

حساب النهايات جبريا COMPUTATION OF LIMITS

قوانين النهايات . لأي دالة f, g وأي أرقام حقيقية c و r LIMIT LAWS. For any functions f and g , and any real numbers c and r , we have (usually writing $\lim$ for $\lim_{x \rightarrow a}$)

(i) $\lim c = c$,

داله ثابتة

 $\lim$

(ii) $\lim_{x \rightarrow a} x = a$,

داله محايدة

(iii) $\lim (cf(x)) = c \lim f(x)$,

الضرب في عدد ثابت

(iv) $\lim (f(x) + g(x)) = \lim f(x) + \lim g(x)$,

قاعدة الجمع

(v) $\lim (f(x)g(x)) = (\lim f(x))(\lim g(x))$,

قاعدة الضرب

(vi) $\lim (f(x)/g(x)) = (\lim f(x))/(\lim g(x))$,

قاعدة القسمة

(vii) $\lim (f(x))^r = (\lim f(x))^r$,

قاعدة القوة

where it is assumed that on the right the limits exist and the expressions are defined.

قواعد النهايات

If L, M , and k are real numbers

$$\lim_{x \rightarrow c} l = l$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} 2 = 2$$

داله ثابتة

بنفس قسمة الثابت مهما تغيرت قيمة x

$$\lim_{x \rightarrow 2} 10 = 10$$

and

$$\lim_{x \rightarrow 6} \pi = \pi.$$

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$$

كثيرة حدود بالتعويض المباشر بقيمة x في الدالة

$$\lim_{x \rightarrow 2} x^2 + 3 = 7$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} x = 2$$

If c is a constant, then

حاصل ضرب الثابت في الداله

$$\lim_{x \rightarrow a} cf(x) = c \lim_{x \rightarrow a} f(x).$$

(a) $\lim_{x \rightarrow 8} 5x = 5 \lim_{x \rightarrow 8} x = 5 \cdot 8 = 40$

(b) $\lim_{x \rightarrow -2} \left(-\frac{3}{2}x\right) = -\frac{3}{2} \lim_{x \rightarrow -2} x = \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot (-2) = 3.$

قاعدة جمع وطرح النهايات

Suppose a is a real number and $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ and $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ exist. If $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1$ and $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_2$,

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_1 \pm L_2,$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 5} (10x + 7) &= \lim_{x \rightarrow 5} 10x + \lim_{x \rightarrow 5} 7 \\ &= 10 \lim_{x \rightarrow 5} x + \lim_{x \rightarrow 5} 7 \\ &= 10 \cdot 5 + 7 = 57. \end{aligned}$$

قاعدة ضرب النهايات

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)g(x)] = \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right) \left(\lim_{x \rightarrow a} g(x) \right) = L_1 L_2,$$

إذا علمت أن: $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = -3$, $\lim_{x \rightarrow 5} g(x) = 4$ ، فاوجد: $\lim_{x \rightarrow 5} [f(x)g(x)]$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 5} [f(x)g(x)] &= 4 \times -3 \\ &= -12 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{L_1}{L_2}, \quad L_2 \neq 0.$$

قاعدة قسمة النهايات

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{5}{x^2} = \frac{\lim_{x \rightarrow 4} 5}{\lim_{x \rightarrow 4} x^2} = \frac{5}{4^2} = \frac{5}{16}.$$

Let $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ and n be a positive integer. Then

قاعدة القوة للنهايات

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right]^n = L^n.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (3x - 1)^{10} = \left[\lim_{x \rightarrow 1} (3x - 1) \right]^{10} = 2^{10} = 1024.$$

Suppose $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 5$, $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = -2$, and $\lim_{x \rightarrow c} h(x) = 9$, find

استخدم نهايات الدوال f, g, h لايجاد كلا من

a) $\lim_{x \rightarrow c} [f(x)g(x)]$

b) $\lim_{x \rightarrow c} [f(x) - g(x)]$

c) $\lim_{x \rightarrow c} \sqrt{h(x)}$

d) $\lim_{x \rightarrow c} \left[\frac{g(x) + 1}{x} \right]$

e) $\lim_{x \rightarrow c} [2h(x) - 3g(x)]$

f) $\lim_{x \rightarrow c} \left[\frac{f(x)}{h(x)} \right]$

g) $\lim_{x \rightarrow c} \left[\frac{g(x)}{f(x)} \right]$

h) $\lim_{x \rightarrow c} [g(x)]^2$

استخدم الدالتين f و g المحددتين لايجاد

For $f(x) = x^2 - x - 6$ and $g(x) = x^2 - 2x - 3$, evaluate:

