^u + C$$

$$= x^2 e^{x^2} - e^{x^2} + C$$

$$u = x^2$$

$$\frac{du}{dx} = 2x$$

$$\frac{du}{2x} = dx$$

$$u \xrightarrow{+} e^u$$

$$1 \xrightarrow{-} e^u$$

$$0 \xrightarrow{+} e^u$$

(1) $\int e^x \sin x dx$

ليكن $I = \int e^x \sin x dx$

$$I = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x dx$$

$$I = -e^x \cos x + e^x \sin x - I + C$$

$$I + I = e^x (-\cos x + \sin x) + C$$

$$2I = e^x (\sin x - \cos x) + C$$

$$I = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C$$

$$\therefore \int e^x \sin x dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C$$

$\frac{u}{e^x}$	$\frac{du}{\sin x}$
e^x	$\sin x$
e^x	$-\cos x$
e^x	$-\sin x$

(2) $\int \sin^3 x dx$

يمكن حل السؤال بالتكامل بالجزء

$$= \int \sin^2 x \cdot \sin x dx$$

أو التعويض (البدل)

$\frac{u}{\sin^2 x}$	$\frac{du}{\sin x}$
$2 \sin x \cos x$	$-\cos x$

$$\int \sin^3 x = -\sin^2 x \cos x + 2 \int \sin x \cos^2 x dx$$

$$= -\sin^2 x \cos x + 2 \int \sin x (1 - \sin^2 x) dx$$

$$= -\sin^2 x \cos x + 2 \int \sin x dx - 2 \int \sin^3 x dx$$

$$3 \int \sin^3 x dx = -\sin^2 x \cos x - 2 \cos x + C$$

$$\int \sin^3 x dx = -\frac{1}{3} \sin^2 x \cos x - \frac{2}{3} \cos x + C$$

$$(1) \int \sec^3 x \, dx = \int \sec x \cdot \sec^2 x \, dx$$

$$= \sec x \tan x - \int \sec x \tan^2 x \, dx$$

$$= \sec x \tan x - \int \sec x (\sec^2 x - 1) \, dx$$

$$= \sec x \tan x - \int \sec^3 x - \sec x \, dx$$

$$= \sec x \tan x - \int \sec^3 x \, dx + \int \sec x \, dx$$

$$\begin{array}{r} \sec x \quad \sec^2 x \\ \swarrow \quad \searrow \\ \sec x \tan x \quad \tan x \end{array}$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$2 \int \sec^3 x \, dx = \sec x \tan x + \ln |\sec x + \tan x| + C$$

$$\int \sec^3 x \, dx = \frac{1}{2} \sec x \tan x + \frac{1}{2} \ln |\sec x + \tan x| + C$$

$$(2) \int \cos x \cos 2x \, dx = I$$

يمكن حل السؤال عن طريقة
المتطابقات

محمد عمر الخطيب

$$I = \frac{1}{2} \cos x \sin 2x - \frac{1}{4} \sin x \cos 2x$$

$$+ \frac{1}{4} \int \cos x \cos 2x \, dx$$

$$\xrightarrow{\text{نقل الطرف الايسر}} \frac{1}{4} I$$

$$\begin{array}{r} \cos x \quad \cos 2x \\ \swarrow \quad \searrow \\ -\sin x \quad \sin 2x \\ \swarrow \quad \searrow \\ -\cos x \quad -\frac{\cos 2x}{2} \end{array}$$

محمد عمر الخطيب

$$I - \frac{1}{4} I = \frac{1}{2} \cos x \sin 2x - \frac{1}{4} \sin x \cos 2x$$

$$\frac{3}{4} I = \frac{1}{2} \cos x \sin 2x - \frac{1}{4} \sin x \cos 2x$$

$$I = \frac{2}{3} \cos x \sin 2x - \frac{1}{3} \sin x \cos 2x + C$$

$$(1) \int_0^1 x^2 \cos \pi x \, dx$$

$$= \left[\frac{1}{\pi} x^2 \sin \pi x + \frac{2}{\pi^2} x^2 \cos \pi x - \frac{2}{\pi^3} \sin \pi x \right]_0^1$$

$$= -\frac{2}{\pi^2}$$

u	dv
x^2	$\cos \pi x$
$2x$	$\frac{\sin \pi x}{\pi}$
2	$-\frac{\cos \pi x}{\pi^2}$
0	$-\frac{\sin \pi x}{\pi^3}$

$$(2) \int_0^1 x^2 e^{3x} \, dx$$

$$= \left[\frac{1}{3} x^2 e^{3x} - \frac{2}{9} x e^{3x} + \frac{2}{27} e^{3x} \right]_0^1$$

$$= \frac{5e^3}{27} - \frac{2}{27}$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

u	dv
x^2	e^{3x}
$2x$	$\frac{e^{3x}}{3}$
2	$\frac{e^{3x}}{9}$
0	$\frac{e^{3x}}{27}$

$$(3) \int_1^2 x \ln x \, dx$$

$$= \left[\frac{1}{2} x^2 \ln x \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{2} x \, dx$$

$$= \left[\frac{1}{2} x^2 \ln x \right]_1^2 - \left[\frac{1}{4} x^2 \right]_1^2$$

$$= 2 \ln 2 - \frac{3}{4}$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

u	dv
$\ln x$	x
$\frac{1}{x}$	$\frac{x^2}{2}$

$$\int x^n \ln x dx$$

$$= \frac{1}{n+1} x^{n+1} \ln x - \int \frac{1}{x} \frac{x^{n+1}}{n+1} dx$$

$$= \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \frac{1}{n+1} \int x^n dx$$

$$= \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C$$

$$\ln x \quad x^n$$

$$\frac{1}{x} \quad \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

(2) أوجد صيغة الاختزال للتكامل

$$\int x^n e^x dx = x^n e^x - \int n x^{n-1} e^x dx$$

$$\begin{array}{c} x^n \quad e^x \\ \swarrow \quad \searrow \\ n x^{n-1} \quad e^x \end{array}$$

(3) أثبت صيغة الاختزال التالية :

$$\int \sec^n x dx = \frac{1}{n-1} \sec^{n-2} x \tan x + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} x dx$$

$$\int \sec^n x dx = \int \sec^{n-2} x \sec^2 x dx$$

$$= \tan x \sec^{n-2} x - (n-2) \int \sec^{n-2} \tan^2 x dx$$

$$= \tan x \sec^{n-2} x - (n-2) \int \sec^{n-2} (\sec^2 x - 1) dx$$

$$= \sec^{n-2} x \tan x - (n-2) \int \sec^n x dx + (n-2) \int \sec^{n-2} x dx$$

$$\int \sec^n x dx + (n-2) \int \sec^n x dx = \sec^{n-2} x \tan x + (n-2) \int \sec^{n-2} x dx$$

$$(n-1) \int \sec^n x dx = \sec^{n-2} x \tan x + (n-2) \int \sec^{n-2} x dx$$

$$\int \sec^n x dx = \frac{1}{n-1} \sec^{n-2} x \tan x + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} x dx$$

(1) إذا كان $\int_1^4 f(x) dx = 12$, $f(4) = -8$, $f(1) = 3$, فأوجد $\int_1^4 (2x+3)f'(x) dx$

$$\int_1^4 (2x+3) f'(x) dx$$

$$= (2x+3)f(x) \Big|_1^4 - 2 \int_1^4 f(x) dx$$

$$= 11 \cdot f(4) - 5 f(1) - 2(12)$$

$$= 11(-8) - 5(3) - 24$$

$$= -127$$

$$\begin{array}{rcl} 2x+3 & \xrightarrow{+} & f'(x) \\ & \searrow & \\ 2 & \xleftarrow{-} & f(x) \end{array}$$

(2) إذا كان $\int_1^5 f(x) dx = 10$, $f'(5) = f(5) = -6$, $f'(1) = f(1) = 2$, فأوجد $\int_1^5 x^2 f''(x) dx$

$$\int_1^5 x^2 f''(x) dx$$

$$\int_1^5 x^2 f''(x) dx$$

$$= x^2 f'(x) \Big|_1^5 - 2x f(x) \Big|_1^5 + 2 \int_1^5 f(x) dx$$

$$= 25 f'(5) - f'(1) - [10 f(5) - 2 f(1)]$$

$$- 2(10)$$

$$= 25(-6) - 2 - [10(-6) - 2(2)] + 2(10)$$

$$= -68$$

$$\begin{array}{rcl} x^2 & \xrightarrow{+} & f''(x) \\ & \searrow & \\ 2x & \xrightarrow{-} & f'(x) \\ & \searrow & \\ 2 & \xleftarrow{+} & f(x) \end{array}$$

(1) إذا كانت f دالة متصلة وقابلة للاشتقاق حيث $f(0) = -1, f(1) = 2$

$$\int_0^1 e^x f(x) + e^x f'(x) dx$$

أوجد

يمكن حل السؤال بأكثر من طريقة (يمكن بالأسهل)

$$\int_0^1 (e^x f(x) + e^x f'(x)) dx$$

$$= \int_0^1 (e^x f(x))' dx = [e^x f(x)]_0^1$$

$$= e f(1) - e^0 f(0) = 2e + 1$$

(2) إذا كانت f و g دوال متصلة وقابلة للاشتقاق مرتين حيث $f(0) = g(0) = 0, f(1) = g(1) = 0$

$$\int_0^1 f''(x) g(x) dx = \int_0^1 f(x) g''(x) dx$$

أثبت أن

$$\int_0^1 f''(x) g(x) dx$$

$$= [g(x) f'(x)]_0^1 - [g'(x) f(x)]_0^1 + \int_0^1 g''(x) f(x) dx$$

$$= g(1) f'(1) - g(0) f'(0) - [g'(1) f(1) - g'(0) f(0)]$$

$$+ \int_0^1 g''(x) f(x) dx$$

$$= 0 - 0 + \int_0^1 g''(x) f(x) dx$$

$$= \int_0^1 f(x) g''(x) dx$$

$$\begin{array}{l} g(x) \xrightarrow{+} f''(x) \\ g'(x) \xrightarrow{-} f'(x) \\ g''(x) \xrightarrow{+} f(x) \end{array}$$

(1) $\int x \ln x \, dx$

اجزاء

(2) $\int x^2 \cos 2x \, dx$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

(3) $\int x \sin x^2 \, dx$

تعويض

(4) $\int x^3 e^{2x} \, dx$

اجزاء

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

(5) $\int \frac{e^{1/x}}{x^2} \, dx$

تعويض

(6) $\int \frac{\ln x}{x} \, dx$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

(7) $\int \sin x \ln(\cos x) \, dx$

تعويض ثم اجزاء

(8) $\int e^{\sqrt[3]{x}} \, dx$

تعويض ثم اجزاء

(9) $\int e^x \sin 2x \, dx$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

(10) $\int \tan^{-1} x \, dx$

اجزاء

(11) $\int x^5 e^{x^3} \, dx$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

(12) $\int \sin(\ln x) \, dx$

تعويض ثم اجزاء

(13) $\int (\ln x)^2 \, dx$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

(14) $\int x \csc^2 x \, dx$

اجزاء

(15) $\int \sin^{-1} x \, dx$

اجزاء

(16) $\int \sin 2x \cos 3x \, dx$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

الوحدة السابعة : طرق التكامل /// الدرس الثالث : طرائق تكامل الدوال المثلثية

الصيغة الأولى

$$\int \sin^m x \cos^n x dx$$

افرض u

الدالة ذات القوى غير الفردية

الحالة الأول : إذا كانت m, n أحدهما عدد فردي

أوجد التكاملات التالية :

$$(1) \int \cos^4 x \sin x dx$$

$$= \int u^4 \sin x \cdot \frac{du}{-\sin x}$$

$$= - \int u^4 du$$

$$= - \frac{u^5}{5} + C = - \frac{\cos^5 x}{5} + C$$

$$u = \cos x$$

$$\frac{du}{dx} = -\sin x$$

$$\frac{du}{-\sin x} = dx$$

$$(2) \int \sin^2 x \cos^3 x dx$$

$$= \int u^2 \cos^3 x \cdot \frac{du}{\cos x}$$

$$= \int u^2 \cos^2 x du$$

$$= \int u^2 (1 - u^2) du$$

$$= \int u^2 - u^4 du$$

$$= \frac{1}{3} u^3 - \frac{1}{5} u^5 + C$$

$$= \frac{1}{3} \sin^3 x - \frac{1}{5} \sin^5 x + C$$

$$u = \sin x$$

$$\frac{du}{dx} = \cos x$$

$$\frac{du}{\cos x} = dx$$

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

$$= 1 - u^2$$

$$(1) \int \cos^3 x \sqrt{\sin x} dx$$

$$= \int (\cos^2 x \sqrt{u}) \cdot \frac{du}{\cos x}$$

$$= \int (1-u^2) \sqrt{u} du$$

$$= \int u^{1/2} - u^{5/2} du$$

$$= \frac{2}{3} u^{3/2} - \frac{2}{7} u^{7/2} + C$$

$$= \frac{2}{3} (\sin x)^{3/2} - \frac{2}{7} (\sin x)^{7/2} + C$$

$$u = \sin x$$

$$\frac{du}{dx} = \cos x$$

$$\frac{du}{\cos x} = dx$$

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - u^2$$

$$(2) \int \cos^4 x \sin^3 x dx$$

$$= \int u^4 \sin^2 x \cdot \frac{du}{-\sin x}$$

$$= - \int u^4 (1-u^2) du$$

$$= - \int u^6 - u^4 du$$

$$= - \left(\frac{1}{7} u^7 - \frac{1}{5} u^5 \right) + C$$

$$= - \frac{1}{7} \cos^7 x + \frac{1}{5} \cos^5 x + C$$

$$u = \cos x$$

$$\frac{du}{dx} = -\sin x$$

$$\frac{du}{-\sin x} = dx$$

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - u^2$$

$$(3) \int \sin 2x \cos^4 2x dx$$

$$= \int \sin 2x u^4 \frac{du}{-2 \sin 2x}$$

$$= -\frac{1}{2} \int u^4 du$$

$$= -\frac{1}{10} u^5 + C$$

$$= -\frac{1}{10} \cos^5 2x + C$$

$$u = \cos 2x$$

$$\frac{du}{dx} = -2 \sin 2x$$

$$\frac{du}{-2 \sin 2x} = dx$$

(1) $\int_0^{\pi/2} \cos^2 x \sin x \, dx$

$u = \cos x$

$\frac{du}{dx} = -\sin x$

$\frac{du}{-\sin x} = du$

$x=0 \Rightarrow u=1$

$x=\frac{\pi}{2} \Rightarrow u=0$

$= \int_1^0 u^2 \sin x \frac{du}{-\sin x}$

$= -\int_1^0 u^2 du$

$= -\left[\frac{1}{3}u^3\right]_1^0 = \frac{1}{3}$

(2) $\int_{-\pi/3}^0 \sqrt{\cos x} \sin^3 x \, dx$

$u = \cos x$

$\frac{du}{dx} = -\sin x$

$\frac{du}{-\sin x} = dx$

$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$
 $= 1 - u^2$

$x = -\pi/3 \rightarrow u = 1/2$

$x=0 \rightarrow u=1$

$= \int_{1/2}^1 \sqrt{u} \sin^2 x \frac{du}{-\sin x}$

$= \int_{1/2}^1 -\sqrt{u} (1 - u^2) du$

$= -\int_{1/2}^1 u^{1/2} - u^{5/2} du$
 $= -\left[\frac{2}{3}u^{3/2} - \frac{2}{7}u^{7/2}\right]_{1/2}^1 = \frac{25\sqrt{2}}{168} - \frac{8}{21}$

(3) $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \cos^3 3x \sin^3 3x \, dx$

$u = \cos 3x$

$\frac{du}{dx} = -3 \sin 3x$

$\frac{du}{-3 \sin 3x} = dx$

$\sin^2 3x = 1 - \cos^2 3x$
 $= 1 - u^2$

$x = \pi/4 \rightarrow u = -1/\sqrt{2}$

$x = \pi/3 \rightarrow u = 1/2$

$= \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/2} u^3 \sin^2 3x \frac{du}{-3 \sin 3x}$

$= -\frac{1}{3} \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/2} u^3 \sin^2 3x du$

$= -\frac{1}{3} \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/2} u^3 (1 - u^2) du$

$= -\frac{1}{3} \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/2} u^3 - u^5 du$

$= -\frac{1}{3} \left[\frac{1}{4}u^4 - \frac{1}{6}u^6\right]_{-1/\sqrt{2}}^{1/2} = -\frac{1}{72}$

الحالة الثانية : إذا كانت m, n كلاهما أعداد زوجية

أوجد التكاملات التالية:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

(1) $\int \sin^2 2x \, dx$

$$= \int \frac{1}{2} (1 - \cos 4x) \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \left(x - \frac{\sin 4x}{4} \right) + C$$

(2) $\int \cos^2(x+1) \, dx$

$$= \int \frac{1}{2} (1 + \cos 2(x+1)) \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \left(x + \frac{\sin 2(x+1)}{2} \right) + C = \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin 2(x+1) + C$$

(3) $\int \cos^4 x \, dx = \int (\cos^2 x)^2 \, dx = \int \left[\frac{1}{2}(1 + \cos 2x) \right]^2 \, dx$

$$= \int \frac{1}{4} (1 + 2 \cos 2x + \cos^2 2x) \, dx$$

$$= \int \frac{1}{4} \left[1 + 2 \cos 2x + \frac{1}{2} (1 + \cos 4x) \right] \, dx$$

$$= \frac{1}{4} \left[x + \frac{2 \sin 2x}{2} + \frac{1}{2} \left(x + \frac{\sin 4x}{4} \right) \right] + C$$

(4) $\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx = \int \frac{1}{2} (1 - \cos 2x) \cdot \frac{1}{2} (1 + \cos 2x) \, dx$

$$= \int \frac{1}{4} (1 - \cos^2 2x) \, dx = \int \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{2} (1 + \cos 4x) \right) \, dx$$

$$= \frac{1}{4} \left(x - \frac{1}{2} \left(x + \frac{\sin 4x}{4} \right) \right) + C$$

الصيغة الثانية

$$\int \cot^m x \csc^n x dx \text{ أو } \int \tan^m x \sec^n x dx$$

$$u = \tan x \text{ افرض}$$

الحالة الأولى: إذا كانت n (قوة $\sec$) عدد زوجي

$$(1) \int \tan^3 x \sec^2 x dx$$

$$= \int u^3 du$$

$$= \frac{1}{4} u^4 + C$$

$$= \frac{1}{4} \tan^4 x + C$$

أوجد التكاملات التالية:

$$u = \tan x$$

$$du = \sec^2 x dx$$

$$(2) \int \sqrt{\tan x} \sec^4 x dx$$

$$= \sqrt{u} \sec^4 x \cdot \frac{du}{\sec^2 x}$$

$$= \int u^{1/2} \cdot \sec^2 x du$$

$$= \int u^{1/2} (u^2 + 1) du$$

$$= \int u^{5/2} + u^{1/2} du$$

$$= \frac{2}{7} u^{7/2} + \frac{2}{3} u^{3/2} + C$$

$$= \frac{2}{7} (\tan x)^{7/2}$$

$$+ \frac{2}{3} (\tan x)^{3/2} + C$$

$$u = \tan x$$

$$\frac{du}{dx} = \sec^2 x$$

$$\frac{du}{\sec^2 x} = dx$$

$$\rightarrow \sec^2 x = \tan^2 x + 1$$

$$= u^2 + 1$$

$$(3) \int \cot^2(2x-1) \csc^2(2x-1) dx$$

$$= \int u^2 \cdot \csc^2(2x-1) \cdot \frac{du}{-2 \csc^2(2x-1)}$$

$$= -\frac{1}{2} \int u^2 du$$

$$= -\frac{1}{6} u^3 + C$$

$$= -\frac{1}{6} (\cot(2x-1))^3 + C$$

$$u = \cot(2x-1)$$

$$\frac{du}{dx} = -\csc^2(2x-1) \cdot 2$$

$$\frac{du}{-2 \csc^2(2x-1)} = dx$$

$$(4) \int \sec^4 x dx = \int \sec^2 x \cdot \sec^2 x dx = \int (\tan^2 x + 1) \sec^2 x dx$$

$$= \int (u^2 + 1) du$$

$$= \frac{1}{3} u^3 + u + C$$

$$= \frac{1}{3} \tan^3 x + \tan x + C$$

$$u = \tan x$$

$$du = \sec^2 x dx$$

افرض $u = \sec x$

الحالة الثانية: إذا كانت m (قوة $\tan$) عدد فردي

أوجد التكاملات التالية:

(1) $\int \tan x \sec^5 x dx$

$$= \int \tan x \cdot u^5 \cdot \frac{du}{\sec x \tan x}$$

$$= \int u^5 \cdot \frac{du}{u}$$

$$= \int u^4 du$$

$$= \frac{1}{5} u^5 + C = \frac{1}{5} \sec^5 x + C$$

$$u = \sec x$$

$$\frac{du}{dx} = \sec x \tan x$$

$$\frac{du}{\tan x \sec x} = dx$$

(2) $\int \tan^3 x \sec^3 x dx$

$$= \int \tan^3 x \cdot u^3 \cdot \frac{du}{\sec x \tan x}$$

$$= \int \tan^2 x \cdot u^3 \cdot \frac{du}{u}$$

$$= \int (u^2 - 1) u^2 du$$

$$= \int u^4 - u^2 du$$

$$= \frac{1}{5} u^5 - \frac{1}{3} u^3 + C = \frac{1}{5} \sec^5 x - \frac{1}{3} \sec^3 x + C$$

$$u = \sec x$$

$$\frac{du}{dx} = \sec x \tan x$$

$$\frac{du}{\sec x \tan x} = dx$$

$$\rightarrow \tan^2 x = \sec^2 x - 1$$

$$= u^2 - 1$$

(3) $\int \cot x \csc^3 x dx$

$$= \int \cot x \cdot u^3 \cdot \frac{du}{-\csc x \cot x}$$

$$= \int u^3 \cdot \frac{du}{-u}$$

$$= - \int u^2 du$$

$$= - \frac{u^3}{3} + C = - \frac{1}{3} \csc^3 x + C$$

$$u = \csc x$$

$$\frac{du}{dx} = -\csc x \cot x$$

$$\frac{du}{-\csc x \cot x} = dx$$

أوجد التكاملات التالية:

$u = \cot x$ لتعويض x بـ u
 $u = \csc x$ أو

(1) $\int \cot x \csc^4 x \, dx$

$= \int \cancel{\cot x} \cdot u^4 \frac{du}{-\csc x \cot x}$
 $= - \int u^4 \frac{du}{u}$
 $= - \int u^3 du$
 $= -\frac{u^4}{4} + C = -\frac{1}{4} \csc^4 x + C$

$u = \csc x$ الأسهل

$\frac{du}{dx} = -\csc x \cot x$

$\frac{du}{-\csc x \cot x} = dx$

محمد عمر الخطيب

(2) $\int x \tan^3(x^2+1) \sec(x^2+1) \, dx$

$= \int x \tan^3 u \sec u \frac{du}{2x}$
 $= \frac{1}{2} \int \tan^3 u \sec u \, du$
 $= \frac{1}{2} \int \tan^2 u \cdot \frac{du}{\sec u \tan u}$
 $= \frac{1}{2} \int (t^2-1) \frac{dt}{t}$
 $= \frac{1}{2} \int t^2-1 \, dt$
 $= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} t^3 - t \right) + C = \frac{1}{6} \sec^3 u - \frac{1}{2} \sec u + C$
 $= \frac{1}{6} \sec^3(x^2+1) - \frac{1}{2} \sec(x^2+1)$

الافضل لكل بالتعويض مرتين

$u = x^2+1$

$\frac{du}{dx} = 2x$

$\frac{du}{2x} = dx$

$t = \sec u$

$\frac{dt}{du} = \sec u \tan u$

$\frac{dt}{\sec u \tan u} = du$

$\tan^2 u = \sec^2 u - 1$
 $= t^2 - 1$

(3) $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cot^2 x \csc^4 x \, dx$

$= \int u^2 \csc^4 x \frac{du}{-\csc^2 x}$
 $= - \int u^2 \csc^2 x \, du$
 $= - \int u^2 (1+u^2) \, du$
 $= - \int_1^0 u^2 + u^4 \, du = - \left(\frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} \right) \Big|_1^0 = \frac{8}{15}$

$u = \cot x$

$\frac{du}{dx} = -\csc^2 x$

$\frac{du}{-\csc^2 x} = dx$

$\csc^2 x = 1 + \cot^2 x$

$= 1 + u^2$

$x = \pi/4 \rightarrow u = 1$
 $x = \pi/2 \rightarrow u = 0$

$$(1) \int \sec x \, dx \quad \times \quad \frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x} = \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x} \, dx$$

$$= \ln |\sec x + \tan x| + C.$$

$$(2) \int \csc x \, dx \quad \times \quad \frac{\csc x - \cot x}{\csc x - \cot x} = \int \frac{\csc^2 x - \csc x \cot x}{\csc x - \cot x} \, dx$$

$$= \ln |\csc x - \cot x| + C.$$

$$(3) \int \frac{1}{\cos x - 1} \, dx \quad \times \quad \frac{\cos x + 1}{\cos x + 1} \, dx = \int \frac{\cos x + 1}{\cos^2 x - 1} \, dx$$

$$= \int \frac{\cos x + 1}{-\sin^2 x} \, dx$$

$$= - \int \frac{\cos x}{\sin^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} \, dx$$

$$= - \int \csc x \cot x + \csc^2 x \, dx = \csc x + \cot x + C.$$

* $\frac{\cos x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin x} \cdot \frac{\cos x}{\sin x} = \csc x \cot x$

