

7-2 القطع المكافئ

ورقة عمل الثاني عشر العام

1- كتابة معادلات القطوع المكافئة بالصيغة القياسية. 2- تمثيل القطوع المكافئة بيانيًا.

في هذا الدرس سوف نتعلم:

$$\text{المسافة بين نقطتين} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\text{إحداثيات نقطة المنتصف} = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

جد نقطة المنتصف للقطعة المستقيمة ذات النقطتين الطرفيتين عند الإحداثيات المعطاة.

$(-4, 7), (3, 9)$

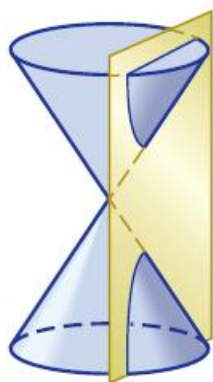
$$\text{نقطة المنتصف} = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right) = \left(\frac{-4 + 3}{2}, \frac{7 + 9}{2} \right) = \left(-\frac{1}{2}, 8 \right)$$

$(8, 1), (-2, 9)$

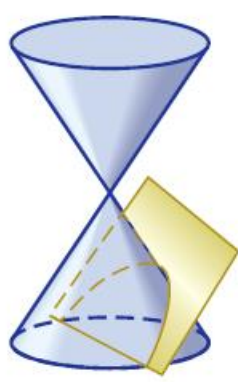
جد المسافة بين كل زوج من النقاط المعطاة إحداثياتها.

$$\begin{aligned} \text{المسافة بين نقطتين} &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ &= \sqrt{(8 - (-2))^2 + (1 - 9)^2} = \sqrt{100 + 64} = \sqrt{164} = 2\sqrt{41} = 12.81 \end{aligned}$$

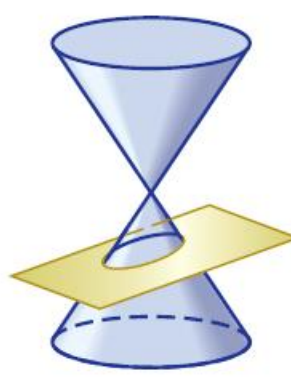
القطع المخروطية هي الأشكال الناتجة عن تقاطع مستوى ما مع مخروطين دائريين قائمين متقابلين بالرأس، كليهما أو أحدهما. بحيث لا يمر المستوى بالرأس.



القطع الزائد



القطع المكافئ



القطع الناقص

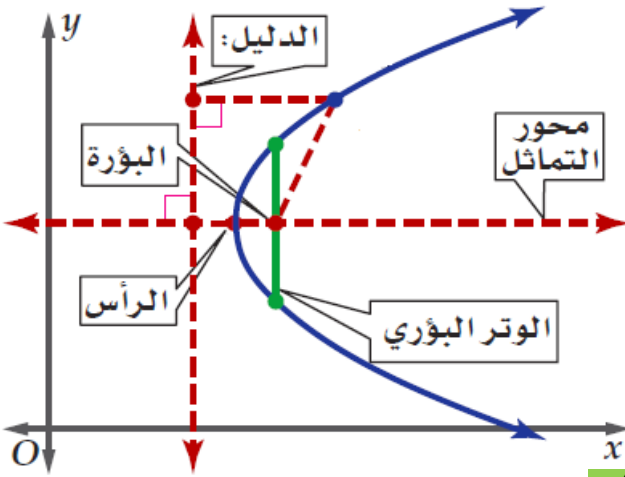


الدائرة

المحل الهندسي هو الشكل الهندسي الذي ينتج عن مجموعة النقاط التي تحقق خاصية هندسية معينة.

القطع المكافئ هو المحل الهندسي لمجموعة نقاط المستوى التي يكون بعد كل منها عن نقطة ثابتة تسمى **البؤرة** مساوياً دائماً لبعدها عن مستقيم معلوم يسمى **الدليل**.

وتسمى القطعة المستقيمة المارة بالبؤرة والعمودية على محور التماثل **بالوتر البؤري**، ويقع طرفا الوتر البؤري على القطع المكافئ.



