

## 6-2 ضرب المصفوفات والمعكوسات والمحددات

## ورقة عمل الثاني عشر العام

1- ضرب المصفوفات. 2- إيجاد معكوسات المصفوفات  $2 \times 2$  والمصفوفات  $3 \times 3$ .

في هذا الدرس سوف نتعلم:

## ضرب المصفوفات

a.  $AB$ b.  $BA$ استخدم المصفوفات  $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 6 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$  لإيجاد كل ناتج ضرب، إن وجد. $2 \times 3$  $2 \times 2$ 

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 6 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$2 \times 2 \quad \quad \quad 2 \times 3$

$$= \begin{bmatrix} -2(3) + 3(-1) & 0(3) + 5(-1) & 6(3) + 1(-1) \\ -2(4) + 3(0) & 0(4) + 5(0) & 6(4) + 1(0) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -9 & -5 & 17 \\ -8 & 0 & 24 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 6 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$2 \times 3 \quad \quad \quad 2 \times 2$

لذلك عدد أعمدة الأولى لا يساوي عدد صفوف الثانية  
فإن  $BA$  غير موجودة.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 5 & -7 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 5 & -7 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}$$

$2 \times 3 \quad \quad \quad 3 \times 2$

$$= \begin{bmatrix} 2(-2) + (-1)(0) + 9(3) & 0(-2) + (0)(0) + 3(3) \\ 2(5) + (-1)(-7) + 9(1) & 0(5) + (0)(-7) + 3(1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 23 & 9 \\ 26 & 3 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \\ 9 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 5 & -7 & 1 \end{bmatrix}$$

$3 \times 2 \quad \quad \quad 2 \times 3$

$$= \begin{bmatrix} -2(2) + 5(0) & 0(2) + (-7)(0) & 3(2) + 1(0) \\ -2(-1) + 5(0) & 0(-1) + (-7)(0) & 3(-1) + 1(0) \\ -2(9) + 5(3) & 0(9) + (-7)(3) & 3(9) + 1(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & -3 \\ -3 & -21 & 30 \end{bmatrix}$$

## المفهوم الأساسي خصائص ضرب المصفوفة

بالنسبة لأي مصفوفة  $A$  و  $B$  و  $C$  والتي يكون ناتج ضرب المصفوفة لها معروف وأي كمية قياسية  $k$ .  
تنطبق الخصائص التالية.

$$(AB)C = A(BC)$$

خاصية التجميع في ضرب المصفوفة

$$k(AB) = (kA)B = A(kB)$$

خاصية التجميع في ضرب الكميات القياسية

$$C(A + B) = CA + CB$$

خاصية التوزيع إلى اليسار

$$(A + B)C = AC + BC$$

خاصية التوزيع إلى اليمين

## من الحياة اليومية: ضرب المصفوفات

**التصويت** توضح نسبة المصوتين من فئات عمرية مختلفة والمسجلين بأحزاب الديموقراطيين أو الجمهوريين أو المستقلين بأحد الانتخابات الأخيرة في مدينة أمريكية. استخدم هذه المعلومات لتحديد إن كان عدد المصوتين من الذكور المسجلين لحزب الديموقراطيين أكبر من عدد الإناث المسجلين بحزب الجمهوريين.

التوزيع حسب العمر والجنس

| العمر | أنثى   | ذكر    |
|-------|--------|--------|
| 18-25 | 18,500 | 16,000 |
| 26-40 | 20,000 | 24,000 |
| 41-50 | 24,500 | 22,500 |
| 50+   | 16,500 | 14,000 |