(a) $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x) + g(x)]$

(b) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \cdot g(x)$

(c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)}$

(d) $\lim_{x \rightarrow 3} [f(x) + g(x)]$

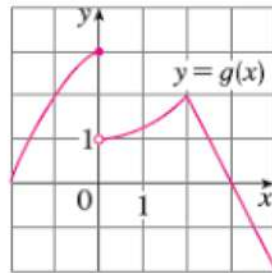
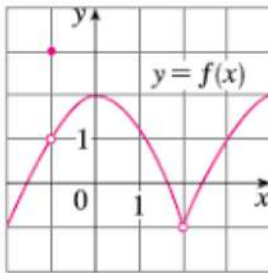
(e) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) \cdot g(x)$

(f) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{g(x)}$

(g) $\lim_{x \rightarrow 2} [f(x)]^3$

(h) $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{1 - g(x)}$

The graphs of f and g are given below. Use the graphs to evaluate each limit.



a) $\lim_{x \rightarrow -1} [f(x) + g(x)]$

b) $\lim_{x \rightarrow 3} f(g(x))$

c) $\lim_{x \rightarrow 3} [f(x)g(x)]$

d) $\lim_{x \rightarrow 2} [2f(x) + 5g(x)]$

e) $\lim_{x \rightarrow -1} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]$

f) $\lim_{x \rightarrow 2} [xf(x)]$

Use the graph in the margin to evaluate each limit.

استخدم الرسم البياني الموجود لإيجاد قيمة كل نهاية

(a) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$

(b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$

(c) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

(d) $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x)$

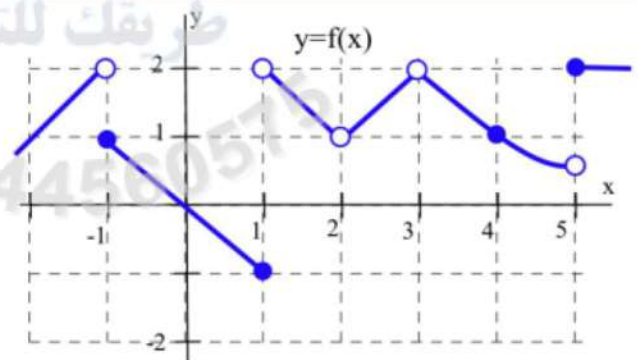
(e) $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x)$

(f) $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$

(g) $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$

(h) $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)$

(i) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$



Use the graph in the margin to evaluate each limit.

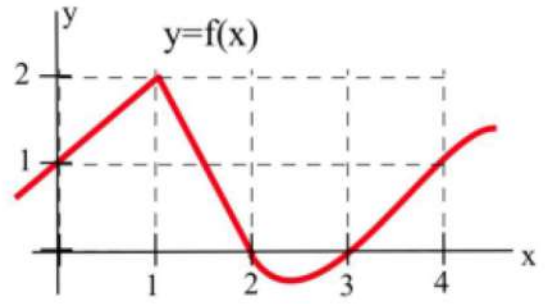
استخدم الرسم البياني الموجود لإيجاد قيمة كل نهاية

(a) $\lim_{x \rightarrow 1} f(2x)$

(b) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x - 1)$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} 3 \cdot f(4 + x)$

(d) $\lim_{x \rightarrow 2} f(3x - 2)$

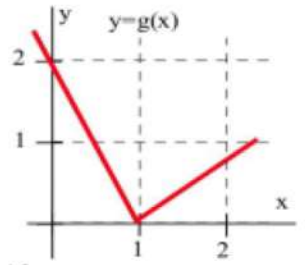
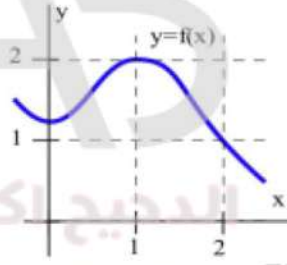


Use the functions f and g defined by the graphs below to determine the following limits.