القطع المكافئ الأفقي	القطع المكافئ الرأسي	المعادلة
$x = a(y - k)^2 + h$	$y = a(x - h)^2 + k$	
(h, k)	(h, k)	الرأس

$$\left| \frac{1}{4a} \right| = \text{المسافة بين البؤرة والرأس} = \text{المسافة بين الدليل والرأس}$$

$$\left| \frac{1}{a} \right| = \text{طول الوتر البؤري العمودي}$$

تحليل معادلة القطع المكافئ

اكتب كل معادلة بالصيغة القياسية. حدد رأس القطع المكافئ ومحور تماثله واتجاه فتحته.

$$y = 2x^2 - 24x + 40$$

$$y = 2(x^2 - 12x + 36) + 40 - 2(36)$$

$$y = 2(x - 6)^2 - 32 \Rightarrow \text{الصيغة القياسية}$$

$$\text{رأس القطع المكافئ: } (6, -32)$$

$$\text{محور التماثل: } x = 6$$

$$\text{اتجاه فتحته لأعلى لأنه معامل } x^2 \text{ موجب.}$$

$$x + 3y^2 + 12y = 18$$

$$x = -3y^2 - 12y + 18$$

$$= -3(y^2 + 4y + 4) + 18 + 3(4)$$

$$= -3(y + 2)^2 + 30 \Rightarrow \text{الصيغة القياسية}$$

$$\text{رأس القطع المكافئ: } (30, -2)$$

$$\text{محور التماثل: } y = -2$$

$$\text{اتجاه فتحته لليسار لأنه معامل } y^2 \text{ سالب.}$$

$$\left| \frac{1}{4a} \right| = \left| \frac{1}{4(2)} \right| = \frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow \text{البؤرة} = (6, -32 + \frac{1}{8}) = (6, -31.875)$$

$$\Rightarrow \text{الدليل} \Rightarrow y = -32 - \frac{1}{8} = -32.125$$

$$\Rightarrow \text{طول الوتر البؤري} = \left| \frac{1}{a} \right| = \left| \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}$$

$$\left| \frac{1}{4a} \right| = \left| \frac{1}{4(-3)} \right| = \frac{1}{12}$$

$$\Rightarrow \text{البؤرة} = (30 - \frac{1}{12}, -2) = (29.91\bar{6}, -2)$$

$$\Rightarrow \text{الدليل} \Rightarrow x = 30 + \frac{1}{12} = 30.08\bar{3}$$

$$\Rightarrow \text{طول الوتر البؤري} = \left| \frac{1}{a} \right| = \left| \frac{1}{-3} \right| = \frac{1}{3}$$

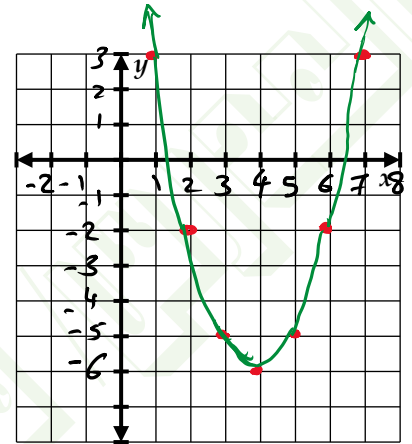
مثل كل معادلة بيانيًا.

$$y = (x - 4)^2 - 6$$

نقطة رأس (-6, 4)

الفتحة لأعلى ، معادلة محور التماثل $x = 4$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y	10	3	-2	-5	-6	-5	-2	3	10



$$x = 3y^2 - 6y + 9$$

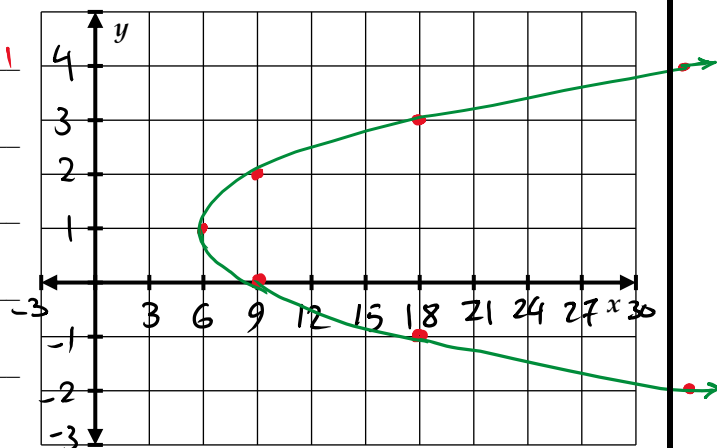
$$\left(\frac{-2}{2}\right)^2 = 1$$

$$x = 3(y^2 - 2y + 1) + 9 - 3(1)$$

$$= 3(y - 1)^2 + 6 \Rightarrow \text{الصيغة القياسية}$$

نقطة الرأس (6, 1)