التوزيع حسب الحزب والعمر (%)

| الحزب         | 18-25 | 26-40 | 41-50 | 50+  |
|---------------|-------|-------|-------|------|
| الديموقراطيون | 0.55  | 0.50  | 0.35  | 0.40 |
| الجمهوريون    | 0.30  | 0.40  | 0.45  | 0.55 |
| المستقلون     | 0.15  | 0.10  | 0.20  | 0.05 |

$$X = \begin{bmatrix} 18500 & 20000 & 24500 & 16500 \\ 16000 & 24000 & 22500 & 14000 \end{bmatrix} \quad Y = \begin{bmatrix} 0.55 & 0.50 & 0.35 & 0.40 \\ 0.30 & 0.40 & 0.45 & 0.55 \\ 0.15 & 0.10 & 0.20 & 0.05 \end{bmatrix}$$

$$XY = \begin{bmatrix} 18500(0.55) + 20000(0.50) + 24500(0.35) + 16500(0.40) & 16000(0.55) + 24000(0.50) + 22500(0.35) + 14000(0.40) \\ 18500(0.30) + 20000(0.40) + 24500(0.45) + 16500(0.55) & 16000(0.30) + 24000(0.40) + 22500(0.45) + 14000(0.55) \\ 18500(0.15) + 20000(0.10) + 24500(0.20) + 16500(0.05) & 16000(0.15) + 24000(0.10) + 22500(0.20) + 14000(0.05) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 35350 & 34275 \\ 33650 & 32225 \\ 10500 & 10000 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \text{ديموقراطيون} \\ \text{جمهوريون} \\ \text{مستقلون} \end{matrix}$$

يتفحص من المصفوفة  $XY$  إن كان عدد الذكور بالديموقراطيين أكبر  
من عدد الإناث بالجمهوريين.

$$34275 > 33650$$

## المفهوم الأساسي المصفوفة المحايدة

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

الشرح  
إن المصفوفة المحايدة ذات الرتبة  $n$ ، المعبر عنها بواسطة  $I_n$  هي مصفوفة  $n \times n$  تكون جميع قيمها 1 على قطرها الرئيس، من أعلى اليسار إلى أدنى اليمين، وجميع قيمها 0 بالنسبة لجميع المُدخلات الأخرى.

## نظام المعادلات

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3$$

## معادلة المصفوفة

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$A \quad \times \quad X = B$

## حل أنظمة المعادلات الخطية

اكتب نظام المعادلات في صورة معادلة مصفوفية  $AX = B$ . ثم استخدم اختزال جاوس-جوردان على المصفوفة الموسعة لحل النظام.

$$-x_1 + x_2 - 2x_3 = 2$$

$$-2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 5$$

$$3x_1 - 4x_2 + 7x_3 = -1$$

$$AX = B \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -2 & 3 & -4 \\ 3 & -4 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{المصفوفة الموسعة } [A:B] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ -2 & 3 & -4 & 5 \\ 3 & -4 & 7 & -1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} -R_1 \\ 2R_1 + R_2 \\ -3R_1 + R_3 \end{array}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ R_2 + R_3 \end{array}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{array}{l} R_2 + R_1 \\ \\ \end{array}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{array}{l} -2R_3 + R_1 \\ \\ \end{array}$$

$$\Rightarrow [I:X] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -13 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}$$

حدا النظام هو

$$(-13, 1, 6)$$

اكتب نظام المعادلات في صورة معادلة مصفوفية  $AX = B$ . ثم استخدم اختزال جاوس-جوردان على المصفوفة الموسعة لحل النظام.

$$x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 9$$

$$-4x_1 + x_2 + 8x_3 = -16$$

$$2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 6$$

$$AX = B \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -4 & 1 & 8 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ -16 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$[A:B] = \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 9 \\ -4 & 1 & 8 & -16 \\ 2 & 3 & 2 & 6 \end{array} \right] \begin{array}{l} 4R_1 + R_2 \\ -2R_1 + R_3 \end{array}$$

$$= \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 9 \\ 0 & -7 & -4 & 20 \\ 0 & 7 & 8 & -12 \end{array} \right] R_2 + R_3$$

$$= \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 9 \\ 0 & -7 & -4 & 20 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \end{array} \right] \begin{array}{l} \frac{1}{4}R_3 \\ R_3 + R_2 \end{array}$$

$$= \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 9 \\ 0 & -7 & 0 & 28 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right] \begin{array}{l} -\frac{1}{7}R_2 \\ 3R_3 + R_1 \end{array}$$

$$= \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 15 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right] 2R_2 + R_1$$

$$[I \quad \vdots \quad X]$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{المصفوفة على صورة} \\ \text{نموذج الصف المتخفف} \end{array}$$

$$\Rightarrow X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

التحقق

$$(7) - 2(-4) - 3(2) = 9 \quad \checkmark$$

$$-4(7) + (-4) + 8(2) = -16 \quad \checkmark$$

$$2(7) + 3(-4) + 2(2) = 6 \quad \checkmark$$

يطلق على المعكوس الضربي لمصفوفة مربعة اسم **المصفوفة العكسية**

### المفهوم الأساسي معكوس المصفوفة المربعة

افترض أن  $A$  هي المصفوفة  $n \times n$ . فإذا وجدت مصفوفة  $B$  بحيث تكون  $AB = BA = I_n$ . فيطلق على المصفوفة  $B$  حينها **معكوس** المصفوفة  $A$  وتكتب بالصورة  $A^{-1}$ . إذاً،  $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$ .

حدد إذا كانت المصفوفة A والمصفوفة B مصفوفتين متعاكستين.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \text{ و } A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1(-3) + 2(2) & -2(-3) - 3(2) \\ 1(-2) + 2(1) & -2(-2) - 3(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3(1) - 2(-2) & 2(1) + 1(-2) \\ -3(2) - 2(-3) & 2(2) + 1(-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AB = BA = I \quad \text{حيث أن}$$

يترتب على ذلك أنه

$$A = B^{-1} \leftarrow \text{المصفوفة A هي مقلوب المصفوفة B}$$

$$B = A^{-1} \leftarrow \text{المصفوفة B هي مقلوب المصفوفة A}$$

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(-4) + 3(3) & 3(-4) + 4(3) \\ 2(3) + 3(-2) & 3(3) + 4(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4(2) + 3(3) & 3(2) - 2(3) \\ -4(3) + 3(4) & 3(3) - 2(4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AB = BA = I \quad \text{حيث أن}$$

يترتب على ذلك أنه

$$A = B^{-1} \leftarrow \text{المصفوفة A هي مقلوب المصفوفة B}$$

$$B = A^{-1} \leftarrow \text{المصفوفة B هي مقلوب المصفوفة A}$$

## معكوس المصفوفة

إذا كان للمصفوفة  $A$  معكوس. يقال إن المصفوفة  $A$  **قابلة للعكس أو لها معكوس** أو غير منفردة. أما **المصفوفة المنفردة** فليس لها معكوس.

## ملخص المفهوم إيجاد معكوس المصفوفة المربعة

- افترض أن  $A$  هي المصفوفة  $n \times n$ .
1. اكتب المصفوفة الموسعة  $[A; I_n]$ .
  2. أجرِ عمليات الصف الأولية على المصفوفة الموسعة لخفض المصفوفة  $A$  صورة مستوى الصف المنخفض.
  3. قرر إن كانت  $A$  لها معكوس.
    - إذا أمكن خفض  $A$  إلى المصفوفة المحايدة  $I_n$ ، فإن  $A^{-1}$  هي المصفوفة الموجودة على يمين للمصفوفة الموسعة المحولة  $[I_n; A^{-1}]$ .
    - إذا لم يتمكن من خفض المصفوفة  $A$  إلى مصفوفة محايدة  $I_n$ ، فإن  $A$  مصفوفة منفردة.

جد  $A^{-1}$ ، إن وُجدت. وإن لم توجد  $A^{-1}$ ، فاكتب منفردة.

