حل تمارين الدرس (5-4) التقعر واختبار المشتقة الثانية

تمرين ① ص 276 $f(x)=x^3-3x^2+4x-1$ المطلوب تحديد التقعر ونقاط الانعطاف

الدالة معرفة وقابلة للاشتقاق على R

$f'(x)=3x^2-6x+4$

$f''(x)=6x-6$

عندما $f''=0$ سيكون: $6x-6=0 \Rightarrow x=1$

تذكر إشارة الدالة الخطية $f(x)=ax+b$ ولها صفر وحيد $c=\frac{-b}{a}$

x		c	
f	عكس إشارة a	0	إشارة a

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$6x-6=f''$	$- \; -$	0	$+ \; +$
جهة التقعر f	تقعر للأسفل عندما $x<1$	1	تقعر للأعلى عندما $x>1$

يوجد نقطة انعطاف عند $x=1$ وهي $(1,1)$

تمرين ② $f(x)=x^4-6x^2+2x+3$ دالة معرفة وقابلة للاشتقاق على R

$f'(x)=4x^3-12x+2$

$f''(x)=12x^2-12$

$f''=0 \Rightarrow 12x^2-12=0 \Rightarrow$ إما $(x=1)$ أو $(x=-1)$

تذكر إشارة الدالة التربيعية إذا كان لها جذران c_1 و c_2

x		c_1		c_2	
f	إشارة a	0	عكس إشارة a	0	إشارة a

x	$-\infty$	-1		$+1$	$+\infty$
إشارة $f''=12x^2-12$	$+ \; +$	0	$- \; - \; -$	0	$+ \; + \; +$
جهة التقعر f	تقعر للأعلى عندما $x<-1$	-4	تقعر للأسفل $-1<x<1$	0	تقعر للأعلى عندما $x>1$

توجد نقطتا انعطاف عند $x=\mp1$ (هما $(-1,-4)$ و $(1,0)$)

تمرين ③ $f(x)=x+\frac{1}{x}$ الدالة معرفة وقابلة للاشتقاق عند $\boxed{x\neq0}$

$f'(x)=1+\frac{-1}{x^2}$

$f''(x)=0+\frac{0-(-1)(2x)}{(x^2)^2}=\frac{2x}{x^4}=\frac{2}{x^3}$

لاحظ أن $f''\neq0$ وأن البسط $=2$ موجب دوماً وإشارة f'' حسب إشارة المقام (x^3)

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f''	$- \; -$	غير معرفة	$+ \; +$
f جهة التقعر	التقعر للأسفل		التقعر للأعلى
	عندما $x<0$		عندما $x>0$
	$(-\infty,0)$		$(0,\infty)$

لا توجد نقاط انعطاف

تمرين ④ ص 276 $f(x) = x + 3(1-x)^{\frac{1}{3}}$

لاحظ $\sqrt[3]{1-x} = (1-x)^{\frac{1}{3}}$

الدالة معرفة وقابلة للاشتقاق على R

$$f'(x) = 1 + 3 \times \frac{1}{3}(1-x)^{\frac{1}{3}-1}$$
$$= 1 + (1-x)^{-\frac{2}{3}}$$

$$f''(x) = 0 + \left(\frac{-2}{3}\right)(1-x)^{-\frac{2}{3}-1} = \frac{-2}{3}(1-x)^{-\frac{5}{3}}$$

يمكن كتابة f'' بالشكل: $f'' = \frac{-2}{3(1-x)^{\frac{5}{3}}}$ معرفة عندما $(1-x \neq 0 \rightarrow x \neq 1)$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
إشارة f''		$- \; - \; -$	f'' غير معرفة	$+ \; +$	
f والتقعر		$\cap$	1	$\cup$	

تقعر للأسفل عندما $x<1$

تقعر للأعلى عندما $x>1$

توجد نقطة انعطاف عند $x=1$ (وهي $(1,1)$)

لتحديد إشارة f'' اختر عدداً قبل الـ 1 مثل 0 سنجد $f''(0)$ سالب $-\frac{2}{3}$ واختر عدداً بعد 1 مثل 2 سنجد $f''(2) = \frac{2}{3} > 0$

تمرين ⑤ $f(x) = \sin x - \cos x$ دالة معرفة وقابلة للاشتقاق على R

$$f'(x) = \cos x - (-\sin x) = \cos x + \sin x$$
$$f''(x) = -\sin x + \cos x$$

لاحظ الرسم الصفحة المقابلة ونقط الانعطاف

عندما $f''=0$ سيكون: $-\sin x + \cos x = 0$

$$\cos x = \sin x$$

طريقة أولى: يتحقق هذا إذا كان x في منتصف الربعين الأول والثالث: أي عند:

$$x_1 = \frac{\pi}{4} \quad , \quad x_2 = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$$

والحلول تتم بإضافة عدد صحيح من الدورات لكل حل منهما (وعدد الحلول غير منته)

$x_1 \rightarrow \frac{\pi}{4} , \frac{\pi}{4}+2\pi = \frac{9\pi}{4} , \frac{\pi}{4}+4\pi = \frac{17\pi}{4} , \ldots$

$x_2 \rightarrow \frac{5\pi}{4} , \frac{5\pi}{4}+2\pi = \frac{13\pi}{4} , \frac{5\pi}{4}+4\pi = \frac{21\pi}{4} , \ldots$

طريقة ثانية: $\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x}{\cos x} \rightarrow \tan x = 1$

$$x_1 = \frac{\pi}{4} \quad , \quad x_2 = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$$

لتحديد إشارة f'' جرب قيم:

بين $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{5\pi}{4}$ اختر: $\frac{3\pi}{4}$ سنجد $f''(\frac{3\pi}{4})<0$

وبين $\frac{5\pi}{4}$ و $\frac{9\pi}{4}$ اختر: $\frac{6\pi}{4}$ سنجد $f''>0$

وبين $\frac{9\pi}{4}$ و $\frac{13\pi}{4}$ اختر $\frac{10\pi}{4}$ سنجد $f''<0$

لو رتبنا هذه الحلول من الأصغر للأكبر:

$$\frac{\pi}{4} , \frac{5\pi}{4} , \frac{9\pi}{4} , \frac{13\pi}{4} , \frac{17\pi}{4} , \frac{21\pi}{4} , \ldots$$

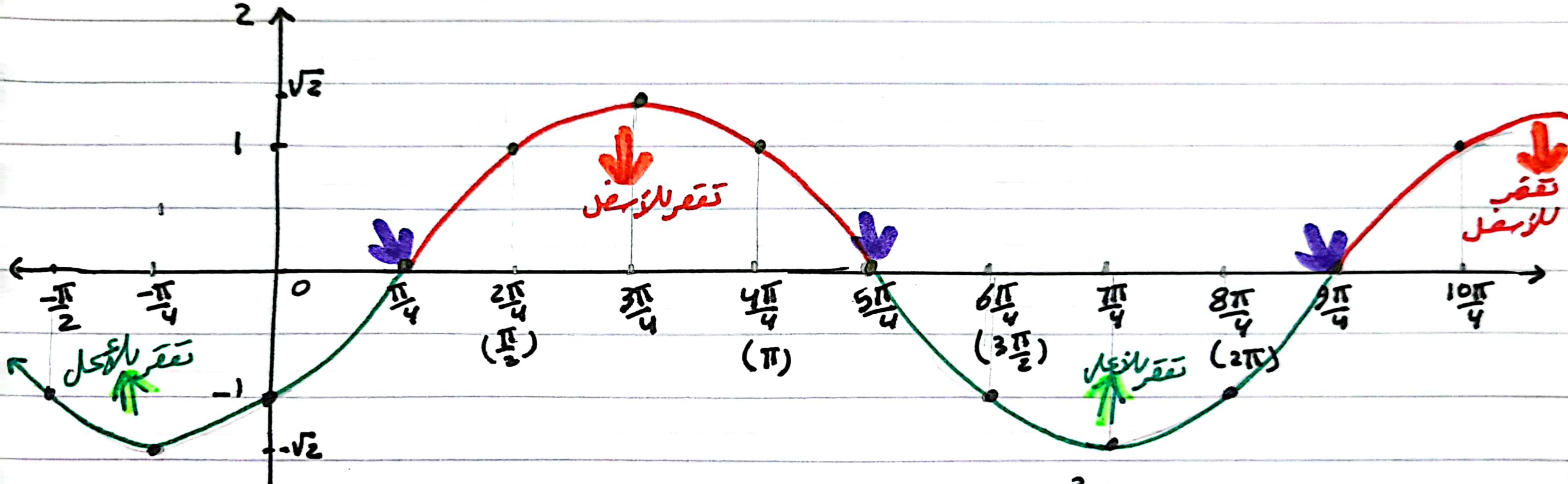
(ولاحظ هنا أن f كل هذه القيم يساوي 0)

x	$\ldots\ldots$	$\frac{\pi}{4}$		$\frac{5\pi}{4}$		$\frac{9\pi}{4}$		$\frac{13\pi}{4}$		$\frac{17\pi}{4}$	$\ldots\ldots$
f''	$\ldots$	0	$- \; -$	0	$+ \; +$	0	$- \; -$	0	$+ \; +$	0	$\ldots$
f التقعر	$\ldots$	0	للأسفل	0	للأعلى	0	للأسفل	0	للأعلى	0	

تقعر للأسفل: $(\frac{\pi}{4} , \frac{5\pi}{4}) \cup (\frac{9\pi}{4} , \frac{13\pi}{4}) \ldots\ldots$

تقعر للأعلى: $(\frac{5\pi}{4} , \frac{9\pi}{4}) \cup (\frac{13\pi}{4} , \frac{17\pi}{4}) , \ldots$

لاحظ الرسم البياني للتمرين (5) ص 276



نقط الانعطاف: $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{5\pi}{4}$ و $\frac{9\pi}{4}$ و $\frac{13\pi}{4}$ و ... غير منتهية

$\frac{\pi}{4}$ و $\frac{\pi}{4}+\pi$ و $\frac{\pi}{4}+2\pi$ و $\frac{\pi}{4}+3\pi$

الصيغة العامة لنقط الانعطاف: $x=\frac{\pi}{4}+n\pi$ (n عدد صحيح)

تمرين 6 صـ276 $f(x)=\tan^{-1}(x^2)$ دالة معرفة وقابلة للاشتقاق على R

تذكر
$$\frac{d}{dx}[\tan^{-1} f(x)] = \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}$$

$$f'(x)=\frac{2x}{1+x^4}$$

$$f''(x)=\frac{2(1+x^4)-2x(4x^3)}{(1+x^4)^2}$$

$$=\frac{2+2x^4-8x^4}{(1+x^4)^2}=\frac{2-6x^4}{(1+x^4)^2}$$

(لاحظ المقام موجب $\neq 0$)

$$f''(x)=0 \Rightarrow 2-6x^4=0 \Rightarrow x^4=\frac{2}{6}=\frac{1}{3} \Rightarrow x=\mp\sqrt[4]{\frac{1}{3}} \approx 0.76$$

يمكن لتحديد إشارة f'' من خلال إشارة البسط $1-6x^2$ واختيار قيم قبل $-\sqrt[4]{\frac13} \approx 0.76$ وبعد $\sqrt[4]{\frac13}$ وبينهما والتعويض في إشارة البسط

x	$-\infty$	$-\sqrt[4]{\frac{1}{3}}$		$+\sqrt[4]{\frac{1}{3}}$	$+\infty$
إشارة f''	$- \; -$	0	$+ \; +$	0	$- \; -$
وجهة التقعر f	تقعر للأسفل عندما $x<-\sqrt[4]{\frac{1}{3}}$	$0.52 \; (\frac{\pi}{6})$	تقعر للأعلى $-\sqrt[4]{\frac{1}{3}}<x<+\sqrt[4]{\frac{1}{3}}$	$0.52 \approx (\frac{\pi}{6})$	تقعر للأسفل عندما $x>\sqrt[4]{\frac{1}{3}}$

توجد نقطتا انعطاف عند $x=\mp\sqrt[4]{\frac{1}{3}}$ (هما تقريباً) $(-0.76, 0.52)$ ، $(+0.76, 0.52)$

تمرين 7 $f(x)=x^{\frac{4}{3}}+4x^{\frac{1}{3}}$ معرفة على R

$$f'(x)=\frac{4}{3}(x)^{\frac{4}{3}-1}+4\left(\frac{1}{3}\right)x^{\frac{1}{3}-1}$$

$$=\frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}+\frac{4}{3}x^{-\frac{2}{3}}$$

$$f''(x)=\frac{4}{3}\left(\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1}\right)+\frac{4}{3}\left(\frac{-2}{3}x^{-\frac{2}{3}-1}\right)$$

$$=\frac{4}{9}(x)^{-\frac{2}{3}}-\frac{8}{9}(x)^{-\frac{5}{3}}$$

(نوجد أس سالب $x\neq 0$)

$$(x)^{\frac{5}{3}}=(x)^{\frac{2}{3}}\times x^{\frac{3}{3}}=x^{\frac{2}{3}}\times x^{1}$$

$$=\frac{4}{9(x)^{\frac{2}{3}}}-\frac{8}{9(x)^{\frac{5}{3}}}$$

(بأخذ عامل مشترك $\frac{4}{3x^{\frac{2}{3}}}$)

$$=\frac{4}{3(x)^{\frac{2}{3}}}\left[1-\frac{2}{x}\right]=\frac{4}{3(x)^{\frac{2}{3}}}\left[\frac{x-2}{x}\right]$$