استخدم الدالتين g و f المحددتين في الرسوم البيانية أدناه لتحديد الحدود التالية

(a) $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x) + g(x)]$

(b) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \cdot g(x)$



(c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)}$

(d) $\lim_{x \rightarrow 1} f(g(x))$

Suppose that $\lim_{x \rightarrow 7} f(x) = 0$ and $\lim_{x \rightarrow 7} g(x) = 5$. Determine the following limits.

a) $\lim_{x \rightarrow 7} (g(x) + 5)$

b) $\lim_{x \rightarrow 7} xf(x)$

c) $\lim_{x \rightarrow 7} g^2(x)$

d) $\lim_{x \rightarrow 7} \left[\frac{g(x)}{f(x) - 1} \right]$

Calculating $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$

<https://www.symbolab.com/solver/limit-calculator>

حاسبة النهايات

A. Direct substitution

Try to evaluate the function directly.

$$f(a)$$

$$f(a) = \frac{b}{0}$$

where b is not zero

B. Asymptote (probably)

example:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1}$$

Inspect with a graph or table to learn more about the function at $x=a$.

$$f(a) = b$$

where b is a real number

C. Limit found (probably)

example:

$$\lim_{x \rightarrow 3} x^2 = (3)^2 = 9$$

$$f(a) = \frac{0}{0}$$

D. Indeterminate form

example:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 2x - 3}$$

Try rewriting the limit in an equivalent form.

E. Factoring

example:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 2x - 3}$$

can be reduced to

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x-2}{x-3}$$

by factoring and cancelling.

F. Conjugates

example:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$$

can be rewritten as

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{\sqrt{x} + 2}$$

using conjugates and cancelling.

G. Trig identities

example:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{\sin(2x)}$$

can be rewritten as

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2 \cos(x)}$$

using a trig identity.

Try evaluating the limit in its new form.

H. Approximation

When all else fails, graphs and tables can help approximate limits.

بعد خطوة التعويض المباشر لاحظ الناتج

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

ناتج التعويض



النوع الأول: النهاية باستخدام التعويض المباشر

Evaluate the limit

احسب النهاية لكل مما يلي

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - 3x + 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt[3]{2x + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos^{-1}(x^2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 5}{x^2 + 4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 + 5x + \sin x}{5 \cos x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^2 + 6x + 10}{8x - 1}$$

النوع الثاني: النهاية باستخدام التحليل

احسب النهاية لكل مما يلي

Evaluate the limit

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 3x + 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 4}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 - x - 3}{x + 1}$$

$$\lim_{y \rightarrow -8} \frac{y^2 + 9y + 8}{y^2 - 64}$$

$$\lim_{x \rightarrow 10} \frac{x^2 - 100}{x - 10}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2x}{x}$$



$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 + 2x - 3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^3 - 64}{x - 4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{2x}}{1 - e^x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^{-2x+1}}{x^2 + x}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(9 + h)^2 - 81}{h}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2 + x)^3 - 8}{x}$$

$$\lim_{t \rightarrow 2} \frac{t^2 - 3t + 2}{t^2 - 4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x^3 - 1} =$$



$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - 1)^{10}}{(x^2 - 2x + 1)^5} =$$

النهاية التي تساوي ∞ , $-\infty$ وغير موجوده

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \text{not exist}$$

عدد
0
إذا كان ناتج التعويض هو
النهاية التي تساوي ∞ , $-\infty$ وغير
موجوده
إدرس إشارة المقام

Evaluate the limit

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 25}{x^2 - 4x - 5}$$

احسب النهاية لكل مما يلي

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x}{x^2 - 4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x - 3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{(x - 3)^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{(x - 3)^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 9} \frac{x^2}{18 - 2x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x}{x^2 - 4} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x - 4)^2}{(4 - x)^3} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x}{3x - x^2} =$$



Find value of n $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^3 - 1)^{2n}}{(x^2 - 2x + 1)^n} = 81$

أوجد قيمة n

Find value of b $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9b}{x - 3}$ *Exist* موجوده

أوجد قيمة b

Find value of k $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + kx - 3}{x - 3} = 5$

أوجد قيمة k

Find value of a and b $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{ax^2 + bx + 6}{x - 2} = 5$

أوجد قيمة a و b

النوع الثالث : التبسيط باستخدام توحيد المقامات

Evaluate the limit

احسب النهاية لكل مما يلي

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} \right)$$

أولا عوض مباشر حتي
يظهر لك الناتج $\frac{0}{0}$

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm cb}{bd}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x} - 1}{x - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{x} \left(\frac{1}{5+x} - \frac{1}{5-x} \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\frac{1}{x} - \frac{1}{2}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{x^2 + 3x - 1}{x} + \frac{1}{x} \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{1}{x - 2} - \frac{6}{x^2 + 2x - 8} \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow -6} \frac{\frac{2x + 8}{x^2 - 12} - \frac{1}{x}}{x + 6}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3 + x} - \frac{1}{3 - x}}{x}$$