أوجد قيمة n حيث $n \geq 2$

$$\int \tan^3 x \sec^n x \, dx = \frac{1}{5} \sec^5 x - \frac{1}{3} \sec^3 x + C$$

الانظر إلى الطرفين

$$\tan^3 x \sec^n x = \frac{1}{5} \cdot 5 \sec^4 x \cdot \sec x \tan x - \frac{1}{3} \cdot 3 \sec^2 x \cdot \sec x \tan x$$

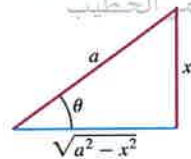
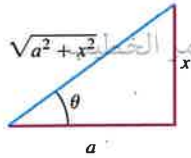
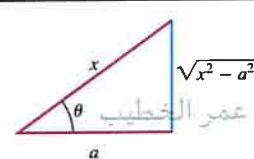
$$= \sec^5 x \tan x - \sec^3 x \tan x$$

$$= \sec^3 x \tan x (\sec^2 x - 1)$$

$$= \sec^3 x \tan x \cdot \tan^2 x$$

$$= \sec^3 x \tan^3 x \Rightarrow \boxed{n=3}$$

التكامل بالتعويضات المثلثية

الصيغة	التعويض	الفترة	المثلث
$\sqrt{a^2 - x^2} \longrightarrow$	$x = a \sin \theta$	$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$	
$\sqrt{a^2 + x^2} \longrightarrow$	$x = a \tan \theta$	$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$	
$\sqrt{x^2 - a^2} \longrightarrow$	$x = a \sec \theta$	$0 \leq \theta \leq \pi, x \neq \frac{\pi}{2}$	

اكتب التعويض المثلثي المناسب لإيجاد كل من التكاملات التالية (دون إجراء عملية التكامل):

(1) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$

$x = \sin \theta$

$1 - x^2 = \cos^2 \theta$
 $x^2 = 1 - \cos^2 \theta$
 $x^2 = \sin^2 \theta$
 $x = \sin \theta$

(2) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 9}} dx$

$x = 3 \sec \theta$

(3) $\int \frac{1}{\sqrt{3+x^2}} dx$

$x = \sqrt{3} \tan \theta$

اكتب التعويض المثالي المناسب لإيجاد كل من التكاملات التالية:

(1) $\int \frac{x^2}{\sqrt{4-9x^2}} dx$

$x = \frac{2}{3} \sin \theta$

(2) $\int \sqrt{2-3x^2} dx$

$x = \sqrt{\frac{2}{3}} \sin \theta$

(3) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4x+5}} dx$

$= \int \frac{x}{\sqrt{(x+2)^2+1}} dx$

أكمل المربع

$$\begin{aligned} x^2+4x+5 &= x^2+4x+4+5-4 \\ &= (x+2)^2+1 \end{aligned}$$

$x+2 = \tan \theta$

$x = \tan \theta - 2$

(4) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4x}} dx$

$= \int \frac{x}{\sqrt{(x+2)^2-4}} dx$

أكمل المربع

$$\begin{aligned} x^2+4x &= x^2+4x+4-4 \\ &= (x+2)^2-4 \end{aligned}$$

$x+2 = 2 \sec \theta$

$x = 2 \sec \theta - 2$

(5) $\int \frac{x}{\sqrt{3-2x-x^2}} dx$

$= \int \frac{x}{\sqrt{4-(x+1)^2}} dx$

أكمل المربع

$$\begin{aligned} 3-2x-x^2 &= -[x^2+2x-3] \\ &= -[x^2+2x+1-3-1] \\ &= -[(x+1)^2-4] \\ &= 4-(x+1)^2 \end{aligned}$$

$x+1 = 2 \sin \theta \rightarrow x = 2 \sin \theta - 1$

$$(1) \int \frac{1}{x^2 \sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= \int \frac{1}{\sin^2 \theta \sqrt{1-\sin^2 \theta}} \cdot \cos \theta d\theta$$

$$= \int \frac{1}{\sin^2 \theta \sqrt{\cos^2 \theta}} \cdot \cos \theta d\theta$$

$$= \int \frac{1}{\sin^2 \theta |\cos \theta|} \cos \theta d\theta$$

$$= \int \frac{1}{\sin^2 \theta} d\theta$$

$$= \int \csc^2 \theta d\theta$$

$$= -\cot \theta + C$$

$$= -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + C$$

$$x = \sin \theta \text{ نفرض}$$

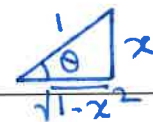
$$\frac{dx}{d\theta} = \cos \theta$$

$$dx = \cos \theta d\theta$$

نحول القيمة المطلوبة
في كل المسائل بسبب الفترة
راجع الجدول

نقلت الخطيب التحويل لا سترهاج x

$$\sin \theta = x = \frac{x}{1}$$



$$(2) \int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2} dx$$

$$= \int \frac{\sqrt{4-4\sin^2 \theta}}{4\sin^2 \theta} d\theta (2\cos \theta)$$

$$= \int \frac{2\cos \theta}{4\sin^2 \theta} \cdot 2\cos \theta d\theta$$

$$= \int \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} d\theta = \int \cot^2 \theta d\theta$$

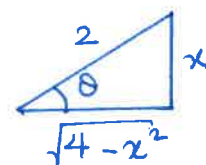
$$= \int (\csc^2 \theta - 1) d\theta$$

$$= -\cot \theta - \theta + C = -\frac{\sqrt{4-x^2}}{x} - \sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

$$x = 2 \sin \theta$$

$$dx = 2 \cos \theta d\theta$$

$$\sin \theta = \frac{x}{2}$$



$$(1) \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= \int \frac{\sin^2 \theta}{\sqrt{1-\sin^2 \theta}} \cdot \cos \theta d\theta$$

$$= \int \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} \cos \theta d\theta$$

$$= \int \sin^2 \theta d\theta = \int \frac{1}{2} (1 - \cos 2\theta) d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \left(\theta - \frac{\sin 2\theta}{2} \right) + C$$

$$= \frac{1}{2} \left(\theta - \sin \theta \cos \theta \right) + C$$

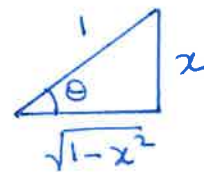
$$= \frac{1}{2} \left(\sin^{-1} x - x \sqrt{1-x^2} \right) + C$$

$$x = \sin \theta$$

$$dx = \cos \theta d\theta$$

ثلث التحويل

$$\sin \theta = \frac{x}{1}$$



محمد عمر الخطيب

$$(2) \int \sqrt{9-x^2} dx$$

$$= \int \sqrt{9-9\sin^2 \theta} \cdot 3\cos \theta d\theta$$

$$= 3 \int \sqrt{1-\sin^2 \theta} \cdot 3\cos \theta d\theta$$

$$= 9 \int \cos^2 \theta d\theta$$

$$= \frac{9}{2} \int (1 + \cos 2\theta) d\theta$$

$$= \frac{9}{2} \left(\theta + \frac{\sin 2\theta}{2} \right) + C$$

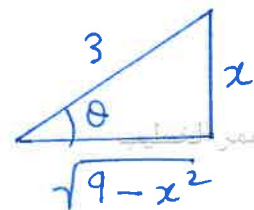
$$= \frac{9}{2} \left(\theta + \sin \theta \cos \theta \right) + C$$

$$= \frac{9}{2} \left(\sin^{-1} \left(\frac{x}{3} \right) + \frac{x}{3} \cdot \frac{\sqrt{9-x^2}}{3} \right) + C$$

$$x = 3\sin \theta$$

$$dx = 3\cos \theta d\theta$$

$$\sin \theta = \frac{x}{3}$$



محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

أوجد التكاملات التالية:

(1) $\int \frac{1}{\sqrt{16+x^2}} dx$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{16+16\tan^2\theta}} \cdot 4 \sec^2\theta d\theta$$

$$x = 4 \tan \theta$$

$$dx = 4 \sec^2\theta d\theta$$

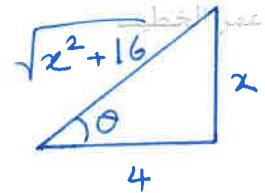
$$= \int \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sec^2\theta}} \cdot 4 \sec^2\theta d\theta$$

$$\tan \theta = \frac{x}{4}$$

$$= \int \sec \theta d\theta$$

$$= \ln | \sec \theta + \tan \theta | + C$$

$$= \ln \left| \frac{\sqrt{x^2+16}}{4} + \frac{x}{4} \right| + C$$



(2) $\int x^3 \sqrt{1+x^2} dx$

$$= \int \tan^3\theta \sqrt{1+\tan^2\theta} \cdot \sec^2\theta d\theta$$

$$x = \tan \theta$$

$$dx = \sec^2\theta d\theta$$

$$= \int \tan^3\theta \sec^3\theta d\theta$$

$$= \int \tan^3\theta u^3 \cdot \frac{du}{\sec\theta \tan\theta}$$

$$u = \sec \theta$$

$$\frac{du}{d\theta} = \sec \theta \tan \theta$$

$$d\theta = \frac{du}{\sec \theta \tan \theta}$$

$$\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1 = u^2 - 1$$

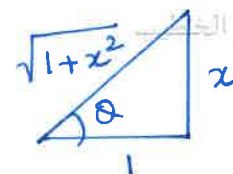
$$= \int \tan^2\theta u^2 du$$

$$= \int (u^2 - 1) u^2 du = \int (u^4 - u^2) du$$

$$= \frac{1}{5} u^5 - \frac{1}{3} u^3 + C$$

$$= \frac{1}{5} \sec^5\theta - \frac{1}{3} \sec^3\theta + C$$

$$= \frac{1}{5} (\sqrt{1+x^2})^5 - \frac{1}{3} (\sqrt{1+x^2})^3 + C$$



أوجد التكاملات التالية:

$$(1) \int \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}} dx$$

$$= \int \frac{1}{\tan \theta \cdot \sec \theta} \cdot \sec^2 \theta d\theta$$

$$= \int \cot \theta \sec \theta d\theta$$

$$= \int \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \cdot \frac{1}{\cos \theta} d\theta$$

$$= \int \csc \theta d\theta$$

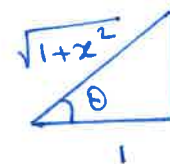
$$= \ln | \csc \theta - \cot \theta | + C$$

$$= \ln \left| \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} - \frac{1}{x} \right| + C$$

$$x = \tan \theta$$

$$dx = \sec^2 \theta d\theta$$

$$\tan \theta = \frac{x}{1}$$



محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$(2) \int \frac{x}{\sqrt{x^2+2x+2}} dx$$

$$= \int \frac{x}{\sqrt{(x+1)^2+1}} dx$$

$$= \int \frac{\tan \theta - 1}{\sqrt{\tan^2 \theta + 1}} \cdot \sec^2 \theta d\theta$$

$$= \int \frac{\tan \theta - 1}{\sec \theta} \cdot \sec^2 \theta d\theta$$

$$= \int (\sec \theta \tan \theta - \sec \theta) d\theta$$

$$= \sec \theta - \ln | \sec \theta + \tan \theta | + C$$

$$= \sqrt{x^2+2x+2} - \ln | \sqrt{x^2+2x+2} + x+1 | + C$$

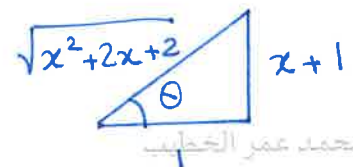
الحال المربع

$$\begin{aligned} x^2 + 2x + 2 &= x^2 + 2x + 1 + 1 \\ &= (x+1)^2 + 1 \end{aligned}$$

$$x+1 = \tan \theta$$

$$dx = \sec^2 \theta d\theta$$

$$\tan \theta = x+1$$



محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

أوجد التكاملات التالية:

$$(1) \int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} dx$$

$$= \int \frac{\tan \theta}{\sec \theta} \cdot \sec \theta \tan \theta d\theta$$

$$= \int \tan^2 \theta d\theta$$

$$= \int (\sec^2 \theta - 1) d\theta$$

$$= \tan \theta - \theta + C$$

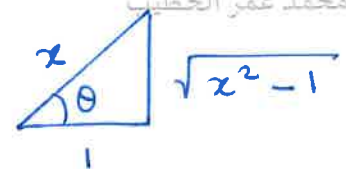
$$= \sqrt{x^2-1} - \sec^{-1} x + C$$

$$x = \sec \theta$$

$$dx = \sec \theta \tan \theta d\theta$$

$$\sec \theta = x$$

$$\cos \theta = \frac{1}{x}$$



$$(2) \int \frac{x^3}{\sqrt{x^2-9}} dx$$

$$= \int \frac{27 \sec^3 \theta}{\sqrt{9 \sec^2 \theta - 9}} \cdot 3 \sec \theta \tan \theta d\theta$$

$$= \int \frac{27 \sec^3 \theta}{3 \tan \theta} \cdot 3 \sec \theta \tan \theta d\theta$$

$$= \int 27 \sec^4 \theta d\theta$$

$$= 27 \left[\frac{1}{3} \tan^3 \theta + \tan \theta \right] + C$$

$$= 9 \left(\frac{\sqrt{x^2-9}}{3} \right)^3 + 27 \left(\frac{\sqrt{x^2-9}}{3} \right) + C$$

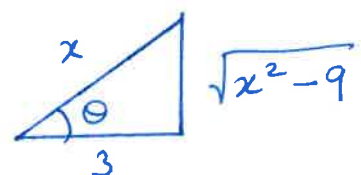
$$= \frac{1}{3} (x^2-9)^{3/2} + 9(x^2-9)^{1/2} + C$$

$$x = 3 \sec \theta$$

$$dx = 3 \sec \theta \tan \theta d\theta$$

$$\sec \theta = \frac{x}{3}$$

$$\cos \theta = \frac{3}{x}$$



$$(1) \int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx$$

نفس المساحة لبرادى
التي نصف قطرها 2
نفس المساحة لبرادى
التي نصف قطرها 2

$$y = \sqrt{4-x^2}$$



$$= \frac{1}{4} \pi (2)^2 = \pi$$

* يمكن حل السؤال بالتعويض $= 2 \sin \theta$

يمكن حل السؤال بالتعويض بالمتغير u

$$(2) \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} dx$$

التعويض $u = 4-x^2$

$$= \int \frac{x}{\sqrt{u}} \cdot \frac{du}{-2x}$$

$$u = 4-x^2$$

$$\frac{du}{dx} = -2x$$

$$= -\frac{1}{2} \int_4^3 u^{-1/2} du$$

$$\frac{du}{-2x} = du$$

$$= -\frac{1}{2} \left[2 u^{1/2} \right]_4^3 = 2 - \sqrt{3}$$

$$x=0 \rightarrow u=4$$

$$x=1 \rightarrow u=3$$

$$(3) \int_{-a}^a \sqrt{a^2-x^2} dx$$

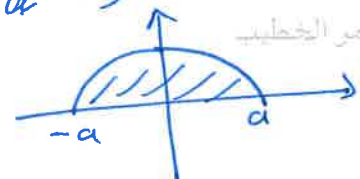
يمكن حل السؤال بالتعويض بالمتغير $x = a \sin \theta$

$$= \frac{1}{2} \pi (a)^2$$

أو نفس المساحة لبرادى

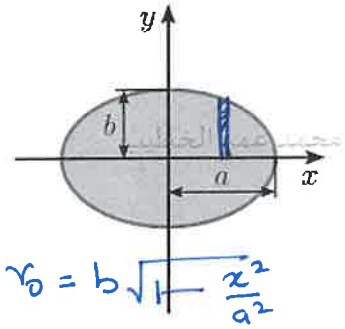
$$= \frac{1}{2} \pi a^2$$

نفس المساحة لبرادى
التي نصف قطرها a



(1) أوجد حجم المجسم الناتج عن دوران القطع الناقص الذي معادلته $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ حول محور x

الشرائح dx $\perp$ محور الدوران $\leftarrow$ اقراص



$$r_0 = b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

$$r_i = 0$$

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}$$

$$y^2 = b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$$

$$y = \pm b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

$$V = \pi \int_{-a}^a b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx$$

$$= \pi b^2 \left(x - \frac{1}{a^2} \cdot \frac{x^3}{3}\right) \Big|_{-a}^a$$

$$= \pi b^2 \left[\left(a - \frac{a}{3}\right) - \left(-a + \frac{a}{3}\right)\right]$$

$$= \pi b^2 \left(\frac{2}{3}a + \frac{2}{3}a\right)$$

$$= \frac{4}{3} \pi a b^2$$

(2) أثبت أن مساحة القطع الناقص الذي معادلته $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ هي πab

$$A = 4 \int_0^b b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx$$

$$= 4 \int_0^{\pi/2} b \sqrt{1 - \sin^2 \theta} \cdot a \cos \theta d\theta$$

$$= 4ab \int_0^{\pi/2} \cos \theta \cdot \cos \theta d\theta$$

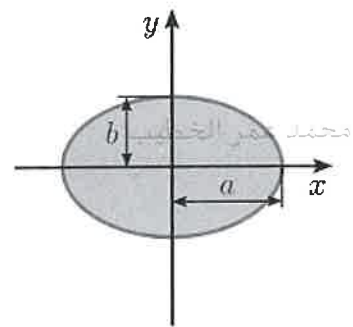
$$= 4ab \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta d\theta$$

$$= 4ab \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} (1 + \cos 2\theta) d\theta$$

$$= 2ab \left[\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\pi/2}$$

$$= 2ab \left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \pi ab$$



$$x = a \sin \theta$$

$$dx = a \cos \theta$$

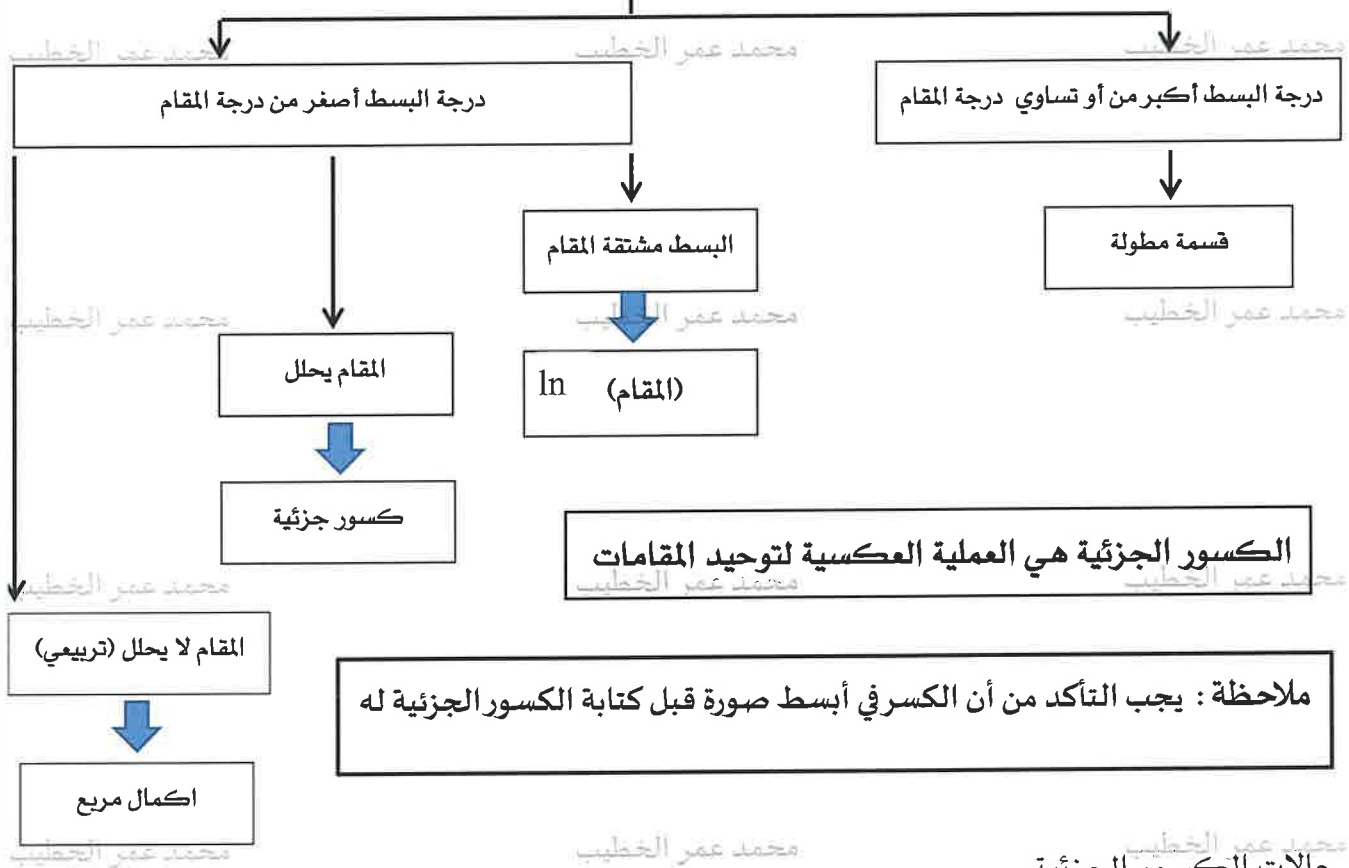
تغيير الحدود

$$x=0 \rightarrow \theta=0$$

$$x=a \rightarrow \theta=\frac{\pi}{2}$$

الوحدة السابعة : طرق التكامل /// الدرس الرابع : التكامل بالكسور الجزئية

تكامل الدوال النسبية



حالات الكسور الجزئية

عندما يكون المقام

(1) عوامل خطية مختلفة

$$\frac{x}{x^2 - 3x + 2} = \frac{x}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}$$

(2) عوامل خطية منها مكرر

$$\frac{1}{x^2(x+3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+3}$$

(3) عوامل خطية وتربيعية مختلفة

$$\frac{1}{x(x-2)(x^2+4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{Cx+D}{x^2+4}$$

(4) عوامل خطية وتربيعية منها مكرر

$$\frac{1}{x(x-2)^2(x^2+4)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2} + \frac{Dx+E}{x^2+4} + \frac{Fx+G}{(x^2+4)^2}$$

$$(1) \frac{2}{x^2 - 3x} = \frac{2}{x(x-3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-3}$$

$$(2) \frac{x}{x^2 - 4} = \frac{x}{(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}$$

$$(3) \frac{5}{x^2 - 2x - 8} = \frac{5}{(x-4)(x+2)} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+2}$$

$$(4) \frac{x}{(x+1)(x-3)(x+5)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{x+5}$$

$$(5) \frac{x+7}{x^2(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1}$$

$$(6) \frac{2x+3}{(x^2-1)^2} = \frac{2x+3}{(x-1)^2(x+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{(x+1)^2}$$

$$(7) \frac{-1}{x^3 - 4x} = \frac{-1}{x(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+2}$$

$$(8) \frac{x}{x^3 - 4x} = \frac{x}{x(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}$$

$$(9) \frac{3}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

$$(10) \frac{5x+7}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

$$(11) \frac{5}{x^2(x^2+2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+2} + \frac{Ex+F}{(x^2+2)^2}$$

$$(12) \frac{1}{x^4 - 1} = \frac{1}{(x^2-1)(x^2+1)} = \frac{1}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

$$(1) \frac{2}{x^2-1} = \frac{2}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1) + B(x-1)}{(x-1)(x+1)}$$

$$2 = A(x+1) + B(x-1)$$

محمد عمر الخطيب

$$x = -1 \rightarrow 2 = B(-2) \rightarrow B = -1$$

$$x = 1 \rightarrow 2 = A(2) \rightarrow A = 1$$

$$\frac{2}{x^2-1} = \frac{1}{x-1} + \frac{(-1)}{x+1}$$

$$(2) \frac{3x}{x^2+x-2} = \frac{3x}{(x+2)(x-1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1}$$

محمد عمر الخطيب

$$3x = A(x-1) + B(x+2)$$

$$x = 1 \rightarrow 3 = B(3) \rightarrow B = 1$$

$$x = -2 \rightarrow -6 = A(-3) \rightarrow A = 2$$

محمد عمر الخطيب

$$\frac{3x}{x^2+x-2} = \frac{2}{x+2} + \frac{1}{x-1}$$

$$(3) \frac{5x-23}{6x^2-11x-7} = \frac{5x-23}{(2x+1)(3x-7)} = \frac{A}{2x+1} + \frac{B}{3x-7}$$

$$5x-23 = A(3x-7) + B(2x+1)$$

محمد عمر الخطيب

$$x = -\frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{51}{2} = -\frac{17}{2}A \Rightarrow A = 3$$

$$x = \frac{7}{3} \Rightarrow -\frac{34}{3} = \frac{17}{3}B \Rightarrow B = -2$$

$$\frac{5x-23}{6x^2-11x-7} = \frac{3}{2x+1} - \frac{2}{3x-7}$$

محمد عمر الخطيب

$$(4) \frac{1}{x(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2}$$

$$1 = A(x-1)(x+2) + B(x+2)x + C(x-1)x$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$x = 0 \rightarrow 1 = -2A \rightarrow A = -\frac{1}{2}$$

$$x = 1 \rightarrow 1 = 3B \rightarrow B = \frac{1}{3}$$

$$x = -2 \rightarrow 1 = 6C \rightarrow C = \frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{x(x-1)(x+2)} = \frac{-\frac{1}{2}}{x} + \frac{\frac{1}{3}}{x-1} + \frac{\frac{1}{6}}{x+2}$$