توحيد مقامات

لاحظ هذا الكسر موجب دائماً

لاحظ $f''=0$ عندما $x-2=0 \Leftarrow x=2$

و f'' غير معرف عندما $x=0$

وإشارة f'' تعتمد على إشارة القوس الثاني وهو $\left[\frac{x-2}{x}\right]$

x	$-\infty$	0		2	$+\infty$
اشارة f'' حسب إشارة	$+ \; +$	0	$- \; -$	غير معرف	$+ \; +$
و التقعر f	تقعر للأعلى $x<0$	0	تقعر للأسفل $0<x<2$	≈ 7.6	تقعر للأعلى $x>2$

توجد نقطة انعطاف عند $x=0$ (وهي $(0,0)$)

تمرين 8 ص 276

$f(x) = x e^{-4x}$ (لاحظ: $f(x) = \frac{x}{e^{4x}}$ معرفة على R)

مشتقة ضرب $f'(x) = 1 \cdot e^{-4x} + x(-4e^{-4x})$

$= e^{-4x} - 4xe^{-4x}$

$f''(x) = -4e^{-4x} - 4\cdot(e^{-4x}) - 4x(-4e^{-4x})$

$= -4e^{-4x} - 4e^{-4x} + 16xe^{-4x}$

$= -8e^{-4x} + 16xe^{-4x}$ ($8e^{-4x}$ عامل مشترك)

$= 8e^{-4x}(-1 + 2x)$

(لاحظ $8e^{-4x}$ موجبة دوماً)

وعندما $f''=0$ سيكون:

$-1+2x=0 \Rightarrow x = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
إشارة f'' ⇐ (من إشارة القوس $-1+2x$)	− − −	0	+ + +
f والتقعر	التقعر للأسفل، عندما $x<\frac{1}{2}$	0.07	التقعر للأعلى، عندما $x>\frac{1}{2}$

توجد نقطة انعطاف عند $x=\frac{1}{2}$ (وهي تقريباً $(\frac{1}{2}, 0.068)$)

تمرين 9

$f(x) = x^4 + 4x^3 - 1$ مطلوب الأعداد الحرجة وتطبيق اختبار المشتقة الثانية للتحديد القيم القصوى المحلية

$f'(x) = 4x^3 + 12x^2$

عندما $f'=0$: $4x^3 + 12x^2 = 0$

$f'=0$ أو f' غير معرف

إما $x=-3$ أو $x=0$ (لاحظ $x=0$ جذر مضاعف: حل مضاعف للمعادلة)

تكون الأعداد الحرجة $x=0$ ، $x=-3$

ونوجد f'' عند كل منها $f''(x) = 12x^2 + 24x$

① $f''(-3) = 12(-3)^2 + 24(-3) = 36 > 0$

وبالتالي عند $x=-3$ قيمة صغرى محلية (وهي $f(-3) = -28$)

② $f''(0) = 12(0)^2 + 24(0) = 0$

اختبار المشتقة الثانية لا يعطي أي استنتاج حول $f''(0)$ قيمة قصوى محلية

غير حاسم

تمرين 10

$f(x) = x^4 + 4x^2 + 1$ معرفة على R

$f'(x) = 4x^3 + 8x$

$f'=0 \Rightarrow 4x^3 + 8x = 0 \Rightarrow x=0$ حل وحيد قيمة حرجة

$f''(x) = 12x^2 + 8 \Rightarrow f''(0) = 12(0)^2 + 8 = 8 > 0$

وبالتالي توجد قيمة صغرى محلية عند $x=0$

(وهي $f(0)=1$)

تمرين (11) ص 276 $f(x)=x\cdot e^{-x}$ (مجال هذه الدالة R)

$f'(x)=1\cdot e^{-x}+x(-e^{-x})=e^{-x}-xe^{-x}$ (مشتقة ضرب)

$=e^{-x}(1-x)$

(تذكر e^{-x} موجب دوماً) وعندما $f'=0$ سيكون ($1-x=0 \Rightarrow x=1$) حرجة

$f''(x)=-e^{-x}(1-x)+e^{-x}(-1)$

$=e^{-x}[-1+x-1)=e^{-x}(x-2)$

(تذكر e^{-x} موجب دوماً) وعليه سيكون:

$f''(1)=e^{-1}(1-2)=\frac{-1}{e}<0$

وستكون هناك قيمة عظمى محلية عند $x=1$ (وهي $f(1)=\frac{1}{e}$)

تمرين (12) $f(x)=e^{-x^2}$ معرفة على R

$f'(x)=-2x\cdot e^{-x^2}$

(تذكر e^{-x^2} موجب دوماً) وعندما $f'=0$ سيكون ($-2x=0 \Rightarrow x=0$) حرجة

$f''(x)=-2\cdot e^{-x^2}-2x(-2x\cdot e^{-x^2})$

$=-2e^{-x^2}+4x^2e^{-x^2}$

$f''(0)=-2e^{-0^2}+4(0)^2\cdot e^{-0^2}=-2<0$

توجد قيمة عظمى محلية عند $x=0$ (وهي $f(0)=1$)

تمرين (13) $f(x)=\frac{x^2-5x+4}{x}$ (معرفة عندما $x\neq0$)

مشتقة قسمة $f'(x)=\frac{(2x-5)\cdot x-(x^2-5x+4)\cdot 1}{x^2}$

$=\frac{2x^2-\cancel{5x}-x^2+\cancel{5x}-4}{x^2}=\frac{x^2-4}{x^2}$ (أصفار $x\neq0$)

عندما $f'=0$ سيكون ($x^2-4=0 \Rightarrow x=\mp2$) حرجة

$f''(x)=\frac{2x(x^2)-(x^2-4)\times 2x}{x^4}=\frac{\cancel{2x^3}-\cancel{2x^3}+8x}{x^4}=\frac{8}{x^3}$

$f''(2)=\frac{8}{2^3}=1>0$ (قيمة صغرى محلية عند $x=2$)

$f''(-2)=\frac{8}{(-2)^3}=-1<0$ (عظمى محلية عند $x=-2$)

تمرين (14) $f(x)=\frac{x^2-1}{x}$ (معرفة بشرط $x\neq0$)

$f'(x)=\frac{2x(x)-(x^2-1)\times1}{x^2}=\frac{2x^2-x^2+1}{x^2}=\frac{x^2+1}{x^2}$

لاحظ هنا عندما $f'=0$ سيكون $x^2+1=0$ ليس لها حلول

لا توجد قيم حرجة ولا توجد قيم قصوى محلية

نقط حرجة
تزايد وتناقص
نقط انعطاف
جهة التقعر

تمرين 15 ص 276 $f(x)=(x^2+1)^{\frac{2}{3}}$ مطلوب جميع الجزئيات المهمة

ورسم بياني

(مجال هذه الدالة R) $f'(x)=\frac{2}{3}(x^2+1)^{\frac{2}{3}-1}\times 2x=\frac{2}{3}\times 2x(x^2+1)^{-\frac{1}{3}}$

$=\frac{4x}{3}\cdot(x^2+1)^{-\frac{1}{3}}$

(لاحظ أن f' يمكن كتابتها بالشكل: $\frac{4x}{3(x^2+1)^{\frac{1}{3}}}$ (المقام موجب دوماً)

$f'=0 \Rightarrow 4x=0 \Rightarrow x=0$ قيمة حرجة

(الدالة متزايدة $x>0 \Rightarrow f'>0$) و (الدالة متناقصة $x<0 \Rightarrow f'<0$)

(مشتقة ضرب) $f''(x)=\frac{4}{3}(x^2+1)^{-\frac{1}{3}}+\frac{4x}{3}\left[-\frac{1}{3}(x^2+1)^{-\frac{1}{3}-1}\times 2x\right]$

$=\frac{4}{3}(x^2+1)^{-\frac{1}{3}}-\frac{8x^2}{9}(x^2+1)^{-\frac{4}{3}}$

وتكتب بالصورة: $\frac{4}{3(x^2+1)^{\frac{1}{3}}}-\frac{8x^2}{9(x^2+1)^{\frac{4}{3}}}$

$(x^2+1)^{\frac{1}{3}}\times(x^2+1)^{\frac{3}{3}}$

$(x^2+1)^{\frac{1}{3}}\cdot(x^2+1)^{1}$

$\frac{4}{3(x^2+1)^{\frac{1}{3}}}$ عامل مشترك

$=\frac{4}{3(x^2+1)^{\frac{1}{3}}}\left[\frac{1}{1}-\frac{2}{3(x^2+1)^{1}}\right]$

$=\frac{4}{3(x^2+1)^{\frac{1}{3}}}\left[\frac{3(x^2+1)-2}{3(x^2+1)}\right]$ توحيد المقامات

$f''(x)=\frac{4}{3(x^2+1)^{\frac{1}{3}}}\left[\frac{3x^2+1}{3(x^2+1)}\right]$ لاحظ كل الحدود موجبة وإنه $f''\neq 0$ أبداً

ولا توجد أي نقط انعطاف، والتقعر دائماً للأعلى ($f''(x)>0$)

حرجة $x=0 \Rightarrow f''(0)=\frac{4}{3(0^2+1)^{\frac{1}{3}}}\left[\frac{3\times 0^2+1}{3(0^2+1)}\right]=\frac{4}{9}>0$

وبالتالي عند $x=0$

توجد قيمة صغرى محلية عند $x=0$ (وهي $(0^2+1)^{\frac{2}{3}}=1$)

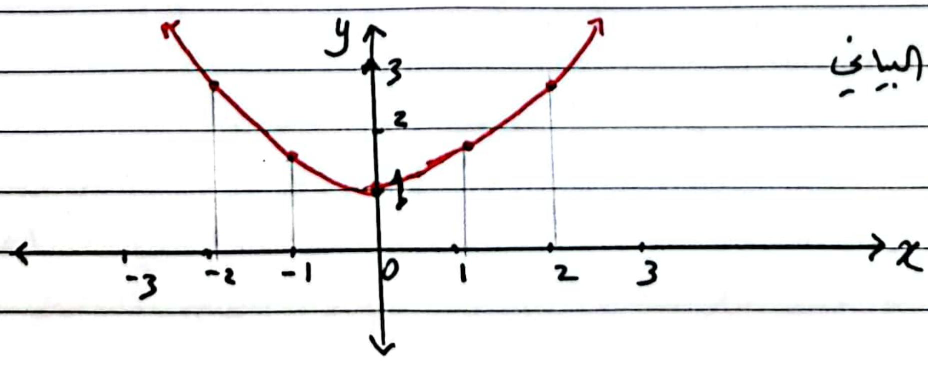
للرسم يمكن أخذ عدة نقط وملاحظة السلوك العام للدالة

$(-2,2.9)$ $(0,1)$ $(2,2.9)$

تلخيص ما سبق

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-\ -\ -$	0	$+\ +\ +$	
$f''(x)$		$+\ +$	$\frac{4}{9}$	$+\ +\ +$	
f			1		

الرسم البياني



تمرين (16) ص 276 $f(x)=x\cdot\ln x$ (الدالة معرفة عندما $x>0$)

$\frac{d}{dx}[\ln f(x)]=\frac{f'(x)}{f(x)}$

$f'(x)=1\cdot\ln x+x\times\frac{1}{x}=\ln x+1$ مشتقة ضرب

$f'=0 \Leftarrow \ln x+1=0$

$\ln x=-1 \Rightarrow x=e^{-1}=\frac{1}{e}$ (قيمة حرجة)

($0<x<\frac{1}{e} \Rightarrow f'(x)<0$ الدالة متناقصة)

$0<x<\frac{1}{e}\approx 0.37$
جرب $x=0.2$ قيمة عشوائية في f'
$f'(0.2)\approx -0.6<0$

$x>\frac{1}{e} \Rightarrow f'(x)>0$ الدالة متزايدة

(عند $x=\frac{1}{e}$ قيمة صغرى محلية) (ممكن من f'')

$x>\frac{1}{e}$ اخذ قيمة $x=1$
$f'(1)=1>0$

$f''(x)=\frac{1}{x}+1$

$f''(x)=0 \Rightarrow \frac{1}{x}+1=0$

($\frac{1}{x}=-1 \Rightarrow x=-1$ خارج المجال)

(لاحظ $x>0 \Leftarrow \frac{1}{x}>0 \Leftarrow \frac{1}{x}+1>0$)

ولن يكون $f''(x)=0$ أبداً (لا توجد نقط انعطاف)