النوع الرابع: الجذر والضرب في المرافق

تعويض مباشر

$\sqrt{0}$
نبحث المجال

$\sqrt{-}$
لا يوجد حل

$\sqrt{+}$
الناتج هو الحل

Evaluate the limit

احسب النهاية لكل مما يلي

$$\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{4x - 2}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2} &= |x| \\ (\sqrt{x})^2 &= x \\ \sqrt{x - 5} &= |x - 5|\end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x^2 - 10}$$

$$\lim_{x \rightarrow 7} \sqrt[6]{2x - 14}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{3 - 3x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{1 - 2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} \sqrt[4]{9 - x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt[3]{2x + 1}$$

استخدام المرافق

Algebraic Expression (المقدار الجبري)	Conjugate (المرافق)	Product (حاصل الضرب)
$x - a$	$x + a$	$x^2 - a^2$
$\sqrt{x} - a$	$\sqrt{x} + a$	$x - a^2$
$\sqrt{x - b} - a$	$\sqrt{x - b} + a$	$x - b - a^2$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{3 - \sqrt{x+9}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x+4} - 3}{x - 5}$$



$$\lim_{x \rightarrow 10} \frac{x-10}{3-\sqrt{x-1}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+7}-\sqrt{7}}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x+9}-4}{x-7}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+9}-3}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2x-6}}{x}$$



أوجد قيمة a التي تجعل $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3 - \sqrt{x+a}}{2-x}$ موجوده

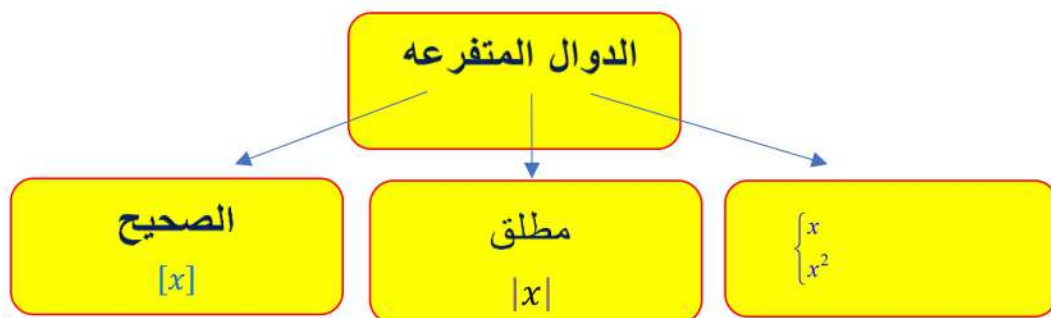
Find the value of a that makes it $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3 - \sqrt{x+a}}{2-x}$ exist.

what is the value of a ?

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{ax+9} - 3}{x} = 1$$

أوجد قيمة a

النوع الخامس: المتفرعه



تكون النهاية موجودة اذا كانت النهاية موجوده في طرفي النهاية من اليمين ومن اليسار وأيضا متساوية
النهاية من اليمين = النهاية من اليسار = قيمة

النوع الأول المتفرعه

$$f(x) = |x|$$

داله 1

$$, X > a$$

داله 2

$$, X \leq a$$

أولا ننظر الي العدد الذي تؤول اليه x ثم نحدد موضعه في أي داله اذا كان اكبر من a نعوض في الداله 1 واذا كان اقل من a نعوض في الداله 2 اما اذا كانت النهاية تؤول الي a فلا بد من ان النهاية اليميني تساوي النهاية اليسرى وتكون موجوده

let

اذا كان

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 1 & , x < 2 \\ 0 & x = 2 \\ \sqrt{x+1} - 2 & x > 2 \end{cases}$$

Find

أوجد

$$f(-3) =$$

$$f(5) =$$

$$f(2) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$$

إذا كان

let

$$f(x) = \begin{cases} 2x & , \quad x < 2 \\ x^2 & , \quad x \geq 2 \end{cases}$$

Find

أوجد

1) $f(3) =$

2) $f(-2) =$

3) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) =$

4) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) =$

5) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) =$

let

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & , \quad x < -1 \\ 3x + 1 & , \quad x \geq -1 \end{cases}$$

إذا كان

Find

أوجد

1) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) =$

let

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & , \quad x < -1 \\ 3 & , \quad -1 < x < 1 \\ 2x + 1 & , \quad x > 1 \end{cases}$$

إذا كان

Find

أوجد

$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) =$

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) =$

إذا كان

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 6, & x < -1 \\ \frac{x}{2} + 3, & x \geq -1 \end{cases}$$