محمد عمر الخطيب

$$(1) \frac{8x-8}{x^3-2x^2-8x} = \frac{8(x-1)}{x(x^2-2x-8)} = \frac{8(x-1)}{x(x-4)(x+2)}$$

$$= \frac{A}{x} + \frac{B}{x-4} + \frac{C}{x+2}$$

$$8x-8 = A(x-4)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(x-4)$$

$$x=0 \rightarrow -8 = -8A \rightarrow A=1$$

$$x=4 \rightarrow 24 = 24B \rightarrow B=1$$

$$x=-2 \rightarrow -24 = 12C \rightarrow C=-2$$

$$\frac{8x-8}{x^3-2x^2-8x} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-4} + \frac{-2}{x+2}$$

$$(2) \frac{12}{x^3+2x^2} = \frac{12}{x^2(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+2}$$

$$12 = Ax(x+2) + B(x+2) + Cx^2$$

$$x=0 \rightarrow 12 = 2B \rightarrow B=6$$

$$x=-2 \rightarrow 12 = 4C \rightarrow C=3$$

يمكن اختيار أي عدد

$$x=1 \rightarrow 12 = 3A + 3B + C$$

$$A=-3$$

$$\frac{12}{x^3+2x^2} = \frac{-3}{x} + \frac{6}{x^2} + \frac{3}{x+2}$$

$$(3) \frac{x+4}{(x+1)(x-2)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2}$$

$$x+4 = A(x-2)^2 + B(x+1)(x-2) + C(x+1)$$

$$x=2 \rightarrow 6 = 3C \rightarrow C=2$$

$$x=-1 \rightarrow 3 = 9A \rightarrow A=1/3$$

$$x=0 \rightarrow 4 = 4A - 2B + C \rightarrow 4 = 4\left(\frac{1}{3}\right) - 2B + 2$$

$$\rightarrow B = -1/3$$

$$\frac{x+4}{(x+1)(x-2)^2} = \frac{1/3}{x+1} + \frac{-1/3}{x-2} + \frac{2}{(x-2)^2}$$

$$(1) \frac{9x+7}{(x+3)(x^2+1)} = \frac{A}{x+3} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

$$9x+7 = A(x^2+1) + (Bx+C)(x+3)$$

$$x = -3 \rightarrow -20 = 10A \rightarrow A = -2$$

$$x = 0 \rightarrow 7 = A + 3C \rightarrow C = 3$$

$$x = -1 \rightarrow -2 = 2A + (-B+C)(2) \rightarrow B = 2$$

$$\frac{9x+7}{(x+3)(x^2+1)} = \frac{-2}{x+3} + \frac{2x+3}{x^2+1}$$

$$(2) \frac{12}{x^2(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

$$12 = Ax(x^2+1) + B(x^2+1) + (Cx+D)x^2$$

$$x = 0 \rightarrow 12 = B$$

$$x = 1 \rightarrow 12 = 2A + 2B + C + D \rightarrow 2A + C + D = -12 \quad (1)$$

$$x = -1 \rightarrow 12 = -2A + 2B - C + D \rightarrow -2A - C + D = -12 \quad (2)$$

$$(1) + (2) \rightarrow D = -12$$

$$x = 2 \rightarrow 12 = 10A + 5B + 4(2C+D) \rightarrow 10A + 8C = 0 \quad (3)$$

$$x = 3 \rightarrow 12 = 30A + 10B + 9(3C+D) \rightarrow 30A + 27C = 0 \quad (4)$$

$$(3) - \frac{1}{3}(4) \rightarrow C = 0 \rightarrow A = 0$$

$$\frac{12}{x^2(x^2+1)} = \frac{12}{x^2} + \frac{-12}{x^2+1}$$

أوجد التكاملات التالية: (اكتب تفكيك الكسور الجزئية لكل مما يلي ثم أوجد الدالة الأصلية)

$$(1) \int \frac{x+1}{x^2+2x+1} dx$$

لا تحتاج كسر جزئية

$$= \int \frac{x+1}{(x+1)^2} dx$$

$$= \int \frac{1}{x+1} dx = \ln|x+1| + c$$

$$(2) \int \frac{4}{x^2-4} dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{x-2} + \frac{-1}{x+2} \right) dx$$

$$= \ln|x-2| - \ln|x+2| + c$$

$$= \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + c$$

$$\frac{4}{x^2-4} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}$$

$$4 = A(x+2) + B(x-2)$$

$$x = -2 \rightarrow 4 = -4B \rightarrow B = -1$$

$$x = 2 \rightarrow 4 = 4A \rightarrow A = 1$$

$$(3) \int \frac{5x-23}{6x^2-11x-7} dx$$

$$= \int \frac{-2}{3x-7} + \frac{3}{2x+1} dx$$

$$= -\frac{2}{3} \ln|3x-7|$$

$$+ \frac{3}{2} \ln|2x+1| + c$$

$$\frac{5x-23}{6x^2-11x-7} = \frac{A}{3x-7} + \frac{B}{2x+1}$$

$$5x-23 = A(2x+1) + B(3x-7)$$

$$x = \frac{7}{3} \rightarrow -\frac{34}{3} = \frac{17}{3} A \rightarrow A = -2$$

$$x = -\frac{1}{2} \rightarrow -\frac{51}{2} = -\frac{17}{2} B \rightarrow B = 3$$

$$(1) \int \frac{3x^2 - 7x - 2}{x^3 - x} dx$$

$$= \int \frac{2}{x} + \frac{-2}{x-1} + \frac{4}{x+1} dx$$

$$= 2 \ln|x| - 2 \ln|x-1| + 4 \ln|x+1| + C$$

$$\frac{3x^2 - 7x - 2}{x^3 - x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}$$

$$3x^2 - 7x - 2 = A(x-1)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-1)$$

$$x=0 \rightarrow -2 = -A \rightarrow A=2$$

$$x=1 \rightarrow -6 = 2B \rightarrow B=-3$$

$$x=-1 \rightarrow 8 = 2C \rightarrow C=4$$

$$(2) \int \frac{3x+2}{x^3+x} dx$$

$$= \int \frac{2}{x} + \frac{-2x+3}{x^2+1} dx$$

$$= \int \frac{2}{x} dx + \int \frac{-2x}{x^2+1} dx + \int \frac{3}{x^2+1} dx$$

$$= 2 \ln|x| - \ln|x^2+1| + 3 \tan^{-1}x + C$$

$$\frac{3x+2}{x^3+x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

$$3x+2 = A(x^2+1) + x(Bx+C)$$

$$x=0 \rightarrow 2 = A$$

$$x=1 \rightarrow 5 = 2A+B+C \rightarrow B+C=1 \quad (1)$$

$$x=-1 \rightarrow -1 = 2A+B-C \rightarrow B-C=-5 \quad (2)$$

$$(1) + (2) \rightarrow B=-2, C=3$$

$$(3) \int \frac{3x^2+1}{x^3-x^2+x-1} dx$$

$$= \int \frac{2}{x-1} + \frac{x+1}{x^2+1} dx$$

$$= \int \frac{2}{x-1} + \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1} dx$$

$$= 2 \ln|x-1| + \frac{1}{2} \ln|x^2+1|$$

$$+ \tan^{-1}x + C$$

$$x^3 - x^2 + x - 1 = x^2(x-1) + x - 1 = (x-1)(x^2+1)$$

$$\frac{3x^2+1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

$$3x^2+1 = A(x^2+1) + (Bx+C)(x-1)$$

$$x=1 \rightarrow 4 = 2A \rightarrow A=2$$

$$x=0 \rightarrow 1 = A-C \rightarrow C=1$$

$$x=-1 \rightarrow 4 = 2A - 2(-B+1)$$

$$\rightarrow B=1$$

$$(1) \int \frac{x-1}{(x+1)^2} dx$$

$$= \int \frac{1}{x+1} + \frac{-2}{(x+1)^2} dx$$

$$= \int \frac{1}{x+1} dx - 2 \int (x+1)^{-2} dx$$

$$= \ln|x+1| + 2(x+1)^{-1} + C$$

$$\frac{x-1}{(x+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2}$$

$$x-1 = A(x+1) + B$$

$$x = -1 \rightarrow -2 = B$$

$$x = 0 \rightarrow -1 = A + B$$

$$\rightarrow A = 1$$

$$(2) \int \frac{x+1}{x(x-1)^2} dx$$

$$= \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{-1}{x-1} dx + 2 \int \frac{1}{(x-1)^2} dx$$

$$= \ln|x| - \ln|x-1| + 2 \frac{(x-1)^{-1}}{-1} + C$$

$$= \ln\left|\frac{x}{x-1}\right| - \frac{2}{x-1} + C$$

$$\frac{x+1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$$

$$x+1 = A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx$$

$$x = 0 \rightarrow 1 = A$$

$$x = 1 \rightarrow 2 = C$$

$$x = 2 \rightarrow 3 = A + 2B + 2C$$

$$\rightarrow B = -1$$

$$(3) \int \frac{12}{x^3 + 2x^2} dx$$

$$= \int \frac{-3}{x} dx + \int \frac{6}{x^2} dx + \int \frac{3}{x+2} dx$$

$$= -3 \ln|x| + \frac{6x^{-1}}{-1}$$

$$+ 3 \ln|x+2| + C$$

$$\frac{12}{x^3 + 2x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+2}$$

$$12 = Ax(x+2) + B(x+2) + Cx^2$$

$$x = 0 \rightarrow 12 = 2B \rightarrow B = 6$$

$$x = -2 \rightarrow 12 = 4C \rightarrow C = 3$$

$$x = 1 \rightarrow 12 = 3A + 3B + C$$

$$\rightarrow A = -3$$

القسمة المطولة (درجة البسط أكبر من أو تساوي درجة المقام)

يمكن كتابة الدالة النسبية $f(x)$ التي فيها درجة البسط أكبر من أو تساوي درجة المقام على الشكل التالي

$$f(x) = \text{الناتج} + \frac{\text{الباقى}}{\text{المقسوم عليه}}$$

أوجد التكاملات التالية:

$$(1) \int \frac{x+3}{x+1} dx = \int 1 + \frac{2}{x+1} dx$$

$$= x + 2 \ln|x+1| + C$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ x+1 \overline{) x+3} \\ \underline{\ominus x+1} \\ 2 \end{array}$$

$$(2) \int \frac{x^2+3}{x^2+1} dx = \int 1 + \frac{2}{x^2+1} dx$$

$$= x + 2 \ln|x^2+1| + C$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ x^2+1 \overline{) x^2+3} \\ \underline{\ominus x^2+1} \\ 2 \end{array}$$

$$(3) \int \frac{x^3}{x^2+1} dx = \int x - \frac{x}{x^2+1} dx$$

$$= \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} \ln|x^2+1| + C$$

$$\begin{array}{r} x \\ x^2+1 \overline{) x^3} \\ \underline{\ominus x^3+x} \\ -x \end{array}$$

$$(4) \int \frac{x^2+1}{x^2-1} dx = \int 1 + \frac{2}{x^2-1} dx$$

$$= \int 1 + \frac{1}{x-1} + \frac{-1}{x+1} dx$$

$$= x + \ln|x-1| - \ln|x+1| + C$$

$$= x + \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ x^2-1 \overline{) x^2+1} \\ \underline{\ominus x^2-1} \\ 2 \end{array}$$

$$\frac{2}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

$$2 = A(x+1) + B(x-1)$$

$$x = -1 \rightarrow 2 = -2B \rightarrow B = -1$$

$$x = 1 \rightarrow 2 = 2A \rightarrow A = 1$$

$$(1) \int \frac{x^3 + x + 2}{x^2 + 2x - 8} dx$$

$$= \int x - 2 + \frac{13x - 14}{x^2 + 2x - 8} dx$$

$$= \int x - 2 + \frac{11}{x+4} + \frac{2}{x-2} dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 - 2x + 11 \ln|x+4| + 2 \ln|x-2| + C$$

$$\begin{array}{r} x-2 \\ x^2+2x-8 \overline{) x^3+x+2} \\ \underline{\ominus x^3+2x-8x} \\ -2x^2+9x+2 \\ \underline{\oplus -2x^2+4x+16} \\ 13x-14 \end{array}$$

$$\frac{13x-14}{x^2+2x-8} = \frac{A}{x+4} + \frac{B}{x-2}$$

$$13x-14 = A(x-2) + B(x+4)$$

$$x=2 \Rightarrow 12=6B \Rightarrow B=2$$

$$x=-4 \Rightarrow -66=-6A \Rightarrow A=11$$

$$(2) \int \frac{x+4}{x^2+x+1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2(x+4)}{x^2+x+1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x+8}{x^2+x+1} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int \left(\frac{2x+1}{x^2+x+1} + \frac{7}{x^2+x+1} \right) dx$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx + \frac{1}{2} \int \frac{7}{(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} dx$$

$$= \frac{1}{2} \ln|x^2+x+1| + \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \tan^{-1} \frac{(x+\frac{1}{2})}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + C$$

صيغة تكامل

$$\begin{aligned} & \text{أكمل مربع} \\ & x^2+x+1 \\ & = x^2+x+\frac{1}{4}+1-\frac{1}{4} \\ & = (x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4} \\ & a=\sqrt{\frac{3}{4}} \\ & = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$$(1) \int \frac{4 \cos x}{\sin^2 x - 4} dx$$

$$= \int \frac{4 \cos x}{u^2 - 4} \cdot \frac{du}{\cos x}$$

$$= \int \frac{4}{u^2 - 4} du$$

$$= \int \frac{1}{u-2} + \frac{-1}{u+2} du$$

$$= \ln|u-2| - \ln|u+2| + C$$

$$= \ln \left| \frac{u-2}{u+2} \right| + C$$

$$= \ln \left| \frac{\sin x - 2}{\sin x + 2} \right| + C$$

$$u = \sin x$$

$$\frac{du}{dx} = \cos x$$

$$\frac{du}{\cos x} = dx$$

$$\frac{4}{u^2 - 4} = \frac{A}{u-2} + \frac{B}{u+2}$$

$$4 = A(u+2) + B(u-2)$$

$$u = -2 \rightarrow 4 = -4B \rightarrow B = -1$$

$$u = 2 \rightarrow 4 = 4A \rightarrow A = 1$$

$$(2) \int \frac{2e^x}{e^{2x} - 1} dx = \int \frac{2e^x}{(e^x)^2 - 1} dx$$

$$= \int \frac{2e^x}{u^2 - 1} \cdot \frac{du}{e^x}$$

$$= \int \frac{2}{u^2 - 1} du$$

$$= \int \frac{1}{u-1} + \frac{-1}{u+1} du$$

$$= \ln|u-1| - \ln|u+1| + C$$

$$= \ln \left| \frac{u-1}{u+1} \right| + C$$

$$= \ln \left| \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right| + C$$

$$u = e^x$$

$$\frac{du}{dx} = e^x$$

$$\frac{du}{e^x} = dx$$

$$\frac{2}{u^2 - 1} = \frac{A}{u-1} + \frac{B}{u+1}$$

$$2 = A(u+1) + B(u-1)$$

$$u = -1 \rightarrow 2 = -2B \rightarrow B = -1$$

$$u = 1 \rightarrow 2 = 2A \rightarrow A = 1$$

تسمى المعادلة التي تحتوي على مشتقة من اي درجة بالمعادلة التفاضلية

ويقصد بحل المعادلة التفاضلية هو ايجاد قيمة y التي تحقق المعادلة التفاضلية ، وذلك باستخدام التكامل ، ومن اشهر الطرق لحل المعادلات التفاضلية هي طريقة فصل المتغيرات.

ملاحظة : (من خارج الكتاب)

(1) رتبة المعادلة التفاضلية هي أعلى رتبة للمشتقة (أكبر مشتقة)

(2) درجة المعادلة التفاضلية هي أعلى أس معامل تفاضلي (أس أكبر مشتقة)

مثال : $(y'')^5 + x(y''')^4 = xy^7$ معادلة تفاضلية من الرتبة : 3 والدرجة : 4

(1) بين أن الدالة $y = x - \frac{1}{2} + ce^{-2x}$ حيث c عدد ثابت هي حل للمعادلة التفاضلية $y' + 2y = 2x$

الطرف الأيسر

$$\begin{aligned} y' + 2y &= 1 - 2ce^{-2x} + 2\left(x - \frac{1}{2} + ce^{-2x}\right) \\ &= 1 - 2ce^{-2x} + 2x - 1 + 2ce^{-2x} \\ &= 2x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y' &= 1 + ce^{-2x}(-2) \\ &= 1 - 2ce^{-2x} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow y' + 2y = 2x$$

(2) إذا كانت الدالة $y = e^{kx}$ حيث k عدد ثابت هي حل للمعادلة التفاضلية $y'' + y' - 6y = 0$

$$\begin{aligned} y'' + y' - 6y &= 0 \\ k^2 e^{kx} + k e^{kx} - 6 e^{kx} &= 0 \\ e^{kx}(k^2 + k - 6) &= 0 \\ \rightarrow k^2 + k - 6 &= 0 \end{aligned}$$

$$k = -3, k = 2$$

$$\begin{aligned} \text{فأوجد قيم } k \\ y &= e^{kx} \\ y' &= k e^{kx} \\ y'' &= k^2 e^{kx} \end{aligned}$$

حدد أي من المعادلات التفاضلية التالية قابلة للفصل (اجعل كل متغير في طرف)

(1) $y' = \frac{xy}{x^2 + 1}$

$$\frac{dy}{y} = \frac{x}{x^2 + 1} dx$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{x^2 + 1}$$

نعم

(2) $y' = 2x \cos y + x$

$$\frac{dy}{dx} = 2x \cos y + x$$

$$\frac{dy}{dx} = x(2 \cos y + 1)$$

$$\frac{dy}{2 \cos y + 1} = x dx$$

نعم

(3) $y' = 2y^2 + 2$

$$\frac{dy}{dx} = 2y^2 + 2$$

$$\frac{dy}{2y^2 + 2} = dx$$

نعم

(4) $\frac{y'}{x} = \frac{\cos x}{y}$

$$yy' = x \cos x$$

$$y \frac{dy}{dx} = x \cos x$$

$$y dy = x \cos x dx$$

نعم

(5) $y' = 3 \cos(x + y)$

غير قابلة

(6) $y' = 3x(x + y)$

غير قابلة

$$(1) y' = e^{x+\ln y} \quad \frac{dy}{dx} = e^x \cdot e^{\ln y}$$

$$\frac{dy}{dx} = e^x \cdot y$$

$$\frac{dy}{y} = e^x dx$$

$$(2) y'(xy + y) = 2 \quad \frac{dy}{dx} \cdot y(x+1) = 2$$

$$y dy = \frac{2}{x+1} dx$$

$$(3) y' = \sqrt{xy + y} \quad \frac{dy}{dx} = \sqrt{y(x+1)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{y} \cdot \sqrt{x+1}$$

$$\frac{dy}{\sqrt{y}} = \sqrt{x+1} dx$$

$$(4) y' = 1 - \frac{x}{y} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y-x}{y}$$

$$y dy = (y-x) dx \quad \text{غير قابلة للفصل}$$

$$(4) y' = 1 - \frac{x}{y}$$

$$(5) y' = \ln(x^2 y) \quad \frac{dy}{dx} = \ln x^2 + \ln y$$

$$dy = (\ln x^2 + \ln y) dx$$

غير قابلة للفصل

$$(6) y' - y + 1 = 0 \quad \frac{dy}{dx} = 1 - y$$

$$\frac{dy}{1-y} = dx$$

تأكد أن الحل يحقق الشرط

(1) $y' = 2e^{2x}$, $y(0) = 3$

$$\frac{dy}{dx} = 2e^{2x}$$

$$dy = 2e^{2x} dx$$

$$\int dy = \int 2e^{2x} dx$$

$$y = e^{2x} + c$$

$$y(0) = 3$$

$$3 = e^0 + c \rightarrow c = 2$$

$$y = e^{2x} + 2$$

(2) $y' = \frac{1}{x^2} + 2x$, $y(1) = 3$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2} + 2x$$

$$dy = \left(\frac{1}{x^2} + 2x\right) dx$$

$$\int dy = \int \left(\frac{1}{x^2} + 2x\right) dx$$

$$y = -\frac{1}{x} + x^2 + c$$

$$y(1) = 3$$

$$3 = -1 + 1 + c \rightarrow c = 3$$

$$y = -\frac{1}{x} + x^2 + 3$$

(3) $y' = \frac{x}{x^2+1}$, $y(0) = 2$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{x^2+1}$$

$$dy = \frac{x}{x^2+1} dx$$

$$\int dy = \int \frac{x}{x^2+1} dx$$

$$y = \int \frac{x}{x^2+1} dx$$

$$y = \frac{1}{2} \ln|x^2+1| + c$$

$$y(0) = 2$$

$$2 = c$$

$$y = \frac{1}{2} \ln|x^2+1| + 2$$

(4) $y' = \frac{4x}{\cos y}$, $y(0) = 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x}{\cos y}$$

$$dy \cos y = 4x dx$$

$$\int \cos y dy = \int 4x dx$$

$$\sin y = 2x^2 + c$$

$$y(0) = 0 \rightarrow c = 0$$

$$\sin y = 2x^2$$

$$y = \sin^{-1} 2x^2$$

أوجد حل كل من المعادلات التفاضلية التالية بصورة صريحة (القيمة الابتدائية)

(1) $y' = 2y$, $y(0) = 5$

$$\frac{dy}{dx} = 2y$$

$$\frac{dy}{y} = 2 dx$$

$$\int \frac{1}{y} dy = \int 2 dx$$

$$\ln|y| = 2x + C$$

$$y = e^{2x+C}$$

$$y = e^{2x} \cdot e^C$$

$$y = A e^{2x}$$

$$y(0) = 5$$

$$5 = A e^0$$

$$5 = A$$

$$y = 5 e^{2x}$$

(2) $y' = -2y$, $y(1) = 2$

$$y = A e^{-2x}$$

$$y(1) = 2$$

$$2 = A e^{-2(1)}$$

$$2 = A/e^2$$

$$A = 2e^2$$

$$y = 2e^2 \cdot e^{-2x}$$

$$= 2e^{2-2x}$$

(3) $y' = y - 50$, $y(0) = 70$

$$\frac{dy}{dx} = y - 50$$

$$\frac{dy}{y-50} = dx$$

$$\int \frac{1}{y-50} dy = \int dx$$

$$\ln|y-50| = x + C$$

$$y-50 = e^{x+C}$$

$$y-50 = A e^x$$

$$y = A e^x + 50$$

$$y(0) = 70 \rightarrow A = 20$$

$$y = 20e^x + 50$$

(4) $y' = -0.1y - 10$, $y(0) = 80$

$$y' = -0.1(y+100)$$

$$\frac{dy}{y+100} = -0.1 dx$$

$$\int \frac{1}{y+100} dy = -\int 0.1 dx$$

$$\ln|y+100| = -0.1x + C$$

$$y+100 = e^{-0.1x+C}$$

$$y = A e^{-0.1x} - 100$$

$$y(0) = 80 \rightarrow A = 180$$

$$y = 180 e^{-0.1x} - 100$$

(1) $y' = \frac{4x}{y}$, $y(1) = 5$

$\frac{dy}{dx} = \frac{4x}{y}$

$y dy = 4x dx$

$\int y dy = \int 4x dx$

$\frac{y^2}{2} = 2x^2 + C$

$y^2 = 4x^2 + C$

$y(1) = 5$

$5^2 = 4 + C \rightarrow C = 21$

$y^2 = 4x^2 + 21$

$y = \pm \sqrt{4x^2 + 21}$

فقط

$y = \sqrt{4x^2 + 21}$

لأنها تحقق الشرط

$y(1) = 5$

(2) $y' = \frac{\cos 2x}{y}$, $y(0) = -1$

$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos 2x}{y}$

$y dy = \cos 2x dx$

$\int y dy = \int \cos 2x dx$

$\frac{y^2}{2} = \frac{\sin 2x}{2} + C$

$y^2 = \sin 2x + C$

$y(0) = -1$

$1 = C$

$y^2 = \sin 2x + 1$

$y = \pm \sqrt{\sin 2x + 1}$

فقط

$y = -\sqrt{\sin 2x + 1}$

لأنها تحقق

الشرط

(3) $y' = x \sin x$, $y(0) = 2$

$\frac{dy}{dx} = x \sin x$

$dy = x \sin x dx$

$\int dy = \int x \sin x dx$

$y(0) = 2$

$C = 2$

$y = -x \cos x + \sin x + 2$

$\begin{array}{l} x \sin x \\ 1 \cos x \\ 0 \sin x \end{array}$

(4) $y' = \frac{\tan y}{x}$, $y(-1) = \frac{\pi}{2}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{\tan y}{x}$

$\frac{dy}{\tan y} = \frac{1}{x} dx$

$\int \cot y dy = \int \frac{1}{x} dx$

$\int \frac{\cos y}{\sin y} dy = \ln|x| + C$

$\ln|\sin y| = \ln|x| + C$

$y(-1) = \frac{\pi}{2} \rightarrow C = 0$

$\ln|\sin y| = \ln|x|$

$|\sin y| = |x|$

$\sin y = x$

$\sin y = -x$

$y = \sin^{-1}(-x)$

$$(1) y' = y^2 + 1$$

$$\frac{dy}{dx} = y^2 + 1$$

$$\frac{dy}{y^2 + 1} = dx$$

$$\int \frac{dy}{y^2 + 1} = \int dx$$

$$\tan^{-1} y = x + c$$

$$y = \tan(x + c)$$

محمد عمر الخطيب

$$(2) y' = \frac{\cos x}{3y^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{3y^2}$$

$$3y^2 dy = \cos x dx$$

$$\int 3y^2 dy = \int \cos x dx$$

$$y^3 = \sin x + c$$

$$y = \sqrt[3]{\sin x + c}$$

محمد عمر الخطيب

$$(3) y' = \frac{6x^2}{y(1+x^3)}$$

$$yy' = \frac{6x^2}{1+x^3}$$

$$y \frac{dy}{dx} = \frac{6x^2}{1+x^3}$$

$$y dy = \frac{6x^2}{1+x^3} dx$$

$$\int y dy = \int \frac{6x^2}{1+x^3} dx = 2 \int \frac{3x^2}{1+x^3} dx$$

$$\frac{y^2}{2} = 2 \ln|1+x^3| + c$$

$$y^2 = 4 \ln|1+x^3| + c$$

$$y = \pm \sqrt{4 \ln|1+x^3| + c}$$

محمد عمر الخطيب

أوجد الحل العام بصورة صريحة لكل من المعادلات التفاضلية التالية

(1) $y' = \sqrt{1-y^2}$

$$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = dx$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} dy = \int dx$$

$$\sin^{-1} y = x + c$$

$$y = \sin(x + c)$$

(2) $y' = xe^{x-y} = xe^x \cdot e^{-y}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xe^x}{e^y}$$

$$e^y dy = x e^x dx$$

$$\int e^y dy = \int x e^x dx$$

$$e^y = x e^x - e^x + c$$

$$y = \ln |x e^x - e^x + c|$$

اجزاء

$$\begin{matrix} x & \oplus & e^x \\ 1 & \oplus & e^x \\ 0 & \oplus & e^x \end{matrix}$$