$f''(x)>0$ دوماً والتقعر نحو الأعلى دائماً

$x=\frac{1}{e} \Rightarrow f''(\frac{1}{e})=\frac{1}{\frac{1}{e}}+1>0$ موجبة

ستكون هناك قيمة صغرى محلية عند $x=\frac{1}{e}\approx 0.37$

(وهي $f(\frac{1}{e})=\frac{1}{e}\cdot\ln\frac{1}{e}\approx -0.37$)

للرسم ممكن أخذ نقط (أو استخدام برامج الرسم البياني)

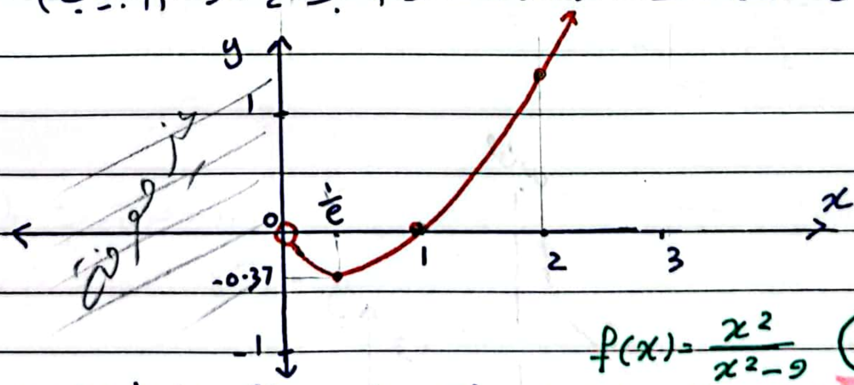
نقط الرسم

$(0.2,-0.3)$

$(\frac{1}{e},-0.37)$

$(1,0)$

$(2,1.4)$



تمرين (17) $f(x)=\frac{x^2}{x^2-9}$

الدالة معرفة عندما $x^2-9\neq 0$ (معرفة عندما $x\neq\mp 3$) وسيكون $x=\mp 3$ مقاربان رأسيان

$f'(x)=\frac{2x(x^2-9)-x^2(2x)}{(x^2-9)^2}$

$=\frac{\cancel{2x^3}-18x-\cancel{2x^3}}{(x^2-9)^2}=\frac{-18x}{(x^2-9)^2}$

حرجة

$f'=0 : -18x=0 \Rightarrow x=0$

ولمعرفة إشارة f' لاحظ أن المقام موجب دوماً

(الدالة متناقصة $x>0 \Rightarrow f'<0$) و ($x<0 \Rightarrow f'>0$: الدالة متزايدة)

$(0,3)\cup(3,+\infty)$ $(-\infty,-3)\cup(-3,0)$

(عند $x=0$ قيمة عظمى محلية)

يتبع في الصفحة التالية ←

تابع حل (17) ص 276

وجدنا $f'(x) = \frac{-18x}{(x^2-9)^2}$

$$f''(x) = \frac{-18(x^2-9)^2 - (-18x)\left[2(x^2-9)^1 \times 2x\right]}{(x^2-9)^4}$$

$$= \frac{-18(x^2-9)^2 + 72x^2(x^2-9)}{(x^2-9)^4} \rightarrow$$ في البسط عامل مشترك (x^2-9)

$$= \frac{\cancel{(x^2-9)}\left[-18(x^2-9) + 72x^2\right]}{\cancel{(x^2-9)^4}} = \frac{-18x^2+162+72x^2}{(x^2-9)^3}$$

$(x^2-9)^3$

$$= \frac{54x^2+162}{(x^2-9)^3}$$

البسط $54x^2+162 \neq 0$ وهو موجب دوماً

لا توجد نقط حرجة وإشارة f'' تعتمد على إشارة المقام (أصفار المقام $3, -3$ محذوفة)

x	$-\infty$	-3		3	$+\infty$
f''	+ +	محذوفة	− −	محذوفة	+ +

التقعر للأسفل عندما $-3 < x < +3$ ⇐ ولاحظ (0) ضمن هذه الفترة $f''(0) < 0$ وبالتالي توجد قيمة عظمى محلية عند $x=0$

التقعر للأعلى عندما $x < -3$ أو $x > 3$

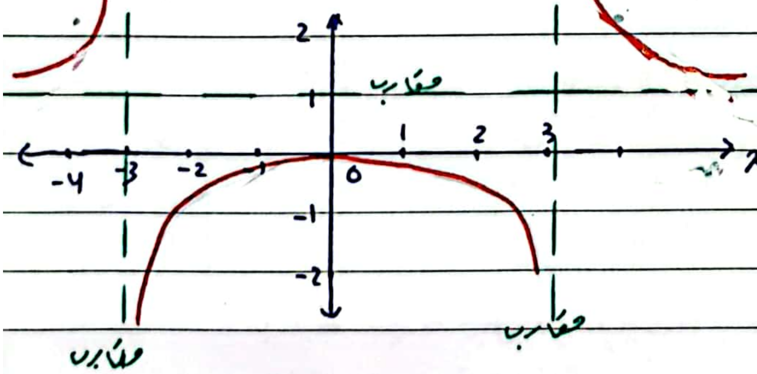
$x \in (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$

نستعين بنقط للرسم (أو براجع الرسم)

(لا توجد نقط انعطاف)

تذكر: $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim \frac{x^2}{x^2-9}$

$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$ (مقارب $y=1$)



تمرين (18) ص 276 $f(x) = \frac{x}{x+2}$

دالة معرفة بشرط $x \neq -2$ ($x=-2$ مقارب رأسي)

وتذكر: $x \to \pm\infty$ فإن $y \to 1$ ($y=1$ مقارب أفقي)

$$f'(x) = \frac{1(x+2) - x(1)}{(x+2)^2} = \frac{2}{(x+2)^2}$$

لاحظ البسط والمقام موجبان

$f' \neq 0$ لا توجد نقط حرجة ، $f'(x) > 0$ الدالة متزايدة دوماً

$$f''(x) = \frac{0\cdot(x+2)^2 - 2\left[2(x+2)\times 1\right]}{(x+2)^2} = \frac{-4(x+2)}{(x+2)^2} = \frac{-4}{(x+2)}$$

لاحظ $f'' \neq 0$ أبداً وإشارته تعتمد على إشارة البسط -4 وإشارة المقام $(x+2)$ قبل وبعد -2

$x < -2 \Rightarrow f''(x) > 0$ التقعر للأعلى

$x > -2 \Rightarrow f''(x) < 0$ التقعر للأسفل

$x = -2$ محذوفة أصلاً ، لا توجد نقط انعطاف

الرسم في الصفحة المقابلة

حل بطريقة مختلفة عن د نبيل العلم E

تمرين (19) ص 276 $f(x)=\sin x+\cos x$ دالة معرفة على R (دورية 2π)

$f'(x)=\cos x-\sin x$

$f'(x)=0 \Rightarrow \cos x-\sin x=0 \Rightarrow \cos x=\sin x$

(نوقش سابقاً حل هذه المعادلة والنقط على دائرة الوحدة في منتصف ربع الأول والرابع)

نقط حرجة $x=\frac{\pi}{4}+n\pi$ (n عدد صحيح)

ضمن أول دورة موجبة: $\frac{\pi}{4}$ ، $\frac{5\pi}{4} \to \pi+\frac{\pi}{4}$

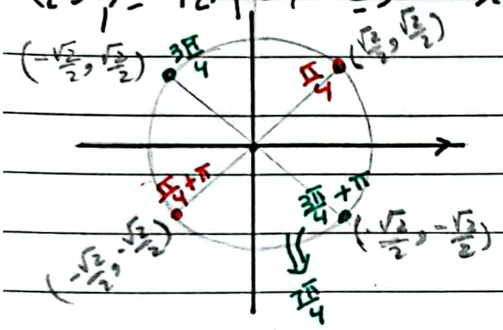
$f''(x)=-\sin x-\cos x$

وعندما $f''=0$: $-\sin x-\cos x=0$

$\Rightarrow \sin x=-\cos x$

ومجموعة الحلول: $x=\frac{3\pi}{4}+n\pi$ (في منتصف ربع الثاني والرابع)

ضمن أول دورة موجبة: $\frac{3\pi}{4}$ ، $\frac{7\pi}{4}$



$f''(\frac{\pi}{4})=-\sin\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{4}=-\sqrt2<0$

عند: $x=\frac{\pi}{4}$

توجد قيم عظمى محلية عند $x=\frac{\pi}{4}+2n\pi$

$f''(\frac{5\pi}{4})=-\sin\frac{3\pi}{4}-\cos\frac{3\pi}{4}=+\sqrt2>0$

عند: $x=\frac{5\pi}{4}$

توجد قيم صغرى محلية عند: $x=\frac{5\pi}{4}+2n\pi$

x	.... $-\frac{3\pi}{4}$		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{5\pi}{4}$		$\frac{\pi}{4}+2\pi$		$\frac{5\pi}{4}+2\pi$	
إشارة f'	....	+	0	− −	0	+ + +	0	− − −	0	+
f				f متناقصة		f متزايدة				

ضمن دورة

$f'<0 \Rightarrow$ f متناقصة $(\frac{\pi}{4}+2n\pi<x<\frac{5\pi}{4}+2\pi)$ → جرب $\frac{\pi}{2}$

$f'>0 \Rightarrow$ f متزايدة : $(\frac{5\pi}{4}+2\pi<x<\frac{9\pi}{4}+2n\pi)$ → جرب $\frac{3\pi}{2}$

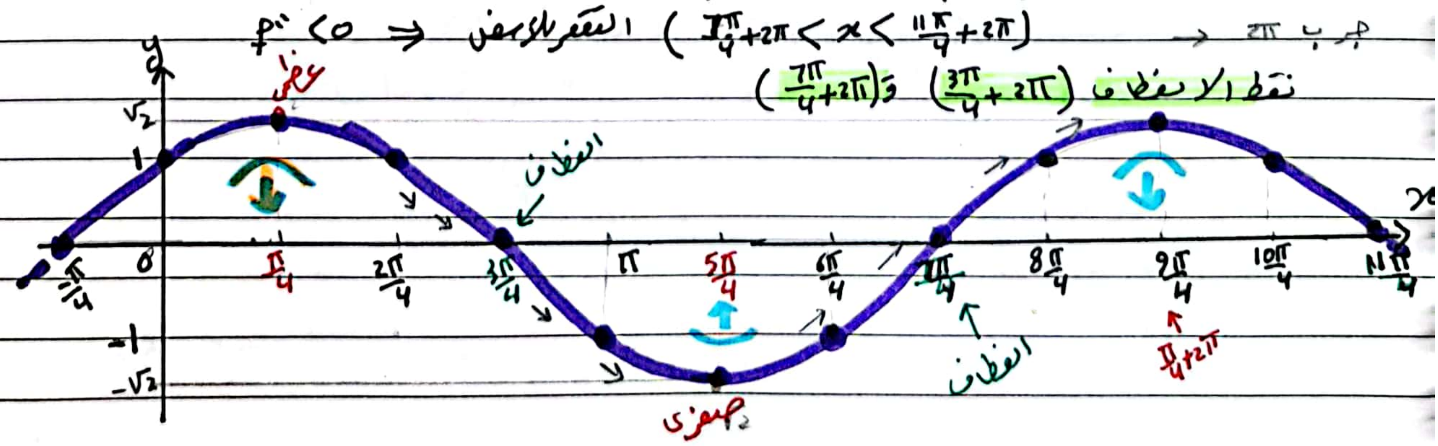
x	$-\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}$		$\frac{7\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}+2\pi$		$\frac{7\pi}{4}+2\pi$	
إشارة f''	− ...	+	0	+ +	0	− −	0	− −	0	+
f										

ضمن دورة

$f''>0 \Rightarrow$ التقعر للأعلى $(\frac{3\pi}{4}+2\pi<x<\frac{7\pi}{4}+2\pi)$ → جرب π

$f''<0 \Rightarrow$ التقعر للأسفل $(\frac{7\pi}{4}+2\pi<x<\frac{11\pi}{4}+2\pi)$ → جرب 2π

نقط الانعطاف $(\frac{3\pi}{4}+2\pi)$ و $(\frac{7\pi}{4}+2\pi)$



القيم لا تساعد الطالب على الرسم بدقة (راجع الرسم)

تمرين (20) ص 276 $f(x)=e^{-x}.\sin x$ مجال الدالة R

مشتقة ضرب $f'(x) = -e^{-x}.\sin x + e^{-x}.\cos x$

$= e^{-x}[-\sin x+\cos x]$

لاحظ e^{-x} موجب ولا يساوي الصفر أبداً لذلك عندما $f'=0$ سيكون:

$-\sin x+\cos x=0$

نوقشت حلول هذه المعادلة في تمارين سابقة $x=\frac{\pi}{4}+n\pi$ (n عدد صحيح)

(وستعطي قيم عظمى وصغرى بالتناوب لأي قيم صحيحة غير منتهية)