أوجد

let

Find

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) =$$

إذا كان

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 15, & x \leq -6 \\ -3, & x > -6 \end{cases}$$

أوجد

let

Find

$$\lim_{x \rightarrow -6} f(x) =$$

إذا كان

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 3, & x > 2 \\ \sqrt{x-1}, & x \leq 2 \end{cases}$$

أوجد

let

Find

$$1) \lim_{x \rightarrow 2} f(x) =$$

إذا كان

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-2} - 4, & x > 11 \\ -4x^2 - 2x + 505, & x \leq 11 \end{cases}$$

أوجد

let

Find

$$\lim_{x \rightarrow 11} f(x) =$$

إذا كان

let

Find

أوجد

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+6}, & x < -2 \\ 2^x, & -2 \leq x < 0 \\ x^2 - 4, & x \geq 0 \end{cases}$$

a. $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) =$

b. $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) =$

c. $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) =$

d. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) =$

e. $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) =$

f. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) =$



let

إذا كان

$$f(x) = \begin{cases} -4x^2 + 2x + 58, & x = 4 \\ \sqrt{x} + 5, & x \neq 4 \end{cases}$$

Find

أوجد

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) =$$

let

إذا كان

$$f(x) = \begin{cases} \log x + 4, & x \geq 2 \\ 5x - 1, & x < 2 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 3x + 1, & x \neq 2 \\ \sin x, & x = 2 \end{cases}$$

Find

أوجد

$$\lim_{x \rightarrow 2} (f(x) + g(x))$$

let

إذا كان

$$f(t) = \begin{cases} t^2 & \text{for } t < -2 \\ \frac{t+6}{t^2-t} & \text{for } -1 < t < 2 \\ 3t-2 & \text{for } t \geq 2 \end{cases}$$

Find

أوجد

$$(a) \quad f(-3/2) =$$

$$(b) \quad f(2) =$$

$$(c) \quad f(3/2) =$$

$$(d) \quad \lim_{t \rightarrow -2} f(t) =$$

$$(e) \quad \lim_{t \rightarrow -1^+} f(t) =$$

$$(f) \quad \lim_{t \rightarrow 2} f(t) =$$

$$(g) \quad \lim_{t \rightarrow 0} f(t) =$$

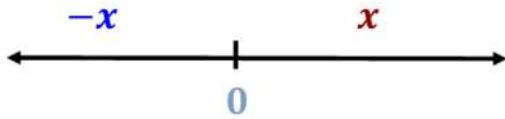
النوع الثاني دوال المطلق

عند التعامل مع القيمة المطلقة يجب إعادة تعريف الدالة للتخلص من القيمة المطلقة كما يلي

x دائما على يمين العدد نضع نفس اشارة معامل

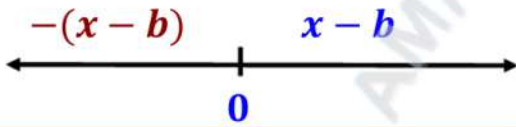
$$f(x) = |x|$$

$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x, & x \leq 0 \\ x, & x > 0 \end{cases}$$



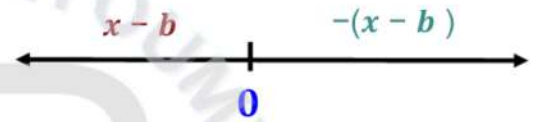
لو إشارة x موجبة

$$f(x) = |x - b| = \begin{cases} -(x - b), & x \leq b \\ x - b, & x > b \end{cases}$$

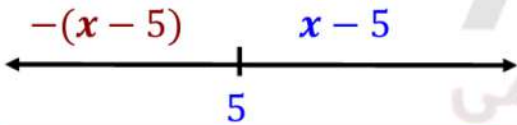


لو إشارة x سالبة
ضع الاشاره سالب في اليمين

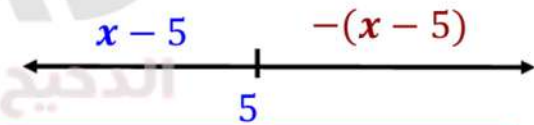
$$f(x) = |b - x| = \begin{cases} -(b - x), & x > b \\ b - x, & x \leq b \end{cases}$$



$$f(x) = |x - 5| = \begin{cases} -(x - 5), & x \leq 5 \\ x - 5, & x > 5 \end{cases}$$



$$f(x) = |5 - x| = \begin{cases} -(x - 5), & x > 5 \\ x - 5, & x \leq 5 \end{cases}$$



$$\sqrt{x^2} = |x|$$

$$\sqrt{(x - a)^2} = |x - a|$$

$$\sqrt{(x - 4)^2} = |x - 4|$$

Find

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{x} - \frac{2}{|x|} \right)$$