(3) $y' = \frac{e^{-2y}}{x+1}$

$$\frac{dy}{e^{-2y}} = \frac{1}{x+1} dx$$

$$\int e^{2y} dy = \int \frac{1}{x+1} dx$$

$$\frac{e^{2y}}{2} = \ln|x+1| + c$$

$$e^{2y} = 2 \ln|x+1| + c$$

$$2y = \ln |2 \ln|x+1| + c|$$

$$y = \frac{1}{2} \ln |2 \ln|x+1| + c|$$

أوجد الحل العام بصورة صريحة لكل من المعادلات التفاضلية التالية

(1) $y'(xy + y) = 2$

$$\frac{dy}{dx} y(x+1) = 2$$

$$y dy = \frac{2}{x+1} dx$$

$$\int y dy = \int \frac{2}{x+1} dx$$

$$\frac{y^2}{2} = 2 \ln|x+1| + c$$

$$y^2 = 4 \ln|x+1| + c$$

$$y = \pm \sqrt{4 \ln|x+1| + c}$$

(2) $y' = \tan y$

$$\frac{dy}{dx} = \tan y$$

$$\frac{dy}{\tan y} = dx$$

$$\int \frac{1}{\tan y} dy = \int dx$$

$$\int \cot y dy = \int dx$$

$$\int \frac{\cos y}{\sin y} dy = \int dx$$

$$\ln|\sin y| = x + c$$

$$\sin y = e^{x+c} = A e^x$$

$$y = \sin^{-1}(A e^x)$$

(3) $y' = (y+1) \cos x$

$$\frac{dy}{dx} = (y+1) \cos x$$

$$\frac{dy}{y+1} = \cos x dx$$

$$\int \frac{dy}{y+1} = \int \cos x dx$$

$$\ln|y+1| = \sin x + c$$

$$y+1 = e^{\sin x + c}$$

$$y+1 = A e^{\sin x}$$

$$y = A e^{\sin x} - 1$$

(1) $y' = x \cos^2 y$

$$\frac{dy}{\cos^2 y} = x dx$$

$$\int \sec^2 y dy = \int x dx$$

$$\tan y = \frac{x^2}{2} + C$$

$$y = \tan^{-1} \left(\frac{x^2}{2} + C \right)$$

(2) $y' = \sin x + y^2 \sin x$

$$y' = (\sin x)(1 + y^2)$$

$$\frac{dy}{1+y^2} = \sin x dx$$

$$\int \frac{1}{1+y^2} dy = \int \sin x dx$$

$$\tan^{-1} y = -\cos x + C$$

$$y = \tan(-\cos x + C)$$

(3) $y' = \frac{2y \ln x}{x}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y \ln x}{x}$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{2 \ln x}{x} dx$$

$$\int \frac{1}{y} dy = \int \frac{2 \ln x}{x} dx$$

$$\ln |y| = (\ln x)^2 + C$$

$$y = e^{(\ln x)^2 + C}$$

$$y = A e^{(\ln x)^2}$$

$$\int \frac{2}{x} \ln x dx$$

$$= \int \frac{2}{x} u \cdot x du$$

$$= \int 2u du$$

$$= u^2 + C$$

$$u = \ln x$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$x du = dx$$

$$(1) y' = \frac{3x}{y+1}$$

$$(y+1) dy = 3x dx$$

$$\int (y+1) dy = \int 3x dx$$

$$\frac{y^2}{2} + y = \frac{3}{2} x^2 + C$$

$$y^2 + 2y = 3x^2 + C$$

أكمل مربع y

$$y^2 + 2y + 1 - 1 = 3x^2 + C$$

$$(y+1)^2 - 1 = 3x^2 + C$$

$$(y+1)^2 = 3x^2 + C + 1$$

$$(y+1)^2 = 3x^2 + C$$

$$y+1 = \pm \sqrt{3x^2 + C}$$

$$y = \sqrt{3x^2 + C} - 1$$

$$(2) y' = \frac{\sqrt{1-y^2}}{x \ln x}$$

$$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{1}{x \ln x} dx$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \int \frac{1}{x \ln x} dx \longrightarrow \int \frac{1}{x \ln x} dx$$

$$\sin^{-1} y = \ln |\ln x| + C$$

$$y = \sin (\ln |\ln x| + C)$$

$$= \int \frac{1}{x u} \cdot x du \quad u = \ln x$$

$$= \int \frac{1}{u} du \quad \frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$= \ln |u| + C \quad x du = dx$$

$$= \ln |\ln x| + C$$

$$= \ln |\ln x| + C$$

كسور جزئية

$$(1) y' = \frac{2\sqrt{y}}{x^2-1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2\sqrt{y}}{x^2-1}$$

$$\frac{dy}{\sqrt{y}} = \frac{2}{x^2-1}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{y}} dy = \int \frac{1}{x^2-1} dx$$

$$\int y^{-1/2} dy = \int \left(\frac{1}{x-1} + \frac{-1}{x+1} \right) dx$$

$$2y^{1/2} = \ln|x-1| - \ln|x+1| + C$$

$$y^{1/2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C \rightarrow y = \left[\frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C \right]^2$$

$$(2) y' = y(y-2)$$

$$\frac{dy}{dx} = y(y-2)$$

$$\frac{dy}{y(y-2)} = dx$$

$$\int \frac{1}{y(y-2)} dy = \int dx$$

$$\int \left(-\frac{1/2}{y} + \frac{1/2}{y-2} \right) dy = \int dx$$

$$-\frac{1}{2} \ln|y| + \frac{1}{2} \ln|y-2| = x + C$$

$$\frac{1}{2} \ln \left| \frac{y-2}{y} \right| = x + C$$

$$\ln \left| \frac{y-2}{y} \right| = 2x + C$$

$$\frac{y-2}{y} = e^{2x+C} = Ae^{2x}$$

$$\frac{1}{y(y-2)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y-2}$$

$$1 = A(y-2) + By$$

$$y=0 \rightarrow 1 = -2A$$

$$A = -1/2$$

$$y=2 \rightarrow 1 = 2B$$

$$B = 1/2$$

$$1 - \frac{2}{y} = Ae^{2x}$$

$$-\frac{2}{y} = Ae^{2x} - 1$$

$$\frac{2}{y} = 1 - Ae^{2x}$$

$$y = \frac{2}{1 - Ae^{2x}}$$

(1) $y' = \frac{\sec^2 x - \sin x}{\cos y + 5e^y}$, $y(0) = \pi$

$\frac{dy}{dx} = \frac{\sec^2 x - \sin x}{\cos y + 5e^y}$

$(\cos y + 5e^y) dy = (\sec^2 x - \sin x) dx$

$\int (\cos y + 5e^y) dy = \int (\sec^2 x - \sin x) dx$

$\sin y + 5e^y = \tan x + \cos x + C$

$y(0) = \pi \rightarrow 5e^\pi = 1 + C \rightarrow C = 5e^\pi - 1$

$\therefore \sin y + 5e^y = \tan x + \cos x + 5e^\pi - 1$

(2) $y' = \frac{\sin x}{y \cos y}$, $y(0) = \pi$

$y \cos y dy = \sin x dx$

$\int y \cos y dy = \int \sin x dx$

$y \sin y + \cos y = -\cos x + C$

$y(0) = \pi \rightarrow \pi \sin \pi + \cos \pi = -\cos 0 + C \rightarrow C = 0$

$\therefore y \cos y + \cos y = -\cos x$

(3) $y' = \frac{2x}{y} e^{x-y}$, $y(1) = 1$

$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{y} \frac{e^x}{e^y}$

$y e^y dy = 2x e^x dx$

$y e^y - e^y = 2x e^x - 2e^x + C$

$y(1) = 1 \rightarrow 0 = C \rightarrow C = 0$

$e^y (y-1) = 2e^x (x-1)$

اجزاء
y
cos y
1
sin y
0
-cos y

y
1
0
e^y
e^y
e^y

2x
2
0
e^x
e^x
e^x

أوجد حل كل من المعادلات التفاضلية التالية بصورة صريحة

ثم ارسم عائلة المنحنيات التي تمثل حلول المعادلة

$$(1) y' = y - 2$$

$$\frac{dy}{dx} = y - 2$$

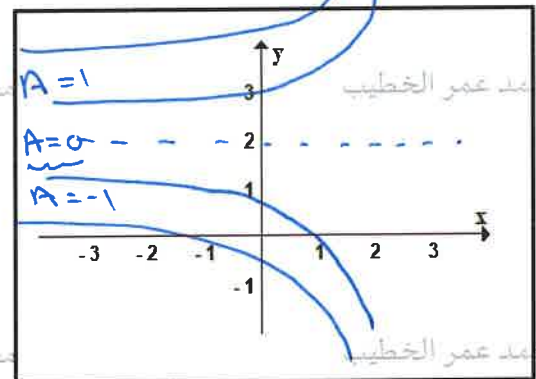
$$\frac{dy}{y-2} = dx$$

$$\int \frac{1}{y-2} dy = \int dx$$

$$\ln|y-2| = x + c$$

$$y-2 = e^{x+c}$$

$$y = Ae^x + c$$



لرسم عائلة الكحل L ندميم dx فنحصل A

$$A=0 \Rightarrow y=2$$

$$A=-1 \Rightarrow y = -e^x + 2$$

$$A=1 \Rightarrow y = e^x + 2$$

$$(2) y' = \frac{2xy}{1+x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{1+x^2}$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{2x}{1+x^2} dx$$

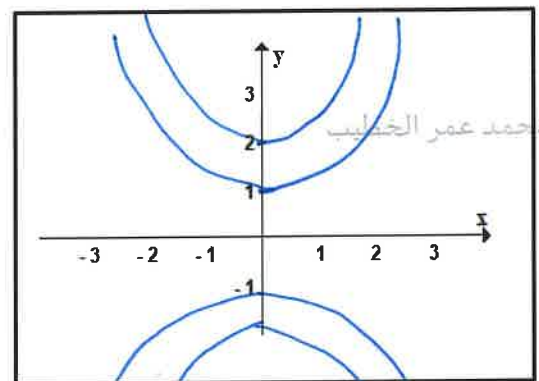
$$\int \frac{1}{y} dy = \int \frac{2x}{1+x^2} dx$$

$$\ln|y| = \ln|1+x^2| + c$$

$$y = e^{\ln|1+x^2| + c}$$

$$y = A e^{\ln|1+x^2|}$$

$$y = A(1+x^2)$$



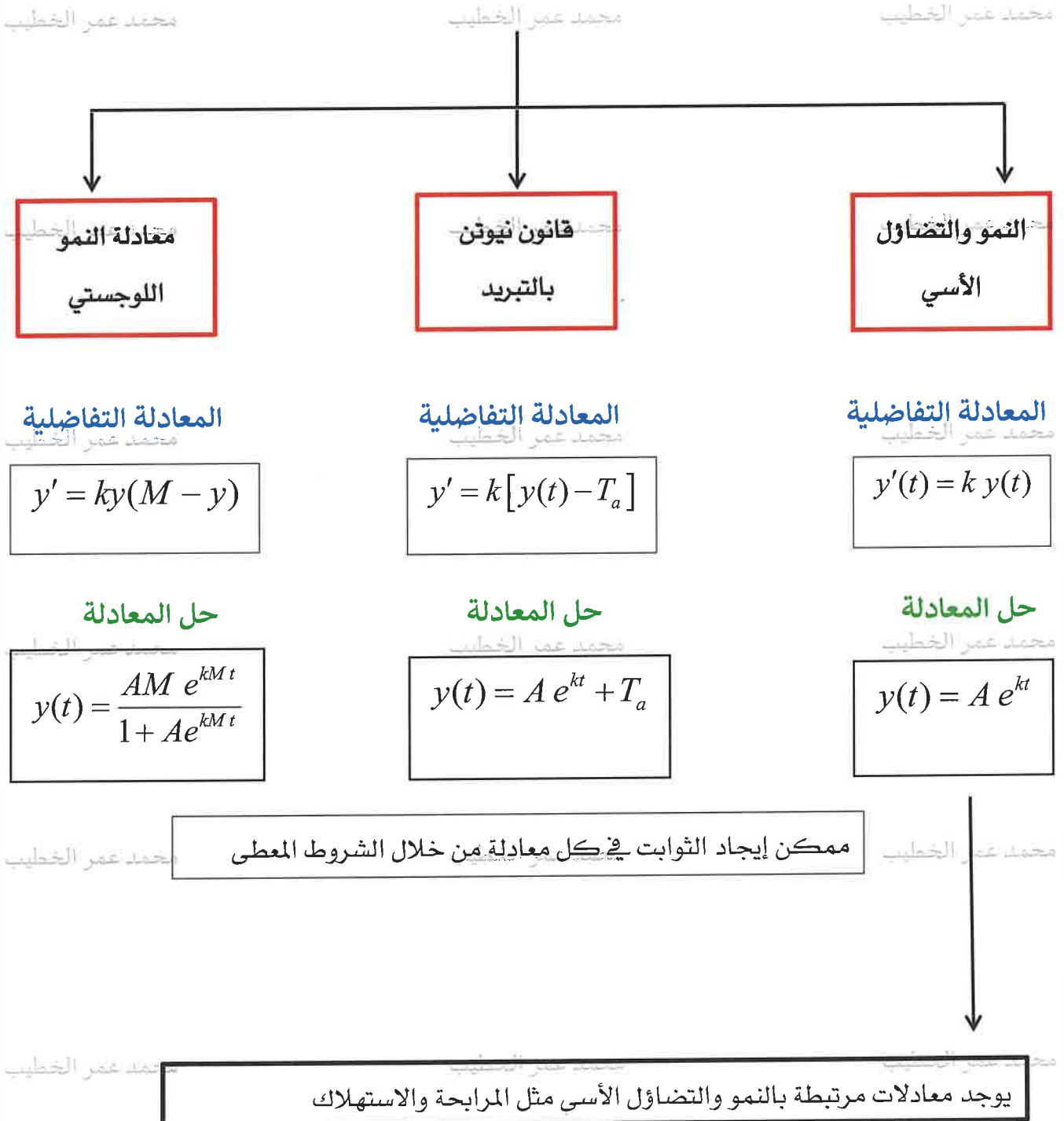
ميم A

$$A=0 \Rightarrow y=0$$

$$A=1 \Rightarrow y = 1+x^2$$

$$A=-1 \Rightarrow y = -(1+x^2)$$

تطبيقات المعادلات التفاضلية



إذا كانت $y(t)$ تمثل عدد أفراد مجتمع معين (مثل البكتيريا...) فإن معدل التغير $y'(t)$ يتناسب مع عدد المجتمع الأصلي $y(t)$ أي إن

$$y'(t) = k y(t) \quad \text{حيث } k \text{ عدد ثابت يسمى معامل النمو أو معامل التضائل}$$

إذا كانت $k > 0$ يكون نمو أسّي (زيادة بنسبة ثابتة)

إذا كانت $k < 0$ يكون تضائل أسّي (تناقص بنسبة ثابتة)

ملاحظة:

$$T_d = \frac{\ln 2}{k} \quad (1) \text{ الزمن الذي تصبح الكمية ضعف الكمية الأصلية يسمى عمر الضعف ويساوي}$$

$$T_h = \frac{\ln \frac{1}{2}}{k} = \frac{-\ln 2}{k} \quad (2) \text{ الزمن الذي تصبح الكمية نصف الكمية الأصلية يسمى عمر النصف ويساوي}$$

حل المعادلة التفاضلية $y'(t) = k y(t)$

$$\frac{dy}{dt} = k y(t)$$

$$\frac{dy}{y} = k dt$$

$$\int \frac{1}{y} dy = \int k dt$$

$$\ln |y| = kt + C$$

$$|y| = e^{kt+C}$$

$$|y| = A e^{kt}$$

$$y(t) = A e^{kt}$$

عند تشخيص حالة مريض وجد أن 200 خلية من البكتيريا تنمو على حلقه ، وبعد مرور 3 ساعات أصبحت عدد البكتيريا 600 خلية ، إذا كان معدل نمو الخلايا هو نمو أسي.

(أ) اكتب المعادلة التفاضلية مع الشروط التي تتمزج عدد الخلايا في أي زمن t بالساعات وحل المعادلة

$$y'(t) = k y(t) \quad , y(0) = 200 \quad y(3) = 600$$

$$\frac{dy}{dt} = ky$$

$$\frac{dy}{y} = k dt$$

$$\int \frac{1}{y} dy = \int k dt$$

$$\ln|y| = kt + c$$

$$|y| = e^{kt+c}$$

$$|y| = A e^{kt}$$

$$y = A e^{kt}$$

$$y(0) = 200$$

$$200 = A e^0 \rightarrow A = 200$$

$$y(t) = 200 e^{kt}$$

$$y(3) = 600$$

$$600 = 200 e^{3k}$$

$$3 = e^{3k}$$

$$\ln 3 = \ln e^{3k} = 3k$$

$$k = \frac{\ln 3}{3} \rightarrow y = 200 e^{\frac{\ln 3}{3} t}$$

(ب) أوجد عدد الخلايا بعد مرور 5 ساعات

$$y(5) = 200 e^{\frac{\ln 3}{3} (5)}$$

$$= 1248$$

(ج) أوجد الزمن المضاعف (الزمن الذي يصبح عدد الخلايا ضعف العدد الابتدائي)

أو الأفضل استخدام القانون

$$Td = \frac{\ln 2}{k}$$

$$Td = \frac{\ln 2}{\frac{\ln 3}{3}} = 3 \frac{\ln 2}{\ln 3}$$

$$= 1.9$$

$$y(t) = 400$$

$$200 e^{\frac{\ln 3}{3} t} = 400$$

$$e^{\frac{\ln 3}{3} t} = 2$$

$$\frac{\ln 3}{3} t = \ln 2$$

$$t = \frac{3 \ln 2}{\ln 3} = 1.9 \text{ ساعة}$$

(1) مستتب بكتيري عدده 200 خلية ويتضاعف كل أربع ساعات، إذا كان معدل نمو الخلايا هو نمو أسي، أوجد عدد الخلايا بعد مرور 7 ساعات.

$$y' = Ky, \quad T_d = 4, \quad y(0) = 200$$

$$y(t) = A e^{Kt}$$

$$K = \frac{\ln 2}{T_d} = \frac{\ln 2}{4}$$

$$y(0) = 200 \rightarrow A = 200$$

$$y(t) = 200 e^{\frac{\ln 2}{4} t}$$

$$y(7) = 200 e^{\frac{\ln 2}{4} (7)} = 657$$

(2) مستتب بكتيري عدده 200 خلية ويتضاعف تعداده ثلاث مرات كل خمس ساعات، إذا كان معدل نمو الخلايا هو نمو أسي،

$$y' = Ky, \quad y(0) = 200$$

$$y(5) = 600$$

$$y = A e^{Kt}$$

$$y(0) = 200 \rightarrow A = 200$$

$$y(5) = 600$$

$$600 = 200 e^{K(5)}$$

(أ) أوجد عدد الخلايا (معادلة المجتمع) في أي زمن بالساعات.

$$3 = e^{5K}$$

$$\ln 3 = 5K$$

$$K = \frac{\ln 3}{5}$$

$$y(t) = 200 e^{\frac{\ln 3}{5} t}$$

(ب) أوجد عدد الخلايا بعد مرور 15 ساعة.

$$y(15) = 200 e^{\frac{\ln 3}{5} (15)} = 5400$$

$$y(t) = 20000$$

$$200 e^{\frac{\ln 3}{5} t} = 20000$$

$$e^{\frac{\ln 3}{5} t} = 100$$

(ج) حدد متى يصل المجتمع إلى 20000.

$$\frac{\ln 3}{5} t = \ln 100$$

$$t = \frac{5 \ln 100}{\ln 3} = 20.95 \text{ ساعة}$$

(1) عينة كربون ^{14}C مكونة من 50 g ، تتحلل بمعدل أسي ، إذا كان عمر النصف له هو 6000 سنة

(أ) اكتب المعادلة التفاضلية مع الشروط التي تتمذج وزن العينة في أي زمن t السنوات

$$y'(t) = k y(t) , y(0) = 50 , y(6000) = 25 \Leftrightarrow T_h = 6000$$

$$y(t) = A e^{kt}$$

(ب) حل المعادلة التفاضلية

$$y(0) = 50 \rightarrow A = 50$$

$$k = \frac{\ln 1/2}{T_h} = \frac{\ln 1/2}{6000} = \frac{-\ln 2}{6000}$$

$$y(t) = 50 e^{\frac{\ln 1/2}{6000} t}$$

ملاحظة: إذا كان السؤال اختيار من متعدد
نطبق المعادلة مباشرة لحل السؤال

$$y(t) = A e^{kt}$$

(ج) أوجد كتلة العينة بعد مرور 8000 سنة

$$y(8000) = 50 e^{\frac{\ln 1/2}{6000} (8000)} = 19.84 \text{ g}$$

(2) إذا تم حقن دم مريض بكمية من المورفين هي 0.4 g ، وتتحلل بالدم بمعدل أسي ، إذا كان عمر النصف للمورفين هو 3 ساعات ، فأوجد كمية المورفين في الدم بعد مرور 10 ساعات

$$y' = ky , T_h = 3 , y(0) = 0.4$$

$$y = A e^{kt}$$

$$y(0) = 0.4 \rightarrow A = 0.4$$

$$k = \frac{\ln 1/2}{T_h} = \frac{\ln 1/2}{3}$$

$$y(t) = 0.4 e^{\frac{\ln 1/2}{3} t}$$

$$y(10) = 0.4 e^{\frac{\ln 1/2}{3} (10)} = 0.04 \text{ g}$$

(1) يعتبر الاسترنتيوم (90) من أحد النظائر المشعة الخطرة ويتحلل بمعدل أسي حيث يبلغ عمر النصف له 28 عام، إذا امتص جسم كمية منه فأوجد النسبة المئوية المتبقية في الجسم بعد مرور 84 عام

$$y' = Ky, \quad T_h = 28$$

$$y = A e^{Kt}$$

$$K = \frac{\ln 1/2}{28}$$

$$y = A e^{\frac{\ln 1/2}{28} t}$$

$$y(84) = A e^{\frac{\ln 1/2}{28} (84)}$$

$$= A e^{-3 \ln 2}$$

$$= A e^{\ln 2^{-3}}$$

$$= A \cdot 2^{-3}$$

$$= \frac{A}{8}$$

النسبة المئوية المتبقية تساوي

الكمية المتبقية على

الكمية الأصلية $100 \times \%$

النسبة المئوية المتبقية

بعد 84 سنة هي

$$\frac{A e^{-3 \ln 2}}{A}$$

$\times 100 \%$

$$= 12.5 \%$$

(2) إذا تبقى من كربون 14 (^{14}C) في أحد الأحافير 20% من الكمية الأصلية، حيث تحلل بمعدل أسي، إذا كان عمر النصف له 5730 سنة فأوجد عمر الأحفورة

$$y' = Ky, \quad T_h = 5730$$

$$y = A e^{Kt}$$

$$K = \frac{\ln 1/2}{T_h} = \frac{\ln 1/2}{5730}$$

$$y = A e^{\frac{\ln 1/2}{5730} t}$$

$$y(t) = 20\% A$$

$$20\% A = A e^{\frac{\ln 1/2}{5730} t}$$

$$0.20 = e^{\frac{\ln 1/2}{5730} t}$$

$$\ln 0.2 = \frac{\ln 1/2}{5730} t$$

$$t = \frac{5730 \ln 0.2}{\ln 1/2}$$

$$= 13304 \text{ سنة}$$

(1) أصيب جسم بالبكتريا وعددها 10^8 خلية ، تم اعطاء الشخص المريض علاج (حقنه) لمقاومة هذه البكتريا حيث يقتل العلاج 90% من هذه الخلايا . اذا كان عدد الخلايا يتضاعف كل 20 دقيقة وبعد مرور الفترة الزمنية T وجد ان عدد الخلايا رجع الى 10^8 ، اوجد T

$$10^8 \xrightarrow{\text{يصغر لـ 10\%}} 10\% \times 10^8 \xrightarrow[\text{بعد زمن T}]{\text{بدأ يتضاعف كل 20 دقيقة}} 10^8$$