$f''(x) = -1e^{-x}[-\sin x+\cos x]+e^{-x}[-\cos x-\sin x]$

$= \cancel{+e^{-x}\sin x} - e^{-x}\cos x - e^{-x}\cos x \cancel{- e^{-x}\sin x}$

$= -2e^{-x}.\cos x$

(e^{-x} موجب لا يساوي الصفر) وعندما $f''=0$ سيكون: $-2\cos x=0$

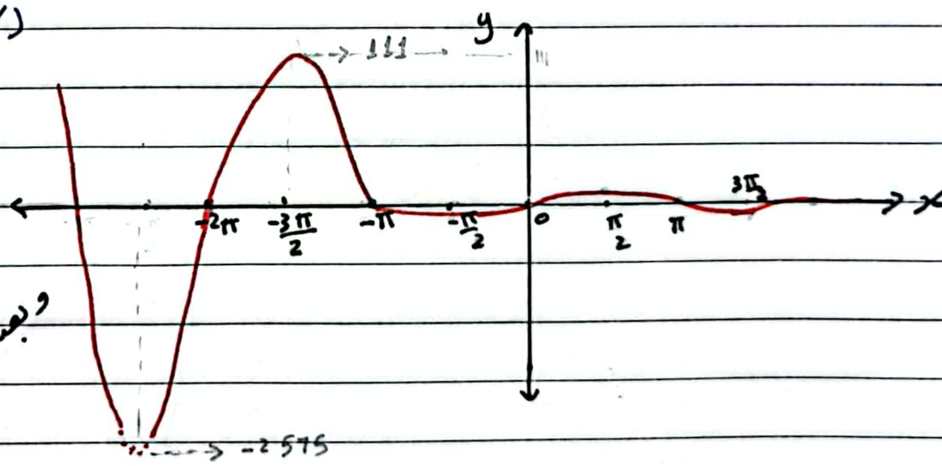
$\cos x=0 \Rightarrow x=\frac{\pi}{2}+n\pi$ (ستحدد نقط الانعطاف)

غير منتهية مثل $[\dots -\frac{\pi}{2} \quad \frac{\pi}{2} \quad \frac{3\pi}{2} \dots]$ حسب قيم n الصحيحة

$-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2} \Rightarrow f''<0$ التقعر للأسفل (جرب $x=0$ ←)

$\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2} \Rightarrow f''>0$ التقعر للأعلى (جرب $x=0$ ←)

(لاحظ تذبذب الرسم)



الرسم تقريبي يمكن ملاحظة من خلال برامج الرسم ويتم f على يسار الصفر تكون كبيرة جداً أو صغيرة جداً عند القيم القصوى المحلية وبعد (0) تقترب بشكل كبير من المحور (وتتذبذب)

تمرين (21) $f(x)=x^{\frac{3}{4}}-4x^{\frac{1}{4}}$

(تذكر مقام الأس $\frac{1}{4}$ و $\frac{3}{4}$ وهو 4 (الجذر الرابع))

فيكون معرف عندما $x\geq 0$: مجال الدالة)

$f'(x)=\frac{3}{4} x^{\frac{3}{4}-1} - 4(\frac{1}{4} x^{\frac{1}{4}-1})$

$=\frac{3}{4} x^{-\frac{1}{4}} - x^{-\frac{3}{4}}$ (بشرط $x\neq 0$) (لأنه غير معرف)

$=\frac{3}{4} x^{-\frac{1}{4}} - x^{-\frac{1}{4}}\times x^{-\frac{2}{4}} = x^{-\frac{1}{4}}[\frac{3}{4} - x^{-\frac{1}{2}}]$

$(x^{-\frac{1}{4}}\neq 0)$ $f'=0 \Rightarrow \frac{3}{4} - x^{-\frac{1}{2}}=0 \Rightarrow \frac{3}{4} = x^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{4}{3} = x^{\frac{1}{2}}$

نربع: $x=\frac{16}{9}$ حرجة

تابع تمرين (21) ص276 وجدنا: $f'(x)=\frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}-x^{-\frac{3}{4}}$ جرب 16

[f متناقصة : $x<\frac{16}{9} \Rightarrow f'<0$] جرب 1 [f متزايدة : $(x>\frac{16}{9} \Rightarrow f'(x)>0)$]

$f''(x)=\frac{3}{4}(-\frac{1}{4})x^{-\frac{5}{4}}-(-\frac{3}{4})x^{-\frac{7}{4}}$

عامل مشترك $x^{-\frac{5}{4}}\times\frac{3}{4}$ $\Rightarrow$ $=-\frac{3}{16}x^{-\frac{5}{4}}+\frac{3}{4}x^{-\frac{5}{4}}\times x^{-\frac{2}{4}}$

$-\frac{7}{4}=\frac{-5}{4}+\frac{-2}{4}$

$=\frac{3}{4}x^{-\frac{5}{4}}\left[-\frac{1}{4}+x^{-\frac{2}{4}}\right]$

* نهاية صغرى محلية عند $x=\frac{16}{9}$

$f''=0$ فعندما $(0\neq\frac{3}{4}x^{-\frac{5}{4}})$ سيكون: $-\frac{1}{4}+x^{-\frac{1}{2}}=0$

$\frac{1}{4}=x^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{1}{4}=\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow \frac{1}{4}=\frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow \sqrt{x}=4$

$x=16$

(جرب x=1 مثلاً أو 0) التقعر للأعلى $x<16 \Rightarrow f''(x)>0$ ↑

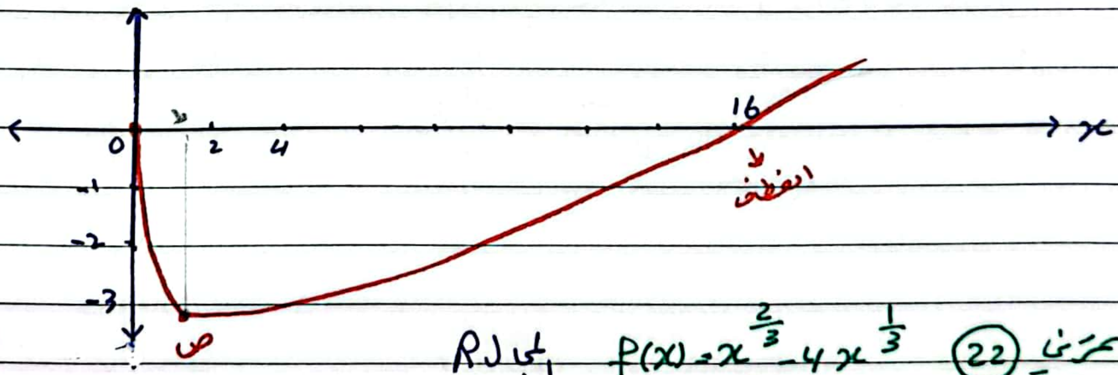
(جرب 20 مثلاً 25) التقعر للأسفل $x>16 \Rightarrow f''(x)<0$ ↓

نقطة انعطاف عند $x=16$ وهي $(16,0)$ (قد لا يظهر بدقة عند الرسم)

* ونلاحظ القيمة الحرجة $\frac{16}{9}$ سيكون:

اختبار المشتقة الثانية: $f''(\frac{16}{9})\approx 0.42>0$ ↑ (وبالتالي نهاية صغرى محلية عند $\frac{16}{9}$)

$(\frac{16}{9}\approx 1.8)$ عند نقطة $(1.8,-3.1)$



تمرين (22) $f(x)=x^{\frac{2}{3}}-4x^{\frac{1}{3}}$ المجال R

$f'(x)=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}-4(\frac{1}{3})x^{-\frac{2}{3}}$

عامل مشترك $x^{-\frac{1}{3}}\times\frac{2}{3}$ $=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}-\frac{4}{3}x^{-\frac{1}{3}}\cdot x^{-\frac{1}{3}}$ $\quad \frac{-2}{3}=\frac{-1}{3}+\frac{-1}{3}$

$=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}\left[1-2x^{-\frac{1}{3}}\right]$

$f'=0$ عندما $(0\neq\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$ موجب$)$ سيكون: $1-2x^{-\frac{1}{3}}=0$

$1=2x^{-\frac{1}{3}} \Rightarrow 1=\frac{2}{x^{\frac{1}{3}}} \Rightarrow x^{\frac{1}{3}}=2$

وبشرط $x\neq0$ ، $x=0$ حرجة

نكعب الطرفين: $x=2^{3}=8$ (قيمة حرجة)

$f''(x)=\frac{2}{3}(-\frac{1}{3})x^{-\frac{1}{3}-1}-\frac{4}{3}(-\frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}-1})$

$=\frac{-2}{9}x^{-\frac{4}{3}}+\frac{8}{9}x^{-\frac{5}{3}}=\frac{-2}{9}x^{-\frac{4}{3}}+\frac{8}{9}x^{-\frac{4}{3}}\cdot x^{-\frac{1}{3}}$

$f''=(x^{-\frac{4}{3}}\times\frac{2}{9})\left[-1+4x^{-\frac{1}{3}}\right]=0$

$f''=0$ عندما $(\frac{2}{9}x^{-\frac{4}{3}}\neq0)$ سيكون: $-1+4x^{-\frac{1}{3}}=0$

شرط $x\neq0$

تابع تمرين (22) ص276

وجدنا $f'' = \frac{-2}{9}x^{-\frac{4}{3}} + \frac{8}{9}x^{-\frac{5}{3}}$

$f''=0 \xrightarrow{\text{تكافئ}} 1 = 4x^{-\frac{1}{3}} \rightarrow 1 = \frac{4}{x^{\frac{1}{3}}} \rightarrow x^{\frac{1}{3}} = 4$

$x = 4^3 = 64$

x	$-\infty$		0		64		$+\infty$
إشارة f''		$- \; -$	غير معرف	$+ \; +$	0	$- \; - \; -$	
f والتقعر		↓	0	↑	-3.7	↓	

لإشارة f'' جرب نقط

$f''(-1) = -\frac{10}{9} < 0$

$f''(1) = \frac{2}{3} > 0$

$f''(70) = -2.2\times10^{-5} < 0$

التقعر للأعلى $0<x<64$

التقعر للأسفل: $x<0$ أو $x>64$

نقطتا انعطاف عند $x=0$ وعند $x=64$

هما: $(0,0)$ و $(64,0)$

ولتحديد القيم القصوى الصغرى المحلية من اختبار المشتقة الثانية

$x=0$ نقطة حرجة ويكون f'' غير معرف عندها (لا نقطة قيمة عظمى أو صغرى محلية)

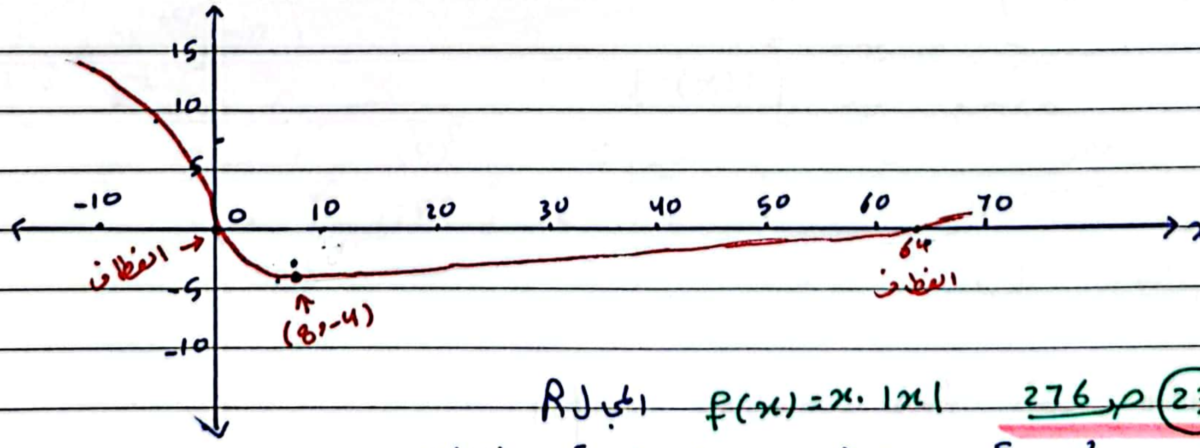
$\Leftarrow x=8$

$f''(8) = \frac{-2}{9}(8)^{-\frac{4}{3}} + \frac{8}{9}(8)^{-\frac{5}{3}} = \frac{1}{72} > 0$

↑ فستكون هناك قيمة صغرى محلية عند $x=8$ (نقطة $(8,-4)$)

طريقة ثانية علاقة تزايد وتناقص الدالة المعتمد على إشارة f'

x	$-\infty$		0		8		$+\infty$
f'		$- \; -$	غير معرف	$- \; -$	0	$+ \; +$	
f		↘	0	↘	-4 صغرى محلية	↗	



تمرين (23) ص276 $f(x) = x\cdot|x|$ المجال R

$f(x) = \begin{cases} x\cdot x & : x\ge 0 \\ x\cdot(-x) & : x<0 \end{cases} = \begin{cases} x^2 & : x\ge 0 \\ -x^2 & : x<0 \end{cases}$