أوجد

أوجد

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{5|x+2|}{x+2}$$

Find

أوجد

$$\lim_{x \rightarrow 6^-} (|x-6| - 3)$$

Find

أوجد

$$\lim_{x \rightarrow -7^+} \frac{5|-x-7|}{-x-7}$$

Find

أوجد

$$\lim_{x \rightarrow -4^+} \frac{5x+20}{|x+4|}$$

Find

أوجد

Find

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{-2x - 6}{-x - 3}$$

أوجد

Find

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{|x - 1|}$$

أوجد

Find

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{|x + 2|} + x^2$$

أوجد

Find

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 |x - 3|}{x - 3}$$

أوجد

Find

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x}{\sqrt{x^4 + 2x^2}}$$

إذا كان

أوجد

let

Find

$$f(x) = \begin{cases} -(x-5)^2 + 3, & x > 5 \\ 3, & -2 < x < 5 \\ x+2 + 3, & x < -2 \end{cases}$$

$$1) \lim_{x \rightarrow -2} f(x) =$$

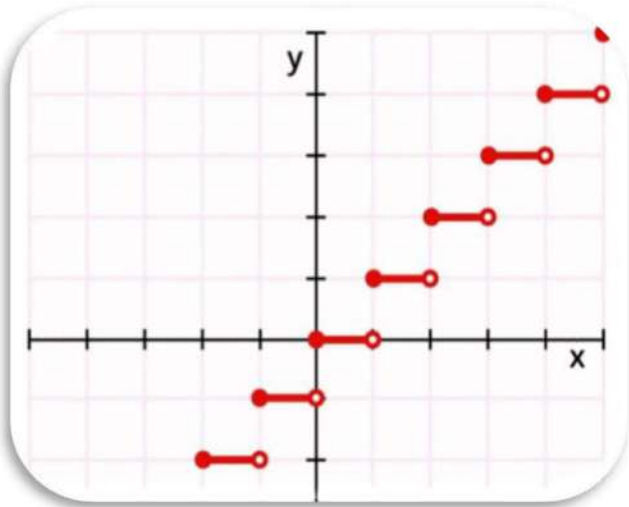
$$2) \lim_{x \rightarrow 5} f(x) =$$

الدحيح اكااديمي

طريقك للتفوق

T-0544560575

النوع الثالث دوال الصحيح



إذا كانت n عدد صحيح فإن $[x + n] = [x] + n$

$$[6] = 6$$

$$[4.7] = 4$$

$$[-5.99] = -6$$

عند التعويض داخل دالة الصحيح عن x وكان الناتج عدد صحيح فإن النهاية غير موجودة ويمكن التأكد من أخذ النهاية من اليمين ومن اليسار
أما إذا كان الناتج كسر فإن النهاية موجودة من القواعد أعلاه

$$1) \lim_{x \rightarrow 2^-} [x] =$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 2^+} [x - 3] =$$

$$3) \lim_{x \rightarrow -2^-} [2x - 3] =$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0,5} [x - 3] =$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0,5} [4x - 3] =$$

أوجد

Find

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} [x - 3] + |x - 2| =$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} [2x - 3] + |x - 3| - x =$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x - [x + 1]}{|x - 3|} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} [x]$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x[x + 2] =$$

$$\lim_{x \rightarrow 6^-} \frac{[x] - |x - 1|}{x - 6}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1.5} [2x]$$



النوع السادس: الدوال المثلثية

Trigonometric Identities

TANGENT IDENTITIES	RECIPROCAL IDENTITIES	PYTHAGOREAN IDENTITIES
$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ $\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$	$\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}$ $\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$ $\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$	$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ $\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$ $\cot^2 \theta + 1 = \csc^2 \theta$
EVEN/ODD IDENTITIES	DOUBLE ANGLE IDENTITIES	HALF ANGLE IDENTITIES
$\sin(-\theta) = -\sin \theta$ $\cos(-\theta) = \cos \theta$ $\tan(-\theta) = -\tan \theta$ $\csc(-\theta) = -\csc \theta$ $\sec(-\theta) = \sec \theta$ $\cot(-\theta) = -\cot \theta$	$\sin(2\theta) = 2 \sin \theta \cos \theta$ $\cos(2\theta) = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$ $= 2 \cos^2 \theta - 1$ $= 1 - 2 \sin^2 \theta$ $\tan(2\theta) = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$	$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}}$ $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}}$ $\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}}$