$$y'(t) = Ky, \quad y(0) = 10\% \times 10^8, \quad T_d = 20$$

$$y(t) = Ae^{kt}$$

$$A = 10\% \times 10^8 = 0.1 \times 10^8$$

$$K = \frac{\ln 2}{T_d} = \frac{\ln 2}{20}$$

$$y(t) = 0.1 \times 10^8 e^{\frac{\ln 2}{20} t}$$

$$y(T) = 10^8$$

$$0.1 \times 10^8 e^{\frac{\ln 2}{20} T} = 10^8$$

$$0.1 e^{\frac{\ln 2}{20} T} = 1$$

$$e^{\frac{\ln 2}{20} T} = 10$$

$$\frac{\ln 2}{20} T = \ln 10$$

$$T = \frac{\ln 10}{\ln 2 / 20} = 66.44$$

(2) تشير ابحاث العلماء عام 1950 ($t = 0$) الى ان مساحة اليابسة التي احتاجها عدد سكان الارض لزراعتها هي 10^9 هكتار وفي عام 1980 ($t = 30$) احتاجوا الى 2×10^9 هكتار اذا كان مساحة اليابسة الصالحة للزراعة تنمو بنسبة مئوية ثابتة . اوجد في اي سنة يكفي عدد السكان زراعة

$$10^9 \xrightarrow{1950, t=0} 2 \times 10^9 \xrightarrow[??]{T} 3.2 \times 10^9 \text{ هكتار}$$

$$1980, t=30$$

$$y' = Ky$$

$$y(t) = Ae^{kt}$$

$$y(t) = Ae^{kt}$$

$$A = 10^9$$

$$K = \frac{\ln 2}{T_d} = \frac{\ln 2}{30}$$

$$y(t) = 10^9 e^{\frac{\ln 2}{30} t}$$

$$y(T) = 3.2 \times 10^9$$

$$10^9 e^{\frac{\ln 2}{30} T} = 3.2 \times 10^9$$

$$e^{\frac{\ln 2}{30} T} = 3.2$$

$$\frac{\ln 2}{30} T = \ln 3.2$$

$$T = \frac{\ln 3.2}{\ln 2 / 30} = 50.34 \text{ سنة}$$

تقريباً في عام 2000

الاستهلاك (انخفاض القيمة) وهو من أنواع التفاضل

- (1) إذا كانت قيمة سيارة 40000 درهم وتتناقص بنسبة مئوية ثابتة (أسي مستمر) مقداره 10% سنوي أوجد قيمة السيارة بعد مرور 8 سنوات

$$y' = ry, \quad y(0) = 40000, \quad r = -0.10$$

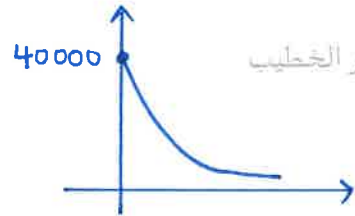
$$y = A e^{rt}$$

$$y(0) = 40000 \rightarrow A = 40000$$

$$y(t) = 40000 e^{-0.1t}$$

$$y(8) = 40000 e^{-0.1(8)}$$

$$= 17973$$



- (2) كانت قيمة سيارة 40000 درهم وتتناقص بمعدل خطي، أوجد قيمة السيارة بعد مرور 8 سنوات حيث أن قيمة السيارة تصبح صفر بعد عشرين سنة

$$\frac{dy}{dt} = r, \quad y(0) = 40000, \quad y(20) = 0$$

الحل أكثر من طريقة

$$y = \int r dt$$

$$y = rt + c$$

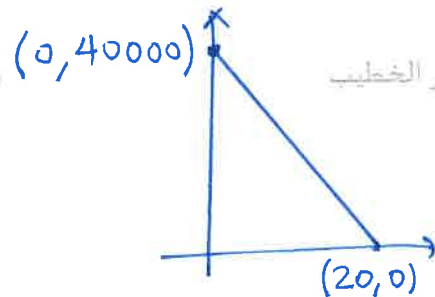
$$y = -2000t + c$$

$$y(20) = 0$$

$$-2000(20) + c = 0 \rightarrow c = 40000$$

$$y(t) = -2000t + 40000$$

$$y(8) = 24000$$



$$r = m = \frac{40000 - 0}{0 - 20} = -2000$$

إذا كانت قيمة بيع آلة جديدة هو 14000 درهم وتتناقص بمعدل أسّي ، وتصبح قيمتها 8000 درهم بعد مرور 4 سنوات ، حيث أن قيمة الآلة خرده تصبح 1000 درهم ، أوجد قيمة الآلة في أي زمن

ملاحظة: تتناقص قيمة إعادة البيع للآلة بمعدل يتناسب مع الفرق بين السعر الحالي وقيمة الخردة لها

سؤال الخردة

افترض أن $y(t)$ ثمن الآلة بعد t سنة

فإن معدل تغير قيمة الآلة السنوي يحقق المعادلة التفاضلية

$$\frac{dy}{dt} = k(y(t) - 1000) , \quad y(0) = 14000, \quad y(4) = 8000$$

$$\frac{dy}{y-1000} = k dt$$

$$\int \frac{1}{y-1000} dy = \int k dt$$

$$\ln |y-1000| = kt + c$$

$$y - 1000 = e^{kt+c}$$

$$y - 1000 = A e^{kt}$$

$$y(0) = 14000$$

$$14000 - 1000 = A \rightarrow A = 13000$$

$$y - 1000 = 13000 e^{kt}$$

$$y = 13000 e^{kt} + 1000$$

لايجاد قيمة k نعوض $y(4) = 8000$

$$8000 = 13000 e^{kt} + 1000$$

$$e^{kt} = \frac{7}{13} \rightarrow kt = \ln \frac{7}{13} = -0.154$$

$$y(t) = 13000 e^{-0.154 t} + 1000$$

الفائدة (المربحة) المركبة والفائدة المركبة المستمرة وهو من أنواع النمو

الفائدة المركبة : إجمالي المبلغ في الربح المركب يعطى بالمعادلة

$$A = P(1 + \frac{r}{n})^{nt}$$

حيث

A إجمالي المبلغ بعد t سنة

P المبلغ الذي تم استثماره

r الفائدة المركبة

n عدد مرات توزيع الأرباح بالسنة الواحدة

إذا تم استثمار 100000 درهم في أحد البنوك بفائدة مركبة تساوي 3% ، فأوجد إجمالي المبلغ بعد 5

سنوات في الحالات التالية

$$P = 100,000, r = 3\% = 0.03, t = 5$$

$$A = P(1 + \frac{r}{n})^{nt}$$

(أ) توزيع الأرباح سنوي

$$n = 1$$

$$A = 100,000 \left(1 + \frac{0.03}{1}\right)^{(1)(5)} = 115,927$$

(ب) توزيع الأرباح نصف سنوي

$$n = 2$$

$$A = 100,000 \left(1 + \frac{0.03}{2}\right)^{(2)(5)} = 116,054$$

(ج) توزيع الأرباح ربع سنوي

$$n = 4$$

$$A = 100,000 \left(1 + \frac{0.03}{4}\right)^{(4)(5)} = 116,118$$

(د) توزيع الأرباح شهري

$$n = 12$$

$$A = 100,000 \left(1 + \frac{0.03}{12}\right)^{(12)(5)} = 116,161$$

(هـ) توزيع الأرباح يومي

$$n = 365$$

$$A = 100,000 \left(1 + \frac{0.03}{365}\right)^{(365)(5)} = 116,182$$

الفائدة المركبة المستمرة: إجمالي المبلغ في الربح المركب المستمر يعطى بالمعادلة

المعادلة التفاضلية والشروط هي

$$y' = ry$$

$$y(0) = P$$

$$A = Pe^{rt}$$

حيث

A إجمالي المبلغ بعد t سنة

P المبلغ الذي تم استثماره

r الفائدة المركبة

إذا تم استثمار 100000 درهم في أحد البنوك بفائدة مركبة مستمرة (نمو أسي) هي 3%

(أ) اكتب المعادلة التفاضلية مع الشروط التي تتمزج إجمالي المبلغ في أي زمن t السنوات

$$y' = ry, \quad y(0) = p = 100000, \quad r = 3\% = 0.03$$

(ب) حل المعادلة التفاضلية

$$y = pe^{rt}$$

$$y = 100000 e^{0.03t}$$

$$y(5) = 100000 e^{0.03(5)}$$

$$= 116,183$$

(ج) أوجد إجمالي المبلغ بعد 5 سنوات

$$T_d = \frac{\ln 2}{r}$$

$$r = k$$

(د) أوجد متى يتضاعف المبلغ الذي تم استثماره

$$= \frac{\ln 2}{0.03} = 23.1 \text{ سنة}$$

(1) إذا استثمر خالد 10000 عام 1990 في أحد البنوك بفائدة مركبة مستمرة ، وأصبح لديه

20000 عام 2000 ، أوجد معدل المربحة المركبة المستمرة

$$r = k$$

$$A = p e^{rt}$$

$$20000 = 10000 e^{r(10)}$$

$$2 = e^{10r}$$

$$\ln 2 = 10r \rightarrow r = \frac{\ln 2}{10} = 0.069 = 6.9\%$$

او المطلوب r

حيث ثمر الضعف 10

$$r = \frac{\ln 2}{t_d} = \frac{\ln 2}{10}$$

(2) إذا استثمر سلطان مبلغ من المال P في أحد البنوك بفائدة مركبة مستمرة (نمو أسي) هي 4%

وأصبح المبلغ 90000 درهم بعد 5 سنوات ، أوجد المبلغ الذي تم استثماره

$$A = p e^{rt}$$

$$= p e^{0.04t}$$

$$90000 = p e^{0.04t}$$

$$p = \frac{90000}{e^{0.04(5)}} \approx 73685$$

(3) في عام 1985 ($t = 0$) اشترى شخص بطاقات تذكارية بمبلغ 34 درهم ، فإذا كانت قيمة

البطاقات تزيد بنسبة مئوية ثابتة (نمو أسي) وأصبحت قيمتها 9800 درهم في عام 1995

فأوجد معادلة تعطي قيمة هذه البطاقات في أي زمن t

$$A = p e^{rt} , A(0) = p = 34$$

$$A = 34 e^{rt}$$

$$9800 = 34 e^{r(10)}$$

$$e^{10r} = \frac{9800}{34}$$

$$\ln e^{10r} = \ln \frac{9800}{34}$$

$$r = \frac{1}{10} \ln \frac{9800}{34} = 0.566$$

$$A = 34 e^{0.566t}$$

إذا تم استثمار مبلغ من المال P في أحد البنوك بفائدة مركبة مستمرة (نمو أسي) هي 8% ويتم إيداع مبلغ 2000 درهم سنوياً، أوجد المبلغ الذي تم استثماره إذا وصل إجمالي المبلغ مليون درهم بعد 20 سنة.

سؤال المليون

افترض أن $y(t)$ إجمالي المبلغ بعد t سنة

فإن معدل تغير المبلغ السنوي يحقق المعادلة التفاضلية

$$\frac{dy}{dt} = 0.08y(t) + 2000, \quad y(20) = 1,000,000, \quad y(0) = P$$

$$\frac{dy}{dt} = 0.08[y + 25000]$$

$$\frac{dy}{y + 25000} = 0.08 dt$$

$$\int \frac{dy}{y + 25000} = \int 0.08 dt$$

$$\ln|y + 25000| = 0.08t + c$$

$$y + 25000 = e^{0.08t+c} = Ae^{0.08t}$$

$$y = Ae^{0.08t} - 25000$$

$$y(0) = P \Rightarrow$$

$$p = Ae^{0.08 \times 0} - 25000 \Rightarrow p = A - 25000 \Rightarrow A = P + 25000$$

$$\Rightarrow y(t) = (P + 25000)e^{0.08t} - 25000$$

$$y(20) = 1000000 \Rightarrow$$

$$1000000 = (P + 25000)e^{0.08 \times 20} - 25000$$

$$1000000 + 25000 = (P + 25000)e^{0.08 \times 20}$$

$$P + 25000 = \frac{1000000 + 25000}{e^{0.08 \times 20}}$$

$$P = \frac{1000000 + 25000}{e^{0.08 \times 20}} - 25000$$

$$= 181944$$

إذا تم اقتراض 150000 دولار لشراء بيت على أن يسدد المبلغ على 30 سنة بفائدة مركبة قدرها 8% ويقسط شهري هو p ، أوجد القسط الشهري.

الرهن العقاري

افترض أن $y(t)$ المبلغ المتبقي بعد t سنة

فإنه يحقق المعادلة التفاضلية

$$\frac{dy}{dt} = 0.08y(t) - 12p, \quad y(0) = 150000, \quad y(30) = 0$$

$$\frac{dy}{dt} = 0.08[y - 150p]$$

$$\frac{dy}{y - 150p} = 0.08 dt$$

$$\int \frac{dy}{y - 150p} = \int 0.08 dt$$

$$\ln|y - 150p| = 0.08t + c$$

$$y - 150p = e^{0.08t+c} = Ae^{0.08t}$$

$$y = Ae^{0.08t} + 150p$$

$$y(0) = 150000 \Rightarrow$$

$$150000 = A + 150p \Rightarrow A = 150000 - 150p$$

$$\Rightarrow$$

$$y(t) = (150000 - 150p)e^{0.08t} + 150p$$

$$y(30) = 0$$

$$\Rightarrow$$

$$0 = (150000 - 150p)e^{0.08 \times 30} + 150p$$

$$0 = (150000 - 150p)e^{2.4} + 150p$$

$$0 = 150000e^{2.4} - 150e^{2.4}p + 150p$$

$$0 = 150000e^{2.4} - 150p(e^{2.4} - 1)$$

$$150p(e^{2.4} - 1) = 150000e^{2.4}$$

$$P = \frac{150000e^{2.4}}{150(e^{2.4} - 1)}$$

$$= 1100$$

$$y' = k[y(t) - T_a]$$

قانون نيوتن بالتبريد

تعطى درجة حرارة مشروب القهوة داخل كوب في غرفة درجة حرارتها T_a

$$y' = k[y(t) - T_a]$$

بالمعادلة التفاضلية

حيث $y(t)$ درجة حرارة مشروب القهوة في أي زمن t بالدقائق ، k ثابت المعادلة

ملاحظة: تتناقص قيمة درجة الحرارة بمعدل يتناسب مع الفرق بين درجة الحرارة الحالية ودرجة حرارة المحيط بها

إذا علمت أن درجة حرارة مشروب القهوة عند سكبها هي 80°C ، وأصبحت بعد دقيقتين 75°C في غرفة حرارتها 20°

$$T_a = 20$$

(أ) اكتب المعادلة التفاضلية مع الشروط التي تتمذج درجة حرارة المشروب عند أي زمن t بالدقائق

$$y'(t) = k(y - 20) , y(0) = 80 , y(2) = 75$$

$$\frac{dy}{dt} = k(y - 20)$$

$$\frac{dy}{y - 20} = k dt$$

$$\int \frac{1}{y - 20} dy = \int k dt$$

$$\ln|y - 20| = kt + c$$

$$y - 20 = e^{kt + c}$$

$$y - 20 = A e^{kt}$$

$$y(0) = 80 \rightarrow A = 60$$

$$y(2) = 75 \rightarrow 75 - 20 = 60 e^{2k}$$

$$\rightarrow k = \frac{1}{2} \ln \frac{11}{12} = -0.04$$

$$y = 60 e^{-0.04t} + 20$$

(ج) أوجد درجة حرارة مشروب القهوة بعد 10 دقائق

$$y(10) = 60 e^{-0.04(10)} + 20 = 60.2^\circ$$

(د) أوجد الزمن الذي تصبح درجة حرارة القهوة عندها 50°C

$$y(t) = 50$$

$$60 e^{-0.04t} + 20 = 50$$

$$e^{-0.04t} = \frac{1}{2}$$

$$-0.04t = \ln \frac{1}{2}$$

$$t = \frac{\ln \frac{1}{2}}{-0.04} = 17.3 \text{ m}$$

محمد عمر الخطيب (1) تم صب مشروب مثلج حرارة 10°C في غرفة درجة حرارتها 21°C ، وبعد دقيقتين أصبحت درجة

$$T_a = 21$$

حرارته 13°C اوجد درجة حرارته بعد 10 دقائق

$$y'(t) = k(y - 21), \quad y(0) = 10, \quad y(2) = 13, \quad \boxed{y(10) = ??}$$

محمد عمر الخطيب

$$\frac{dy}{dt} = k(y - 21)$$

$$\frac{dy}{y - 21} = k dt$$

$$\int \frac{1}{y - 21} = \int k dt$$

$$\ln|y - 21| = kt + C$$

$$y - 21 = A e^{kt}$$

$$y = A e^{kt} + 21$$

$$y(0) = 10 \Rightarrow A = -11$$

$$y(t) = -11 e^{kt} + 21$$

$$y(2) = 13$$

$$13 = -11 e^{2k} + 21$$

$$e^{2k} = \frac{-8}{-11} = \frac{8}{11}$$

$$k = \frac{1}{2} \ln \frac{8}{11} = -0.16$$

محمد عمر الخطيب

$$-0.16t$$

$$y(t) = -11 e^{-0.16t} + 21$$

$$y(10) = 18.8^{\circ}\text{C}$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

(2) وضع وعاء حساء درجة حرارة 93°C في غرفة درجة حرارتها 21°C ، وبعد دقيقة واحدة أصبحت

$$T_a = 21$$

درجة حرارته 82°C اوجد متى تصل درجة حرارة الى 49°C

$$y'(t) = k(y - 21), \quad y(0) = 93, \quad y(1) = 82, \quad \boxed{y(T) = 49}$$

$$y(t) = A e^{kt} + 21$$

$$y(0) = 93$$

$$93 = A + 21 \Rightarrow A = 72$$

$$y(t) = 72 e^{kt} + 21$$

$$y(1) = 82$$

$$82 = 72 e^{k(1)} + 21$$

$$61 = 72 e^k$$

$$e^k = \frac{61}{72}$$

$$k = \ln \frac{61}{72}$$

$$\ln \frac{61}{72} t$$

$$y(t) = 72 e^{\ln \frac{61}{72} t} + 21$$

$$y(T) = 49$$

$$72 e^{\ln \frac{61}{72} T} + 21 = 49$$

$$72 e^{\ln \frac{61}{72} T} = 28$$

$$e^{\ln \frac{61}{72} T} = \frac{28}{72}$$

$$\ln \left(\frac{61}{72} \right) T = \ln \frac{28}{72}$$

$$T = \frac{\ln \left(\frac{28}{72} \right)}{\ln \left(\frac{61}{72} \right)}$$

$$T = 5.7 \text{ دقيقة}$$

تتم نمذجة عدد السكان $y(t)$ لمجتمع معين بعد أي زمن t بالسنوات بالمعادلة التفاضلية

$$y' = ky(M - y)$$

حيث M ثابت القدرة الاستيعابية لعدد السكان (الحد الأقصى) ، و k ثابت يرتبط بمعدل النمو السكاني (معدل النمو السكاني $r = kM$)

تمت نمذجة عدد السكان $y(t)$ لمجتمع معين بعد أي زمن t بالسنوات بالمعادلة $y' = ky(M - y)$

حيث M ثابت القدرة الاستيعابية لعدد السكان (الحد الأقصى) ، و k ثابت يرتبط بمعدل النمو السكاني (معدل النمو السكاني $r = kM$)

بين أن حل المعادلة التفاضلية لإيجاد عدد السكان في أي زمن t بالسنوات هو

$$y(t) = \frac{AM e^{kMt}}{1 + Ae^{kMt}} \quad \text{Or} \quad y = \frac{AM}{A + e^{-kMt}}$$

حيث A عدد ثابت يمكن إيجاده من خلال الشرط $y(0)$ يساوي عدد السكان الأصلي

$$y' = ky(M - y)$$

$$\frac{dy}{dt} = ky(M - y)$$

$$\frac{dy}{y(M - y)} = k dt$$

$$\int \frac{dy}{y(M - y)} = \int k dt$$

$$\int \left[\frac{1}{My} + \frac{1}{M(m - y)} \right] dy = \int k dt$$

$$\frac{1}{M} \ln|y| - \frac{1}{M} \ln|M - y| = k t + c$$

$$\ln|y| - \ln|M - y| = kM t + c$$

$$\ln \left| \frac{y}{M - y} \right| = kM t + c$$

$$\frac{y}{M - y} = e^{kMt + c} = e^{kMt} \times e^c$$

$$\frac{y}{M - y} = Ae^{kMt}$$

$$y = Ae^{kMt} (M - y)$$

$$y = AMe^{kMt} - Aye^{kMt}$$

$$y + Aye^{kMt} = AMe^{kMt}$$

$$y(1 + Ae^{kMt}) = AMe^{kMt}$$

$$y = \frac{AMe^{kMt}}{1 + Ae^{kMt}}$$

$$y = \frac{AM}{A + e^{-kMt}}$$

وضعت 350 سمكة في حوض لتربية الاسماك وتنمو سنوياً بفرضية النمو اللوجستي حيث $k = 0.007$ وقدرت الحوض الاستيعابية 1000 سمكة،

(أ) اكتب المعادلة التي تمثل معدل نمو الاسماك في الحوض مع الشروط (المعادلة التفاضلية)

$$y'(t) = ky(M - y)$$

$$y' = 0.007y(1000 - y) \quad , y(0) = 350$$

$$\mu = 1000$$

$$K = 0.007$$

$$K\mu = 7$$

(ب) اكتب المعادلة التي تمثل عدد الأسماك في الحوض مع مرور الزمن (حل المعادلة التفاضلية)

$$y = \frac{A\mu e^{K\mu t}}{1 + A e^{K\mu t}}$$

$$= \frac{1000 A e^{7t}}{1 + A e^{7t}}$$

$$y(0) = 350$$

$$\frac{1000 A}{1 + A} = 350$$

$$1000 A = 350 + 350 A$$

$$650 A = 350$$

$$A = \frac{350}{650} = \frac{35}{65}$$

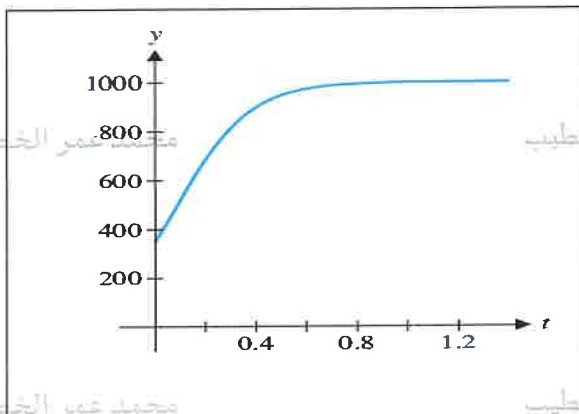
$$y = \frac{1000 \frac{35}{65} e^{7t}}{1 + \frac{35}{65} e^{7t}}$$

$$= \frac{35000 e^{7t}}{65 + 35 e^{7t}}$$

(ج) أوجد عدد الأسماك في الحوض بعد مرور 6 أشهر (0.5 سنة)

$$y(1/2) = \frac{35000 e^{7(1/2)}}{65 + 35 e^{7(1/2)}} = 946$$

(د) ارسم دالة النمو اللوجستي



(1) إذا كان عدد سكان إحدى الدول 10 مليون نسمة وينمو بفرضية النمو اللوجستي حيث $k = 0.001$ ، وقدرته الاستيعابية 20 مليون نسمة، أوجد عدد السكان بعد خمس سنوات

$$K = 0.001 \quad \left. \begin{array}{l} M = 20 \\ KM = 0.2 \end{array} \right\} \quad 10 = \frac{20A}{1+A}$$

$$y = \frac{AM e^{KMt}}{1 + A e^{KMt}}$$

$$= \frac{20A e^{0.2t}}{1 + A e^{0.2t}}$$

$$y(0) = 10 \Rightarrow$$

$$10 + 10A = 20A$$

$$\rightarrow A = 1$$

$$y = \frac{20 e^{0.2t}}{1 + e^{0.2t}}$$

$$y(5) = 14.6 \text{ مليون}$$

معادلة نمو لوجستي

$$y(0) = 4, \quad y' = 2y(5 - y)$$

(2) حل المعادلة التفاضلية التالية

بما أن هذه معادلة غنوم لوجستي فإن الحل العام هو

$$y = \frac{AM e^{KMt}}{1 + A e^{KMt}}$$

$$\left. \begin{array}{l} K = 2 \\ M = 5 \end{array} \right\} KM = 10$$

$$y = \frac{5A e^{10t}}{1 + A e^{10t}}$$

$$y(0) = 4$$

$$4 = \frac{5A}{1+A}$$

$$4 + 4A = 5A$$

$$A = 4$$

$$y = \frac{20 e^{10t}}{1 + 4 e^{10t}}$$

انتهت الوحدة السابعة بحمد الله

$$1) \int \sec 3x \tan 3x \, dx = \frac{\sec 3x}{3} + c$$

$$= \frac{1}{3} \sec 3x + c. \quad (B)$$

$$2) \int \sin^2 2x \, dx = \int \frac{1}{2} (1 - \cos 4x) \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \left(x - \frac{\sin 4x}{4} \right) + c$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{4x}{4} - \frac{\sin 4x}{4} \right) + c$$

$$= \frac{1}{8} (4x - \sin 4x) + c. \quad (D)$$

$$3) \int \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} \, dx$$

$$= \int \frac{1 - \cos^2 x}{1 - \cos x} \, dx$$

$$= \int \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{1 - \cos x} \, dx$$

$$= \int (1 + \cos x) \, dx$$

$$= x + \sin x + c. \quad (D)$$

$$4) \int \frac{1}{2x} + \frac{\sin x}{\cos^2 x} \, dx$$

$$= \int \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} + \sec x \tan x \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \ln|x| + \sec x + c. \quad (A)$$

کونویج

$$\frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$= \sec x \tan x$$

ل.ع. سید محمد علی

$$5) \int 15x^2 (x^3+1)^4 dx$$

$$= \int 15x^2 u^4 \frac{du}{3x^2}$$

$$= 5 \int u^4 du$$

$$= u^5 + C$$

$$= (x^3+1)^5 + C$$

(C)

$$u = x^3 + 1$$

$$\frac{du}{dx} = 3x^2$$

$$\frac{du}{3x^2} = dx$$

$$6) \int \frac{x}{\sqrt{3x^2+5}} dx$$

$$= \int x (3x^2+5)^{-1/2} dx$$

$$= \int x u^{-1/2} \frac{du}{6x}$$

$$= \frac{1}{6} \int u^{-1/2} du$$

$$= \frac{1}{6} \cdot 2 u^{1/2} + C$$

$$= \frac{1}{3} (3x^2+5)^{1/2} + C$$

(C)

$$u = 3x^2 + 5$$

$$\frac{du}{dx} = 6x$$

$$\frac{du}{6x} = dx$$

$$7) \int \sin x \cos^6 x dx$$

$$= \int \sin x \cdot u^6 \frac{du}{-\sin x}$$

$$= - \int u^6 du$$

$$= -\frac{1}{7} u^7 + C = -\frac{1}{7} \cos^7 x + C$$

(B)

$$u = \cos x$$

$$\frac{du}{dx} = -\sin x$$

$$\frac{du}{-\sin x} = dx$$

تابع $u = x^3$ را انتخاب می‌کنیم

$$8) \int x^2 \cos x^3 dx$$

$$= \int x^2 \cos u \frac{du}{3x^2}$$

$$= \frac{1}{3} \int \cos u du$$

$$= \frac{1}{3} \sin u + c = \frac{1}{3} \sin x^3 + c \quad (A)$$

$$9) \int \frac{1}{x^2 + a^2} dx$$

$$= \frac{1}{a^2} \int \frac{1}{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + 1} dx$$

$$= \frac{1}{a^2} \int \frac{1}{u^2 + 1} \cdot a du$$

$$= \frac{1}{a} \int \frac{1}{u^2 + 1} du$$

$$= \frac{1}{a} \tan^{-1} u + c = \frac{1}{a} \tan^{-1} \left(\frac{x}{a}\right) + c \quad (C)$$

$$10) \int 3x e^{x^2+1} dx$$

$$= \int 3x e^u \frac{du}{2x}$$

$$= \frac{3}{2} \int e^u du$$

$$= \frac{3}{2} e^u + c = \frac{3}{2} e^{x^2+1} + c \quad (D)$$

$$u = x^3$$

$$\frac{du}{dx} = 3x^2$$

$$\frac{du}{3x^2} = dx$$

$$u = \frac{x}{a}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{a}$$

$$a du = dx$$

$$u = x^2 + 1$$

$$\frac{du}{dx} = 2x$$

$$\frac{du}{2x} = dx$$

$$11) \int \frac{(\tan^{-1} x)^2}{x^2+1} dx$$

$$= \int \frac{u^2}{x^2+1} \cdot (x^2+1) du$$

$$= \int u^2 du$$

$$= \frac{1}{3} u^3 + C = \frac{1}{3} (\tan^{-1} x)^3 + C.$$

(C)

$$u = \tan^{-1} x$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x^2+1}$$

$$(x^2+1) du = dx$$

$$12) \int \sec^2 x \sqrt{\tan x} dx$$

$$= \int \sec^2 x \sqrt{u} \frac{du}{\sec^2 x}$$

$$= \int u^{1/2} du$$

$$= \frac{2}{3} u^{3/2} + C = \frac{2}{3} \tan^{3/2} x + C$$

(A)

$$u = \tan x$$

$$\frac{du}{dx} = \sec^2 x$$

$$\frac{du}{\sec^2 x} = dx$$

$$13) \int x \sqrt{x-1} dx$$

$$= \int x u^{1/2} du$$

$$= \int (u+1) u^{1/2} du$$

$$= \int u^{3/2} + u^{1/2} du$$

$$= \frac{2}{5} u^{5/2} + \frac{2}{3} u^{3/2} + C$$

$$= \frac{2}{5} (x-1)^{5/2} + \frac{2}{3} (x-1)^{3/2} + C.$$

(D)

$$u = x-1$$

$$\frac{du}{dx} = 1$$

$$du = dx$$

$$x-1 = u$$

$$x = u+1$$

كاتب سنة لبرس الأول

$$14) \int \frac{1}{\sqrt{x} + x} dx = \int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})} dx$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{x}} u \cdot 2\sqrt{x} dx$$

$$= 2 \int \frac{1}{u} du$$

$$= 2 \ln|u| + c = 2 \ln|1+\sqrt{x}| + c \quad (B)$$

$$u = 1 + \sqrt{x}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$2\sqrt{x} du = dx$$

$$15) \int \frac{1}{9x^2 + 4} dx = \frac{1}{4} \int \frac{1}{\frac{9x^2}{4} + 1} dx$$

$$= \frac{1}{4} \int \frac{1}{(\frac{3}{2}x)^2 + 1} dx$$

$$= \frac{1}{4} \int \frac{1}{u^2 + 1} \cdot \frac{2}{3} du$$

$$= \frac{1}{6} \tan^{-1} + c = \frac{1}{6} \tan^{-1} \left(\frac{3}{2}x \right) + c \quad (A)$$

$$u = \frac{3}{2}x$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{2}{3} du = dx$$

$$16) \int \frac{1}{x^2 - 6x + 10} dx$$

$$= \int \frac{1}{(x-3)^2 + 1} dx$$

$$= \int \frac{1}{u^2 + 1} du$$

$$= \tan^{-1} x + c$$

$$= \tan^{-1} (x-3) + c \quad (C)$$

القسم الثاني
أكمال مربع

$$\begin{aligned} x^2 - 6x + 10 &= x^2 - 6x + 9 + 10 - 9 \\ &= (x-3)^2 + 1 \end{aligned}$$

$$u = x-3$$

$$\frac{du}{dx} = 1$$

$$du = dx$$

ع. ٢١ حل المسألة الأولى

$$17) \int \frac{x^3}{x^8+1} dx = \int \frac{x^3}{(x^4)^2+1} dx$$

$$u = x^4$$

$$\frac{du}{dx} = 4x^3$$

$$\frac{du}{4x^3} = dx$$

$$= \int \frac{x^3}{u^2+1} \frac{du}{4x^3}$$

$$= \frac{1}{4} \int \frac{1}{u^2+1} du$$

$$= \frac{1}{4} \tan^{-1} u + c = \frac{1}{4} \tan^{-1}(x^4) + c. \quad (D)$$

$$18) \int \frac{3}{(x-2)^2+5} dx.$$

$$u = x-2$$

$$\frac{du}{dx} = 1$$

$$du = dx$$

$$a = \sqrt{5}$$

$$= 3 \int \frac{1}{u^2+5} dx$$

$$= \frac{3}{\sqrt{5}} \tan^{-1}\left(\frac{u}{\sqrt{5}}\right) + c.$$

$$= \frac{3}{\sqrt{5}} \tan^{-1}\left(\frac{x-2}{\sqrt{5}}\right) + c. \quad (A)$$

$$19) \int (1 + e^{\tan 2x}) \sec^2 2x dx.$$

$$u = \tan 2x.$$

$$\frac{du}{dx} = \sec^2 2x \cdot 2$$

$$= \int (1 + e^u) \sec^2 2x \frac{du}{2 \sec^2 2x}$$

$$= \frac{1}{2} \int (1 + e^u) du$$

$$\frac{du}{2 \sec^2 2x} = dx$$

$$= \frac{1}{2} (u + e^u) + c = \frac{1}{2} (\sec 2x + e^{\tan 2x}) + c. \quad (C)$$

ک.ع. اے ایف ایس ایس ایس

$$20) \int 2 (\tan x + \tan^3 x) dx$$

$$= \int 2 \tan x (1 + \tan^2 x) dx$$

$$= 2 \int \tan x \cdot \sec^2 x \, dx$$

$$= 2 \int u \cdot \sec^2 x \cdot \frac{du}{\sec^2 x}$$

$$= 2 \int u \, du$$

$$= u^2 + C = \tan^2 x + C \quad (A)$$

$$u = \tan x$$

$$\frac{du}{dx} = \sec^2 x$$

$$\frac{dy}{\sec^2 x} = dx$$

$$21) \int 4 e^{x^2 + \ln x} dx = \int 4 e^{x^2} \cdot e^{\ln x} dx$$

$$= \int u e^{x^2} \cdot x \, dx$$

$$= \int 4x e^{x^2} dx.$$

$$= 2 \int 2x e^{x^2} dx$$

$$= 2e^{x^2} + C \quad (C)$$

وَعَلَىٰ رَأْسِهِ
سِتْرٌ مِّنَ الْمَلٰٓئِكَةِ

22) $\int \frac{1}{\sqrt{x^4 - x^2}} dx$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{x^2(x^2-1)}} dx$$

$$= \int \frac{1}{|x| \sqrt{x^2 - 1}} dx = \sec^{-1} x + c. \quad (A)$$

$$d^2 u = \frac{1}{2} dx^2 \text{ by } L$$

$$23) \int x(2x+1)^5 dx.$$

$$= \int x u^5 \frac{du}{2}$$

$$= \int \frac{(u-1)}{2} u^5 \frac{du}{2}$$

$$= \frac{1}{4} \int u^6 - u^5 du$$

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{u^7}{7} - \frac{u^6}{6} + c \right)$$

$$= \frac{1}{28} (2x+1)^7 - \frac{1}{24} (2x+1)^6 + c \quad (A)$$

$$\begin{aligned} u &= 2x+1 \\ \frac{du}{dx} &= 2 \\ \frac{du}{2} &= dx \\ \Rightarrow 2x+1 &= u \\ 2x &= u-1 \\ x &= \frac{u-1}{2} \end{aligned}$$

$$24) \int \sec x dx$$

$$= \int \sec x dx \cdot \frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x}$$

$$= \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x} dx = \ln |\sec x + \tan x| + c \quad (A)$$

$$25) \int \csc x dx \times \frac{\csc x - \cot x}{\csc x - \cot x}$$

$$= \int \frac{\csc^2 x - \csc x \cot x}{\csc x - \cot x} dx = \ln |\csc x - \cot x| + c \quad (A)$$

تابعاً مستقيماً في x

$$26) \int \frac{x+1}{\sqrt{3-2x-x^2}} dx$$

$$= \int \frac{x+1}{\sqrt{u}} \cdot \frac{du}{-2(1+x)}$$

$$= -\frac{1}{2} \int u^{-1/2} du$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot 2u^{1/2} + C = - (3-2x-x^2)^{1/2} + C \quad (B)$$

$$= -\sqrt{3-2x-x^2} + C$$

$$u = 3-2x-x^2$$

$$\frac{du}{dx} = -2-2x$$

$$= -2(1+x)$$

$$\frac{du}{-2(1+x)} = dx$$

$$27) \int \frac{2}{\sqrt{e^{4x}-1}} dx = \int \frac{2}{\sqrt{(e^{2x})^2-1}} dx$$

$$= \int \frac{2}{\sqrt{u^2-1}} \cdot \frac{du}{2e^{2x}}$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{u^2-1}} \cdot \frac{du}{u}$$

$$= \int \frac{1}{u \sqrt{u^2-1}} du$$

$$= \int \frac{1}{|u| \sqrt{u^2-1}} du = \sec^{-1} u + C$$

$$= \sec^{-1} e^{2x} + C \quad (C)$$

$$u = e^{2x}$$

$$\frac{du}{dx} = e^{2x} \cdot 2$$

$$\frac{du}{2e^{2x}} = dx$$

لأن e^{2x} موجبة
فان $u = |u|$

ب.ع.ا.د.س.ا.ل.د.ل

$$28) \int \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx = \int \frac{e^x}{1+(e^x)^2} dx$$

$$= \int \frac{\cancel{e^x}}{1+u^2} \cdot \frac{du}{\cancel{e^x}}$$

$$= \int \frac{1}{1+u^2} du$$

$$= \tan^{-1} u + c = \tan^{-1}(e^x) + c \quad (B)$$

$$u = e^x$$

$$\frac{du}{dx} = e^x$$

$$\frac{du}{e^x} = dx$$

$$29) \int \frac{1}{x^2+x+1} dx.$$

$$= \int \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} dx$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \left(\frac{2(x+\frac{1}{2})}{\sqrt{3}} \right) + c$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right) + c \quad (C)$$

$$x^2+x+1$$

$$= x^2+x+\frac{1}{4}+1-\frac{1}{4}$$

$$= \underbrace{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$$

$$u = x + \frac{1}{2}$$

$$a = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$30) \int \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}} dx$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{1-(x-1)^2}} dx.$$

$$= \sin^{-1}(x-1) + c \quad (B)$$

$$2x-x^2$$

$$= -(x^2-2x)$$

$$= -(x^2-2x+1-1)$$

$$= -((x-1)^2-1)$$

$$= \underbrace{1-(x-1)^2}$$

$$u = x-1$$

$$a = 1$$

دستگاه معادلات ۱ و ۲

$$31) \int \frac{1}{|x| \sqrt{x^2 - a^2}} dx, a > 0$$

$$= \int \frac{1}{a |x| \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1}} dx$$

$$= \int \frac{1}{a |x| \sqrt{u^2 - 1}} du$$

$$= \int \frac{1}{|x| \sqrt{u^2 - 1}} du$$

$$= \int \frac{1}{|a u| \sqrt{u^2 - 1}} du$$

$$= \frac{1}{a} \sec^{-1} u + C = \frac{1}{a} \sec^{-1} \left(\frac{x}{a} \right) + C \quad (C)$$

$$\begin{aligned} u &= \frac{x}{a} \\ \frac{du}{dx} &= \frac{1}{a} \\ a du &= dx \\ \Rightarrow x &= au \end{aligned}$$

$$32) \int \frac{3}{x^{1/4} + x} dx$$

$$= \int \frac{3}{x^{1/4} (1 + x^{3/4})} dx$$

$$= \int \frac{3}{x^{1/4} u} \cdot \frac{1}{3} x^{1/4} du$$

$$= 4 \int \frac{1}{u} du$$

$$= 4 \ln |u| + C$$

$$= 4 \ln |1 + x^{3/4}| + C \quad (A)$$

$$\begin{aligned} u &= 1 + x^{3/4} \\ \frac{du}{dx} &= \frac{3}{4} x^{-1/4} \\ &= \frac{3}{4 x^{1/4}} \\ \frac{4 x^{1/4}}{3} du &= dx \end{aligned}$$

کتابخانه اسلامی

33) $\int 3^{x^2} x \, dx$

$$= \int \frac{u}{3} \cdot \frac{du}{2x}$$

$$= \frac{1}{2} \int 3^u \, du$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{3^0}{\ln 3} + C$$

$$= \frac{1}{2 \ln 3} \cdot 3^{x^2} + C.$$

$$= \frac{1}{\ln 9} \cdot 3^{x^2} + c. \quad (C)$$

ملاحظه

$$e^x dx = e^x.$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}$$

$$U = x^2$$

$$\frac{du}{dx} = 2x$$

$$\frac{du}{2x} = dx$$

$$34) \int \sqrt[3]{x^5 - x^3} dx = \int \sqrt[3]{x^3(x^2 - 1)} dx$$

$$= \int x \sqrt[3]{x^2 - 1} \, dx$$

$$= \int x u^{\frac{1}{3}} \frac{du}{2x}$$

$$= \frac{1}{2} \int u^{1/3} du$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} v^{4/3} + C$$

$$= \frac{3}{8} (x^2 - 1)^{4/3} + C \quad (C)$$

$$U = x^2 - 1$$

$$\frac{du}{dx} = 2x$$

$$\frac{du}{2x} = dx$$

تابع اولی را در تابع دوم

$$35) \int \sin 3x \cos 2x \, dx$$

$$= \int \frac{1}{2} [\sin (3-2)x + \sin (3+2)x] \, dx$$

$$= \int \frac{1}{2} [\sin x + \sin 5x] \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \left[-\cos x - \frac{\cos 5x}{5} \right] + c.$$

$$= -\frac{1}{2} \left[\cos x + \frac{1}{5} \cos 5x \right] + c \quad (A)$$

$$(36) \int_0^1 x(x-1)^3 \, dx$$

$$= \int x u^3 \, du$$

$$= \int_{-1}^0 (u+1) u^3 \, du$$

$$= \int_{-1}^0 u^4 + u^3 \, du$$

$$= \left[\frac{u^5}{5} + \frac{u^4}{4} \right]_{-1}^0 = -1/20 \quad (B)$$

$$\begin{cases} u = x-1 \\ \frac{du}{dx} = 1 \\ du = dx \\ x = u+1 \end{cases}$$

$$x=0 \rightarrow u=-1$$

$$x=1 \rightarrow u=0$$

$$37) \int_0^{\pi/2} \cos^2 x \sin x \, dx.$$

$$= \int u^2 \sin x \cdot \frac{du}{-\sin x}$$

$$= - \int_1^0 u^2 \, du$$

$$= - \left[\frac{u^3}{3} \right]_1^0 = 1/3 \quad (C)$$

$$u = \cos x$$

$$\frac{du}{dx} = -\sin x$$

$$\frac{du}{-\sin x} = dx$$

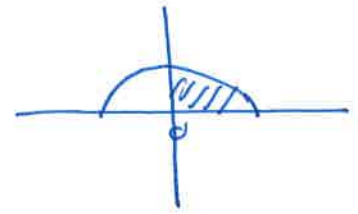
$$x=0 \rightarrow u=1$$

$$x=\pi/2 \rightarrow u=0$$

ع. ٢ مع الاستدلال

$$y = \sqrt{1-x^2}$$

$$38) \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{4} \pi (1)^2 = \frac{\pi}{4} \quad \textcircled{D}$$



= $\frac{1}{4}$ مساحة الدائرة التي نصف قطرها 1

$$39) \int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx,$$

$$u = \sqrt{x}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= \int \frac{e^u}{\cancel{\sqrt{x}}} \cdot 2\cancel{\sqrt{x}} du$$

$$2\sqrt{x} du = dx$$

$$= 2 \int_1^2 e^u du \quad \textcircled{C}$$

$$x=1 \rightarrow u=1$$

$$x=4 \rightarrow u=2$$

$$= 2 [e^u]_1^2 = 2(e^2 - e)$$

$$40) \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x}{x^2+1} dx$$

$$= \frac{1}{2} \ln |x^2+1| \Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{2} \ln 2$$

$$= \ln \sqrt{2} \quad \textcircled{B}$$

$$41) \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin^3 x \cos x \, dx$$

$$\int_{\sqrt{2}/2}^1 u^3 \cos x \frac{du}{\cos x}$$

$$= \left[\frac{u^4}{4} \right]_{\sqrt{2}/2}^1 = \frac{3}{16} \quad \textcircled{D}$$

$$u = \sin x$$

$$\frac{du}{dx} = \cos x$$

$$\frac{du}{\cos x} = du$$

$$x = \frac{\pi}{4} \rightarrow u = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{2} \rightarrow u = 1$$

$$42) \int_0^1 \frac{e^x}{(3 - e^x)^2} \, dx$$

$$= \int \frac{e^x}{u^2} \cdot \frac{du}{-e^x}$$

$$= - \int u^{-2} \, du$$

$$= u^{-1} = \frac{1}{u} = \frac{1}{3 - e^x} \Big|_0^1 = \frac{1}{3 - e} - \frac{1}{2} = \frac{2 - (3 - e)}{2(3 - e)}$$

$\textcircled{C}$

$$= \frac{e - 1}{2(3 - e)}$$

$$43) \int \frac{\cos x}{\sqrt{1 + \sin x}} \, dx$$

$$= \int \frac{\cancel{\cos x}}{\sqrt{u}} \cdot \frac{du}{\cancel{\cos x}}$$

$$= \int u^{-1/2} \, du = 2 u^{1/2}$$

$$= 2(1 + \sin x)^{1/2} \Big|_0^{\pi/2} = 2(\sqrt{2} - 1)$$

$$u = 1 + \sin x$$

$$\frac{du}{dx} = \cos x$$

$$\frac{du}{\cos x} = dx$$

$\textcircled{C}$

$$44) \int (\ln x)^2 dx$$

$$= \int u^2 \cdot x du$$

$$= \int u^2 e^u du$$

(B)

$$\begin{cases} u = \ln x \\ \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \\ x du = dx \\ \rightarrow \ln x = u \\ x = e^u \end{cases}$$

$$45) \int_3^5 x \sqrt{2x-1} dx = K \int_a^b (u+1) \sqrt{u} du$$

$$\int_3^5 x \sqrt{2x-1} dx$$

$$= \int \frac{1}{2} (u+1) \sqrt{u} \cdot \frac{du}{2}$$

$$= \frac{1}{4} \int_5^9 (u+1) \sqrt{u} du$$

$$K = \frac{1}{4} \quad (D)$$

$$\begin{cases} u = 2x-1 \\ \frac{du}{dx} = 2 \\ du/2 = dx \\ \rightarrow 2x-1 = u \\ x = \frac{1}{2} (u+1) \\ x=3 \rightarrow u=5 \\ x=5 \rightarrow u=9 \end{cases}$$

46)

سؤال السابق

$$b = 9 \quad (B)$$

$$47) \int_0^k \frac{\sec^2 x}{1 + \tan x} = \ln 2$$

$$\ln |1 + \tan x| \Big|_0^k = \ln 2$$

$$\ln |1 + \tan k| = \ln 2$$

$$1 + \tan k = 2$$

$$\tan k = 1 \longrightarrow k = \frac{\pi}{4} \quad \textcircled{B}$$

$$48) \int_0^{\pi} \cos x \, f'(\sin x) \, dx$$

$$= \int \cos x \, f'(u) \cdot \frac{du}{\cos x}$$

$$= \int_0^0 f'(u) \, du = 0 \quad \textcircled{C}$$

$$u = \sin x$$

$$\frac{du}{dx} = \cos x$$

$$\frac{du}{\cos x} = dx$$

$$x=0 \longrightarrow u=0$$

$$x=\pi \longrightarrow u=0$$

$$49) \int_0^1 \frac{f'(x)}{f(x)+1} \, dx$$

$$= \ln |f(x) + 1| \Big|_0^1$$

$$= \ln |f(1) + 1| - \ln |f(0) + 1|$$

$$= \ln |2 + 1| - \ln |-2 + 1|$$

$$= \ln 3 \quad \textcircled{C}$$

$$50) \int \frac{x^3}{(4+x^2)^{3/2}} dx$$

$$= \int \frac{x^3}{u^{3/2}} \cdot \frac{du}{2x}$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{u^{3/2}} du$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{u-4}{u^{3/2}} du$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{u}{u^{3/2}} - \frac{4}{u^{3/2}} du$$

$$= \frac{1}{2} \int u^{-1/2} - 4 u^{-3/2} du$$

$$= \frac{1}{2} \left[2 u^{1/2} - 4 \cdot (-2) u^{-1/2} \right] + C$$

$$= u^{1/2} + 4 u^{-1/2} + C$$

$$= \sqrt{u+x^2} + \frac{4}{\sqrt{u+x^2}} + C$$

$$= \frac{u+x^2+4}{\sqrt{u+x^2}} + C$$

$$= \frac{x^2+8}{\sqrt{4+x^2}} + C$$

$$\begin{aligned} u &= 4+x^2 \\ \frac{du}{dx} &= 2x \\ \frac{du}{2x} &= dx \\ \Rightarrow x^2 &= u-4 \end{aligned}$$

(A)

السؤال الأول

الوحدة السابعة

$$1) \int x \sin x \, dx$$

$$= -x \cos x + \sin x + C. \text{ (C)}$$

<u>u</u>	<u>dv</u>
x	$\sin x$
1	$\xrightarrow{+} -\cos x$
0	$\xrightarrow{-} -\sin x$

$$2) \int e^{ax} x^2 \, dx = \int x^2 e^{ax} \, dx,$$

$$= \frac{1}{a} x^2 e^{ax} - \frac{2}{a} x e^{ax}$$

$$+ \frac{2}{a^3} e^{ax} + C. \text{ (A)}$$

<u>u</u>	<u>dv</u>
x^2	e^{ax}
$2x$	$\xrightarrow{+} \frac{e^{ax}}{a}$
2	$\xrightarrow{-} \frac{e^{ax}}{a^2}$
0	$\xrightarrow{+} \frac{e^{ax}}{a^3}$

$$3) \int x \sec^2 x \, dx$$

$$= x \tan x - \int \tan x \, dx$$

$$= x \tan x - \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx$$

$$= x \tan x + \int \frac{-\sin x}{\cos x} \, dx$$

$$= x \tan x + \ln |\cos x| + C. \text{ (B)}$$

<u>u</u>	<u>dv</u>
x	$\sec^2 x$
1	$\xrightarrow{+} \tan x$

تابع العكس لـ $\sin^{-1} x$

$$4) \int \sin^{-1} x \, dx$$

$$= x \sin^{-1} x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx \quad (B)$$

$$\begin{array}{rcl} \sin^{-1} x & & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & & x \end{array}$$

$$5) \int \frac{x}{\sqrt{e^x}} \, dx = \int x e^{-\frac{1}{2}x} \, dx$$

$$= -2x e^{-\frac{1}{2}x} - 4 e^{-\frac{1}{2}x} + C.$$

$$= e^{-\frac{1}{2}x} (-2x - 4) + C$$

$$= \frac{-2x - 4}{\sqrt{e^x}} + C \quad (B)$$

$$\begin{array}{rcl} x & & e^{-\frac{1}{2}x} \\ 1 & \nearrow + & -\frac{1}{2}x \\ & & e^{-\frac{1}{2}x} = -2e^{-\frac{1}{2}x} \\ & \searrow - & -\frac{1}{2} \\ 0 & & -2e^{-\frac{1}{2}x} = 4e^{-\frac{1}{2}x} \end{array}$$

$$6) \int \sin \sqrt{x} \, dx$$

$$= \int \sin u \cdot 2\sqrt{x} \, du$$

$$= \int 2u \sin u \, du$$

$$= -2u \cos u + 2 \sin u + C$$

$$= -2\sqrt{x} \cos \sqrt{x} + 2 \sin \sqrt{x} + C$$

(B)