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$[A : I] = \left[ \begin{array}{cc|cc} 8 & -5 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{3R_1 + 8R_2} \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 8 \end{array} \right]$$

$$= \left[ \begin{array}{cc|cc} 8 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 8 \end{array} \right] \xrightarrow{5R_2 + R_1} = [I : A^{-1}]$$

$$= \left[ \begin{array}{cc|cc} 8 & 0 & 16 & 40 \\ 0 & 1 & 3 & 8 \end{array} \right] \xrightarrow{\frac{1}{8}R_1} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{bmatrix}$$

$$[A : I] = \left[ \begin{array}{cc|cc} 2 & 4 & 1 & 0 \\ -3 & -6 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{3R_1 + 2R_2} \left[ \begin{array}{cc|cc} 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{\frac{1}{2}R_1} \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{array} \right]$$

من المحيّل أنه نصل على المصفوفة المحايدة في الطرف الأيسر من المصفوفة الموسعة.

وإنّ المصفوفة  $A$  منفردة (ليس لها معكوس)

المفهوم الأساسي محدد ومعكوس المصفوفة  $2 \times 2$ 

افترض  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ . يكون للمصفوفة  $A$  معكوس فقط إن كان  $ad - cb \neq 0$  وهو  $A^{-1} = \frac{1}{ad - cb} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ .

العدد  $ad - cb$  يُسمى **مُحدّد** المصفوفة  $2 \times 2$  ويُعبّر عنه بواسطة  $\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$ .

محدد ومعكوس المصفوفة  $2 \times 2$ 

جد محدد كل من المصفوفات التالية. ثم جد معكوس المصفوفة، إن وُجدت.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 2(4) - (-3)(4) = 20$$

حيث إن  $\det(A) \neq 0$  فإن  $A$  قابلة للعكس.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{20} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{20} & \frac{3}{20} \\ -\frac{4}{20} & \frac{2}{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{20} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{10} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 9 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 9 & 6 \end{vmatrix} = 6(6) - 4(9) = 0$$

حيث إن  $\det(B) = 0$  فإن  $B$  غير قابلة للعكس.

المحدد بالآلة الحاسبة 3x3

mode → 6 → 1 → 1 → إدخال العناصر  
 ⇒ AC ⇒ shift ⇒ 4 → 7 →  
 ⇒ shift ⇒ 4 → 3 → =

المفهوم الأساسي محدد مصفوفة 3 × 3

$$\det(A) = |A| = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \quad \text{إذا } A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \text{ افترض}$$

محدد ومعكوس مصفوفة 3 x 3

جد محدد كل من المصفوفات التالية. ثم جد معكوسها، إن وجدت.

$$C = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(C) = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= -3[-1(0) - 2(4)] - 2[1(0) - 2(-1)] + 4[1(4) - (-1)(-1)]$$

$$= -3(-8) - 2(2) + 4(3) = 24 - 4 + 12 = 32$$

حيث  $\det(C) \neq 0$  فـ  $C^{-1}$  موجودة.

باستخدام الآلة الحاسبة (AC) → إدخال عناصر المصفوفة → 1 → 1 → 6 → mode  
 ⇒ shift ⇒ 4 → 3 → x<sup>-1</sup> ⇒ =

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{16} & \frac{1}{8} & \frac{5}{16} \\ \frac{3}{32} & \frac{5}{16} & \frac{1}{32} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -8 & -2 & 3 \\ 16 & 4 & 10 \\ 8 & 10 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -8 & 16 & 8 \\ -2 & 4 & 10 \\ 3 & 10 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow C^{-1} = \frac{1}{\det(C)} \begin{bmatrix} -8 & 16 & 8 \\ -2 & 4 & 10 \\ 3 & 10 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{16} & \frac{1}{8} & \frac{5}{16} \\ \frac{3}{32} & \frac{5}{16} & \frac{1}{32} \end{bmatrix}$$

معكوس المصفوفة بدون الآلة الحاسبة 3x3

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{①} \\ \text{②} \end{matrix}$$

سواء استخدم طريقة أخرى للحل سواء للمحدد أو المعكوس

$$\Rightarrow [(3)(2)(3) + (1)(-1)(2) + (2)(1)(-1)] - [(2)(2)(2) + (-1)(-1)(3) + (3)(1)(1)]$$

$$= [18 + (-2) + (-2)] - [8 + 3 + 3] = 14 - 14 = 0$$

لأنه المحدد = 0 إذاً المصفوفة غير قابلة للعكس