$f'(x) = \begin{cases} 2x & : x\ge 0 \\ -2x & : x<0 \end{cases}$

$x=0$ نقطة حرجة

لا توجد قيم عظمى ولا قيم صغرى محلية

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		+		+	
f		↗	0	↗	

جرب قيم قبل 0 وبعد 0 ستجد f' موجب

تابع تمرين (23) ص276

$$f''(x)=\begin{cases}2 & : x>0\\ -2 & : x<0\end{cases}$$

(لاحظ $f''(0)$ غير موجود)

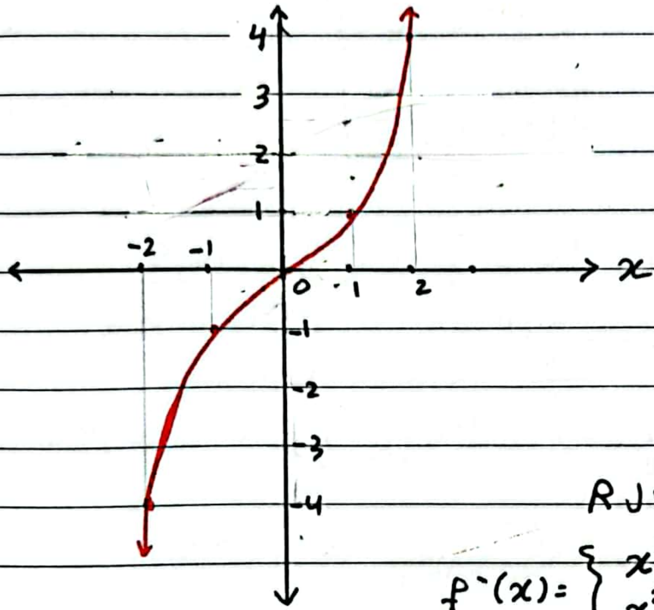
لكن:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f''	$-$	غير موجود	$+$
f	$\cap$		$\cup$

التقعر للأسفل عندما $x<0$

والتقعر للأعلى عندما $x>0$

نقطة $(0,0)$ نقطة انعطاف



تمرين (24) $f(x)=x^2\cdot|x|$ في المجال R

$$f(x)=\begin{cases}x^2\cdot x & : x\geq 0\\ x^2(-x) & : x<0\end{cases}=\begin{cases}x^3 & : x\geq 0\\ -x^3 & : x<0\end{cases}$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	0	$\nearrow$

جرب: $f'(-1)=-3<0$ ، $f'(1)=3>0$

توجد نقطة حرجة عندما $x=0$

توجد قيمة صغرى محلية عند $x=0$

$$f'(x)=\begin{cases}3x^2 & : x\geq 0\\ -3x^2 & : x<0\end{cases}$$

$$f''(x)=\begin{cases}+6x & : x\geq 0\\ -6x & : x<0\end{cases}$$

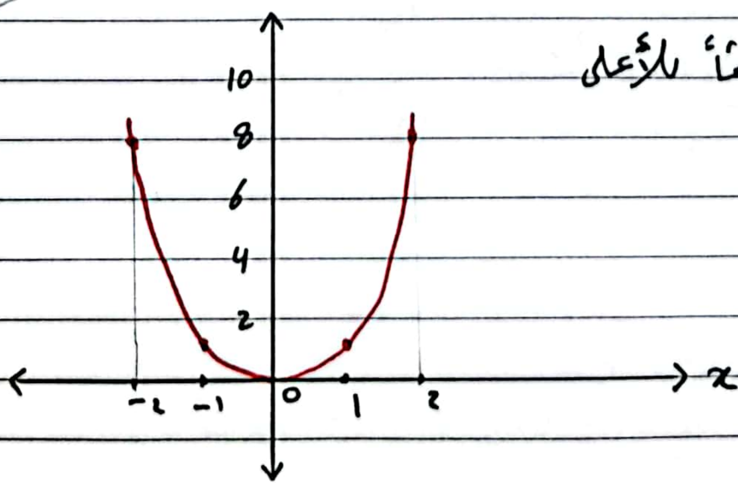
لاحظ:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f''	$+$		$+$
f	$\cup$	0	$\cup$

جرب: $f''(1)=6(1)>0$ ، $f''(-1)=-6(-1)=6>0$

لا توجد نقطة انعطاف

وتقعر المنحنى دائماً للأعلى



تمرين (25) ص276 $f(x)=x^{\frac{1}{5}}(x+1)$ المجال R

$f(x)=x^{\frac15}(x^1+1)=x^{\frac15}\times x^1+x^{\frac15}\times 1=(x)^{\frac65}+(x)^{\frac15}$

$f'(x)=\frac65(x)^{\frac65-1}+\frac15(x)^{\frac15-1}=\frac65x^{\frac15}+\frac15x^{-\frac45}$

لأن $\frac15=\frac55-\frac45$

$x^{\frac15}=(x)^1\cdot x^{-\frac45}$

عندما $f'=0$ يمكن حل المعادلة بالآلة (ولاحظ $x\neq0$ لوجود الأس سالب)

أو بالطريقة التالية: $\frac65x^{\frac15}+\frac15x^{-\frac45}=0$

$=\frac65(x)^1\cdot(x)^{-\frac45}+\frac15(x)^{-\frac45}=0$

عامل مشترك: $\frac15(x)^{-\frac45}$

$f'(x)=\frac15x^{-\frac45}\left[6x^1+1)\right]=0$

$6x+1=0$ فيكون $f'=0$ عندما: ($\frac15x^{-\frac45}\neq0$ وموجب)

$6x=-1\Rightarrow x=\frac{-1}{6}$ قيمة حرجة (وكذلك $x=0$ حرجة)

$f''(x)=\frac65\times\frac15(x)^{\frac15-1}+\frac15(-\frac45)(x)^{-\frac45-1}=\frac{6}{25}(x)^{-\frac45}-\frac{4}{25}(x)^{-\frac95}$

$f''=0\Rightarrow\frac{6}{25}x^{-\frac45}-\frac{4}{25}x^{-\frac45}\cdot x^{-\frac55}=0$

$-\frac95=-\frac45+-\frac55=-\frac45-1$

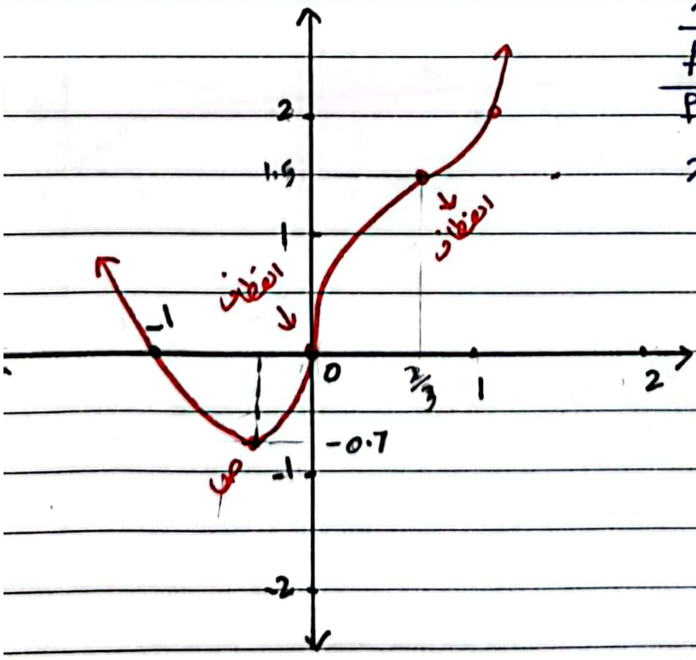
عامل مشترك $\frac{2}{25}x^{-\frac45}$

$\Rightarrow\frac{2}{25}x^{-\frac45}\left[3-2x^{-1}\right]=0$

$3-2x^{-1}=0\Leftarrow\left(\frac{2}{25}x^{-\frac45}\neq0\right)$

$3-\frac2x=0\Rightarrow3=\frac2x\Rightarrow x=\frac23$

x	$-\infty$		0		$\frac23$		$+\infty$
f''		+	غير معرفة	−	0	+	
f		∪	0	∩	1.5	∪	



توجد نقطتا انعطاف عند $x=0$ وعند $x=\frac23$

هما $(0,0)$ و $(\frac23,1.5)$

• وللتمييز هل نقطة القيمة الحرجة $-\frac16$ قيمة عظمى أو صغرى محلية سنأخذ اختبار المشتقة الثانية

$f''(-\frac16)=\frac{6}{25}(-\frac16)^{-\frac45}-\frac{4}{25}(-\frac16)^{-\frac95}>0$ ∪

توجد قيمة صغرى محلية عند $x=-\frac16$

$x\approx-0.2$

عند نقطة $(-0.2,-0.7)$ تقريباً

• (لاحظ $f''(0)$ غير معرفة لا نقطة قيمة عظمى ولا صغرى)

تمرين (26) ص 276 $\quad f(x)=\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$ المجال ℝ حيث $x\geq 0$ $\quad 1+\sqrt{x}\neq 0$

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(1+\sqrt{x})-\sqrt{x}\left(0+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{(1+\sqrt{x})^2}=$$

$$=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}+\cancel{\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}}-\cancel{\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}}}{(1+\sqrt{x})^2}=\frac{1}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}$$ (معرف بشرط $x>0$)

ونلاحظ أن البسط والمقام موجبان وبالتالي $f'(x)>0$ وستكون f متزايدة دوماً في $(0,\infty)$

(لا توجد نقاط حرجة)

* أسهل

طريقة أولى: نشتق بعد كتابة: $\quad$ لاحظ $f'(x)=\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{2(1+\sqrt{x})^2}$

طريقة ثانية (f' كما هي)

$$f''(x)=\frac{0-1\left[\frac{2}{2\sqrt{x}}(1+\sqrt{x})^2+2\sqrt{x}\times 2(1+\sqrt{x})\times\frac{1}{2\sqrt{x}}\right]}{\left[2\sqrt{x}\cdot(1+\sqrt{x})^2\right]^2}$$

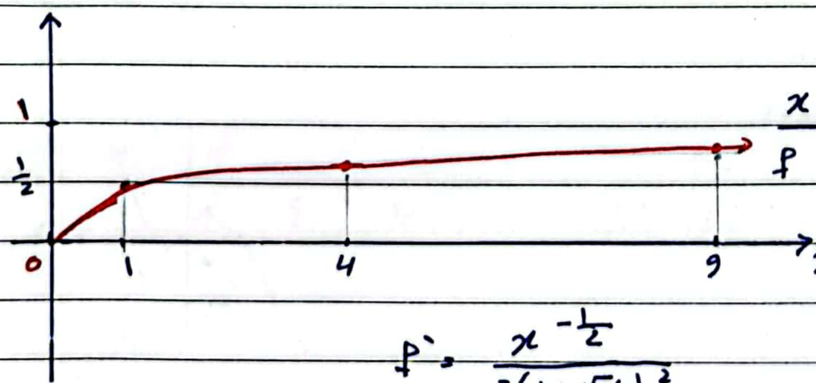
$$=\frac{-(1+\sqrt{x})\frac{1}{2\sqrt{x}}\left[+2(1+\sqrt{x})\ +4\sqrt{x}\right]}{\left[2\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2\right]^2}$$ لاحظ عامل مشترك $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ و $-(1+\sqrt{x})$ ؛

$$=\frac{-(1+\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}\ \frac{\left[+2+2\sqrt{x}+4\sqrt{x}\right]}{\times\left[2\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2\right]^2}=\frac{-(1+\sqrt{x})\left[2+6\sqrt{x}\right]}{2\sqrt{x}\times(2\sqrt{x})^2\left[1+\sqrt{x}\right]^{\cancel{4}\,3}}$$

$$f''(x)=\frac{-(2+6\sqrt{x})}{2\sqrt{x}\times 4x\times(1+\sqrt{x})^3}$$

لاحظ (−) إشارة البسط وكل حدود المقام موجبة ($x>0$ ؛) وبالتالي يوجد (−)

$f''(x)<0$ والتقعر للأسفل دائماً ولا توجد نقط انعطاف



يمكن الرسم بأخذ نقط مثل

x	0	1	4	9
f	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$

* طريقة أولى: لإيجاد f'' ، $\quad f'=\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{2(1+\sqrt{x})^2}$

$$f''=\frac{-\frac{1}{\cancel{2}}\left(x^{-\frac{1}{2}-1}\right)\times\cancel{2}(1+\sqrt{x})^2-x^{-\frac{1}{2}}\cdot\left[2\times\cancel{2}(1+\sqrt{x})\times\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x}}\right]}{\left[2(1+\sqrt{x})^2\right]^2}$$

$$=\frac{-x^{-\frac{1}{2}}\cdot x^{-1}(1+\sqrt{x})^2-2\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)(1+x)\times x^{-\frac{1}{2}}}{4(1+\sqrt{x})^4}$$