قواعد هامه

$$1) \lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a,$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a$$

$$2) \lim_{x \rightarrow a} \sin^{-1} x = \sin^{-1} a$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \cos^{-1} x = \cos^{-1} a$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{bx} = \frac{a}{b}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax}{\sin(bx)} = \frac{a}{b}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(ax)}{bx} = \frac{a}{b}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan x} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax}{\tan(bx)} = \frac{a}{b}$$

احسب النهاية لكل مما يلي

Evaluate the limit

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\tan x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{5x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \cos \frac{\pi x}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sin \frac{\pi x}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sec 2x$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\sin^2 x + \cos^2 x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \tan \left(\frac{5\pi}{x} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi/3} (7 + 2 \cos(x))^{\frac{2}{3}}$$

احسب النهاية لكل مما يلي

Evaluate the limit

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(x^2 - 4)}{x^2 - 4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin |x|}{x}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\pi \sin h}{2h}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2(x) - \cos(x)}{\cos(x) - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cos^2(x)}{\sin^2(x) - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(2x - 4)}{5x - 10}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(2x - 2)}{x - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x^2 - 1)}{x - 1}$$

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1}{\theta \cot(4\theta)}$$

الدحيح اكايمي

طريقك للتفوق

T-0544560575

احسب النهاية لكل مما يلي

Evaluate the limit

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 \csc^2 x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 8x^3}{4x^3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{2x^2 + x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x \cos x}{\tan^3 x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\tan x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x \cos x}$$

احسب النهاية لكل مما يلي

Evaluate the limit

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin^2 3x}{3x|x|} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin 4x}{\sin^2 7x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 2x}{3x^2 \sin 3x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x + \sin 3x}{x^2 + \tan 2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin|x|}{2x}$$

AMR ELBAYOUMY
A3
الدحيح اكايمي
طريقك للتفوق
T-0544560575

أوجد قيمة b إذا كانت

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{|x - 2| + 3}{2x - 4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{\sin bx}$$

إذا كانت $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 3$ حيث $f(x) = \begin{cases} \frac{3 \sin x}{2x} \\ k \cos x \end{cases}$ أوجد قيمة k

الدحيح اكايمي

طريقك للتفوق

Find the value of b if

أوجد قيمة b إذا كان

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 4}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6bx}{7x} =$$

squeeze theorem

(نظرية الشطيرة)

افترض أن

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

لكل x في الفترة (c, d) ما عدا النقطة $a \in (c, d)$ وأن $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$ ولعدد L . إذا، يكون: $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$

تذكر بعض القواعد المهمة

$$1) -1 \leq \sin f(x) \leq 1, \text{ ex: } -1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1 \text{ and } -1 \leq \sin \frac{3}{x^2} \leq 1$$

$$1) 0 \leq \sin^2 f(x) \leq 1, \text{ ex: } 0 \leq \sin^2 \frac{1}{x} \leq 1 \text{ and } 0 \leq \sin^2 \frac{3}{x^2} \leq 1$$

$$3) -1 \leq \cos f(x) \leq 1, \text{ ex: } -1 \leq \cos \frac{1}{x} \leq 1 \text{ and } -1 \leq \cos \frac{1}{x^6} \leq 1$$

$$4) 0 \leq \cos^2 f(x) \leq 1, \text{ ex: } 0 \leq \cos^2 \frac{1}{2x} \leq 1 \text{ and } 0 \leq \cos^2 \frac{5}{x^3} \leq 1$$

Determine the value of (if exist)

أوجد قيمة

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[x^2 \cos \left(\frac{1}{x} \right) \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{x-2} \cos \left(\frac{1}{x-2} \right)$$

أوجد قيمة

Determine the value of (if exist)

$$\lim_{x \rightarrow 0} (3 + x) \sin \left(\frac{1}{x} \right).$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^4 \cos \left(\frac{2}{x} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x - 1)^2 \cos \left(\frac{1}{x-1} \right)$$



أوجد قيمة

Determine the value of (if exist)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} [\sqrt{x} \cos^2(\frac{1}{x})] = 0$$

Suppose that $f(x)$ is bounded: that is, there exists a constant M such that $|f(x)| \leq M$ for all x . Use the Squeeze Theorem to prove that $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 f(x) = 0$.

افترض أنّ $f(x)$ محدودة: بمعنى أن هناك M ثابتة بحيث تكون $|f(x)| \leq M$ لجميع قيم x . استخدم نظرية الشظيرة لإثبات أنّ $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 f(x) = 0$

الدحيح اكايمي

طريقك للتفوق

T-0544560575

$$|g(x) + 4| \leq 2(3 - x)^4$$

استخدام نظرية الشظيرة لإيجاد $\lim_{x \rightarrow 3} g(x)$ حيث

إذا كانت : $|g(x)| \leq B$ حيث B عدد حقيقي موجب فبين ان : $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 g(x) = 0$

Determine the value of (if exist)

أوجد قيمة

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{5}{x} + 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{3}{x} + 2$$



مسائل من الامتحانات الوزارية

1. Question 1 (2024-2023):

Find the value of $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 27}{x^2 - 9}$

- a) $\frac{3}{4}$
- b) $\frac{9}{2}$
- c) $\frac{1}{4}$
- d) 3

2. Question 2 (2023-2022):

Find the value of $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 + 2x - 3}$

- a) $\frac{3}{4}$
- b) $\frac{1}{2}$
- c) $\frac{1}{4}$
- d) 0

2020/2019

أوجد قيمة $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{4}{x^2-4} \right)$ إذا وجدت.

A $\frac{1}{2}$

B غير موجودة

C 2

D $\frac{1}{4}$

2020/2019

أوجد قيمة $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2}$ إن وُجدت.

A غير موجودة

B 2

C 1

D 0

2020/2019

أوجد قيمة النهاية $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - |x|}{|3x| - 2x}$ ، إن وُجدت.

Question 1 (2023-2022):

Find the value of $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + \sqrt{x} - 2}{x - 1}$

- a) $\frac{3}{2}$
- b) $\frac{2}{3}$
- c) 2
- d) 0

1. Question 1 (2024-2023):

إذا كانت : $|f(x)| \leq M$ حيث M عدد حقيقي موجب فبين ان : $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 f(x) = 0$

Question 2 (2023-2022):

Find the value of $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$

- a) $-\frac{1}{6}$
- b) 6
- c) ∞
- d) 0

Question 3 (2023-2022):

Given that $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, find the value of $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - 1}{2x^2}$

- a) $\frac{1}{2}$
- b) $-\frac{1}{2}$
- c) 2
- d) 1

Question 4 (2023-2022):

Find the value of $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \csc^2 x$ if it exists

- a) 0
- b) 1
- c) Undefined
- d) 2

Question 1 (2022-2021):

Given that $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$, find the value of $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1 - \cos x}}{x}$

- a) 2
- b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- c) $\frac{1}{2}$
- d) $\sqrt{2}$

Question 2 (2022-2021):

Find the value of $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{2x}}{1 - e^x}$

- a) $-\frac{1}{2}$
- b) -2
- c) $\frac{1}{2}$
- d) 2

Question 3 (2022-2021):

Find the value of $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2x}{3 - \sqrt{x+9}}$

- a) -6
- b) $-\frac{1}{6}$
- c) $-\frac{1}{12}$
- d) -12

Question 4 (2022-2021):

Find the value of $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x+1|}{x^2-1}$

- a) $-\frac{1}{2}$
- b) 0
- c) $\frac{1}{2}$
- d) 1

Question 5 (2022-2021):

Find the value of $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\tan x}}{\cos x}$

- a) 0
- b) 1
- c) ∞
- d) 0

2019-2020:

1. Find the value of:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{4}{x^2-4} \right)$$

a) $\frac{1}{2}$

b) $\frac{1}{4}$

c) 2

d) Does not exist

Find the value of:

2019-2020:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - |x|}{|3x| - 2x}$$

Find the limit value:

2018-2019:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{2x^2 - 3x - 2}$$

a) 8

b) 12

c) 4

d) Does not exist

Find the value of:

2018-2019:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{|x-2|}$$

a) 0

b) -1

c) 2

d) Does not exist

2017-2018:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\cos^2 x - 1}$$

- a) 1
- b) 0
- c) ∞
- d) -1

Find the limit value:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h)^3 - 8}{h}$$

2018-2019:

- a) 8
- b) 12
- c) 4
- d) Does not exist

Find the value of:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{|x-2|}$$

2018-2019:

- a) 0
- b) -1
- c) 2
- d) Does not exist

Find:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{10 - x^3} - 3}$$

2017-2018:

Question 6 (2021-2020):

Find the value of $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \sin x}$

- a) 0
- b) $\frac{1}{2}$
- c) Undefined
- d) ∞

Question 7 (2021-2020):

Find the value of $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x}$

- a) $-\frac{1}{4}$
- b) $\frac{1}{4}$
- c) 0
- d) Undefined