تعويض

$$u = \sqrt{x}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$2\sqrt{x} \, du = dx$$

الجزء

$$\begin{array}{rcl} 2u & & \sin u \\ 2 & \nearrow + & -\cos u \\ 0 & \searrow - & -\sin u \end{array}$$

$$7) \int e^{\sqrt{x}} dx$$

$$\int e^u \cdot 2\sqrt{x} du$$

$$= \int 2u e^u du$$

$$= 2u e^u - 2e^u + C$$

$$= 2\sqrt{x} e^{\sqrt{x}} - 2e^{\sqrt{x}} + C \quad (D)$$

تعويض

$$u = \sqrt{x}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$2\sqrt{x} du = dx$$

اجزاء

$$\begin{array}{r} 2u \\ 2 \\ 0 \end{array} \begin{array}{l} + e^u \\ \rightarrow e^u \\ - e^u \end{array}$$

$$8) \int e^{2x} \sin e^x dx$$

$$= \int e^{2x} \sin u \cdot \frac{du}{e^x}$$

$$= \int e^x \sin u du$$

$$= \int u \sin u du$$

$$= -u \cos u + \sin u + C$$

$$= -e^x \cos e^x + \sin e^x + C \quad (A)$$

$$= -e^x \cos e^x + \sin e^x + C$$

تعويض

$$u = e^x$$

$$\frac{du}{dx} = e^x$$

$$\frac{du}{e^x} = dx$$

اجزاء

$$\begin{array}{r} u \\ 1 \\ 0 \end{array} \begin{array}{l} + \sin u \\ \rightarrow -\cos u \\ - \sin u \end{array}$$

$$9) \int (\ln x)^2 dx$$

$$= \int u^2 \cdot x du$$

$$= \int u^2 e^u du$$

$$= u^2 e^u - 2u e^u + 2e^u + C$$

$$= (\ln x)^2 \cdot x - 2 \ln x \cdot x + 2x + C$$

$$= x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x + C \quad (A)$$

تعويض

$$u = \ln x$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$x du = dx$$

$$x = e^u$$

$$\begin{array}{r} u^2 \\ 2u \\ 2 \\ 0 \end{array} \begin{array}{l} + e^u \\ \rightarrow e^u \\ - e^u \end{array}$$

10) $\int \sec^3 x \, dx$ يمكن حل السؤال
بأكثر من طريقة

$$= \int \sec x \cdot \sec^2 x \, dx$$

$$= \sec x \tan x - \int \sec x \tan^2 x \, dx$$

$$= \sec x \tan x - \int \sec x (\sec^2 x - 1) \, dx$$

$$= \sec x \tan x - \int \sec^3 x \, dx + \int \sec x \, dx$$

نقل للطرف الثاني

$$\begin{array}{ccc} \sec x & & \sec^2 x \\ & \swarrow (+) & \\ \sec x \tan x & \leftarrow & \tan x \end{array}$$

$$2 \int \sec^3 x \, dx = \sec x \tan x + \ln |\sec x + \tan x| + c$$

$$\int \sec^3 x \, dx = \frac{1}{2} \sec x \tan x + \frac{1}{2} \ln |\sec x + \tan x| + c \quad (A)$$

11) $\int 2x^3 e^{x^2} \, dx$

$$= \int 2x^3 e^u \frac{du}{2x}$$

$$= \int x^2 e^u \, du$$

$$= \int u e^u \, du$$

$$= u e^u - e^u + c$$

$$= x^2 e^{x^2} - e^{x^2} + c$$

(A)

تعويض

$$u = x^2$$

$$\frac{du}{dx} = 2x$$

$$\frac{du}{2x} = dx$$

اجزاء

$$\begin{array}{ccc} u & & e^u \\ & \swarrow + & \\ 1 & \rightarrow & e^u \\ & \searrow - & \\ 0 & \rightarrow & e^u \end{array}$$

$$12) \int 2x^3 \sin x^2 dx$$

$$= \int 2x^3 \sin u \cdot \frac{du}{2x}$$

$$= \int x^2 \sin u du$$

$$= \int u \sin u du$$

$$= -u \cos u + \sin u + C \quad (B)$$

$$= -x^2 \cos x^2 + \sin x^2 + C$$

$$\left[\begin{array}{l} u = x^2 \\ \frac{du}{dx} = 2x \\ \frac{du}{2x} = dx \\ x^2 = u \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{rcl} u & \xrightarrow{+} & \sin u \\ 1 & \xrightarrow{-} & -\cos u \\ 0 & \xrightarrow{-} & -\sin u \end{array}$$

$$13) \int_0^{\pi} 2x \cos x dx$$

$$= 2x \sin x + 2 \cos x \Big|_0^{\pi}$$

$$= -4$$

(C)

$$\begin{array}{rcl} 2x & \xrightarrow{+} & \cos x \\ 2 & \xrightarrow{+} & \sin x \\ 0 & \xrightarrow{-} & -\cos x \end{array}$$

$$14) \int_1^2 \ln x dx$$

$$= x \ln x \Big|_1^2 - \int_1^2 1 dx$$

$$= 2 \ln 2 - 1 = \ln 4 - 1 \quad (A)$$

$$\begin{array}{rcl} \ln x & \xrightarrow{+} & 1 \\ \frac{1}{x} & \xrightarrow{-} & x \end{array}$$

$$15) \int_0^1 x e^{-x} dx$$

$$= -x e^{-x} - e^{-x} \Big|_0^1$$

$$= 1 - 2e^{-1}$$

(P)

$$\begin{array}{rcl} x & \xrightarrow{+} & e^{-x} \\ 1 & \xrightarrow{-} & -e^{-x} \\ 0 & \xrightarrow{-} & e^{-x} \end{array}$$

تابع اولی را انتخاب می‌کنیم

$$16) \int x^2 \ln x \, dx$$

$$u = \ln x \quad dv = x^2 \quad \textcircled{B}$$

$$17) \int \sec^3 x \, dx = \sec x \tan x - \int g(x) \tan x \, dx$$

$$\int \sec^3 x \, dx = \int \sec x \cdot \sec^2 x \, dx$$

$$= \sec x \tan x - \int \sec x \tan^2 x \, dx$$

$$\therefore g(x) = \sec x \tan x \quad \textcircled{D}$$

$$\begin{array}{c} \sec x \quad \sec^2 x \\ \downarrow + \\ \sec x \tan x \leftarrow \tan x \end{array}$$

$$18) \int f(x) \sin x \, dx = -f(x) \cos x + \int 3x^2 \cos x \, dx$$

$$\int f(x) \sin x \, dx = -f(x) \cos x + \int f'(x) \cos x \, dx$$

مشتق، تابع

$$f'(x) = 3x^2$$

$$f(x) = x^3 + c$$

ⓑ

$$19) \int_1^4 (2x+3) f'(x) \, dx$$

$$= (2x+3) f(x) \Big|_1^4 - \int_1^4 2 f(x) \, dx$$

$$= 11 f(4) - 5 f(1) - 2 (12)$$

Ⓒ

$$= 11(-8) - 5(3) - 24 = -127$$

$$\begin{array}{c} 2x+3 \quad f'(x) \\ \downarrow + \\ 2 \leftarrow f(x) \end{array}$$

$$20) \int_{-3}^5 f'(x) g(x) dx$$

$$= g(x)f(x) \Big|_{-3}^5 - \int_{-3}^5 g'(x)f(x) dx$$

$$= g(5)f(5) - g(-3)f(-3) - 9$$

$$= (4)(3) - (-1)(2) - 9$$

$$= 12 + 2 - 9 = 5 \quad \textcircled{B}$$

$$\begin{array}{cc} g(x) & f'(x) \\ & \searrow + \\ g'(x) & \leftarrow f(x) \end{array}$$

$$21) T_1 + T_2 = \int_2^5 f'(x)g(x)dx + \int_2^5 f(x)g'(x)dx$$

$$= \int_2^5 [f'(x)g(x) + f(x)g'(x)] dx$$

$$= \int_2^5 \underbrace{[f'(x)g(x) + f(x)g'(x)]}_{\text{قاعدة الضرب}} dx$$

$$= [f(x)g(x)]_2^5$$

$$= f(5)g(5) - f(2)g(2) = (2)(7) - (3)(4) = 2 \quad \textcircled{D}$$

يمكن حل السؤال بالخطوات

$$22) \int_0^1 e^x f(x) + e^x f'(x) dx$$

$$= \int_0^1 [e^x f(x)]' dx$$

يمكن حل السؤال بالخطوات

$$= [e^x f(x)]_0^1$$

$$= e f(1) - e^0 f(0)$$

$$= e(2) - (-1) = 2e + 1 \quad \textcircled{A}$$

حل المسألة الأولى

المسألة الأولى

$$1) \int \tan^3 x \sec x \, dx$$

$$= \int \tan^2 x \cdot u \cdot \frac{du}{\sec x \tan x}$$

$$= \int \tan^2 x \, du$$

→ x في u $\frac{du}{dx}$

$$= \int (u^2 - 1) \, du$$

$$= \frac{1}{3} u^3 - u + C = \frac{1}{3} \sec^3 x - \sec x + C$$

(B)

$$u = \sec x$$

$$\frac{du}{dx} = \sec x \tan x$$

$$\frac{du}{\sec x \tan x} = dx$$

$$\rightarrow \tan^2 x = \sec^2 x - 1$$

$$= u^2 - 1$$

$$2) \int \cos^2(x+1) \, dx$$

$$= \int \frac{1}{2} (1 + \cos 2(x+1)) \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \left[x + \frac{\sin 2(x+1)}{2} + C \right]$$

$$= \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin 2(x+1) + C$$

(D)

$$\cos^2 u = \frac{1}{2} (1 + \cos 2u)$$

$$\cos^2(x+1) = \frac{1}{2} (1 + \cos 2(x+1))$$

$$3) \int \sin^2 x \cos^3 x \, dx$$

$$= \int u^2 \cos^2 x \cdot \frac{du}{\cos x}$$

$$= \int u^2 (1 - u^2) \, du$$

$$= \int u^2 - u^4 \, du$$

$$= \frac{1}{3} u^3 - \frac{1}{5} u^5 + C$$

$$= \frac{1}{3} \sin^3 x - \frac{1}{5} \sin^5 x + C$$

(D)

$$u = \sin x$$

$$\frac{du}{dx} = \cos x$$

$$\frac{du}{\cos x} = dx$$

$$\rightarrow \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

$$= 1 - u^2$$

$$4) \int \sin^3 x \, dx$$

$$= \int \sin^2 x \sin x \, dx$$

$$= \int (1 - \cos^2 x) \sin x \, dx$$

$$= \int (1 - u^2) \sin x \cdot \frac{du}{-\sin x}$$

$$= - \int (1 - u^2) \, du$$

$$= - \left(u - \frac{u^3}{3} \right) + C = \frac{1}{3} \cos^3 x - \cos x + C \quad \textcircled{C}$$

$$u = \cos x$$

$$\frac{du}{dx} = -\sin x$$

$$\frac{du}{-\sin x} = dx$$

$$5) \int \sec^4 x \sqrt{\tan x} \, dx$$

$$= \int \sec^4 x \, u^{1/2} \cdot \frac{du}{\sec^2 x}$$

$$= \int \sec^2 x \cdot u^{1/2} \, du$$

$$= \int (u^2 + 1) u^{1/2} \, du$$

$$= \int u^{5/2} + u^{1/2} \, du$$

$$= \frac{2}{7} u^{7/2} + \frac{2}{3} u^{3/2} + C = \frac{2}{7} (\tan x)^{7/2} + \frac{2}{3} (\tan x)^{3/2} + C \quad \textcircled{B}$$

$$u = \tan x$$

$$\frac{du}{dx} = \sec^2 x$$

$$\frac{du}{\sec^2 x} = dx$$

$$\sec^2 x = \tan^2 x + 1 \\ = u^2 + 1$$

$$6) \int \sec^3 x \tan x \, dx$$

$$= \int \cancel{\tan x} \cdot u^3 \cdot \frac{du}{\cancel{\sec x \tan x}}$$

$$= \int u^3 \cdot \frac{du}{u}$$

$$= \int u^2 \, du$$

$$= \frac{1}{3} u^3 + C = \frac{1}{3} \sec^3 x + C \quad \textcircled{B}$$

$$u = \sec x$$

$$\frac{du}{dx} = \sec x \tan x$$

$$\frac{du}{\sec x \tan x} = dx$$

$$7) \int \cot^3 x \, dx = \int \cot x \cdot \cot^2 x \, dx$$

$$= \int \cot x (\csc^2 x - 1) \, dx$$

$$= \int \cot x (\csc^2 x - \cot x) \, dx$$

$$= \int -u \cdot du - \int \frac{\cos x}{\sin x} \cdot dx$$

$$u = \cot x$$

$$du = -\csc^2 x \, dx$$

$$= -\frac{1}{2} u^2 - \ln |\sin x| + c$$

$$= -\frac{1}{2} \cot^2 x - \ln |\sin x| + c$$

(A)

$$8) \int \sec^4 x \, dx$$

$$= \int \sec^2 x \cdot \sec^2 x \, dx$$

$$= \int \sec^2 x (\tan^2 x + 1) \, dx$$

$$= \int \sec^2 x (u^2 + 1) \frac{du}{\sec^2 x}$$

$$= \int u^2 + 1 \, du = \frac{1}{3} u^3 + u + c$$

$$= \frac{1}{3} \tan^3 x + \tan x + c$$

$$u = \tan x$$

$$\frac{du}{dx} = \sec^2 x$$

$$\frac{du}{\sec^2 x} = dx$$

(C)

$$9) \int \cot^2 x \csc^2 x \, dx$$

$$= \int u^2 \csc^2 x \frac{du}{-\csc^2 x}$$

$$u = \cot x$$

$$\frac{du}{dx} = -\csc^2 x$$

$$= -\int u^2 \, du$$

$$\frac{du}{-\csc^2 x} = dx$$

$$= -\frac{1}{3} u^3 + c$$

$$= -\frac{1}{3} \cot^3 x + c$$

(C)

$$10) \int \sin^2 x \cos^2 x \, dx.$$

$$= \int (\sin x \cdot \cos x)^2 \, dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{2} \sin 2x\right)^2 \, dx$$

$$= \int \frac{1}{4} \sin^2 2x \, dx$$

$$= \int \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} (1 - \cos 4x) \, dx$$

$$= \frac{1}{8} \left(x - \frac{\sin 4x}{4} \right) + C.$$

$$= \frac{1}{32} (4x - \sin 4x) + C. \quad (A)$$

$$11) \int \frac{\cos x}{\sqrt{1 + \sin x}} \, dx$$

$$= \int \frac{\cos x}{\sqrt{u}} \cdot \frac{du}{\cos x} \quad (C)$$

$$= \int u^{-1/2} \, du = 2u^{1/2} = 2(1 + \sin x)^{1/2} \Big|_0^{\pi/2} = 2(\sqrt{2} - 1)$$

$$u = 1 + \sin x$$

$$\frac{du}{dx} = \cos x$$

$$\frac{du}{\cos x} = dx$$

$$12) \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin^3 x \cos x \, dx$$

$$= \int_{\sqrt{2}/2}^1 u^3 \cdot \cos x \frac{du}{\cos x}$$

$$= \frac{u^4}{4} \Big|_{\sqrt{2}/2}^1 = \frac{3}{16}$$

$$u = \sin x$$

$$\frac{du}{dx} = \cos x$$

$$\frac{du}{\cos x} = dx$$

$$x = \frac{\pi}{4} \longrightarrow u = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{2} \longrightarrow u = 1$$

(D)

$$13) \int_0^{\pi/4} \tan^4 x \sec^4 x \, dx$$

$$= \int u^4 \sec^4 x \cdot \frac{du}{\sec^2 x}$$

$$= \int u^4 \sec^2 x \, du$$

$$= \int u^4 (u^2 + 1) \, du$$

$$= \int_0^1 u^6 + u^4 \, du \quad (B)$$

$$= \left[\frac{1}{7} u^7 + \frac{1}{5} u^5 \right]_0^1 = \frac{1}{7} + \frac{1}{5} = \frac{12}{35}$$

$$u = \tan x$$

$$\frac{du}{dx} = \sec^2 x$$

$$\frac{du}{\sec^2 x} = dx$$

$$\sec^2 x = \tan^2 x + 1 \\ = u^2 + 1$$

$$x=0 \rightarrow u=0$$

$$x=\pi/4 \rightarrow u=1$$

$$14) \int_{\pi/4}^{\pi/3} \cos^3 3x \sin^3 3x \, dx$$

$$= \int \cos^2 3x \cdot \sin^3 3x \cdot \frac{du}{3 \cos 3x}$$

$$= \frac{1}{3} \int \cos^2 3x \cdot u^3 \, du$$

$$= \frac{1}{3} \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^0 (1-u^2) u^3 \, du$$

$$= \frac{1}{3} \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^0 u^3 - u^5 \, du$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^{\sqrt{2}/2} u^5 - u^3 \, du$$

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{u^6}{6} - \frac{u^4}{4} \right) \Big|_0^{\sqrt{2}/2} = -\frac{1}{72} \quad (C)$$

$$u = \sin 3x$$

$$\frac{du}{dx} = 3 \cos 3x$$

$$\frac{du}{3 \cos 3x} = dx$$

$$\rightarrow \cos^2 3x = 1 - \sin^2 3x$$

$$= 1 - u^2$$

$$x = \frac{\pi}{4} \rightarrow u = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{3} \rightarrow u = 0$$

$$15) \int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x} dx$$

$$x = 3 \sec \theta \quad (C)$$

$$16) \int \sqrt{x^2-4x} dx$$

$$x^2-4x$$

$$= x^2-4x+4-4$$

$$= (x-2)^2-4$$

$$= \int \sqrt{(x-2)^2-4} dx$$

$$x-2 = 2 \sec \theta$$

$$x = 2 \sec \theta + 2 \quad (C)$$

$$17) \int \sqrt{2x-x^2} dx$$

$$2x-x^2$$

$$= -[x^2-2x]$$

$$= -[x^2-2x+1-1]$$

$$= -[(x-1)^2-1]$$

$$= 1-(x-1)^2$$

$$x-1 = \sin \theta$$

$$dx = \cos \theta d\theta$$

$$= \int \sqrt{1-(x-1)^2} dx$$

$$= \int \cos \theta \cdot \cos \theta d\theta$$

$$= \int \cos^2 \theta d\theta \quad (B)$$

$$18) \int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x} dx$$

$$x = 2 \sin \theta$$

$$dx = 2 \cos \theta d\theta$$

$$= \int \frac{\sqrt{4-4\sin^2\theta}}{2\sin\theta} \cdot 2\cos\theta d\theta$$

$$= \int \frac{2\sqrt{1-\sin^2\theta}}{2\sin\theta} \cdot 2\cos\theta d\theta$$

$$= \int \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \cdot 2\cos\theta d\theta = \int 2 \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}$$

(C)

$$19) \int \frac{1}{x^2 \sqrt{1-x^2}} dx$$

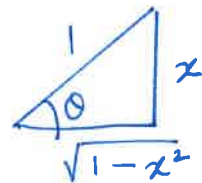
$$x = \sin \theta$$

$$dx = \cos \theta d\theta$$

$$= \int \frac{1}{\sin^2 \theta \cos \theta} \cdot \cos \theta d\theta$$

$$\sin \theta = x$$

$$= \int \csc^2 \theta d\theta \quad (D)$$



$$= -\cot \theta + C = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + C$$

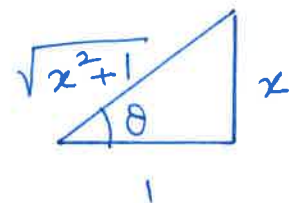
$$20) \int \frac{1}{(x^2+1)^{3/2}} dx$$

$$x = \tan \theta$$

$$dx = \sec^2 \theta d\theta$$

$$= \int \frac{1}{(\sec^2 \theta)^{3/2}} \cdot \sec^2 \theta d\theta$$

$$\tan \theta = x$$



$$= \int \frac{1}{\sec \theta} d\theta$$

$$= \int \cos \theta d\theta = \sin \theta + C = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + C \quad (C)$$

$$21) \int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} dx$$

$$x = \sec \theta$$

$$dx = \sec \theta \tan \theta d\theta$$

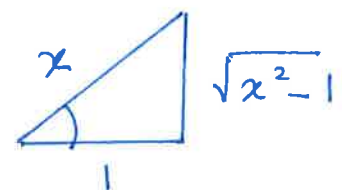
$$= \int \frac{\tan \theta}{\sec \theta} \cdot \sec \theta \tan \theta d\theta$$

$$\sec \theta = x$$

$$\cos \theta = 1/x$$

$$= \int \tan^2 \theta d\theta$$

$$= \int \sec^2 \theta d\theta$$



$$= \tan \theta - \theta + C$$

$$\theta = \sec^{-1} x$$

$$= \sqrt{x^2-1} - \sec^{-1} x + C \quad (C)$$

$$22) \int \frac{1}{x^2 \sqrt{9-x^2}} dx$$

$$= \int \frac{1}{9 \sin^2 \theta \cdot 3 \cos \theta} \cdot 3 \cos \theta d\theta$$

$$= \frac{1}{9} \int \csc^2 \theta d\theta$$

$$= -\frac{1}{9} \cot \theta + C$$

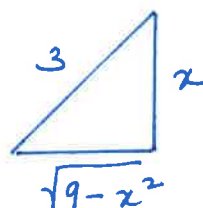
$$= -\frac{1}{9} \cdot \frac{\sqrt{9-x^2}}{x} + C$$

$$= -\frac{\sqrt{9-x^2}}{9x} + C \quad (B)$$

$$x = 3 \sin \theta$$

$$dx = 3 \cos \theta d\theta$$

$$\sin \theta = \frac{x}{3}$$



$$23) \int_0^{1/2} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= \int_0^{\pi/6} \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} \cdot \cos \theta d\theta$$

(D)

$$x = \sin \theta$$

$$dx = \cos \theta d\theta$$

$$x=0 \rightarrow \theta = \sin^{-1} 0 = 0$$

$$x=\frac{1}{2} \rightarrow \theta = \sin^{-1} \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$$

$$24) \int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx$$

مساحت ربع الدائرة

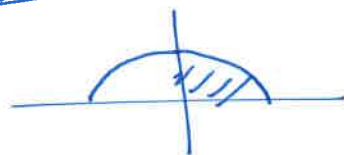
$$x = 2 \sin \theta$$

او على اعتبار ان المساحة ربع دائرة نصف قطرها 2

$$\therefore \int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx = \frac{1}{4} \pi (2)^2$$

$$= \pi$$

(A)



$$25) \int \sin^3 x \cos^n x \, dx = \frac{1}{6} \cos^6 x - \frac{1}{4} \cos^4 x + c$$

استفاد من فرضية

$$\sin^3 x \cos^n x = \frac{1}{6} \cdot 6 \cdot \cos^5 x \cdot (-\sin x) - \frac{1}{4} \cdot 4 \cos^3 x (-\sin x)$$

$$= -\cos^5 x \sin x + \cos^3 x \sin x.$$

$$= \cos^3 x \cdot \sin x (-\cos^2 x + 1)$$

$$= \cos^3 x \cdot \sin x (1 - \cos^2 x)$$

$$= \cos^3 x \cdot \sin x \cdot \sin^2 x.$$

$$= \cos^3 x \cdot \sin^3 x.$$

$$n=3$$

(C)

بالطريقة فان

$$1) \frac{5x+7}{(x+1)^2(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)}$$

تربيعي $\rightarrow$ نظر مکر $\textcircled{C}$

$$2) \frac{4x-5}{2x^2-5x-3} = \frac{4x-5}{(2x+1)(x-3)} = \frac{A}{2x+1} + \frac{B}{x-3}$$

$$4x-5 = A(x-3) + B(2x+1)$$

$$x=3 \rightarrow 7 = 7B \rightarrow B=1$$

$$x=-\frac{1}{2} \rightarrow -7 = -\frac{7}{2}A \rightarrow A=2$$

$$\frac{4x-5}{2x^2-5x-3} = \frac{2}{2x+1} + \frac{1}{x-3} \quad \textcircled{A}$$

$$4) \int \frac{1}{x^2-1} dx.$$

کون جزئیة لان المقام میں $\textcircled{C}$

$$5) \int \frac{x^2}{x^2+1} dx.$$

قسمة مطولة لان درجة البسط = درجة المقام

$\textcircled{D}$

$$\begin{aligned}
 5) \quad & \int \frac{1}{(x-1)(x+2)} dx \\
 &= \int \frac{1/3}{x-1} + \frac{-1/3}{x+2} dx \\
 &= \frac{1}{3} \ln|x-1| - \frac{1}{3} \ln|x+2| + C \\
 &= \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right| + C \quad \textcircled{A}
 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$$

$$1 = A(x+2) + B(x-1)$$

$$x=1 \rightarrow 1=3A \rightarrow A=1/3$$

$$x=-2 \rightarrow 1=-3B \rightarrow B=-1/3$$

$$\begin{aligned}
 6) \quad & \int \frac{1}{x^2+x} dx \\
 &= \int \frac{1}{x} + \frac{-1}{x+1} dx \\
 &= \ln|x| - \ln|x+1| + C \\
 &= \ln \left| \frac{x}{x+1} \right| + C \quad \textcircled{D}
 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{x^2+x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1}$$

$$1 = A(x+1) + Bx$$

$$x=0 \rightarrow 1=A$$

$$x=-1 \rightarrow 1=-B$$

$$\begin{aligned}
 7) \quad & \int \frac{1}{(x^2+x)(x+1)} dx \\
 &= \int \frac{1}{x(x+1)(x+1)} dx \\
 &= \int \frac{1}{x(x+1)^2} dx
 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{x(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$$

$$= \int \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} dx$$

$$= A \ln|x| + B \ln|x+1| + \frac{C(x+1)^{-1}}{-1} + C \quad \textcircled{A}$$

$$8) \int \frac{3x}{(x-1)(x+2)} dx = A \ln(x-1) + B \ln(x+2)$$

$$\frac{3x}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$$

$$A = 1, B = 2$$

(A)

$$3x = A(x+2) + B(x-1)$$

$$x = 1 \rightarrow 3 = 3A \rightarrow A = 1$$

$$x = -2 \rightarrow -6 = -3B \rightarrow B = 2$$

$$9) \int \frac{x^2 + x + 1}{x^3 + x} dx$$

$$= \int \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2 + 1} dx$$

$$= \ln|x| + \tan^{-1} x + c$$

(A)

$$\frac{x^2 + x + 1}{x^3 + x} = \frac{x^2 + x + 1}{x(x^2 + 1)}$$

$$= \frac{A}{x} + \frac{Bx + c}{x^2 + 1}$$

$$x^2 + x + 1 = A(x^2 + 1) + x(Bx + c)$$

$$x = 0 \Rightarrow 1 = A \Rightarrow A = 1$$

$$x = 1 \Rightarrow 3 = A(2) + B + c$$

$$3 = 2 + B + c$$

$$B + c = 1 \quad \dots (1)$$

$$x = -1 \Rightarrow 1 = A(2) - (-B + c)$$

$$1 = 2 + B - c$$

$$B - c = -1 \quad \dots (2)$$

$$\text{--- } 2 \times (1) \text{ ---}$$

$$B = 0$$

$$c = 1$$

$$10) \int \frac{-x+5}{x^3-x^2-2x} dx$$

$$= \int \frac{-5/2}{x} + \frac{1/2}{x-2} + \frac{2}{x+1} dx$$

$$= -\frac{5}{2} \ln|x| + \frac{1}{2} \ln|x-2|$$

$$+ 2 \ln|x+1| + C.$$

(D)

$$\frac{-x+5}{x^3-x^2-2x} = \frac{-x+5}{x(x-2)(x+1)}$$

$$= \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+1}$$

$$\begin{aligned} -x+5 &= A(x-2)(x+1) \\ &+ Bx(x+1) \\ &+ Cx(x-2) \end{aligned}$$

$$x = -1 \Rightarrow 6 = 3C \Rightarrow C = 2$$

$$x = 0 \Rightarrow 5 = -2A \Rightarrow A = -\frac{5}{2}$$

$$x = 2 \Rightarrow 3 = 6B \Rightarrow B = \frac{1}{2}$$

$$11) \int \frac{4x-5}{x^3-x^2} dx$$

$$= \int \frac{1}{x} + \frac{5}{x^2} - \frac{1}{x-1} dx$$

$\rightarrow 5x^{-2}$

$$= \ln|x| - 5x^{-1} - \ln|x-1| + C$$

$$= \ln|x| - \ln|x-1| - \frac{5}{x}$$

$$= \ln \left| \frac{x}{x-1} \right| - \frac{5}{x} + C. \quad (A)$$

$$\frac{4x-5}{x^3-x^2} = \frac{4x-5}{x^2(x-1)}$$

$$= \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1}$$

$$\begin{aligned} 4x-5 &= Ax(x-1) + B(x-1) \\ &+ Cx^2 \end{aligned}$$

$$x=0 \Rightarrow -5 = -B \Rightarrow B=5$$

$$x=1 \Rightarrow -1 = C \Rightarrow C=-1$$

$$x=2 \Rightarrow 3 = 2A + B + 4C$$

$$3 = 2A + 5 - 4$$

$$\Rightarrow A=1$$

$$12) \int_2^3 \frac{x+1}{x^2+2x-3} dx$$

$$= \int_2^3 \frac{1/2}{x+3} + \frac{1/2}{x-1} dx$$

$$= \frac{1}{2} \ln|x+3| + \frac{1}{2} \ln|x-1| \Big|_2^3$$

$$= \frac{1}{2} \ln \frac{12}{5} \quad \textcircled{B}$$

$$\frac{x+1}{x^2+2x-3} = \frac{x+1}{(x+3)(x-1)}$$

$$= \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-1}$$

$$x+1 = A(x-1) + B(x+3)$$

$$x=1 \Rightarrow 2 = 4B \Rightarrow B = 1/2$$

$$x=-3 \Rightarrow -2 = -4A \Rightarrow A = 1/2$$

$$13) \int \frac{x}{x+2} dx$$

$$= \int 1 - \frac{2}{x+2} dx$$

$$= x - 2 \ln|x+2| + C \quad \textcircled{C}$$

$$\frac{x+2 \sqrt{x}}{x^2+2x+2} = \frac{x+2}{x^2+2x+2}$$

$$14) \int_0^1 \frac{x^2}{x^2+1} dx$$

$$= \int_0^1 1 - \frac{1}{x^2+1} dx$$

$$= x - \tan^{-1} x \Big|_0^1$$

$$= 1 - \frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{4-\pi}{4} \quad \textcircled{D}$$

$$\frac{x^2+1 \sqrt{x^2}}{x^2+1} = \frac{x^2}{x^2+1}$$

تحويل

$$u = \sin x$$

$$\frac{du}{dx} = \cos x$$

$$\frac{du}{\cos x} = dx$$

کو جزئیہ

$$\frac{2}{u^2-4} = \frac{A}{u-2} + \frac{B}{u+2}$$

$$2 = A(u+2) + B(u-2)$$

$$u=2 \Rightarrow 2 = 4A \Rightarrow A = \frac{1}{2}$$

$$u=-2 \Rightarrow 2 = -4B \Rightarrow B = -\frac{1}{2}$$

$$15) \int \frac{2 \cos x}{\sin^2 x - 4} dx.$$

$$= \int \frac{2 \cancel{\cos x}}{u^2 - 4} \frac{du}{\cancel{\cos x}}$$

$$= \int \frac{2}{u^2 - 4} du$$

$$= \int \frac{\frac{1}{2}}{u-2} - \frac{\frac{1}{2}}{u+2} du$$

$$= \frac{1}{2} \ln |u-2| - \frac{1}{2} \ln |u+2| + c$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{u-2}{u+2} \right| + c$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sin x - 2}{\sin x + 2} \right| + c \quad \textcircled{A}$$

السؤال الأول

لوحة لابتوب

$$1) \quad y' = e^{x + \ln y}$$
$$\frac{dy}{dx} = e^x \cdot e^{\ln y}$$

$$\frac{dy}{dx} = e^x \cdot y$$

$$\frac{dy}{y} = e^x \cdot dx$$

(B)

$$2) \quad y' = \sin(x+y)$$
$$\frac{dy}{dx} = \sin(x+y)$$

(A)

غير قابلة للفصل

$$3) \quad y'' - 4y = 0$$
$$4e^{2x} - 4e^{2x} \stackrel{??}{=} 0$$
$$0 = 0 \quad \checkmark$$

$$y = e^{2x} \quad \text{اكثر هو}$$

(B)

$$y = e^{2x}$$
$$y' = 2e^{2x}$$
$$y'' = 4e^{2x}$$

$$4) \quad y' = ky, \quad y(0) = A$$

$$\frac{dy}{dt} = ky$$

$$\frac{dy}{y} = k dt$$

$$\int \frac{1}{y} dy = \int k dt$$

$$\ln|y| = kt + c$$

$$y = e^{kt+c}$$

$$y = e^{kt} \cdot e^c$$

$$y(0) = A$$

$$e^0 \cdot e^c = A \Rightarrow e^c = A$$

$$y = A e^{kt} \quad (A)$$

ع.ل. 1 حل المسألة

$$5) \quad y' = 2y, \quad y(0) = -5.$$
$$K = 2.$$

$$y = A e^{2t}.$$

$$y(0) = -5.$$

$$A = -5$$

$$y(t) = -5 e^{2t} \quad \textcircled{C}$$

$$6) \quad y' = 2y, \quad y(1) = 1$$

$$y = A e^{2t}.$$

$$y(1) = 1$$

$$A e^2 = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{e^2}.$$

$$y(t) = \frac{1}{e^2} e^{2t} = e^{2t-2}. \quad \textcircled{C}$$

$$7) \quad y' = y^2 + 1$$

$$\frac{dy}{dt} = y^2 + 1$$

$$\frac{dy}{y^2 + 1} = dt$$

$$\int \frac{1}{y^2 + 1} dy = \int dt$$

$$\tan^{-1} y = t + C.$$

$$y = \tan(t + C). \quad \textcircled{C}$$

* كلمة اكل آتون

$$y = \tan(t + C)$$

او

$$y = \tan(x + C)$$

$$8) \quad y' = \sqrt{1-y^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{1-y^2}$$

$$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = dx$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} dy = \int dx$$

$$\sin^{-1} y = t + c$$

$$y = \sin(t+c) \quad (D)$$

$$9) \quad y' = \cos^2 y, \quad y(0) = \frac{3\pi}{4}$$

$$\frac{dy}{dx} = \cos^2 y$$

$$\int \frac{dy}{\cos^2 y} = \int dx$$

$$\int \sec^2 y = \int dx$$

$$\tan y = x + c$$

$$y(0) = \frac{3\pi}{4}$$

$$\tan \frac{3\pi}{4} = 0 + c \Rightarrow c = -1$$

$$\tan y = x - 1$$

$$y = \tan^{-1}(x-1) \quad (A)$$

$$10) \quad y' = \frac{x}{x^2+1}, \quad y(0) = 2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{x^2+1}$$

$$\int 1 dy = \int \frac{x}{x^2+1} dx$$

$$y = \frac{1}{2} \ln |x^2+1| + C$$

$$y(0) = 2 \Rightarrow C = 2$$

$$y(x) = \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + 2 \quad (B)$$

$$11) \quad y' = \frac{2xy}{x^2+1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2+1}$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{2x}{x^2+1} dx$$

$$\int \frac{1}{y} dy = \int \frac{2x}{x^2+1} dx$$

$$\ln|y| = \ln|x^2+1| + C$$

$$y = e^{\ln|x^2+1| + C}$$

$$y = e^{\ln|x^2+1|} \cdot e^C$$

$$y = (x^2+1) \cdot A$$

$$y = A(x^2+1) \quad \textcircled{A}$$

$$12) \quad y' = xy^2 + x = x(y^2+1)$$

$$\frac{dy}{dx} = x(y^2+1)$$

$$\frac{dy}{y^2+1} = x dx$$

$$\int \frac{1}{y^2+1} dy = \int x dx$$

$$\tan^{-1}y = \frac{1}{2}x^2 + C$$

$$y = \tan\left(\frac{1}{2}x^2 + C\right) \quad \textcircled{A}$$

$$13) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{8}{x^2+1} + \sec^2 x$$

$$dy = \left(\frac{8}{x^2+1} + \sec^2 x \right) dx$$

$$y = 8 \tan^{-1}x + \tan x + C \quad \textcircled{D}$$

$$14) \quad y' = e^x - y = \frac{e^x}{e^y}, \quad y(0) = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^x}{e^y}$$

$$e^y dy = e^x dx$$

$$\int e^y dy = \int e^x dx$$

$$e^y = e^x + c$$

$$y = \ln(e^x + c) \quad (B)$$

$$(15) \quad y(0) = 0$$

$$e^0 = e^0 + c \rightarrow c = 0$$

$$e^y = e^x$$

$$\therefore y = x$$

$$y(2) = 2 \quad (D)$$

$$16) \quad y' = 2x \cos^2 y$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x \cos^2 y$$

$$\frac{dy}{\cos^2 y} = 2x dx$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 y} dy = \int 2x dx$$

$$\int \sec^2 y dy = \int 2x dx$$

$$\tan y = x^2 + c$$

$$y = \tan^{-1}(x^2 + c) \quad (D)$$

$$17) \quad y' = -0.1y - 10 = -0.1(y + 100), \quad y(0) = 80$$

$$\frac{dy}{y+100} = -0.1 dx$$

$$\int \frac{1}{y+100} dy = \int -0.1 dx$$

$$\ln|y+100| = -0.1x + c$$

$$y(0) = 80$$

$$\ln|180| = c$$

$$y+100 = \frac{-0.1x+c}{e}$$

$$y+100 = \frac{-0.1x}{e} \cdot e^c$$

$$y+100 = \frac{-0.1x}{e} \cdot e^{\ln 180}$$

$$y = 180 \frac{-0.1x}{e} - 100$$

$$y = 180 \frac{-0.1x}{e} - 100 \quad (B)$$

$$18) \quad y' = \frac{3x}{y+1}, \quad y(1) = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x}{y+1}$$

$$(y+1) dy = 3x dx$$

$$\int (y+1) dy = \int 3x dx$$

$$\frac{y^2}{2} + y = \frac{3}{2} x^2 + C$$

$$y^2 + 2y = 3x^2 + C$$

$$y(1) = 1$$

$$1 + 2 = 3 + C \Rightarrow C = 0$$

$$y^2 + 2y = 3x^2$$

أكمل مربع لـ y

$$y^2 + 2y + 1 = 3x^2 + 1$$

$$(y+1)^2 = 3x^2 + 1$$

$$y+1 = \pm \sqrt{3x^2 + 1}$$

لأخذ الجذر الذي يحقق الشرط

$$y+1 = \sqrt{3x^2 + 1}$$

$$y = -1 + \sqrt{3x^2 + 1} \quad \textcircled{A}$$

$$19) \quad y' = x \sin x, \quad y(0) = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = x \sin x$$

$$dy = x \sin x dx$$

$$\int dy = \int x \sin x dx$$

$$y = -x \cos x + \sin x + C$$

$$y(0) = 1$$

$$C = 1$$

$$y = -x \cos x + \sin x + 1$$

ⓓ

الجزء

$$\begin{array}{rcl} x & \sin x & \\ & + & \\ 1 & - & \cos x \\ & - & \\ 0 & - & \sin x \end{array}$$

$$20) \quad y' = \frac{-x \sin x^2}{y}, \quad y(0) = -1$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x \sin x^2}{y}$$

$$y dy = -x \sin x^2 dx$$

$$\int y dy = \int -x \sin x^2 dx$$

$$\frac{y^2}{2} = \frac{1}{2} \cos x^2 + C.$$

$$y^2 = \cos x^2 + C.$$

$$y(0) = -1 \Rightarrow 1 = 1 + C \Rightarrow C = 0$$

$$y^2 = \cos x^2$$

$$y = +\sqrt{\cos x^2}, \quad y = -\sqrt{\cos x^2}$$

لأنه فقط البسالب الذي يتوافق مع $y(0) = -1$

$$y = -\sqrt{\cos x^2} \quad (A)$$

$$21) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y e^{x^2}}, \quad y(0) = 1$$

$$y dy = -x e^{-x^2} dx.$$

$$\int y dy = \int -x e^{-x^2} dx$$

$$\frac{y^2}{2} = \frac{1}{2} e^{-x^2} + C.$$

$$y^2 = e^{-x^2} + C.$$

$$y(0) = 1$$

$$1 = 1 + C \Rightarrow C = 0. \Rightarrow y^2 = e^{-x^2} \quad (B)$$

$$22) \quad y' = \frac{\sin x}{y \cos y}, \quad y(0) = \pi$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x}{y \cos y}$$

$$y \cos y \, dy = \sin x \, dx.$$

$$\int y \cos y \, dy = \int \sin x \, dx$$

$$y \sin y + \cos y = -\cos x + C.$$

$$x=0, y=\pi \Rightarrow C=0$$

$$y \sin y + \cos y = -\cos x.$$

(D)

$$\begin{array}{l} y \quad \cos y \\ 1 \quad \xrightarrow{+} \sin y \\ 0 \quad \xrightarrow{-} -\cos y \end{array}$$

$$23) \quad f'(x) = f(x), \quad f(1) = 1$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 1$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot dx = \int 1 \, dx$$

$$\ln |f(x)| = x + C$$

$$f(x) = e^{x+C}$$

$$f(1) = 1$$

$$1 = e^{1+C} \Rightarrow C = -1$$

$$f(x) = e^{x-1} \quad (D)$$

$$24) \quad f'(x) = 3x^2 + 2x, \quad f(2) = 3.$$

$$\int f'(x) dx = \int 3x^2 + 2x dx$$

$$f(x) = x^3 + x^2 + C.$$

$$f(2) = 3 \Rightarrow 3 = 8 + 4 + C \Rightarrow C = -9.$$

$$f(x) = x^3 + x^2 - 9$$

$$f(1) = 1 + 1 - 9 = -7 \quad \textcircled{B}$$

$$25) \quad y' = \sin x \cos^2 x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

$$\frac{dy}{dx} = \sin x \cos^2 x$$

$$dy = \sin x \cdot \cos^2 x dx$$

$$\int dy = \int \sin x \cos^2 x dx$$

$$y = -\frac{1}{3} \cos^3 x + C.$$

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}, \quad y = 0$$

$$C = 0.$$

$$y = -\frac{1}{3} \cos^3 x.$$

$$y(0) = -1/3 \quad \textcircled{D}$$

السؤال الأول

المادة

$$1) \quad y = k y, \quad T_d = 10$$

$$K = \frac{\ln 2}{T_d} = \frac{\ln 2}{10} = 0.069. \quad (A)$$

$$2) \quad y = 300 e^{0.231 t}$$

$$K = 0.231,$$

$$T_d = \frac{\ln 2}{0.231} \approx 3 \quad (C)$$

$$3) \quad y = 0.14 y(t), \quad k = -0.14$$

$$T_h = \frac{\ln 1/2}{k} = \frac{\ln 1/2}{-0.14} = 4.95 \approx 5. \quad (A)$$

$$4) \quad y' = k y, \quad T_d = 4, \quad A = 100$$

$$y = A e^{k t}$$

$$k = \frac{\ln 2}{T_d} = \frac{\ln 2}{4}$$

$$y = 100 e^{\frac{\ln 2}{4} t}$$

$$y(7) = 100 e^{\frac{\ln 2}{4} (7)}$$

$$= 336$$

$$(B)$$

$$5) \quad y = A e^{kt}, \quad y(0) = 50 = A, \quad T_h = 6000$$

$$k = \frac{\ln 1/2}{T_h} = \frac{\ln 1/2}{6000}$$

$$y = A e^{kt} = 50 e^{\frac{\ln 1/2}{6000} t}$$

$$y(8000) = 50 e^{\frac{\ln 1/2}{6000} (8000)} = 20 \quad \textcircled{A}$$

$$6) \quad y = A e^{kt}, \quad y(0) = 0.4, \quad T_h = 3. \quad \textcircled{A}$$

$$k = \frac{\ln 1/2}{T_h} = \frac{\ln 1/2}{3}$$

$$y = 0.4 e^{\frac{\ln 1/2}{3} t}$$

$$y(24) = 0.4 e^{\frac{\ln 1/2}{3} (24)} = 0.00156 \quad \textcircled{A}$$

$$\textcircled{7} \quad y = A e^{kt}, \quad A = 0.8, \quad T_h = 3.$$

$$k = \frac{\ln 1/2}{T_h} = \frac{\ln 1/2}{3}$$

$$y = 0.8 e^{\frac{\ln 1/2}{3} t}$$

$$y(t) = 0.1$$

$$0.1 = 0.8 e^{\frac{\ln 1/2}{3} t}$$

$$1/8 = e^{\frac{\ln 1/2}{3} t}$$

$$\ln 1/8 = \frac{\ln 1/2}{3} t$$

$$t = \frac{3 \ln 1/8}{\ln 1/2}$$

$$= 9. \quad \textcircled{B}$$

$$8) \quad A = p e^{rt}, \quad p = 100,000, \quad r = 0.03.$$

$$A = 100,000 e^{0.3t}. \quad (A)$$

$$9) \quad y = A e^{rt}, \quad y(0) = 60,000, \quad r = -0.10$$

$$y = 60,000 e^{-0.1t}.$$

$$y(5) = 36,391 \quad (D)$$

$$10) \quad A = p \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}, \quad p = 100,000$$

$$r = 0.03$$

$$n = 12$$

$$A = 100,000 \left(1 + \frac{0.03}{12}\right)^{(12)(5)}$$

$$= 100,000 \left(1 + \frac{0.03}{12}\right)^{60} \quad (B)$$

$$11) \quad y = A e^{kt}, \quad T_h = 28.$$

$$k = \frac{\ln 1/2}{T_h} = \frac{\ln 1/2}{28}.$$

$$y = A e^{\frac{\ln 1/2}{28} t}.$$

النسبة المتبقية

$$y(84) = A e^{\frac{\ln 1/2}{28} (84)} = 0.125 A.$$

$$\%100 \times \frac{\text{النسبة المتبقية}}{\text{النسبة الأصلية}} = \text{النسبة المتبقية}$$

$$\frac{0.125 A}{A} \times 100\% = 12.5\%$$

(A)

$$12) \quad y = A e^{kt}, \quad T_h = 5730.$$

$$k = \frac{\ln 1/2}{T_h} = \frac{\ln 1/2}{5730}.$$

$$y = A e^{\frac{\ln 1/2}{5730} t}.$$

$$y(t) = 0.20 A$$

$$A e^{\frac{\ln 1/2}{5730} t} = 0.20 A$$

$$\frac{\ln 1/2}{5730} t = \ln 0.20$$

$$t = \frac{5730 \ln 0.20}{\ln 1/2} = 13304 \text{ (A)}$$

$$13) \quad y = A e^{kt}, \quad y(0) = 34 = A, \quad y(10) = 9800$$

$$y(t) = 34 e^{kt}.$$

$$y(10) = 9800$$

$$34 e^{k(10)} = 9800$$

$$e^{10k} = \frac{9800}{34}.$$

$$10k = \ln \frac{9800}{34}.$$

$$k = \frac{1}{10} \ln \frac{9800}{34}$$

$$y(t) = 34 e^{\frac{1}{10} \ln \frac{9800}{34} t}. \text{ (A)}$$

14) $\begin{array}{ccc} 1000 & \xrightarrow{\text{تضاعف}} & 20000 \\ \text{بلغ} & & \\ 1990 & \xrightarrow{\text{عام}} & 2000 \end{array}$

$\therefore T_h = 10 \text{ سنوات}$

$$K = r = \frac{\ln 2}{T_h} = \frac{\ln 2}{10} = 0.069$$

$$= 6.9\% \quad (A)$$

15) $y = A e^{kt}$, $y(0) = 300$, $y(\frac{1}{2}) = 900$
 $\swarrow$ 300 دقيقت

$$y(t) = 300 e^{kt}$$

$$y(\frac{1}{2}) = 900$$

$$300 e^{\frac{1}{2}k} = 900$$

$$e^{\frac{1}{2}k} = 3$$

$$\frac{1}{2}k = \ln 3 \Rightarrow \underline{k = 2 \ln 3}$$

$$y(3) = 300 e^{2 \ln 3 (3)}$$

$$= 218700 \quad (A)$$

$$16) \quad T_a = 30$$

$$y' = k(y - T_a)$$

$$y' = k(y - 30) \quad \textcircled{C}$$

$$17) \quad y' = k(y - 20), \quad y(0) = 80, \quad T_a = 20.$$

$$y(2) = 75.$$

$$y = A e^{kt} + 20.$$

$$y(0) = 80 \Rightarrow 80 = A + 20 \Rightarrow A = 60$$

$$y(2) = 75 \Rightarrow 75 = 60 e^{2k} + 20.$$

$$55 = 60 e^{2k}.$$

$$\frac{11}{12} = e^{2k}.$$

$$2k = \ln \frac{11}{12}.$$

$$k = \frac{1}{2} \ln \frac{11}{12}.$$

$$y(t) = 60 e^{\frac{1}{2} \ln \frac{11}{12} t}.$$

$$y(5) = 68.3 \quad \textcircled{B}$$

$$18) \quad M = 100, \quad k = 0.001, \quad y(0) = 20.$$

$$KM = 100(0.001) = 0.1$$

$$y = \frac{AM e^{kMt}}{1 + A e^{kMt}} = \frac{100 A e^{0.1t}}{1 + A e^{0.1t}}$$

$$y(0) = 20$$

$$\frac{100 A}{1 + A} = 20$$

$$100 A = 20 + 20 A$$

$$A = \frac{1}{4}$$

$$y = \frac{100(\frac{1}{4}) e^{0.1t}}{1 + \frac{1}{4} e^{0.1t}} = \frac{25 e^{0.1t}}{1 + 0.25 e^{0.1t}}$$

$$y(5) = 29.2 \quad \textcircled{C}$$

19) مصادرة النمو اللوجستي

$$y'(t) = ky(M - y)$$

$$y'(t) = 0.25y(5000 - y) \quad \textcircled{D} \text{ النمو اللوجستي}$$

$$20) \quad y' = y(5-y), \quad y(0) = 4.$$

* نحل المسألة على أن هذه المعادلة هي

معادلة نفو لوجستي حيث

$$k=1$$

$$M=5$$

$$KM=5$$

فيكون الحل

$$y = \frac{AM e^{KMt}}{1 + A e^{KMt}}$$

$$= \frac{5A e^{5t}}{1 + A e^{5t}}$$

$$y(0) = 4.$$

$$\frac{5A}{1+A} = 4 \Rightarrow A=4$$

(B)

$$y = \frac{20 e^{5t}}{1 + 4 e^{5t}}$$

21)

هذا الرسم يبين حل المعادلة نفو لوجستي

أي أن المعادلة

$$y' = Ky(M-y).$$

حيث $M=120$

$$y' = Ky(120-y). \quad (A)$$