لها عامل مشترك $-\left[(1+\sqrt{x}),\ x^{-1}\right]$

$$=\frac{-x^{-1}\ (1+\sqrt{x})\left[(1+\sqrt{x})+2\right]}{4\ \cancel{(1+\sqrt{x})^4}\ (1+\sqrt{x})^3}$$

$$=\frac{-(3+\sqrt{x})}{4(1+\sqrt{x})^3}$$ ← سالب ← موجب $\rightarrow f''<0$ ↓

القيم تقريبية ولا تكون الحطابه بدقة

تمرين 27 ص 276 $f(x)=x^4-26x^3+x$ المجال R

$f'(x)=4x^3-78x^2+1$

$f'=0 \Rightarrow 4x^3-78x^2+1=0$

الحل باستخدام الآلة الحاسبة

$x_1 \approx 19.4993$

$x_2 \approx 0.1136$

$x_3 \approx -0.1129$

x	$-\infty$		-0.1129		0.1136		19.4993		$+\infty$
إشارة f'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
f		↘	-0.075	↗	0.076	↘	-48177.2	↗	

الدالة متزايدة في $(-0.1129, 0.1136) \cup (19.4993, +\infty)$

ومتناقصة في : $(-\infty, -0.1129) \cup (0.1136, 19.4993)$

توجد قيمة صغرى محلية عند $x=-0.1129$ وعند $x=19.4993$

وقيمة عظمى محلية عند $x=0.1136$

ويمكن تحديد نوعها باختبار المشتقة الثانية

$f''(-0.1129)=+17.5>0$ ص

$f''(0.1136)=-17.6<0$ ع

$f''(19.4993)=1520.87>0$ ص

$f''(x)=12x^2-156x$

$f''=0 : 12x^2-156x=0$ → $x=0$ ، $x=13$

x	$-\infty$		0		13		$+\infty$
إشارة f''		$+$	0	$-$	0	$+$	
f والتقعر		∪		∩		∪	

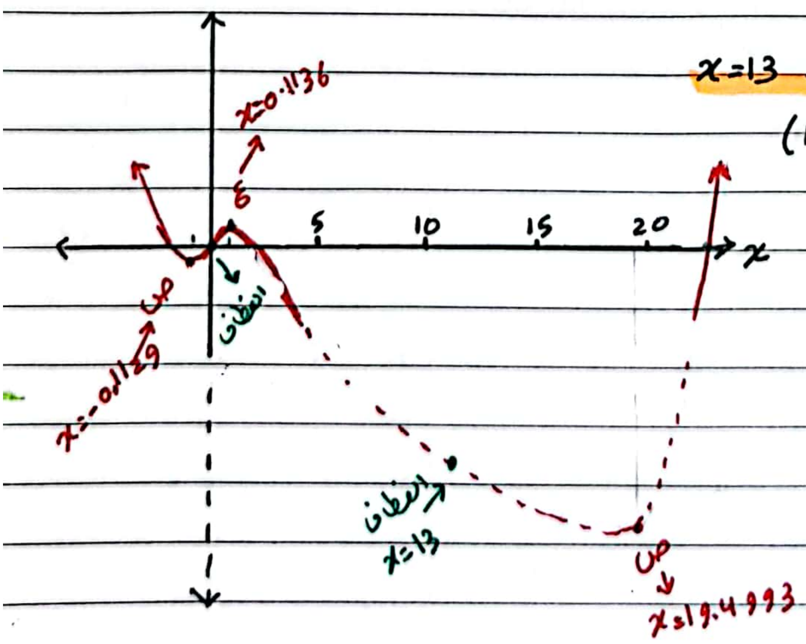
التقعر للأعلى في : $(-\infty, 0) \cup (13, +\infty)$

والتقعر للأسفل في $(0, 13)$

توجد نقطتا انعطاف عند $x=0$ وعند $x=13$

وهما $(0,0)$ $(13, -28548)$

يمكن الرسم بشكل تقريبي خصوصاً للأرقام الصغيرة جداً



تمرين 28 ص 276 $f(x)=2x^4-11x^3+17x^2$ المجال R (الدالة متصلة)

$f'(x)=8x^3-33x^2+34x$

(الحل بالآلة) نقاط حرجة $f'=0 \Rightarrow 8x^3-33x^2+34x=0$ ⟵ $x=0$ ، $x=2$ ، $x=\frac{17}{8}\approx 2.1$

$f''(x)=24x^2-66x+34$

اختبار المشتقة الثانية:

$f''(0)=34>0$ ↑ عند $x=0$ قيمة صغرى محلية

$f''(2)=24(2)^2-66(2)+34=-2$ ↓ عند $x=2$ قيمة عظمى محلية

$f''(\frac{17}{8})=24(\frac{17}{8})^2-66(\frac{17}{8})+34\approx 2.125>0$ ↑ عند $x=\frac{17}{8}$ قيمة صغرى محلية

أماكن الانعطاف : $f''=0 \Rightarrow 24x^2-66x+34=0$ ⟵ $x_1=\frac{33+\sqrt{273}}{24}$ ، $x_2=\frac{33-\sqrt{273}}{24}$

وبالتقريب: $x_1\approx 2.06$ و $x_2=0.69$

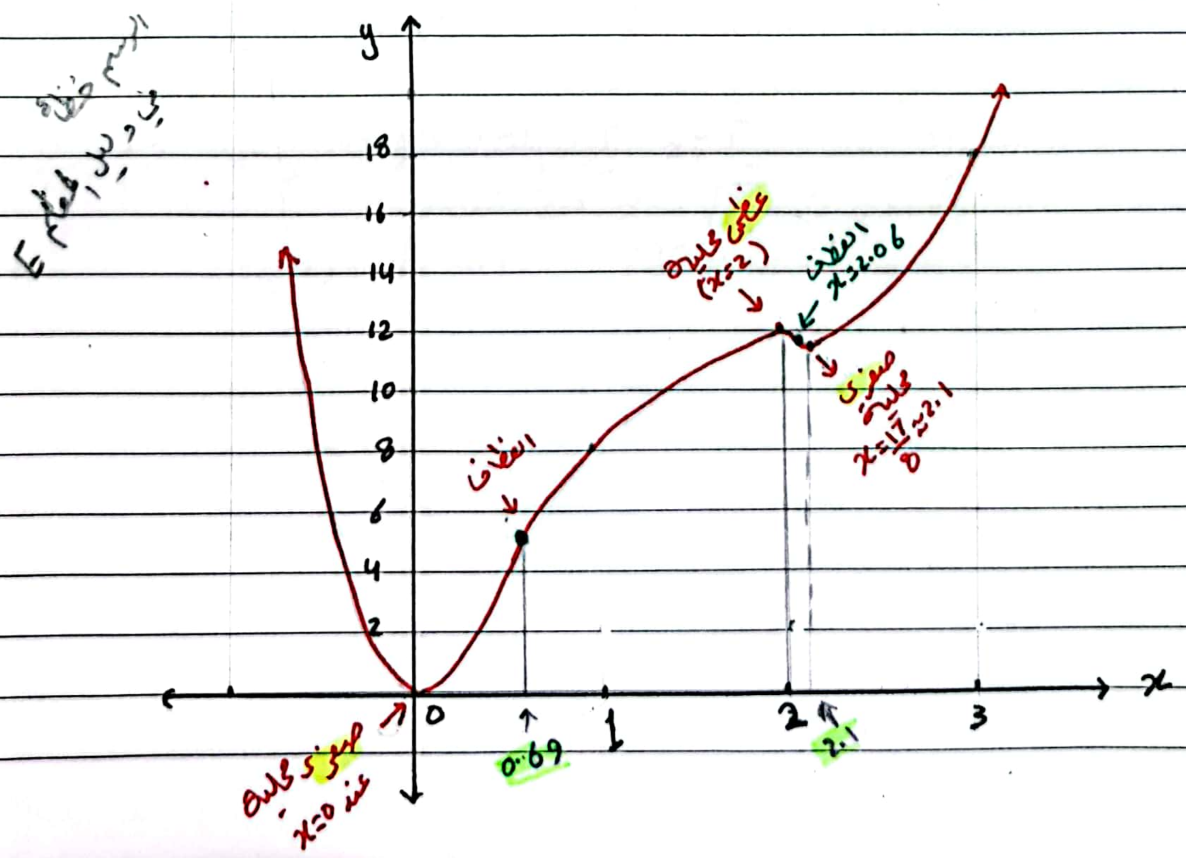
x	$-\infty$		0.69		2.06		$+\infty$
f''		+	0	−	0	+	
التقعر f		↑	≈ 4.9	↓	≈ 12	↑	

التقعر للأعلى في $(-\infty, 0.69)\cup(2.06, \infty)$

والتقعر للأسفل في $(0.69, 2.06)$

تقع نقطتا الانعطاف عند $x\approx 0.69$ و $x\approx 2.06$

وهما تقريباً: $(2.06, 12)$ و $(0.69, 4.9)$



تمرين (29) ص 276 $\qquad f(x)=\sqrt[3]{2x^2-1}$ $\qquad$ المجال R

$$f(x)=(2x^2-1)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{3}(2x^2-1)^{-\frac{2}{3}}\cdot(4x)$$

$$=\frac{4x}{3(2x^2-1)^{2/3}}$$

بشرط: $\left(\begin{array}{l} 2x^2-1\neq 0 \\ 2x^2\neq 1 \\ x\neq \mp\sqrt{\frac{1}{2}} \end{array}\right.$ حرجة

ونلاحظ عندما $f'(x)=0$ فإن ($4x=0 \rightarrow x=0$ حرجة)

(نشتق قاعدة الضرب) $\qquad$ وجدنا $f'(x)=\frac{4x}{3}\cdot(2x^2-1)^{-\frac{2}{3}}$

$-\frac{2}{3}=-\frac{5}{3}+\frac{3}{3}$

$$f''(x)=\frac{4}{3}\cdot(2x^2-1)^{-\frac{2}{3}}+\frac{4x}{3}\left[-\frac{2}{3}(2x^2-1)^{-\frac{5}{3}}\cdot 4x\right]$$

نبحث عن عامل مشترك بملاحظة

$$=\frac{3\times 4}{3\times 3}(2x^2-1)^{-\frac{5}{3}+\frac{3}{3}}-\frac{3.2}{9}x^2(2x^2-1)^{-\frac{5}{3}}$$

$$=\frac{12}{9}(2x^2-1)^{-\frac{5}{3}}\cdot(2x^2-1)^{1}-\frac{4}{9}\times 8x^2(2x^2-1)^{-\frac{5}{3}}$$

$$=\frac{4}{9}(2x^2-1)^{-\frac{5}{3}}\left[3(2x^2-1)-8x^2\right]$$

$$=\frac{4}{9}(2x^2-1)^{-\frac{5}{3}}\left[-2x^2-3\right]$$

بشرط $\frac{4}{9}(2x^2-1)^{-\frac{5}{3}}\neq 0$

وعندما $f''=0$ سيكون $-3x^2-3=0$ ليس لها حل

والنقط الحرجة: $\rightarrow x=\mp\sqrt{\frac{1}{2}}$ تكون f'' غير معروفة عندها (لا نعرف هل هي قيمة صغرى محلية)

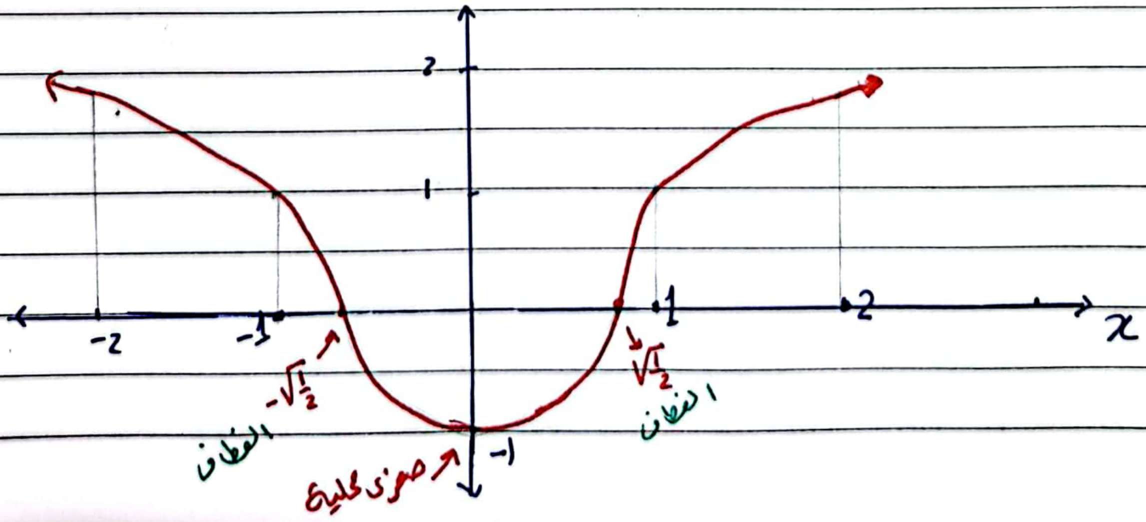
$x=0$ تكون: $\cup$ $f''(0)<0$

$(y=1)$ ، سيكون عند $x=0$ قيمة صغرى محلية

وإشارة f'' تناقش (الشذوذ) عند $x\mp\sqrt{\frac{1}{2}}$ يكون المقدار $\frac{4}{9}(2x^2-1)^{-\frac{5}{3}}=0$ وستتغير الإشارة