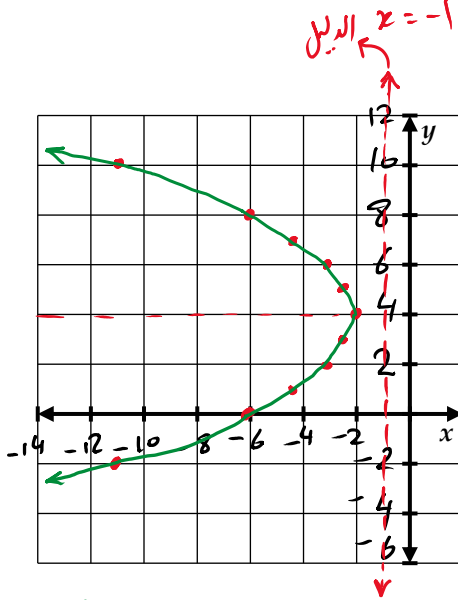
الفتحة لليمين

معادلة محور التماثل $y = 1$ 

y	-2	-1	0	1	2	3	4
x	33	18	9	6	9	18	33

اكتب معادلة لكل قطع مكافئ موضح أدناه. ثم مثل المعادلة بيانياً.

الرأس $(-2, 4)$. الدليل $x = -1$



$$\text{المسافة بين الرأس والدليل} = \frac{1}{4a} \Rightarrow 1 = \left| \frac{1}{4a} \right| \Rightarrow |a| = \frac{1}{4}$$

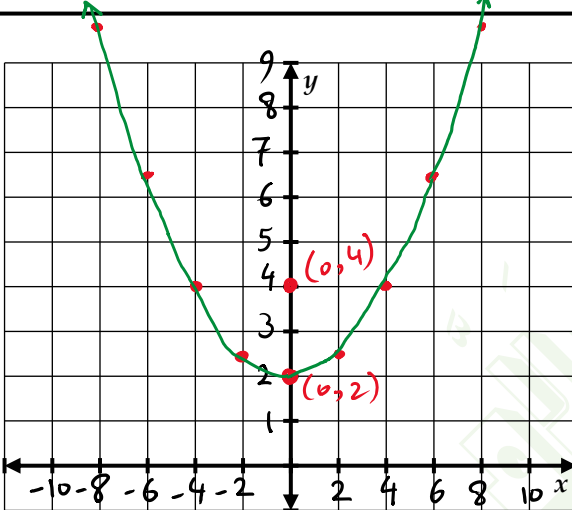
لأنه الدليل على يسار الرأس $a = -\frac{1}{4}$

الفتحة للأسفل

$$\text{المعادلة} \Rightarrow x = -\frac{1}{4}(y-4)^2 - 2$$

y	1	2	3	4	5	6	7	8	10
x	-4.25	-3	-2.25	-2	-2.25	-3	-4.25	-6	-11

الرأس $(0, 2)$. البؤرة $(0, 4)$



$$\text{المسافة بين البؤرة والرأس} = \left| \frac{1}{4a} \right|$$

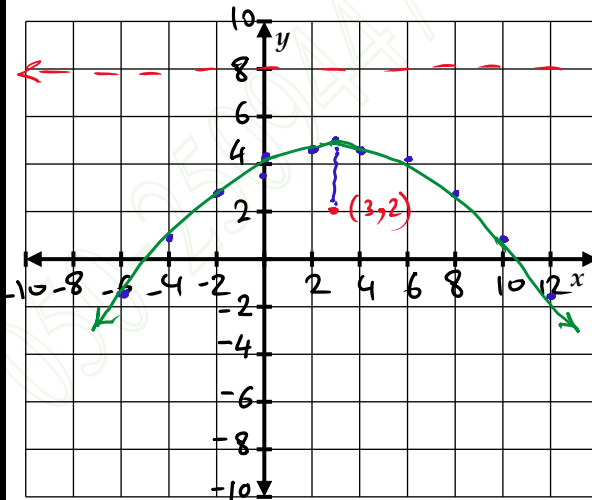
$$2 = \left| \frac{1}{4a} \right| \Rightarrow |a| = \frac{1}{8}$$

$a = \frac{1}{8}$ لأنه البؤرة فوق الرأس $\Rightarrow$ الفتحة لأعلى

$$\text{الصيغة القياسية} \Rightarrow y = \frac{1}{8}x^2 + 2 \Rightarrow \text{المعادلة}$$

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	6	8
y	4	3.125	2.5	2.125	2	2.125	2.5	3.125	4	6.5	10

البؤرة $(3, 2)$. الدليل $y = 8$



$y = 8$
الدليل

الرأس يقع منتصف البؤرة والدليل $\Rightarrow (3, 5)$

$$\text{المسافة بين البؤرة والرأس} = \left| \frac{1}{4a} \right| \Rightarrow 3 = \left| \frac{1}{4a} \right|$$

$$\Rightarrow |a| = \frac{1}{4(3)} = \frac{1}{12} \Rightarrow a = -\frac{1}{12}$$

لأنه الدليل أعلى من الرأس $\Rightarrow$ الفتحة لأسفل

$$\text{المعادلة} \Rightarrow y = -\frac{1}{12}(x-3)^2 + 5$$

x	-2	0	2	3	4	6	8	10	12
y	2.9	4.25	4.9	5	4.9	4.25	2.9	0.9	-1.75

علم الفلك خذ بعين الاعتبار المرآة الزئبقية التي لها شكل قطع مكافئ. البؤرة ترتفع 6 ft فوق الرأس والوتر البؤري العمودي بطول 24 ft.

a. افترض بأن البؤرة تقع عند نقطة الأصل. اكتب معادلة القطع المكافئ الذي يشكله الميكروفون ذو شكل القطع المكافئ.

b. مثل المعادلة بيانياً.



a) $\left| \frac{1}{4a} \right| = \text{المسافة بين البؤرة والرأس}$

$$6 = \left| \frac{1}{4a} \right| \Rightarrow |a| = \frac{1}{24}$$

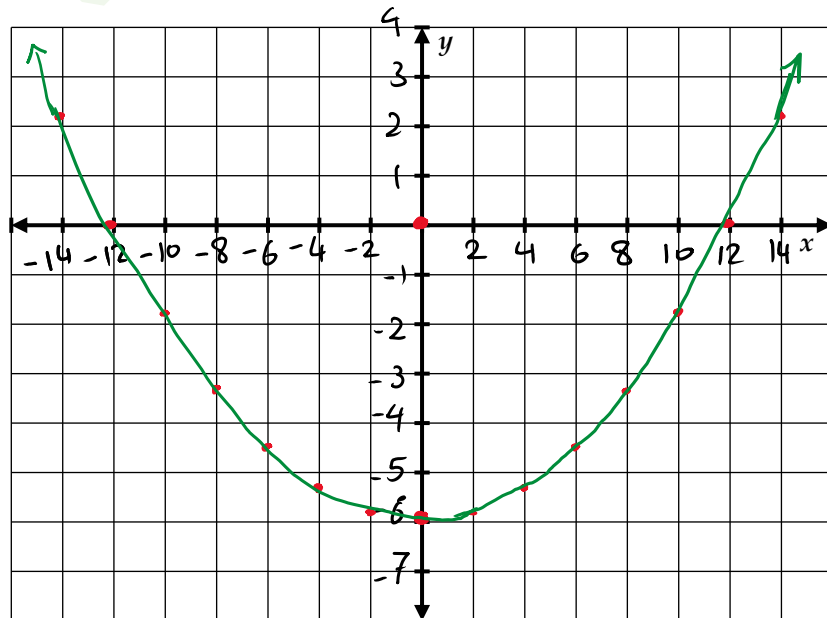
$a = \frac{1}{24}$ لأن البؤرة فوق الرأس في الفتحة لأعلى

البؤرة (0, 6) في الرأس (0, 0) لأنه تحت البؤرة بـ 6

$$\Rightarrow \text{المعادلة} \Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{24}x^2 - 6}$$

x	-10	-8	-6	-4	-2	0	2	4	6	8	10	12	14
y	-1.8	-3.3	-4.5	-5.3	-5.8	-6	-5.8	-5.3	-4.5	-3.3	-1.8	0	2.2

b)



مع تحياتي / مصطفى علام
مدرس الرياضيات