وستوجد عند $x=+\sqrt{\frac{1}{2}}$ و $x=-\sqrt{\frac{1}{2}}$ نقط انعطاف

$x\simeq 0.71$ $\qquad$ عند النقطتين: $(-\sqrt{\frac{1}{2}},0)\ (\sqrt{\frac{1}{2}},0)$



قيم غير منطقية لا تساعد الطالب على الرسم بدقة

تمرين (31) ص 276 +14 $f(x) = x^4 - 16x^3 + 42x^2 - 39.6x$ الحل R

$f'(x) = 4x^3 - 48x^2 + 84x - 39.6$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 9.9988$ ، $x_2 = 1.1060$ ، $x_3 = 0.8952$ } قيم حرجة

x	$-\infty$		0.8952		1.1060		9.9988		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
f		↘	1.372 ص	↗	1.782 ع	↘	-2182.0 ص	↗	

الدالة متزايدة في $(0.8952, 1.106) \cup (9.9988, +\infty)$

ومتناقصة في : $(-\infty, 0.8952) \cup (1.1060, 9.9988)$

$f''(x) = 12x^2 - 96x + 84$

اختبار المشتقة الثانية

$f''(0.8952) > 0$ (↑) قيمة صغرى محلية عند $x = 0.8952$

$f''(1.1060) < 0$ (↓) قيمة عظمى محلية عند $x = 1.1060$

$f''(9.9988) > 0$ (↑) قيمة صغرى محلية عند $x = 9.9988$

$\Leftarrow f''(x) = 0$

$12x^2 - 96x + 84 = 0 \rightarrow x_1 = 1$ ، $x_2 = 7$

x	$-\infty$		1		7		$+\infty$
f''		$+$	0	$-$	0	$+$	
f والتقعر		∪		∩		∪	

التقعر للأسفل في $(1, 7)$

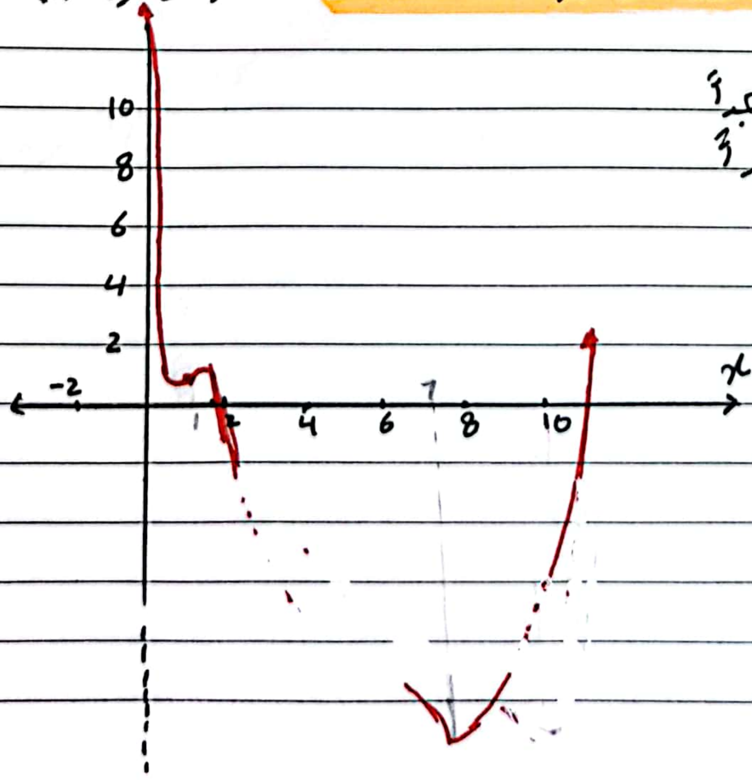
التقعر للأعلى في $(-\infty, 1) \cup (7, +\infty)$

توجد نقطتا انعطاف عند $x = 1$ وعند $x = 7$ (الحل $(1, 1.4)$ ، $(7, 1292.2)$)

لاحظ الرسم صعب

مع وجود قيم كبيرة جداً

وقيم صغيرة جداً



قيم غير منطقية
لوت دم عالي/كم بدقة

تمرين (32) ص 276 المجال R

$f(x) = x^4 + 32x^3 - 0.02x^2 - 0.8x$

$f'(x) = 4x^3 + 96x^2 - 0.04x - 0.8$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 \approx -24$

$x_2 = 0.09132$

$x_3 = -0.09125$

قيم حرجة

$f''(x) = 12x^2 - 192x - 0.04$

$f''(-24) > 0$ (↑) قيمة صغرى محلية عند : $x = -24$

$f''(0.09132) > 0$ (↑) وقيمة صغرى محلية عند : $x = 0.0132$

$f''(-0.09125) < 0$ (↓) قيمة عظمى محلية عند : $x = -0.09125$

ونلاحظ عندما $f''(x) = 0$:

$12x^2 - 192x - 0.04 = 0 \rightarrow x_1 \approx 16$

$\rightarrow x_2 = -2.08 \times 10^{-4}$

≈ -0.0002

توجد نقطتا انعطاف عند $x = 16$ و $x = -0.0002$

(الرسم ليس سهلاً بوجود أرقام صغيرة جداً (بقيمها المطلقة)

موجود في دليل المعلم E ص 193 (كبير و مقرب)

تمرين 33 ص 276 $f(x) = x\sqrt{x^2-4}$ معرف عندما: $x^2-4 \geq 0$

$x^2 \geq 4 \to x \geq 2$

أو $x \leq -2$

المجال $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$

(الرسم جزئين منفصلين)

$f'(x) = 1 \cdot \sqrt{x^2-4} + x\left[\frac{2x}{2\sqrt{x^2-4}}\right]$

$= \sqrt{x^2-4} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}}$ توحيد المقامات:

$= \frac{\sqrt{x^2-4}\cdot\sqrt{x^2-4} + x^2}{\sqrt{x^2-4}} = \frac{x^2-4+x^2}{\sqrt{x^2-4}}$

$f'(x) = \frac{-4+2x^2}{\sqrt{x^2-4}}$ (المقام موجب دوماً والبسط موجب في المجال)

الدالة متزايدة دوماً $\Leftarrow f'>0$

$-4+2x^2=0 \Leftarrow f'=0$

$x=-\sqrt{2}$ ، $x=+\sqrt{2}$ قيم حرجة خارج المجال

• ملاحظة في الأسفل

$f''(x) = \frac{4x\left(\sqrt{x^2-4}\right) - (-4+2x^2)\times\frac{2x}{2\sqrt{x^2-4}}}{\left[\sqrt{(x^2-4)}\right]^2}$

نضرب البسط والمقام بـ $\sqrt{x^2-4}$

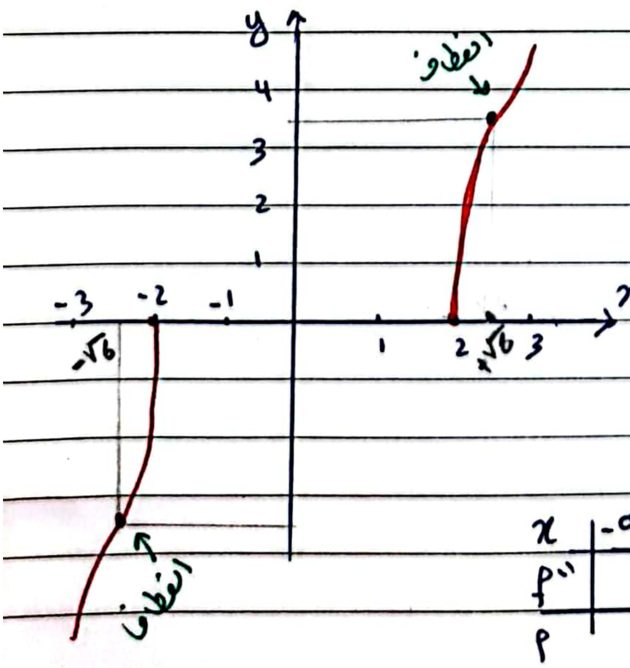
$= \frac{4x\sqrt{x^2-4}\times\sqrt{x^2-4} - (-4+2x^2)\times\frac{x}{\sqrt{x^2-4}}\times\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x^2-4}\times(x^2-4)}$

$= \frac{4x(x^2-4)+4x-2x^3}{(x^2-4)^{\frac{3}{2}}} = \frac{4x^3-16x+4x-2x^3}{(x^2-4)^{\frac{3}{2}}}$

$f''(x) = \frac{2x^3-12x}{(x^2-4)^{\frac{3}{2}}} = 0 \to 2x^3-12x=0 \to x=0$ ، $x=\pm\sqrt{6}$

$x=0$ خارج المجال

نقط انعطاف $x=\mp\sqrt{6} \approx \mp 2.4$ وهي تقريباً: $(-\sqrt{6}, -3.5)$ $(\sqrt{6}, 3.5)$



• ملاحظة:

الدالة متزايدة دوماً

لاحظ جدول دراسة إشارة f'

x	$-\infty$		-2		$-\sqrt{2}$		$+\sqrt{2}$		2		∞
f'		+ +		+	0	− − − خارج المجال	0	+		+ +	
f		$(x<-2 ; f'>0)$ ↗	0						0	↗ $f>2$	

x	$-\infty$		$-\sqrt{6}$		-2	0	2		$\sqrt{6}$		∞
f''		−	0	+		خارج المجال		−	0	+	
f		↓	انعطاف	↑				↓	انعطاف	↑	

تمرين 34 ص 276

$f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+4}}$ معرفة عندما $x^2+4>0$ محقق دوماً

(المجال $\mathbb{R}$)

$$f'(x) = \frac{2\sqrt{x^2+4} - 2x \times \frac{2x}{2\sqrt{x^2+4}}}{(\sqrt{x^2+4})^2}$$

$$= \frac{2\sqrt{x^2+4} \times \sqrt{x^2+4} - \frac{2x}{\sqrt{x^2+4}} \times \sqrt{x^2+4}}{\sqrt{x^2+4}\,(x^2+4)}$$

نضرب البسط والمقام بـ $\sqrt{x^2+4}$

$$= \frac{2(x^2+4) - 2x^2}{(x^2+4)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2x^2+8-2x^2}{(x^2+4)^{\frac{3}{2}}} = \frac{8}{(x^2+4)^{\frac{3}{2}}} \neq 0$$

لا توجد نقط حرجة و $f'(x)>0$ دوماً و الدالة متزايدة على مجالها

$$f'(x) = 8(x^2+4)^{-\frac{3}{2}} \Rightarrow f''(x) = 8\left(-\frac{3}{2}\right)(x^2+4)^{-\frac{3}{2}-1} \times 2x$$

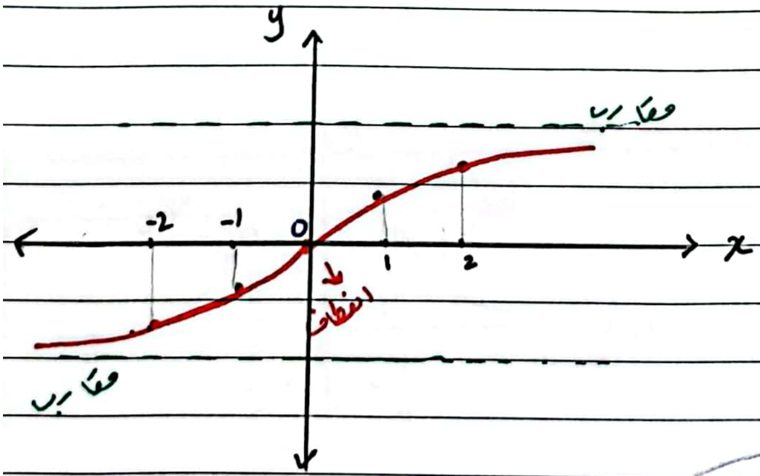
$$= -24x(x^2+4)^{-\frac{5}{2}}$$

$$= \frac{-24x}{(x^2+4)^{\frac{5}{2}}}$$ المقام موجب دوماً

$f''(x)=0 \Rightarrow -24x=0 \Rightarrow x=0$ نقطة انعطاف

$f''(-1)>0$ جرب — $f''(1)<0$ جرب

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f''		$+ + +$	0	$- - -$	
f		$\cup$	0	$\cap$	



التقعر للأعلى عندما $x<0$

والتقعر للأسفل عندما $x>0$

لاحظ عندما $x \to \mp\infty$

$$\lim_{x\to\mp\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2+4}} = \lim_{x\to\mp\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2}}$$

$x>0$: $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{x} = 2 \Rightarrow y=2$ مقارب

$x<0$: $\lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{-x} = -2 \Rightarrow y=-2$ مقارب

يظهر الرسم بدقة باستخدام برامج

تمرين 35 ص 276 $f(x)=\tan^{-1}\left(\frac{1}{x^2-1}\right)$ معرفة عندما $x^2-1\neq 0$ ، $x\neq \mp 1$

المجال R ماعدا $x=\mp 1$

تذكر $\left[\tan^{-1} f(x)\right]' = \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}$

$$f'(x)=\frac{\left(\frac{1}{x^2-1}\right)'}{1+\left(\frac{1}{x^2-1}\right)^2}=\frac{\frac{0-1(2x)}{(x^2-1)^2}}{1+\frac{1}{(x^2-1)^2}}$$

توحيد المقامات (في المقام)

$$=\frac{\frac{-2x}{(x^2-1)^2}}{\frac{(x^2-1)^2+1}{(x^2-1)^2}}$$

$$=\frac{-2x}{(x^2-1)^2+1}=\frac{-2x}{x^4-2x^2+1+1}=\frac{-2x}{x^4-2x^2+2}$$

مفكوك التربيع

$f'(x)=0 \Leftarrow (-2x=0 \Rightarrow x=0$ حرجة$)$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
f'		$+$	غير معرفة	$+$	0	$-$	غير معرفة	$-$	
f		f متزايدة		f متزايدة	$(-\frac{\pi}{4})$ -0.7	f متناقصة		f متناقصة	

لاحظ $f''(0)<0$ إذاً قيمة عظمى محلية عنده

للدالة قيمة عظمى محلية عند $x=0$

$$f''(x)=\frac{-2(x^4-2x^2+2)-(-2x)(4x^3-4x)}{(x^4-2x^2+2)^2}$$

$$=\frac{-2x^4+4x^2-4+8x^4-8x^2}{(x^4-2x^2+2)^2}$$

$$=\frac{6x^4-4x^2-2}{(x^4-2x^2+2)^2}$$

المقام موجب وعندما $f''=0 \Leftarrow$

$6x^4-4x^2-2=0$

يمكن حل هذه المعادلة بالآلة بفرض $x^2=u$

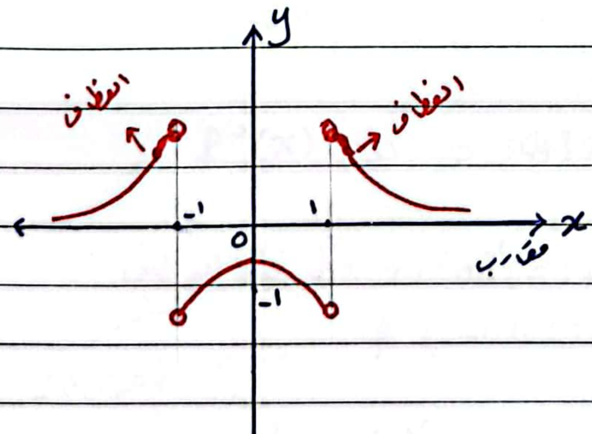
$6u^2-4u-2=0 \rightarrow u\approx 1.215$

$\rightarrow u\approx -0.548$ مرفوض

$x^2=1.215 \rightarrow x=+1.102$

$\rightarrow x=-1.102$ نقط انعطاف

بتقريب الرسم البياني ستظهر



$x\rightarrow 1^- \Rightarrow y\rightarrow -1.5$

$x\rightarrow 1^+ \Rightarrow y\rightarrow 1.5$

$x\rightarrow -1^- \Rightarrow y\rightarrow 1.5$

$x\rightarrow -1^+ \Rightarrow y\rightarrow -1.5$

لاحظ انقطاع الرسم عند $x=\mp 1$

ولاحظ عندما $x\rightarrow \mp\infty$ فإنه $\lim_{x\rightarrow\mp\infty}\tan^{-1}\left(\frac{1}{x^2-1}\right)=0$

فيكون $x=0$ مقارب أفقي

صعب على الطلاب تحديد نوع القيم وكذلك الرسم (فقط برامج الرسم)

تمرين (36) ص 276 $f(x)=e^{-2x}\cdot\cos x$ المجال R

$f'(x) = -2e^{-2x}\cdot\cos x + e^{-2x}(-\sin x)$

$= e^{-2x}(-2\cos x - \sin x)$

(موجب $e^{-2x} \neq 0$) وعندما $f'=0$ سيكون:

$-2\cos x - \sin x = 0 \Rightarrow \frac{-2\cancel{\cos x}}{\cancel{\cos x}} = \frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow$

$\tan x = -2 \Rightarrow x = \tan^{-1}(-2) \approx -1.12$ راديان

(أحد الحلول) ويكون مجموعة الحلول لنقاط حرجة $\Rightarrow x = \tan^{-1}(-2) + n\pi$: (n عدد صحيح)

لاحظ مجموعة الحلول إما في الربع الرابع (-1.12) أو في الربع الثاني $(-1.12+\pi)$

وتعود للربع الرابع $(-1.12+2\pi)$ ثم للربع الثاني $(-1.12+3\pi)$ وهكذا .....

الصيغة العامة للحلول في الربع الرابع: $-1.12+2\pi n$

الثاني: $-1.12+\pi+2\pi\cdot n$

قيم حرجة $= -1.12+(1+2n)\pi$

$f''(x) = -2e^{-2x}(-2\cos x - \sin x) + e^{-2x}(+2\sin x - \cos x)$

عامل مشترك e^{-2x}

$= e^{-2x}\left[-2(-2\cos x - \sin x) + 2\sin x - \cos x\right]$

$= e^{-2x}\left[+4\cos x + 2\sin x + 2\sin x - \cos x\right]$

$= e^{-2x}\left[3\cos x + 4\sin x\right]$

$f''(x) = 0 \Rightarrow 3\cos x + 4\sin x = 0 \Rightarrow \tan x = \frac{-3}{4}$

$x = \tan^{-1}\left(\frac{-3}{4}\right) \approx -0.64$ راديان

أحد الحلول ويكون مجموعة الحلول $x = \tan^{-1}\left(\frac{-3}{4}\right) + n\pi$ تعطي نقط انعطاف

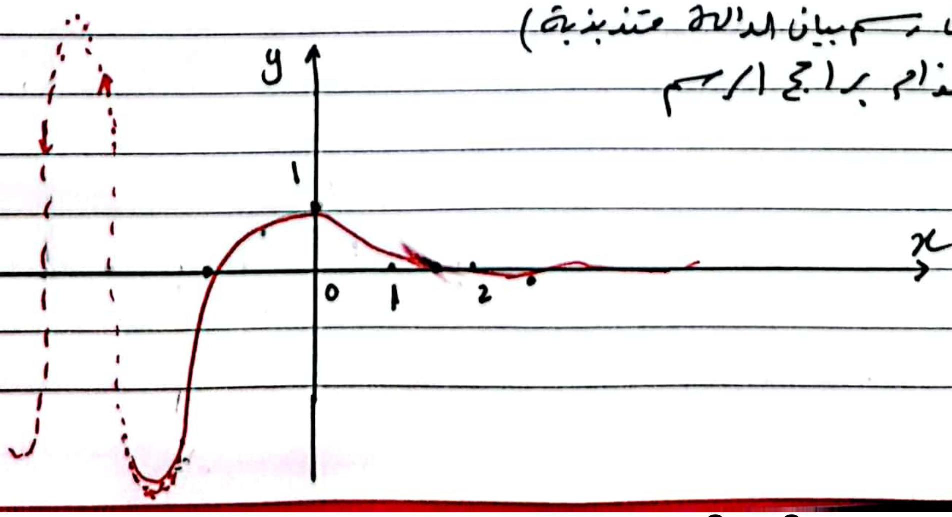
$f''(-1.12+2n\pi) < 0$ عند $-1.12+2n\pi$ قيم عظمى محلية

$f''(-1.12+(1+2n)\pi) > 0$

عند $-1.12+(2n+1)\pi$ قيم صغرى محلية

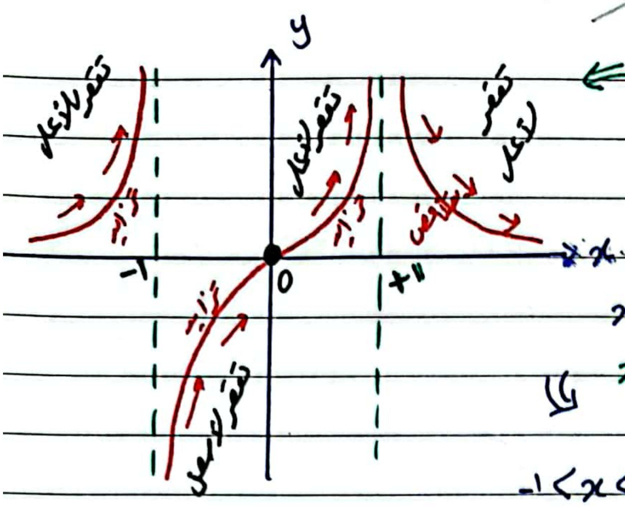
جرب أحد القيم وعوض في f'' واختر أي n

(سيكون رسم بيان الدالة متذبذبة) باستخدام برامج الرسم



رسوم متوقعة

تمرين 37 ص 276 مطلوب رسم (هذا رسم متوقع) ⇐



$f(0)=0$ تحدد نقطة $(0,0)$

$f'(x)>0$ لكل $x<-1$ و $-1<x<+1$

تزايد الدالة في

$f'(x)<0$ لكل $x>1$: تناقص الدالة عندما $x>1$

$f''(x)>0$ لكل $x<-1$ و $0<x<1$ و $x>1$

التقعر نحو الأعلى في ... وفي

$f''(x)<0$ لكل $-1<x<0$: التقعر للأسفل في: $-1<x<0$

لم يعط أي قيم عند 1 و -1 (خطوط تقارب $x=\mp 1$)

تمرين 38

$f(0)=2$ نقطة $(0,2)$

$f'(x)>0$ لكل x الدالة متزايدة دوماً

$f'(0)=1$: ميل المماس عند $x=0$ يساوي 1

(موازي لمنصف الربع الأول)

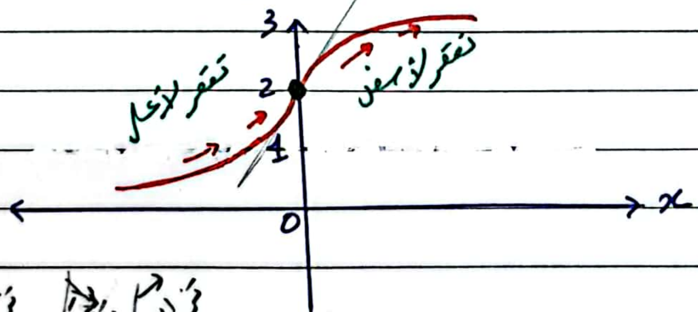
$f''(x)>0$ لكل $x<0$: التقعر للأعلى على يسار (0)

$f''(x)<0$ لكل $x>0$ التقعر للأسفل على يمين (0)

لاحظ $f''(0)$ غير معروف

يتحول المماس القاطع عند $(0,2)$

رسم محتمل :



تمرين 39

$f(0)=0$ نقطة $(0,0)$

$f(-1)=-1$ نقطة $(-1,-1)$

$f(1)=1$ نقطة $(1,1)$

$f'(x)>0$ لكل $x<-1$ و $0<x<1$

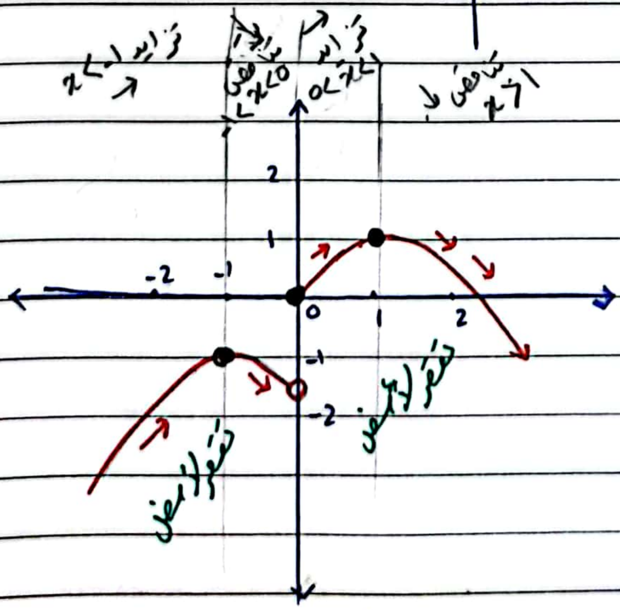
f متزايدة في ... غير محددة عند

$f'(x)<0$ لكل : $-1<x<0$ و $x>1$

f متناقصة في

$f''(x)<0$ لكل : $x<0$ و $x>0$

f تقعر للأسفل دوماً (غير محدد عند (0))



رسم محتمل

تمرين (40) ص 276 مطلوب رسم f :

$f(1)=0$ نقطة (1,0)

$f'(x)<0$ لكل $x>1$: f متناقصة عندما $x>1$

$f'(x)>0$ لكل : $x<1$: f متزايدة عندما $x<1$

$f''(x)<0$ لكل $\underbrace{x<1}$ و $\underbrace{x>1}$

التقعر للأسفل دوماً

$f'(1)$ غير موجود ← مماس رأسي أو رأس مدبب

إذن (1,0) رأس مدبب

رسم محكم: