

2020-2021

الرياضيات

نسخة الإمارات العربية المتحدة



الصف
12
عام

Mc
Graw
Hill

McGraw-Hill Education

الرياضيات

نسخة الإمارات العربية المتحدة

المسار العام



برنامج محمد بن راشد
للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid
Smart Learning Program



Mc
Graw
Hill

FM. Front Matter, from Integrated Math IV © 2012

1. Functions from a Calculus Perspective, from Integrated Math IV Chapter 1 © 2012

2. Power, Polynomial, and Rational Functions, from Precalculus Chapter 2 © 2014

3. Exponential and Logarithmic Functions, from Integrated Math IV Chapter 3 © 2012

4. Trigonometric Functions, from Precalculus Chapter 4, Lessons 1-6 © 2014

5. Trigonometric Identities and Equations, from Precalculus Chapter 5 © 2014

EM. Lesson Summaries, from Integrated Math IV © 2012

& Appendix, from Bluman Elementary Statistics;9e Appendix © 2015

& End Matter/Glossary, from Integrated Math IV © 2012

صورة الغلاف: Idea Studio/Shutterstock.com

mheducation.com/prek-12



جميع الحقوق محفوظة © للعام 2020 لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

جميع الحقوق محفوظة. لا يجوز إعادة إنتاج أي جزء من هذا المنشور أو توزيعه في أي صورة أو بأي وسيلة كانت أو تخزينه في قاعدة بيانات أو نظام استرداد من دون موافقة خطية مسبقة من McGraw-Hill Education. بما في ذلك، على سبيل المثال لا الحصر، التخزين على الشبكة أو الإرسال عبرها أو البث لأغراض التعليم عن بُعد.

الحقوق الحصرية للتصنيع والتصدير عائدة لمؤسسة McGraw-Hill Education. لا يمكن إعادة تصدير هذا الكتاب من البلد الذي باعته له McGraw-Hill Education. هذه النسخة الإقليمية غير متاحة خارج أوروبا والشرق الأوسط وإفريقيا.

طُبِعَ في دولة الإمارات العربية المتحدة. النسخة الإلكترونية

رقم النشر الدولي: 978-1-44-700073-0 (نسخة الطالب)
MHID: 1-44-700073-0 (نسخة الطالب)

رقم النشر الدولي: 978-1-44-700075-4 (نسخة المعلم)
MHID: 1-44-700075-7 (نسخة المعلم)

رقم النشر الدولي: 978-1-44-709366-4 (نسخة الطالب)
MHID: 1-44-709366-6 (نسخة الطالب)

1 2 3 4 5 6 7 8 9 XXX 22 21 20 19 18 17



صاحب السّمو الشّيخ خليفة بن زايد آل نهيان
رئيس دولة الإمارات العربيّة المتّحدة، حفظه الله

”يجب التزوّد بالعلوم الحديثة والمعارف الواسعة، والإقبال عليها
بروح عالية ورغبة صادقة؛ حتى تتمكّن دولة الإمارات خلال
الألفيّة الثالثة من تحقيق نقلة حضاريّة واسعة.“

من أقوال صاحب السّمو الشّيخ خليفة بن زايد آل نهيان

ملخص المحتويات

الوحدة 1 الدوال من منظور حساب التفاضل والتكامل

2 دوال القوة والدوال كثيرة الحدود والدوال النسبية

3 الدوال الأسية واللوغاريتمية

4 الدوال المثلثية

5 المتطابقات والمعادلات المثلثية

6 أنظمة المعادلات والمصفوفات

7 القطوع المخروطية والمعادلات الوسيطة

8 المتجهات

9 الاحداثيات القطبية والأعداد المركبة

10 الاحصاء والاحتمالات

11 التفاضل والتكامل

كتيب الطالب

برنامج محمد بن راشد
لتعليم الذكاء
Mohammed Bin Rashid
Smart Learning Program

المؤلفون

يضمن يضمّن مؤلفونا الرئيسون أن تكون برامج McGraw-Hill للرياضيات مخططة بشكل رأسي بطريقة متوافقة من خلال البدء مع الأخذ في الاعتبار الغاية النهائية - ألا وهي تحقيق النجاح واجتياز المرحلة الثانوية وما يليها من مراحل. ونظرًا لعملية "التخطيط العكسي" لحتوى برامج المدارس الثانوية، فإن جميع برامج الرياضيات لدينا واضحة المعالم من حيث نطاقها وتسلسلها.

المؤلفون الرئيسون

ج. أ. كارتر حاصل على درجة الدكتوراه. مدير مساعد التدريس والتعليم مدرسة أدلاي إي ستيفنسون الثانوية لينكولنشائر، إلينوي جوانب الخبرة: استخدام التكنولوجيا والوسائل التعليمية لتصوير المفاهيم. تحقيق فهم الرياضيات لدى المتعلمين باللغة الإنجليزية	جلبرت جاي كوفاس، حاصل على درجة الدكتوراه. أستاذ تعليم الرياضيات جامعة ولاية تكساس - سان ماركوس سان ماركوس، تكساس جوانب الخبرة: تطبيق المفاهيم والمهارات في سياقات رياضية ثرية، عمليات تمثيلية رياضية
روجر داي، حاصل على درجة الدكتوراه في التعليم من المجلس الوطني رئيس قسم الرياضيات مدرسة بوتنيك تاون شيب الثانوية بوتنيك، إلينوي جوانب الخبرة: فهم وتطبيق الاحتمال، والإحصائيات، وتعليم مدرّس الرياضيات	كارول مالوي حاصلة على درجة الدكتوراه. أستاذ مساعد جامعة نورث كارولينا في تشابيل هيل تشابيل هيل، نورث كارولينا جوانب الخبرة: عمليات التمثيل والتفكير النقدي ونجاح الطالب في الجبر 1

مؤلفو البرنامج

لواجين براين مدرس رياضيات أفضل معلم بولاية تينيسي لعام 2009 مدرسة ووكر فالي الثانوية كليفلاند، تينيسي جوانب الخبرة: المشاريع الهادفة التي تسعى إلى جعل التفاضل والتكامل ومقدمته أقرب إلى الواقع بالنسبة إلى الطلاب	الدكتورة بيرتشي هوليدي، أستاذ التعليم. المستشار القومي للرياضيات سيلفر سبرينج، ماريلاند جوانب الخبرة: استخدام الرياضيات لصياغة وفهم بيانات العالم الفعلي، وتأثير الرسومات على الفهم الرياضي
	فايكن هوفيسبيان أستاذ الرياضيات كلية ريو هوندو وايتيه، كاليفورنيا

مؤلف مشارك

جاي مكتاي

مؤلف ومستشار تعليمي
 كولومبيا، ميريلاند



الدوال من منظور التفاضل والتكامل

1

أول

3	 الاستعداد للوحدة 1
4	 الدوال 1-1
13	 تحليل التمثيلات البيانية للدوال والعلاقات 1-2
24	 الاتصال والسلوك الطرفي والنهايات 1-3
34	 القيم القصوى ومتوسط معدل التغير 1-4
44	 اختبار منتصف الوحدة ■
45	 الدوال الأصلية والتحويلات 1-5
56	 التوسع: مختبر تقنية التمثيل البياني المتباينات غير الخطية. ■
57	 العمليات على الدوال وتركيب الدوال 1-6
65	 العلاقات والدوال العكسية 1-7
74	 التوسع: معمل تكنولوجيا الرسم البياني تمثيل المعكوسات بيانيًا بأستخدام المعادلات الوسيطة
	 التقويم
76	 دليل الدراسة والمراجعة ■
81	 تدريب على الإختبار ■
82	 الربط مع حساب التفاضل والتكامل المتقدم: معدل التغير عند نقطة ■

برنامج محمد بن راشد
العلم الذكي
Mohammed Bin Rashid
Smart Learning Program



دوال القوة والدوال كثيرة الحدود والدوال النسبية

2

85	الاستعداد للوحدة 2
86	2-1 دوال القوة والدوال الجذرية
96	الاستكشاف: مختبر تقنية التمثيل البياني سلوك التمثيلات البيانية
97	2-2 الدوال كثيرة الحدود
108	التوسع: مختبر تقنية التمثيل البياني السلوك الخفي للتمثيلات البيانية
109	2-3 نظريتا الباقي والعامل
118	■ اختبار منتصف الوحدة
119	2-4 أصفار الدوال كثيرة الحدود
130	2-5 الدوال النسبية
141	2-6 المتباينات غير الخطية
	التقويم
148	■ الدليل الدراسي والمراجعة
153	■ تدريب على الاختبار
154	■ الربط مع حساب التفاضل والتكامل المتقدم: المساحة الواقعة تحت المنحنى

برنامج محمد بن راشد
للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid
Smart Learning Program



الدوال الأسية واللوغاريتمية

الوحدة 3

157	الاستعداد للوحدة 3
158	3-1 الدوال الأسية
170	التوسع: مختبر تقنية التمثيل البياني المعرفة المالية: الدوال الأسية
172	3-2 الدوال اللوغاريتمية
181	3-3 خصائص اللوغاريتمات
189	■ اختبار منتصف الوحدة
190	3-4 المعادلات الأسية واللوغاريتمية
200	التوسع: مختبر تقنية التمثيل البياني حل المتباينات الأسية واللوغاريتمية
202	3-5 النمذجة باستخدام الانحدار اللاخطي
	التقويم
213	■ دليل الدراسة والمراجعة
217	■ تدريب على الاختبار
218	■ الربط مع حساب التفاضل والتكامل المتقدم: الحساب التقريبي لمعدلات التغير

برنامج محمد بن راشد
للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid
Smart Learning Program



الدوال المثلثية

4

الوحدة

221	الاستعداد للوحدة 4
222	4-1 حساب المثلثات قائمة الزوايا
233	4-2 الدرجات والراديان
244	4-3 النسب المثلثية على دائرة الوحدة
256	التوسع: مختبر تقنية التمثيل البياني تمثيل دالة ال sine بيانياً باستخدام المعادلات الوسيطة
258	4-4 تمثيل دوال sine و cosine الزاوية بيانياً
269	التوسع: مختبر تقنية التمثيل البياني مجموع منحنيات sine والفرق بينها
270	■ اختبار منتصف الوحدة
271	4-5 التمثيل البياني للدوال المثلثية الأخرى
282	4-6 الدوال المثلثية العكسية
	التقويم
293	■ دليل الدراسة والمراجعة
298	■ تدريب على الاختبار
300	■ الربط مع حساب التفاضل والتكامل المتقدم: المعدلات المرتبطة

برنامج محمد بن راشد
للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid
Smart Learning Program



المتطابقات والمعادلات المثلثية

5

الوحدة

303	الاستعداد للوحدة 5
304	5-1 المتطابقات المثلثية
312	5-2 إثبات صحة المتطابقات المثلثية
319	5-3 حل المعادلات المثلثية
326	التوسع: مختبر تقنية التمثيل البياني حل المتباينات المثلثية
327	■ اختبار منتصف الوحدة
328	5-4 متطابقات المجموع والفرق
336	التوسع: مختبر تقنية التمثيل البياني متطابقة الاختزال
338	5-5 متطابقات ضعف الزاوية وتحويل ناتج الضرب إلى مجموع
	التقويم
347	■ دليل الدراسة والمراجعة
351	■ تدريب على الاختبار
352	■ الربط مع حساب التفاضل والتكامل المتقدم: معدلات التغير لـ sine و cosine الزاوية

برنامج محمد بن راشد
للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid
Smart Learning Program

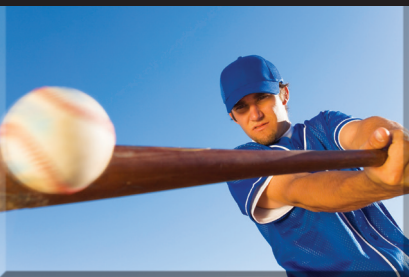


أنظمة المعادلات والمصفوفات



355	 الاستعداد للوحدة 6
356	6-1 الأنظمة الخطية متعددة المتغيرات وعمليات الصف الأولية (البسيطة)
376	6-2 ضرب المصفوفة والمعكوسات والمحددات
379	التوسع: مختبر تقنية التمثيل البياني المحددات ومساحات المضلعات
380	6-3 حل الأنظمة الخطية باستخدام المعكوسات وقاعدة كرامر
387	■ اختبار منتصف الوحدة
388	الاستكشاف: مختبر ورقة البيانات تنظيم البيانات باستخدام المصفوفات
396	6-4 نهضة الحركة باستخدام المصفوفات
	التقويم
400	■ دليل الدراسة والمراجعة
401	■ تدريب على الاختبار
402	■ الربط مع حساب التفاضل والتكامل المتقدم: مجالات المتجهات

برنامج محمد بن راشد
للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid
Smart Learning Program



القطع المخروطية والمعادلات الوسيطة

7

الوحدة

405	الاستعداد للوحدة 7
407	7-1 صيغتا نقطة المنتصف والمسافة
413	7-2 القطع المكافئ
420	استكشف: مختبر تقنية التمثيل البياني معادلات الدوائر
421	7-3 الدوائر
429	7-4 القطع الناقص
437	■ اختبار منتصف الوحدة
438	7-5 القطع الزائد
446	7-6 تحديد القطوع المخروطية
452	7-7 حل الأنظمة الخطية واللاخطية
474	7-8 المعادلات الوسيطة
466	التوسع: مختبر تقنية التمثيل البياني النموذج باستخدام المعادلات الوسيطة
	التقويم
467	■ دليل الدراسة والمراجعة
473	■ تدريب على الاختبار
474	■ التحضير للاختبارات المعيارية
476	■ تدريب على الاختبار المعياري



8

المتجهات

479	الاستعداد للوحدة 8
480	8-1 مقدمة في المتجهات
490	8-2 المتجهات في المستوى الإحداثي
498	8-3 الضرب النقطي ومساقط المتجهات
507	■ اختبار منتصف الوحدة
508	8-4 المتجهات في الفضاء ثلاثي الأبعاد
515	■ التوسع: مختبر تقنية التمثيل البياني تحويلات المتجه باستخدام المصفوفات
516	8-5 الضرب النقطي والضرب المتجهي للمتجهات في الفضاء
523	8-6 مصفوفات التحويلات في الفضاء ثلاثي الأبعاد
التقويم	
531	■ دليل الدراسة والمراجعة
536	■ تدريب على الاختبار المعياري
537	■ الربط مع حساب التفاضل والتكامل المتقدم: مجالات المتجهات

برنامج محمد بن راشد
للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid
Smart Learning Program



الإحداثيات القطبية والأعداد المركبة

9

الوحدة

541	الاستعداد للوحدة 9
542	9-1 الإحداثيات القطبية
549	9-2 الصور القطبية والمتعامدة للمعادلات
558	■ اختبار منتصف الوحدة
559	9-3 الأعداد المركبة ونظرية دي موافر
	التقويم
570	■ دليل الدراسة والمراجعة
575	■ تدريب على الاختبار
576	■ الربط مع حساب التفاضل والتكامل المتقدم: طول القوس

برنامج محمد بن راشد
للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid
Smart Learning Program



الإحصاء والاحتمالات

10

الوحدة

XXX	الاستعداد للوحدة 10
XXX	10-1 إعداد دراسة
XXX	التوسّع: مختبر تقنية التمثيل البياني المحاكاة وهامش الخطأ
XXX	10-2 توزيعات البيانات
XXX	10-3 التوزيعات الاحتمالية
XXX	■ اختبار منتصف الوحدة
XXX	10-4 التوزيع ذو الحدين
XXX	10-5 التوزيع الطبيعي
XXX	التوسّع: مختبر تقنية التمثيل البياني تحويل البيانات الملتوية

برنامج محمد بن راشد
للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid
Smart Learning Program



التفاضل والتكامل

11

XXX	الاستعداد للوحدة 11
XXX	11-1 تقدير النهايات بيانياً
XXX	11-2 إيجاد قيمة النهايات جبرياً
XXX	الاستكشاف: مختبر تقنية التمثيل البياني ميل المنحنى
XXX	11-3 المماسات والسرعة المتجهة
XXX	■ اختبار منتصف الوحدة
XXX	11-4 المشتقات
XXX	11-5 المساحة تحت المنحنى والتكامل
XXX	11-6 النظرية الأساسية للتفاضل والتكامل
	التقويم
XXX	■ الدليل الدراسي والمراجعة
XXX	■ تدريب على الاختبار المعياري
XXX	■ الربط مع حساب التفاضل والتكامل المتقدم: قاعدة السلسلة

برنامج محمد بن راشد
للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid
Smart Learning Program

كتيب الطالب

المراجع

KC1	المفاهيم الأساسية
EM_1	الرموز
EM_2	القياسات
EM_3	العمليات والعلاقات الحسابية
EM_3	الدوال والمتطابقات الجبرية
EM_5	الصيغ والمفاهيم الهندسية
EM_6	الدوال والمتطابقات المثلثية
EM_7	الدوال الأصلية والعمليات الحسابية على الدوال
EM_7	النهايات والتفاضل والتكامل
EM_8	الصيغ والمفاهيم الاحصائية

جداول الإحصاء

EM-9	الجدول A: التوزيع الطبيعي المعياري
EM-11	الجدول B: توزيع ستودنت (توزيع t)
EM-12	الجدول C: توزيع كاي تربيع (توزيع χ^2)

قاموس المصطلحات متوفر في النسخة الإلكترونية

أنظمة المعادلات والمصفوفات

6

٥٠٠



Chapter Sourced From: Systems of Equations and Matrices, from Integrated Math IV Chapter 6 © 2012

حقوق الطبع والنشر © محفوظة لمطبعة مؤسسة مكنون McGraw-Hill Education

لماذا؟ ▲

الأعمال لقد أصبحت البرمجة الخطية أداة قياسية للعديد من الأعمال، مثل الزراعة. فلا بد أن يراعي المزارعون العديد من القيود من أجل زيادة الأرباح لأقصى حد ممكن من بيع المحاصيل أو المواشي، ومن هذه القيود تكلفة العمالة والأرض والأعلاف. قراءة مسبقة ناقش ما تعرفه بالفعل عن حل المعادلات مع زميل. ثم انظر إلى عناوين الدروس واكتب توقعين أو ثلاثة بشأن ما ستتعلمه في هذه الوحدة.

الحالي ::

- بعد دراستك لهذه الوحدة ستكون قادراً على:
 - ضرب المصفوفات وإيجاد محدّدات ومعكوسات المصفوفات.
 - حل أنظمة المعادلات الخطية.
 - كتابة التحليلات الجزئية للكسور الخاصة بالتعابير النسبية.
 - استخدام البرمجة الخطية لحل التطبيقات.

سابقاً ::

حللت أنظمة المعادلات وأجريت عمليات تتعلق بالمصفوفات.

الاستعداد للوحدة

أجب عن أسئلة التدريب السريع أدناه.

تدريب سريع

استخدم أي طريقة لحل كل نظام من أنظمة المعادلات.

- $2x - y = 7$
- $3x + y = 14$
- $3x + 2y = 14$
- $2x - 2y = -4$
- $x + 3y = 10$
- $4x + 2y = -34$
- $-2x + 3y = 16$
- $-3x - y = 24$
- $2x + 5y = -16$
- $-5x + 2y = -33$
- $3x + 4y = -17$
- $6x - 3y = 42$

7. **الطب البيطري** تفرض طبيبة بيطرية رسوماً مختلفة لتشذيب أظافر الأرانب والقطط. وفي يوم الإثنين، جنت 96 AED من تشذيب أظافر 4 أرانب و3 قطط. وفي يوم الثلاثاء، جنت 126 AED من تشذيب أظافر 6 أرانب و3 قطط. فكم كانت تكلفة تشذيب أظافر كل حيوان؟

جد قيمة كل مما يلي إذا كان

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 1 \\ -7 & 6 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -2 & -9 & 1 \\ 10 & 8 & -1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 11 & -3 \\ 9 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$

- $A + 3C$
- $2(B - A)$
- $2A - 3B$
- $3C + 2A$
- $A + B - C$
- $2(B + C) - A$

المفردات الجديدة

- نظام خطي متعدد المتغيرات (multivariable linear system)
- حذف جاوس (Gaussian elimination)
- المصفوفة الموسعة (augmented matrix)
- مصفوفة المعاملات (coefficient matrix)
- نموذج درجة الصف (row-echelon form)
- نموذج درجة الصف المنخفض (reduced row-echelon form)
- حذف جاوس-جوردان (Gauss-Jordan elimination)
- المصفوفة المحايدة (identity matrix)
- المصفوفة عكسية (inverse matrix)
- المعكوس (inverse)
- قابل للعكس (invertible)
- مصفوفة منفردة (singular matrix)
- محدد (determinant)
- نظام مربع (square system)
- قاعدة كرامر (Cramer's Rule)
- كسر جزئي (partial fraction)
- الأمثل (optimization)
- البرمجة الخطية (linear programming)
- الدالة الهدف (objective function)
- الحلول الممكنة (feasible solutions)
- قيد (constraint)
- حلول مثلى متعددة (multiple optimal solutions)
- غير محدودة (unbounded)

مراجعة المفردات

- نظام المعادلات (system of equations) مجموعة من معادلتين أو أكثر
- المصفوفة (matrix) تنظيم مستطيل من العناصر
- المصفوفة المربعة (square matrix) مصفوفة لديها نفس العدد من الصفوف والأعمدة
- كمية قياسية (scalar) الثابت الذي يتم ضرب المصفوفة فيه

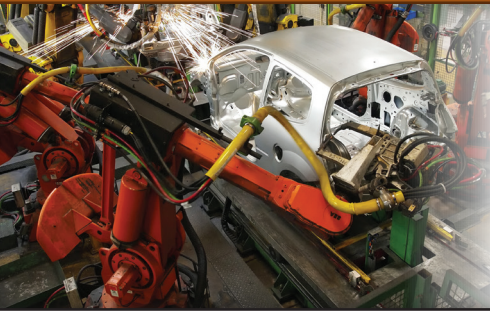
الأنظمة الخطية متعددة المتغيرات وعمليات الصف الأولية (البسيطة)

الدرس 6-1

لماذا؟

الحالي

سابقاً



● غالباً ما يتم تصنيع السبائك المعدنية في صناعات السيارات لتحسين أداء السيارات. ويمكنك حل نظام من المعادلات لتحديد النسبة المثوية اللازمة من كل معدن لسبيكة محددة.

1 حل أنظمة المعادلات الخطية باستخدام المصفوفات وحذف جاوس.

2 حل أنظمة المعادلات الخطية باستخدام المصفوفات وحذف جاوس-جوردان.

● حللت أنظمة المعادلات جبرياً ومثلت البيانات باستخدام المصفوفات.

1 حذف جاوس نظام خطي متعدد المتغيرات أو نظام خطي بأكثر من متغير واحد، عبارة عن نظام معادلات خطية ذات متغيرين أو أكثر. وفي المقررات الدراسية السابقة، ربما تكون قد استخدمت طريقة الحذف لحل مثل هذه الأنظمة. وتبدأ إحدى طرق الحذف بإعادة كتابة نظام باستخدام شكل مثلث معكوس يكون فيه المعامل الرئيس يساوي 1. يمكن استخدام طريقتي التعويض والحذف اللتين تعلمتهما سابقاً في تحويل نظام خطي متعدد المتغيرات إلى نظام مكافئ في صورة مثلث أو **نموذج درجة صف**.

النظام في صورة نموذج درجة الصف

لاحظ أن الطرف الأيسر للنظام يشكل مثلثاً تكون فيه المعاملات الرئيسة تساوي 1. وتحتوي المعادلة الأخيرة على متغير واحد فقط، وتحتوي كل معادلة فوقها على المتغيرات المأخوذة من المعادلة الموجودة تحتها مباشرة.

$$\begin{aligned}x - y - 2z &= 5 \\y + 4z &= -5 \\z &= -2\end{aligned}$$

وبمجرد أن يكون النظام في صورة هذا النموذج، يمكن إيجاد الحل بالتعويض. وتحدد المعادلة الأخيرة المتغير الأخير. في المثال أعلاه، تحدد المعادلة الأخيرة أن $z = -2$.

عوّض عن قيمة z في المعادلة الثانية لإيجاد قيمة y .

$$\begin{aligned}y + 4z &= -5 && \text{المعادلة الثانية} \\y + 4(-2) &= -5 && z = -2 \\y &= 3 && \text{حل لإيجاد قيمة } y.\end{aligned}$$

عوّض عن قيمة المتغير y والمتغير z في المعادلة الأولى لإيجاد x .

$$\begin{aligned}x - y - 2z &= 5 && \text{المعادلة الأولى} \\x - 3 - 2(-2) &= 5 && y = 3 \text{ و } z = -2 \\x &= 4 && \text{حل لإيجاد قيمة } x.\end{aligned}$$

إذاً، يصبح حل النظام هو $x = 4$ و $y = 3$ و $z = -2$.

يطلق على الخوارزمية المستخدمة لتحويل نظام المعادلات الخطية إلى نظام مكافئ في صورة نموذج درجة الصف اسم **حذف جاوس** (أو اختزال جاوس). والذي سُمي نسبة لاسم عالم الرياضيات الألماني كارل فريدريش جاوس. ويتم الإشارة إلى العمليات المستخدمة لإنتاج أنظمة مكافئة فيما يلي.

المفهوم الأساسي العمليات التي تنتج أنظمة مكافئة

ينتج عن كل من العمليات التالية نظام مكافئ للمعادلات الخطية.

- بَدَل بين أي معادلتين.
- اضرب إحدى المعادلتين في عدد حقيقي غير صفري.
- اجمع مضاعف إحدى المعادلتين إلى المعادلة الأخرى.

نصيحة دراسية

التفسير الهندسي

يمكن تمثيل مجموعة الحل لنظام معادلتين من متغيرين بتقاطع زوج من المستقيمتين في مستوى، بينما يمكن تمثيل مجموعة حل نظام ثلاث معادلات من ثلاثة متغيرات بتقاطع ثلاثة مستويات في الفراغ.

مثال 1 حذف جاوس مع نظام

اكتب نظام المعادلات في صيغة مثلثية باستخدام حذف جاوس. ثم حل النظام.

$$5x - 5y - 5z = 35 \quad \text{المعادلة 1}$$

$$-x + 2y - 3z = -12 \quad \text{المعادلة 2}$$

$$3x - 2y + 7z = 30 \quad \text{المعادلة 3}$$

الخطوة 1 بما أن المعامل الرئيس في المعادلة 1 لا يساوي 1، إذاً يمكنك ضرب هذه المعادلة في المعكوس الضربي لمعاملها الرئيس.

$$\begin{aligned} x - y - z &= 7 \\ -x + 2y - 3z &= -12 \\ 3x - 2y + 7z &= 30 \end{aligned} \quad \leftarrow \frac{1}{5}(5x - 5y - 5z = 35)$$

الخطوة 2 احذف الحد x في المعادلة 2. وللقيام بذلك، استبدل المعادلة 1 بـ (المعادلة 1 + المعادلة 2).

$$\begin{aligned} x - y - z &= 7 \\ y - 4z &= -5 \\ 3x - 2y + 7z &= 30 \end{aligned} \quad \leftarrow \begin{cases} x - y - z = 7 \\ (+) -x + 2y - 3z = -12 \\ \hline y - 4z = -5 \end{cases}$$

الخطوة 3 احذف الحد x في المعادلة 3 بالتعويض عن المعادلة 3 بـ $-3 \times$ (المعادلة 1) + المعادلة 3.

$$\begin{aligned} x - y - z &= 7 \\ y - 4z &= -5 \\ y + 10z &= 9 \end{aligned} \quad \leftarrow \begin{cases} -3x + 3y + 3z = -21 \\ (+) 3x - 2y + 7z = 30 \\ \hline y + 10z = 9 \end{cases}$$

الخطوة 4 بما أن المعامل الرئيس في المعادلة 2 يساوي 2، إذاً يمكنك حذف الحد y من المعادلة 3 بالتعويض عن المعادلة 3 بـ $-1 \times$ (المعادلة 2) + المعادلة 3.

$$\begin{aligned} x - y - z &= 7 \\ y - 4z &= -5 \\ 14z &= 14 \end{aligned} \quad \leftarrow \begin{cases} -y + 4z = 5 \\ (+) y + 10z = 9 \\ \hline 14z = 14 \end{cases}$$

الخطوة 5 بما أن المعامل الرئيس في المعادلة 3 لا يساوي 1، إذاً يمكنك ضرب هذه المعادلة في المعكوس الضربي لمعاملها الرئيس.

$$\begin{aligned} x - y - z &= 7 \\ y - 4z &= -5 \\ z &= 1 \end{aligned} \quad \leftarrow \frac{1}{14}(14z = 14)$$

يمكنك استخدام التعويض لإيجاد أن $y = -1$ و $x = 7$. إذاً، حل النظام هو $x = 7$ و $y = -1$ و $z = 1$ أو الثلاثي المرتب $(7, -1, 1)$.

تمرين موجه

اكتب كل نظام معادلات في صيغة مثلثية باستخدام حذف جاوس. ثم حل النظام.

$$\begin{aligned} 1A. \quad x + 2y - 3z &= -28 \\ 3x - y + 2z &= 3 \\ -x + y - z &= -5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1B. \quad 3x + 5y + 8z &= -20 \\ -x + 2y - 4z &= 18 \\ -6x + 4z &= 0 \end{aligned}$$

نصيحة دراسية

تحقق من الحل عند حل نظام معادلات، ينبغي أن تتحقق من حلك باستخدام التعويض في المعادلات الأصلية. ويتم فيما يلي توضيح طريقة التحقق من حل المثال 1.

المعادلة 1:

$$5(7) - 5(-1) - 5(1) = 35 \quad \checkmark$$

المعادلة 2:

$$-7 + 2(-1) - 3(1) = -12 \quad \checkmark$$

المعادلة 3:

$$3(7) - 2(-1) + 7(1) = 30 \quad \checkmark$$

قراءة في الرياضيات

المصفوفة الموسعة لاحظ أنه يوجد خط متقطع يفصل بين معاملات المصفوفة وعمود القيم الثابتة في المصفوفة الموسعة.

المصفوفة الموسعة هي نظام مكون من المعاملات والحدود الثابتة للمعادلات الخطية، والتي تكتب كل منها في صيغة قياسية مع كتابة الحدود الثابتة في الطرف الأيمن لإشارة المساواة. وإذا لم يتم إدراج الحدود الثابتة، تُختزل المصفوفة إلى **مصفوفة المعاملات** الخاصة بالنظام. وتستخدم هذا النوع من المصفوفات في الدرس 5-3.

مصفوفة المعاملات

$$\begin{bmatrix} 5 & -5 & -5 \\ -1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 7 \end{bmatrix}$$

المصفوفة الموسعة

$$\begin{bmatrix} 5 & -5 & -5 & | & 35 \\ -1 & 2 & -3 & | & -12 \\ 3 & -2 & 7 & | & 30 \end{bmatrix}$$

نظام المعادلات

$$\begin{aligned} 5x - 5y - 5z &= 35 \\ -x + 2y - 3z &= -12 \\ 3x - 2y + 7z &= 30 \end{aligned}$$

مثال 2 كتابة مصفوفة موسعة

اكتب المصفوفة الموسعة لنظام المعادلات الخطية التالي.

$$\begin{aligned} w + 4x + z &= 2 \\ x + 2y - 3z &= 0 \\ w - 3y - 8z &= -1 \\ 3w + 2x + 3y &= 9 \end{aligned}$$

عندما تكون جميع المعادلات الخطية في صيغة قياسية، والمتغيرات الأربعة غير متوفرة للنظام في كل معادلة. لذا فإن الحدود المتشابهة لا تُكوّن محاذاة. أعد كتابة النظام. باستخدام المعامل 0 للحدود غير المعروفة. ثم اكتب المصفوفة الموسعة.

نظام المعادلات

$$\begin{aligned} w + 4x + 0y + z &= 2 \\ 0w + x + 2y - 3z &= 0 \\ w + 0x - 3y - 8z &= -1 \\ 3w + 2x + 3y + 0z &= 9 \end{aligned}$$

المصفوفة الموسعة

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & | & 0 \\ 1 & 0 & -3 & -8 & | & -1 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & | & 9 \end{bmatrix}$$

تمرين موجه

اكتب المصفوفة الموسعة لكل نظام من المعادلات الخطية التالية.

$$\begin{aligned} 2A. \quad 4w - 5x + 7z &= -11 \\ -w + 8x + 3y &= 6 \\ 15x - 2y + 10z &= 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2B. \quad -3w + 7x + y &= 21 \\ 4w - 12y + 8z &= 5 \\ 16w - 14y + z &= -2 \\ w + x + 2y &= 7 \end{aligned}$$

تحتوي العمليات الثلاث المستخدمة لاستنباط أنظمة مكافئة على ثلاث عمليات مصفوفة مقابلة يمكن استخدامها لاستنباط مصفوفة موسعة مقابلة. وحيث إنه يقابل كل صف من صفوف المصفوفة الموسعة معادلة من النظام الأصلي، إذاً يطلق على هذه العمليات اسم عمليات الصفوف الأولية.

المفهوم الأساسي عمليات الصف الأولية

تنتج كل عملية من عمليات الصف الأولية مصفوفة موسعة مكافئة.

- بَدَل بين أي صفين.
- اضرب أحد الصفين في عدد حقيقي غير صفري.
- اجمع مضاعف أحد الصفين إلى الصف الآخر.

ويطلق على عمليات الصف وصف الأولية نظراً لأنها سهلة الحل. ومع ذلك، يسهل ارتكاب أي خطأ بها، لذا ينبغي تسجيل كل خطوة باستخدام الرمز الموضح أدناه.

$$\begin{aligned} 1. \text{ الصف 1، الصف 2، الصف 3} & \quad 2. \text{ بَدَل بين الصفين 2 و3.} & 3. \text{ اضرب الصف 1 في } \frac{1}{5}. & 4. \text{ اجمع 3- أضعاف الصف 1 إلى الصف 2.} \\ R_1 \begin{bmatrix} 5 & -5 & -5 & | & 35 \\ -1 & 2 & -3 & | & -12 \\ 3 & -2 & 7 & | & 30 \end{bmatrix} & \xrightarrow{R_2} \begin{bmatrix} 5 & -5 & -5 & | & 35 \\ -1 & 2 & -3 & | & -12 \\ 3 & -2 & 7 & | & 30 \end{bmatrix} & \xrightarrow{R_3} \begin{bmatrix} 5 & -5 & -5 & | & 35 \\ -1 & 2 & -3 & | & -12 \\ 3 & -2 & 7 & | & 30 \end{bmatrix} & \xrightarrow{-3R_1 + R_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & | & 7 \\ 0 & 1 & 10 & | & 9 \\ -1 & 2 & -3 & | & -12 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

قارن حذف جاوس من المثال 1 بصيغة مصفوفته باستخدام عمليات الصف.

نصيحة دراسية

متكافئة الصف إذا أمكن الحصول على مصفوفة واحدة من خلال مجموعة متتالية من عمليات الصف على مصفوفة أخرى، فحينها يقال على المصفوفتين إنهما متكافئتا الصف.

المصفوفة الموسعة

نظام المعادلات

$$\begin{aligned} \frac{1}{5}(\text{Eqn. 1}) \rightarrow & x - y - z = 7 \\ & -x + 2y - 3z = -12 \\ & 3x - 2y + 7z = 30 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{5}R_1 \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 7 \\ -1 & 2 & -3 & -12 \\ 3 & -2 & 7 & 30 \end{array} \right]$$

$$\begin{aligned} \text{Eqn. 1} + \text{Eqn. 2} \rightarrow & x - y - z = 7 \\ & y - 4z = -5 \\ & 3x - 2y + 7z = 30 \end{aligned}$$

$$R_1 + R_2 \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & -4 & -5 \\ 3 & -2 & 7 & 30 \end{array} \right]$$

$$\begin{aligned} & x - y - z = 7 \\ & y - 4z = -5 \\ -3(\text{Eqn. 1}) + \text{Eqn. 3} \rightarrow & y + 10z = 9 \end{aligned}$$

$$-3R_1 + R_3 \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & -4 & -5 \\ 0 & 1 & 10 & 9 \end{array} \right]$$

$$\begin{aligned} & x - y - z = 7 \\ & y - 4z = -5 \\ -(\text{Eqn. 2}) + \text{Eqn. 3} \rightarrow & 14z = 14 \end{aligned}$$

$$-R_2 + R_3 \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 14 & 14 \end{array} \right]$$

$$\begin{aligned} & x - y - z = 7 \\ & y - 4z = -5 \\ \frac{1}{14}(\text{Eqn. 3}) \rightarrow & z = 1 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{14}R_3 \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

يقال على المصفوفة الموسعة التي تقابل نموذج درجة الصف من النظام الأصلي للمعادلات إنها أيضًا في نموذج درجة الصف.

المفهوم الأساسي نموذج درجة الصف

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

- تكون المصفوفة في صورة نموذج درجة الصف إذا تم استيفاء الشروط التالية.
- تظهر الصفوف التي تتكون من أصفار تمامًا (إن وجدت) في نهاية المصفوفة.
- تكون قيمة المدخلة غير الصفري الأول في الصف هي 1. ويسمى المعامل الرئيس.
- بالنسبة للصفين المتتاليين اللذين يتمتعان بمدخلات غير صفرية، يكون المعامل الرئيس في الصف الأعلى أبعد إلى اليسار من المعامل الرئيس في الصف الأدنى.

نصيحة دراسية

نموذج درجة الصف لا يعتبر نموذج درجة الصف للمصفوفة وحيدًا. نظرًا لأنه يوجد العديد من توافق عمليات الصفوف التي يمكن إجراؤها. ومع ذلك سيظل الحل النهائي لنظام المعادلات كما هو دائمًا.

مثال 3 تحديد المصفوفة الموسعة في صورة نموذج درجة الصف

حدد ما إذا كانت كل مصفوفة في صورة نموذج درجة الصف.

a. $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \end{array} \right]$

b. $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 2 & -11 \\ 0 & 1 & -5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$

c. $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -6 & 10 \\ 0 & 1 & 9 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 14 \end{array} \right]$

يوجد صفر أدنى المعامل الرئيس في الصف الأول. لذا، فإن المصفوفة في شكل نموذج درجة الصف.

يوجد صفر أدنى كل من المعاملات الرئيسة في كل صف. لذا، فإن المصفوفة في شكل نموذج درجة الصف.

لا يوجد صفر أدنى المعامل الرئيس في الصف 2. لذا، فإن المصفوفة ليست في شكل نموذج درجة الصف.

تمرين موجه

3A. $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -6 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 9 \end{array} \right]$

3B. $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 19 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -20 \end{array} \right]$

3C. $\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -3 & 10 \\ 0 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right]$

لحل نظام معادلات باستخدام مصفوفة موسعة وحذف جاوس، استخدم عمليات الصف لتحويل المصفوفة بحيث تكون في شكل نموذج درجة الصف. ثم اكتب نظام المعادلات المقابل واستخدم التعويض لإنهاء حل النظام. تذكر أنه إذا واجهتك معادلة خاطئة، فسيكون ذلك أن النظام ليس له حل.

الربط بالحياة اليومية

في الأعوام الأخيرة، كانت إيطاليا رابع أكثر الدول التي تحظى بالزيارة عالمياً، حيث بلغ عدد السياح أكثر من 40 مليون سائح. المصدر: منظمة السياحة العالمية

مثال 4 من الحياة اليومية حذف جاوس مع مصفوفة

السفر ذهب محمد إلى إيطاليا أثناء عطلة الربيع. ويتم فيها يلي توضيح متوسط التكاليف اليومية للفندق والطعام والمواصلات لكل مدينة زارها. اكتب نظاماً للمعادلات وجد حلاً له لتحديد عدد الأيام التي قضاها محمد في كل مدينة. فسر حلك.

الإجمالي	نابولي	روما	البندقية	النفقات
AED 720	AED 60	AED 120	AED 60	الفنادق
AED 490	AED 30	AED 90	AED 40	الطعام
AED 130	AED 20	AED 10	AED 15	وسائل النقل

اكتب المعطيات في صورة نظام معادلات. افترض أن x و y و z تمثل عدد الأيام التي قضاها محمد في البندقية وروما ونابولي على التوالي.

$$60x + 120y + 60z = 720$$

$$490 = 40x + 90y + 30z$$

$$130 = 15x + 10y + 20z$$

بعد ذلك، اكتب المصفوفة الموسعة وطبق عمليات الصف الأولية للحصول على نموذج درجة الصف للمصفوفة.

$$\begin{array}{l} \left[\begin{array}{ccc|c} 60 & 120 & 60 & 720 \\ 40 & 90 & 30 & 490 \\ 15 & 10 & 20 & 130 \end{array} \right] \xrightarrow{\frac{1}{60}R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 12 \\ 40 & 90 & 30 & 490 \\ 15 & 10 & 20 & 130 \end{array} \right] \\ \xrightarrow{-40R_1 + R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 12 \\ 0 & 10 & -10 & 10 \\ 15 & 10 & 20 & 130 \end{array} \right] \\ \xrightarrow{-15R_1 + R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 12 \\ 0 & 10 & -10 & 10 \\ 0 & -20 & 5 & -50 \end{array} \right] \\ \xrightarrow{20R_2 + R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 12 \\ 0 & 10 & -10 & 10 \\ 0 & 0 & -15 & -30 \end{array} \right] \\ \xrightarrow{-\frac{1}{15}R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 12 \\ 0 & 10 & -10 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right] \\ \xrightarrow{\frac{1}{10}R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 12 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right] \end{array}$$

يمكنك استخدام التعويض لإيجاد أن $y = 3$ و $x = 1.4$ إذاً، حل النظام هو $x = 4$ و $y = 3$ و $z = 2$. أو المجموعة المرتبة ثلاثية العناصر $(4, 3, 2)$.

قضى محمد 4 أيام في البندقية و 3 أيام في روما ويومين في نابولي.

تمرين موجه

4. السفر في العام التالي، سافر محمد إلى فرنسا لقضاء عطلة الربيع. ويتم فيها يلي توضيح متوسط التكاليف اليومية للفندق والطعام والمواصلات لكل مدينة زارها في فرنسا. اكتب نظاماً للمعادلات وجد حلاً له لتحديد عدد الأيام التي قضاها محمد في كل مدينة. فسر حلك.

الإجمالي	مارسيليا	ليون	باريس	النفقات
AED 500	AED 80	AED 70	AED 80	الفنادق
AED 330	AED 50	AED 40	AED 50	الطعام
AED 70	AED 10	AED 10	AED 10	وسائل النقل

نصيحة دراسية

أنواع الحلول تذكر أنه يمكن أن يكون لنظام المعادلات حل واحد، وقد لا يكون له حلول، أو يكون له عدد لا نهائي من الحلول.

نموذج درجة الصف المنخفض

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

2 حذف جاوس-جوردان إذا واصلت تطبيق عمليات الصف الأولية على نموذج درجة الصف من مصفوفة موسعة، فيمكنك الحصول على مصفوفة تكون قيمة أول عنصر غير صفري بكل صف فيها هي العدد 1. وتكون قيمة بقية العناصر في نفس العمود الخاص بهذا العنصر هي 0. وهذا ما يُطلق عليه **نموذج درجة الصف المنخفض** بالمصفوفة ويظهر باليسار.

وأيضاً ما يكون نموذج درجة الصف المنخفض للمصفوفة وحيداً، بغض النظر عن ترتيب العمليات التي تم إجراؤها. ويطلق على حل النظام من خلال تحويل مصفوفة موسعة بحيث تكون في شكل نموذج درجة الصف المنخفض اسم **حذف جاوس-جوردان**. وقد تم تسميته بذلك نسبة إلى العالمين كارل فريدريش جاوس وفيلهلم جوردان.

مثال 5 استخدام طريقة حذف جاوس-جوردان

جد حلاً لنظام المعادلات.

$$x - y + z = 0$$

$$-x + 2y - 3z = -5$$

$$2x - 3y + 5z = 8$$

اكتب المصفوفة الموسعة. طبق عمليات الصف الأولية للحصول على نموذج درجة صف منخفض.

مصفوفة موسعة

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & -5 \\ 2 & -3 & 5 & 8 \end{array} \right]$$

$$R_1 + R_2 \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 2 & -3 & 5 & 8 \end{array} \right]$$

$$-2R_1 + R_3 \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & -1 & 3 & 8 \end{array} \right]$$

$$R_2 + R_3 \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

$$R_2 + R_1 \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

$$R_3 + R_1 \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

$$2R_3 + R_2 \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

نموذج درجة الصف

نموذج درجة الصف المنخفض

إذا، حل النظام هو $x = -2$ و $y = 1$ و $z = 3$ أو الثلاثي الممتدب $(-2, 1, 3)$. تحقق من صحة هذا الحل في النظام الأصلي للمعادلات.

تهرين موجه

حل كل من أنظمة المعادلات التالية.

5A. $x + 2y - 3z = 7$
 $-3x - 7y + 9z = -12$
 $2x + y - 5z = 8$

5B. $4x + 9y + 16z = 2$
 $-x - 2y - 4z = -1$
 $2x + 4y + 9z = -5$

نصيحة دراسية

الأنهاط على الرغم من أنه يمكن استخدام مختلف عمليات الصفوف الأولية لحل نفس نظام المعادلات، فإنه يمكن استخدام نمط عام كدليل للمساعدة في تجنب العمليات المضنية للوقت. وفيما يتعلق بالنظام الموجود إلى اليسار: ابدأ بالوصول إلى 0 في الحد الأول من الصف الثاني وأعمل على حل المصفوفة بالترتيب الموضح. ومن ثم الوصول إلى الأصفار والأعداد 1. وبمجرد أن تنتهي من ذلك، يمكن تحويل الحدود في الصف الأول إلى أصفار وأعداد 1 كذلك.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \end{array} \right]$$

تلميح تقني

يمكن التحقق من نموذج درجة الصف المنخفض للمصفوفة باستخدام خاصية rref الموجودة في حاسبة التمثيل البياني.

$$\text{rref}([A])$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

عند حل نظام معادلات، إذا تعذر كتابة المصفوفة في نموذج درجة الصف المنخفض، فسيكون النظام إما بدون حل أو بعدد لا نهائي من الحلول.

مثال 6 نظام بدون حل وبعدد لا نهائي من الحلول

حل كل من أنظمة المعادلات التالية.

a. $-5x - 2y + z = 2$
 $4x - y - 6z = 2$
 $-3x - y + z = 1$

اكتب المصفوفة الموسعة. ثم طبق عمليات الصف الأولية للحصول على مصفوفة درجة صف منخفض.

$$\begin{array}{l} \text{مصفوفة موسعة} \left[\begin{array}{ccc|c} -5 & -2 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & -6 & 2 \\ -3 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{3R_1 + R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array} \right] \\ \xrightarrow{-2R_3 + R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & -6 & 2 \\ -3 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{-2R_3 + R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array} \right] \\ \xrightarrow{-4R_1 + R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \\ -3 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{R_2 + R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \end{array}$$

وفقًا للصف الأخير، $0x + 0y + 0z = 1$. ونظرًا لاستحالة هذا، إذا فليس للنظام أي حل.

b. $3x + 5y - 8z = -3$
 $2x + 5y - 2z = -7$
 $-x - y + 4z = -1$

اكتب المصفوفة الموسعة. ثم طبق عمليات الصف الأولية للحصول على مصفوفة درجة الصف المنخفض.

$$\begin{array}{l} \text{مصفوفة موسعة} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & -8 & -3 \\ 2 & 5 & -2 & -7 \\ -1 & -1 & 4 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{R_1 + R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -6 & 4 \\ 0 & 3 & 6 & -9 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \end{array} \right] \\ \xrightarrow{R_1 - R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -6 & 4 \\ 2 & 5 & -2 & -7 \\ -1 & -1 & 4 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{2R_3 + R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -6 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \end{array} \right] \\ \xrightarrow{2R_3 + R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -6 & 4 \\ 0 & 3 & 6 & -9 \\ -1 & -1 & 4 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{R_2 + R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -6 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x - 6z = 4 \\ y + 2z = -3 \end{array}$$

اكتب نظام المعادلات الخطية المتقابل لنموذج درجة الصف المنخفض للمصفوفة الموسعة. بما أن قيمة المتغير z غير محددة، يكون لهذا النظام عدد لا نهائي من الحلول. من خلال الحل لإيجاد قيمة x و y بدلالة z ، فلديك $x = 6z + 4$ و $y = -2z - 3$.

إذا، يمكن التعبير عن حل النظام في الصورة $(z, -2z - 3, 6z + 4)$ ، حيث تكون z أي عدد حقيقي.

تمرين موجه

حل كل من أنظمة المعادلات التالية.

6A. $3x - y - 5z = 9$
 $4x + 2y - 3z = 6$
 $-7x - 11y - 3z = 3$

6B. $x + 3y + 4z = 8$
 $4x - 2y - z = 6$
 $8x - 18y - 19z = -2$

نصيحة دراسية

عدد لا نهائي من الحلول لا يعتبر حل النظام الموجود في المثال 6b إجابة وحيدة نظرًا لأنه يمكن التعبير عن الحل بدلالة أي من المتغيرات في النظام.

عندما يكون للنظام عدد أقل من المعادلات مقارنة بالمتغيرات، فسيكون النظام إما بدون حل أو بعدد لا نهائي من الحلول. وعند حل نظام معادلات من ثلاثة متغيرات أو أكثر، فمن المهم التحقق من إجابتك باستخدام جميع المعادلات الأصلية. ويعتبر ذلك ضروريًا لأنه من المحتمل أن يُفلج الحل غير الصحيح مع بعض المعادلات بينما لا يفلج مع الأخرى.

مثال 7 نظام بعدد لانهائي من الحلول

جد حلاً لنظام المعادلات.

$$3x - 8y + 19z - 12w = 6$$

$$2x - 4y + 10z = -8$$

$$x - 3y + 5z - 2w = -1$$

اكتب المصفوفة الموسعة، ثم طَبِّق عمليات الصف الأولية للحصول على المعاملات الرئيسية التي تساوي 1 في كل صف والأصفار أدنى هذه المعاملات في كل عمود.

$$\begin{array}{l} \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & -8 & 19 & -12 & 6 \\ 2 & -4 & 10 & 0 & -8 \\ 1 & -3 & 5 & -2 & -1 \end{array} \right] \\ \begin{array}{l} R_3 \rightarrow R_1 \\ R_1 \rightarrow R_3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 5 & -2 & -1 \\ 2 & -4 & 10 & 0 & -8 \\ 3 & -8 & 19 & -12 & 6 \end{array} \right] \\ \begin{array}{l} -2R_1 + R_2 \\ -3R_1 + R_3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 5 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & -6 \\ 0 & 1 & 4 & -6 & 9 \end{array} \right] \\ \begin{array}{l} \frac{1}{2}R_2 \\ -5R_3 + R_1 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 5 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -6 & 9 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & -6 \end{array} \right] \\ \begin{array}{l} -R_2 + R_3 \\ 3R_2 + R_1 \\ \frac{1}{4}R_3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 5 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & -8 & 12 \end{array} \right] \\ \begin{array}{l} -5R_3 + R_1 \\ \frac{1}{4}R_3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 5 & 4 & -10 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \end{array} \right] \\ \begin{array}{l} -5R_3 + R_1 \\ \frac{1}{4}R_3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 14 & -25 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \end{array} \right] \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x + 14w = -25 \\ y + 2w = -3 \\ z - 2w = 3 \end{array}$$

اكتب النظام المقابل لنظام المعادلات الخطية لنموذج درجة الصف المنخفض للمصفوفة الموسعة.

لهذا النظام من المعادلات عدد لا نهائي من الحلول، حيث إنه لكل قيمة من قيم w هناك ثلاث معادلات، والتي يمكن استخدامها لإيجاد القيم المقابلة للمتغيرات x و y و z . ومن خلال الحل لإيجاد قيمة x و y و z بدلالة w ، يكون لديك $x = -14w - 25$ و $y = -2w - 3$ و $z = 2w + 3$.

إذًا، يمكن التعبير عن حل النظام في صورة $(w, -2w - 3, 2w + 3, -14w - 25)$. حيث تعبر w عن أي عدد حقيقي.

التحقق باستخدام القيم المختلفة للمتغير w ، احسب بعض الحلول وتحقق من صحتها في النظام الأصلي للمعادلات. فعلى سبيل المثال، إذا كانت $w = 1$ ، فإن حل النظام يكون $(1, -5, 5, -39)$. ويتحقق هذا الحل في كل معادلة من النظام الأصلي.

$$3(-39) - 8(-5) + 19(5) - 12(1) = 6 \quad \checkmark$$

$$2(-39) - 4(-5) + 10(5) = -8 \quad \checkmark$$

$$(-39) - 3(-5) + 5(5) - 2(1) = -1 \quad \checkmark$$

تمرين موجه

حُل كلٌّ من أنظمة المعادلات التالية.

7A. $-5w + 10x + 4y + 54z = 15$

$$w - 2x - y - 9z = -1$$

$$-2w + 3x + y + 19z = 9$$

7B. $3w + x - 2y - 3z = 14$

$$-w + x - 10y + z = -11$$

$$-2w - x + 4y + 2z = -9$$



الربط بتاريخ

الرياضيات

فيلهم جوردان

(1842-1899)

جُوديسِيّ ألماني ينسب إليه فضل تبسيط طريقة جاوس لحل نظام المعادلات الخطية بحيث يمكن تطبيقها لتقليل الخطأ التربيعي في عمليات المسح.

اكتب كل نظام معادلات في صيغة مثلثية باستخدام حذف جاوس. ثم حل النظام. (مثال 1)

$$22. \begin{cases} 2x = -10y + 11 \\ -8y = -9x + 23 \end{cases}$$

$$23. \begin{cases} 4y + 17 = -7x \\ 8x + 5y = -19 \end{cases}$$

$$24. \begin{cases} x + 7y = 10 \\ 3x + 9y = -6 \end{cases}$$

$$25. \begin{cases} 7y = 9 - 5x \\ 8x = 2 - 5y \end{cases}$$

$$26. \begin{cases} 3x - 4y + 8z = 27 \\ 9x - y - z = 3 \\ x + 8y - 2z = 9 \end{cases}$$

$$27. \begin{cases} x + 9y + 8z = 0 \\ 5x + 8y + z = 35 \\ x - 4y - z = 17 \end{cases}$$

$$28. \begin{cases} 4x + 8y - z = 10 \\ 3x - 8y + 9z = 14 \\ 7x + 6y + 5z = 0 \end{cases}$$

$$29. \begin{cases} 2x - 10y + z = 28 \\ -5x + 11y + 7z = 18 \\ 6x - y - 12z = 14 \end{cases}$$

30. **القهوة** يتخصص مقهى محلي في تقديم مشروبات الإسبريسو. ويوضح الجدول أدناه عدد الأكواب لكل مشروب تم بيعه طوال اليوم. اكتب نظام معادلات وجد حلاً له لتحديد سعر كل مشروب إسبريسو. فسر حلك. (مثال 4)

الساعات	كابشينو	لاتيه	قهوة ماكياتو	الأرباح (AED)
8-11	103	86	79	1040.25
11-2	48	32	26	406.50
2-5	45	25	18	334.00

31. **بائع زهور** يوضح إعلان لمحل زهور أسعار العديد من تنسيقات الزهور وقائمة من الزهور الموجودة في كل تنسيق على النحو الموضح أدناه. اكتب نظام معادلات وجد حلاً له لتحديد سعر كل نوع من الزهور. فسر حلك. (مثال 6)

AED 35.00	زهرة الزنبق	
4 زهور، 12 زهرة زنبق، 5 زهور السوسن		
AED 50.25	الحديقة المشمس	
6 زهور، 9 زهور زنبق، 12 زهرة السوسن		
AED 83.75	نسمات الصيف العليل	
10 زهور، 15 زهرة زنبق، 20 زهرة السوسن		

جد حل كل من أنظمة المعادلات التالية. (المثالان 6 و 7)

$$32. \begin{cases} -2x + y - 3z = 0 \\ 3x - 4y + 10z = -7 \\ 5x + 2y + 8z = 23 \end{cases}$$

$$33. \begin{cases} 4x - 5y - 9z = -25 \\ -6x + y + 7z = -21 \\ 7x - 3y - 10z = 8 \end{cases}$$

$$34. \begin{cases} -x + 3y + 10z = 8 \\ 4x - 9y - 34z = -17 \\ 3x + 5y - 2z = 46 \end{cases}$$

$$35. \begin{cases} 5x - 4y - 7z = -31 \\ 2x + y - 8z = 11 \\ -4x + 3y + 6z = 23 \end{cases}$$

$$36. \begin{cases} -3x + 4y - z = -10 \\ 6x - y - 5z = -29 \\ 4x - 5y + z = 11 \end{cases}$$

$$37. \begin{cases} 8x - 9y - 4z = -33 \\ -2x + 3y - 2z = 9 \\ -7x + 6y + 11z = 27 \end{cases}$$

$$38. \begin{cases} 2x - 5y + 4z + 4w = 2 \\ -3x + 6y - 2z - 7w = 11 \\ 5x - 4y + 8z - 5w = 29 \end{cases}$$

$$39. \begin{cases} x - 4y + 4z + 3w = 2 \\ -2x - 3y + 7z - 3w = -9 \\ 3x - 5y + z + 10w = 15 \end{cases}$$

اكتب كل نظام معادلات في صيغة مثلثية باستخدام حذف جاوس. ثم حل النظام. (مثال 1)

$$1. \begin{cases} 5x = -3y - 31 \\ 2y = -4x - 22 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 4y + 17 = -7x \\ 8x + 5y = -19 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 12x = 21 - 3y \\ 2y = 6x + 7 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 4y = 12x - 3 \\ 9x = 20y - 2 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} -3x + y + 6z = 15 \\ 2x + 2y - 5z = 9 \\ 4x - 5y + 2z = -3 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} 8x - 24y + 16z = -7 \\ 40x - 9y + 2z = 10 \\ 32x + 8y - z = -2 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} 3x + 9y - 6z = 17 \\ -2x - y + 24z = 12 \\ 2x - 5y + 12z = -30 \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} 5x - 50y + z = 24 \\ 2x + 10y + 3z = 23 \\ -5x - 20y + 10z = 13 \end{cases}$$

اكتب المصفوفة الموسعة لكل نظام من المعادلات الخطية التالية. (مثال 2)

$$9. \begin{cases} 12x - 5y = -9 \\ -3x + 8y = 10 \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} -4x - 6y = 25 \\ 7x + 2y = 16 \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} 3x - 5y + 7z = 9 \\ -10x + y + 8z = 6 \\ 4x - 15z = -8 \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} 4x - z = 27 \\ -8x + 7y - 6z = -35 \\ 12x - 3y + 5z = 20 \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} w - 8x + 5y = 11 \\ 7w + 2x - 3y + 9z = -5 \\ 6w + 12y - 15z = 4 \\ 3x + 4y - 8z = -13 \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} 14x - 2y + 3z = -22 \\ 5w - 4x + 11z = -8 \\ 2w - 6y + 3z = 15 \\ 3w + 7x - y = 1 \end{cases}$$

15. **بيع المخبوزات** نظم أعضاء مجموعة شبابية معرضاً لبيع المخبوزات لجمع الأموال لرحلة صيفية. وقد باعوا 30 كعكة و 40 فطيرة و 200 كعكة كوكيز كبيرة وجمعوا مبلغاً قدره AED 684.50. وتكون تكلفة الفطيرة أقل من تكلفة الكعكة بمقدار 2 AED وتكون تكلفة الكعكة 5 أضعاف تكلفة كعكة الكوكيز الكبيرة. (مثال 2)

a. افترض أن المتغير c = عدد الكعك وأن المتغير p = عدد الفطائر والمتغير g = عدد كعكات الكوكيز الكبيرة. اكتب نظاماً من ثلاث معادلات خطية لتمثيل هذه المسألة.

b. اكتب المصفوفة الموسعة لنظام المعادلات الخطية الذي كتبته في الجزء a.

c. جد حلاً لنظام المعادلات. فسر حلك.

حدد ما إذا كانت كل مصفوفة في صورة نموذج درجة الصف. (مثال 3)

$$16. \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \end{array} \right]$$

$$17. \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 9 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$18. \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -8 & 12 & 1 \\ 1 & 3 & -7 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 4 \end{array} \right]$$

$$19. \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 10 & 1 \\ 0 & 1 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

$$20. \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & -7 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

$$21. \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & -8 & 5 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & 13 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

50. مسألة غير محددة الإجابة ضع نظامًا من 3 معادلات بمتغيرات له عدد لا نهائي من الحلول. اشرح استنتاجك.

51. تجد ادرس نظام المعادلات التالي. ما قيمة k التي تجعل النظام متوافقًا ومستقلًا؟

$$\begin{aligned} 2x + 2y &= 5 \\ 5y - kz &= -22 \\ 2x + 5z &= 26 \\ -2x + ky + z &= -8 \end{aligned}$$

52. تحليل الخطأ يكتب يوسف وعبد الله المصفوفة الموسعة للنظام أدناه في صورة نموذج درجة الصف.

$$\begin{aligned} 2x - y + z &= 0 \\ x + y - 2z &= -7 \\ x - 3y + 4z &= 9 \end{aligned}$$

عبد الله

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -4 & -11 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right]$$

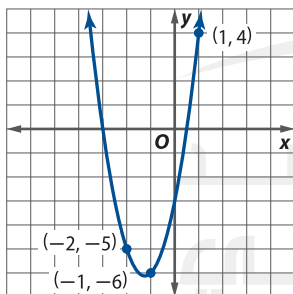
يوسف

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -7 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right]$$

هل أحدهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.

53. التبرير حدد ما إذا كانت العبارة التالية صحيحة أم خاطئة: إذا كانت المصفوفة التربيعية الموسعة والمكتوبة في صورة نموذج درجة الصف وكان صفها الأخير صفًا من الأصفار، فحينها لا يكون لنظام المعادلات المقابل حل. اشرح استنتاجك.

54. تجد يمر قطع مكافئ عبر ثلاث نقاط موضحة في التمثيل البياني أدناه.



a. اكتب نظام معادلات يمكن استخدامه لإيجاد معادلة القطع المكافئ في النموذج $f(x) = ax^2 + bx + c$.

b. استخدم المصفوفات لحل نظام المعادلات الذي كتبه في الجزء a.

c. استخدم الحل الذي جده في الجزء b لكتابة معادلة للقطع المكافئ. ثم تحقق من النتائج باستخدام حاسبة التمثيل البياني.

$$f(x) = 2x^2 + 5x - 3$$

55. الكتابة في الرياضيات قارن وقابل بين حذف جاوس وحذف جاوس-جوردان.

حاسبة التمثيل البياني جد نموذج درجة الصف ونموذج درجة الصف المنخفض لكل نظام من الأنظمة التالية.

$$\begin{aligned} 40. \quad 3x + 2.5y &= 18 \\ 6.8x - 4y &= 29.2 \end{aligned} \quad 41. \quad \frac{2}{5}x - \frac{1}{2}y = 8$$

$$\frac{3}{4}x + \frac{5}{8}y = \frac{5}{2}$$

$$\begin{aligned} 42. \quad 7x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{6}z &= -\frac{13}{3} \\ -\frac{3}{5}x + y - \frac{1}{3}z &= \frac{11}{10} \\ 2x - \frac{2}{5}y - \frac{1}{2}z &= -6 \end{aligned} \quad 43. \quad \begin{aligned} 15.9x - y + 4.3z &= 14.8 \\ -8.2x + 14y &= 14.6 \\ -11x + 0.5y - 1.6z &= -20.4 \end{aligned}$$

44. المعرفة المالية حصلت شركة معدات رياضية على ثلاثة قروض مختلفة من أحد البنوك لشراء أجهزة الجري الكهربائية. ويتم عرض بيان البنك بعد العام الأول أدناه. وقد كان المبلغ المقترض بمعدل فائدة 6.5% أقل بمقدار AED 50,000 من المبلغين المقترضين بالمعدلين الآخرين مجتمعين.

شركة بنك الخليج	
ملخص البيان	
المبلغ المقترض	
AED 350,000	القرض 1
معدل الفائدة 6.5%	القرض 2
معدل الفائدة 7%	القرض 3
معدل الفائدة 9%	الفائدة المدفوعة
AED 24,950	

a. اكتب نظامًا من ثلاث معادلات خطية لتمثيل هذه الحالة.

b. استخدم حاسبة التمثيل البياني لحل نظام المعادلات. فسر الحل.

حدد عملية الصف التي تم القيام بها للحصول على كل مصفوفة.

$$45. \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -6 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -6 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array} \right]$$

$$46. \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -5 & 4 \\ 9 & -1 & 4 & -2 \\ 8 & 4 & -3 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -5 & 4 \\ 9 & -1 & 4 & -2 \\ 2 & 2 & 7 & -7 \end{array} \right]$$

$$47. \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 15 & 2 & 4 & 14 \\ 0 & 8 & 5 & -5 & 15 \\ 2 & 1 & 0 & 16 & 20 \\ -3 & -11 & -1 & 6 & -4 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 15 & 2 & 4 & 14 \\ 0 & 8 & 5 & -5 & 15 \\ 2 & 1 & 0 & 16 & 20 \\ 0 & 34 & 5 & 18 & 38 \end{array} \right]$$

$$48. \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 8 & -2 & 0 & 2 & 12 \\ 8 & 5 & -7 & 1 & 6 \\ -1 & 0 & 9 & 3 & 3 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 8 & -2 & 0 & 2 & 12 \\ 0 & 7 & -7 & -1 & -6 \\ -1 & 0 & 9 & 3 & 3 \end{array} \right]$$

49. الطب هناك حاجة إلى محلول ملحي مخفف للإجراءات الطبية الروتينية في المستشفى. وتحتوي غرفة الإمدادات على كمية كبيرة من المحلول الملحي بتركيز 20% والمحلول الملحي بتركيز 40% ولكنها تحتاج إلى 10 L من المحلول الملحي بتركيز 25%.

a. اكتب نظام معادلات لتمثيل هذه الحالة.

b. جد حلاً لنظام المعادلات. فسر الحل.

اثبت صحة كل متطابقة.

56. $2 \cos^2 \frac{x}{2} = 1 + \cos x$

57. $\tan^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$

58. $\frac{1}{\sin x \cos x} - \frac{\cos x}{\sin x} = \tan x$

جد القيمة الدقيقة لكل تعبير مثلثي مما يلي.

59. $\cos 105^\circ$

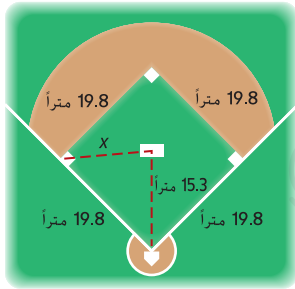
60. $\sin 165^\circ$

61. $\cos \frac{7\pi}{12}$

62. $\sin \frac{\pi}{12}$

63. $\cot \frac{113\pi}{12}$

64. $\sec 1275^\circ$



65. **الكرة اللينة** في لعبة الكرة اللينة ذات الرميات البطيئة، تعد الماسة مربعًا يبعد 19.8 m عن كل جانب، وتكون المسافة بين مكان الرامي وصفحة الملعب 15.3 m. فما بعد المسافة التي يحتاج الرامي إليها لرمي الكرة من مكان الرامي إلى القاعدة الثالثة لإيقاف لاعب يحاول الاستيلاء على القاعدة الثالثة؟

66. **السفر** في أحد مراكز الجولات السياحية الاستطلاعية بالقرب من قاعدة شلالات حدوة الحصان بشلالات نياجرا، قُدِّر أحد الركاب زاوية الارتفاع إلى أعلى الشلالات بـ 30° . فإذا كان ارتفاع شلالات حدوة الحصان 52.7 m، فما المسافة من المركب إلى قاعدة الشلالات؟

67. **الأرانب** تتكاثر الأرانب بمعدلات ضخمة وتزايد أعدادها أسياً في غياب أعدائها الطبيعيين. افترض أنه كان هناك في الأصل 65,000 أرنب في منطقة ما، وبعدها بعامين أصبح العدد 2,500,000 أرنب.

a. اكتب دالة أسية يمكن استخدامها لتمثيل عدد الأرانب y في هذه المنطقة. اكتب الدالة بدلالة x . عدد الأعوام منذ العام الأصلي.

b. افترض أن عدد الأرانب استمر في النمو بهذا المعدل. قُدِّر عدد الأرانب في هذه المنطقة بعد 7 أعوام من العام الأصلي.

حُلّ كل من المعادلات التالية.

68. $\frac{3}{x} + \frac{2}{x-1} = \frac{17}{12}$

69. $\frac{4}{x+3} - \frac{2}{x+1} = \frac{2}{15}$

70. $\frac{4}{3} - \frac{1}{x-2} = \frac{13}{2x}$

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

73. يبيع محل للألبان قوالب لبن على شكل مخروط، ويبيع الصغير بتكلفة AED 0.89 والمتوسط بتكلفة AED 1.19 والكبير بتكلفة AED 1.39. وفي أحد الأيام، باع سالم 52 قالبًا، وباع عددًا من القوالب المتوسطة أكبر من القوالب الصغيرة بمقدار سبعة، فإذا باع قوالب بمبلغ AED 58.98، فكم عدد القوالب المتوسطة التي باعها؟

A 11

C 24

B 17

D 36

74. **مراجعة** للتدرب في المنزل، اشترى علي كرة سلة وكرة طائرة وكان إجمالي تكلفتها AED 67. غير شاملة للضريبة. فإذا كانت تكلفة كرة السلة b أكبر من ضعف تكلفة كرة الطائرة v بمقدار AED 4، فأى أنظمة المعادلات الخطية يمكن استخدامها لتحديد تكلفة كل كرة؟

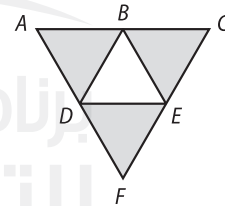
F $b + v = 67$
 $b = 2v - 4$

H $b + v = 4$
 $b = 2v - 67$

G $b + v = 67$
 $b = 2v + 4$

J $b + v = 4$
 $b = 2v + 67$

71. $\triangle ACF$ SAT/ACT عبارة عن متساوي أضلاع له أضلاع طولها 4. فإذا كان B و D و E هي نقاط المنتصف لأضلاعه على التوالي، فما مجموع مساحات المناطق المظللة؟



A $3\sqrt{2}$

C $4\sqrt{2}$

E $6\sqrt{3}$

B $3\sqrt{3}$

D $4\sqrt{3}$

72. **مراجعة** اشترى متعهد تقديم الطعام عدة أربال من سلطات الدجاج والتونة لوجبة غداء. وتكلف سلطة الدجاج AED 33 لكل كيلوجرام، بينما تكلف سلطة التونة AED 22 لكل كيلوجرام. وقد اشترى إجمالي 6.4 kg من السلطة ودفَّع إجمالي AED 407.70. فما مقدار سلطة الدجاج التي اشتراها متعهد تقديم الطعام؟

F 2.7 kg

H 3.6 kg

G 3.2 kg

J 4.1 kg

ضرب المصفوفات والمعكوسات والمحددات

2-6

الرياضيات

لماذا؟

الحالي

سابقاً



- ضرب المصفوفات. تستخدم المصفوفات في العديد من الصناعات بصفتها وسيلة يسيرة لتخزين البيانات. مجال إدارة المطاعم، يستخدم ضرب المصفوفات لتحديد مقدار المواد الخام الضرورية لإنتاج المنتج الأخير المنشود أو الأطباق الموجودة في القائمة.
- إيجاد معكوسات المصفوفات 2×2 والمصفوفات 3×3 .

- قيمت بإجراء عمليات حسابية على المصفوفات.

1 ضرب المصفوفات تتمثل عمليات المصفوفات الأساسية الثلاث في جمع المصفوفات وضربها وضربها بكميات قياسية. وقد رأيت أن جمع المصفوفات يشبه جمع الأعداد الحقيقية وضرب المصفوفات في كمية قياسية يشبه ضرب الأعداد الحقيقية.

جمع المصفوفات

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \end{bmatrix}$$

الضرب بالكميات القياسية

$$k \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \end{bmatrix}$$

ولا يوجد لضرب المصفوفة أي عمليات مشابهة بنظام الأعداد الحقيقية. لضرب المصفوفة A في المصفوفة B ، فإن عدد الأعمدة في A يجب أن يكون مساوياً لعدد الصفوف في B . ويمكن تحديد ذلك بدراسة أبعاد A و B . فإذا استوفيت الشروط، يكون ناتج ضرب المصفوفة AB ويكون بها نفس عدد صفوف المصفوفة A ونفس عدد أعمدة المصفوفة B .

$$\begin{array}{ccc} \text{المصفوفة } A & \times & \text{المصفوفة } B \\ 3 \times 2 & & 2 \times 4 \\ \hline & & AB \\ & & 3 \times 4 \end{array}$$

يساوي
أبعاد AB

المفهوم الأساسي ضرب المصفوفات

الشرح

إذا كانت A مصفوفة $m \times r$ وكانت B مصفوفة $r \times n$ ، فإن ناتج ضربهما AB هو المصفوفة $m \times n$ التي يمكن الحصول عليها بجمع نواتج ضرب مداخل الصف في المصفوفة A في المداخل المناظرة لعمود في المصفوفة B .

الرموز

إذا كانت A هي مصفوفة $m \times r$ و B هي مصفوفة $r \times n$ ، فإن ناتج ضرب AB هو المصفوفة $m \times n$ التي يكون فيها

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ir}b_{rj}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ir} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mr} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ b_{r1} & b_{r2} & \dots & b_{rn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \dots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{bmatrix}$$

المفردات الجديدة

المصفوفة المحايدة

(identity matrix)

المصفوفة العكسية

(inverse matrix)

المعكوس (inverse)

قابل للعكس (invertible)

المصفوفة المنفردة

(singular matrix)

المحدد (determinant)

يمكن اعتبار كل مدخلة في ناتج ضرب مصفوفتين على أنه ناتج ضرب مصفوفة صف $1 \times r$ في مصفوفة عمود $r \times 1$.
أدرس ناتج ضرب مصفوفة الصف 1×3 في مصفوفة العمود 3×1 الموضحة.

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 \\ -6 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2(4) + 1(-6) + 3(5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$$

مثال 1 ضرب المصفوفات

استخدم المصفوفات $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 6 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ لإيجاد كل ناتج ضرب، إن وجد.

a. AB

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 & 0 & 6 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$A_{2 \times 2} \cdot B_{2 \times 3}$

A هي مصفوفة 2×2 و B هي مصفوفة 2×3 . حيث إن عدد الأعمدة للمصفوفة A يساوي عدد الصفوف في المصفوفة B ، إذا فإن ناتج الضرب AB موجود.

لإيجاد المدخل الأول في AB ، اكتب مجموع نواتج ضرب المدخلات في الصف 1 للمصفوفة A وفي العمود 1 للمصفوفة B .

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 & 0 & 6 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3(-2) + (-1)(3) \end{bmatrix}$$

اتبع نفس الإجراء لإيجاد مدخل الصف 1 والعمود 2 من AB .

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 & 0 & 6 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3(-2) + (-1)(3) & 3(0) + (-1)(5) & 3(6) + (-1)(1) \\ 4(-2) + 0(3) & 4(0) + 0(5) & 4(6) + 0(1) \end{bmatrix}$$

استمر في ضرب كل صف في كل عمود لإيجاد مجموع كل مدخل.

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 & 0 & 6 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3(-2) + (-1)(3) & 3(0) + (-1)(5) & 3(6) + (-1)(1) \\ 4(-2) + 0(3) & 4(0) + 0(5) & 4(6) + 0(1) \end{bmatrix}$$

وأخيرًا، بسّط كل مجموع.

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 & 0 & 6 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & -5 & 17 \\ -8 & 0 & 24 \end{bmatrix}$$

b. BA

$$BA = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 6 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$B_{2 \times 3} \cdot A_{2 \times 2}$

بما أن عدد أعمدة B لا يساوي عدد صفوف A ، فإن ناتج الضرب BA ليس موجودًا. يعني أن BA غير محدد.

تدريب موجه

جد AB و BA ؛ إن أمكن.

$$1A. A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -5 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$1B. A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 5 & -7 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -6 & 1 & 7 \\ 4 & -5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}$$

لاحظ في المثال 1 أن ناتج الضرب AB و BA مختلفان. وفي معظم الحالات، حتى عند تحديد كل من ناتج الضرب، تكون $AB \neq BA$. ويعني ذلك أن خاصية التبديل لا تنطبق على ضرب المصفوفات. ومع ذلك، تنطبق بعض من خصائص الأعداد الحقيقية على ضرب المصفوفات.

تلميح تقني

ضرب المصفوفات يمكنك

استخدام حاسبة التمثيل البياني لضرب المصفوفات. حدد A و B في قائمة المصفوفات ثم اضرب المصفوفات باستخدام حروفها المرجعية. لاحظ أن الحاسبة تظهر صفوف ناتج الضرب في المثال 1a باستخدام مصفوفات 1×3 .

$$\begin{bmatrix} A \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & -5 & 17 \\ -8 & 0 & 24 \end{bmatrix}$$

المفهوم الأساسي خصائص ضرب المصفوفات

لأي مصفوفة A و B و C والتي يكون ناتج ضرب المصفوفات لها معرّف ولأي كمية قياسية/عدد ثابت k . الخصائص التالية صحيحة.

$$(AB)C = A(BC)$$

خاصية التجميع في ضرب المصفوفة

$$k(AB) = (kA)B = A(kB)$$

خاصية التجميع في ضرب الكميات القياسية

$$C(A + B) = CA + CB$$

خاصية التوزيع إلى اليسار

$$(A + B)C = AC + BC$$

خاصية التوزيع إلى اليمين

ستبرهن على هذه الخصائص في التمارين 72-75.

يمكن استخدام ضرب المصفوفات لحل مسائل من الحياة اليومية.

مثال 2 من الحياة اليومية ضرب المصفوفات

التصويت توضح نسبة المصوتين من فئات عمرية مختلفة والمسجلين بأحزاب الديمقراطية أو الجمهوريين أو المستقلين بأحد الانتخابات الأخيرة في مدينة أمريكية. استخدم هذه المعلومات لتحديد إن كان عدد المصوتين من الذكور المسجلين لحزب الديمقراطيين أكبر من عدد الإناث المسجلين بحزب الجمهوريين.

التوزيع حسب العمر والجنس

العمر	أنثى	ذكر
18-25	18,500	16,000
26-40	20,000	24,000
41-50	24,500	22,500
50+	16,500	14,000

التوزيع حسب الحزب والعمر (%)

الحزب	18-25	26-40	41-50	50+
الديمقراطيون	0.55	0.50	0.35	0.40
الجمهوريون	0.30	0.40	0.45	0.55
المستقلون	0.15	0.10	0.20	0.05

افترض أن المصفوفة X تمثل التوزيع حسب الحزب والعمر وافترض أن المصفوفة Y تمثل التوزيع حسب العمر والجنس. ثم جد ناتج الضرب XY .

$$XY = \begin{bmatrix} 0.55 & 0.50 & 0.35 & 0.40 \\ 0.30 & 0.40 & 0.45 & 0.55 \\ 0.15 & 0.10 & 0.20 & 0.05 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 18,500 & 16,000 \\ 20,000 & 24,000 \\ 24,500 & 22,500 \\ 16,500 & 14,000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35,350 & 34,275 \\ 33,650 & 32,225 \\ 10,500 & 10,000 \end{bmatrix}$$

يمثل ناتج الضرب XY توزيع المصوتين من الذكور والإناث والمسجلين بكل حزب. يمكن استخدام ناتج ضرب المصفوفة لإيجاد عدد المصوتين الذكور المسجلين بحزب الديمقراطيين وعدد المصوات الإناث المسجلين بحزب الجمهوريين. المستقلون

الديمقراطيون	الجمهوريون	المستقلون
35,350	34,275	33,650
33,650	32,225	10,500
10,500	10,000	

كان عدد المصوتين الذكور المسجلين بحزب الديمقراطيين أكبر من عدد المصوات الإناث المسجلات بحزب الجمهوريين، حيث إن $34,275 > 33,650$.

تمرين موجّه

2. **المبيعات** يوضح عدد أجهزة الكمبيوتر المحمولة التي باعتها إحدى الشركات في الأشهر الثلاثة الأولى من العام، وكذلك أسعار كل طراز أثناء هذه الأشهر. استخدم هذه المعطيات لتحديد أي النماذج تنتج أكبر قدر من الدخل للأشهر الثلاثة الأولى.

الطراز	يناير	فبراير	مارس
1	AED 650	AED 575	AED 485
2	AED 800	AED 700	AED 775
3	AED 900	AED 1050	AED 925

شهر	الطراز 1	الطراز 2	الطراز 3
يناير	150	250	550
فبراير	200	625	100
مارس	600	100	350

الربط بالحياة اليومية

في انتخابات عام 2008 في الولايات المتحدة الأمريكية، تلقى الرئيس باراك أوباما 66,882,230 صوتاً أو 53% من أصوات الجمهور.

المصدر: وكالة أنباء CNN

أنت تعلم أن المحايد الضربي للأعداد الحقيقية هو العدد 1، حيث إنه لأي عدد حقيقي a ، $a \times 1 = a$. ويطلق على المحايد الضربي للمصفوفة المربعة $n \times n$ اسم **المصفوفة المحايدة**.

المفهوم الأساسي المصفوفة المحايدة

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

بالرموز

الشرح
إن المصفوفة المحايدة ذات الرتبة n ، الذي يُعبر عنها بالرمز I_n ، هي مصفوفة $n \times n$ تكون جميع قيمها 1 على قطرها الرئيس، من أعلى اليسار إلى أدنى اليمين، وجميع قيمها الأخرى تساوي 0.

قراءة في الرياضيات

المصفوفة المحايدة يستخدم الرمز I_n لتمثيل المحايد للمصفوفة $n \times n$. يستخدم الرمز I بدلاً من I_2 ، I_3 ، إلى آخره، عندما يكون رتبة المحايد معروفة.

إذًا، إن كانت A مصفوفة $n \times n$ ، فإن $A I_n = I_n A = A$. وقد تجد المصفوفة المحايدة بالطرف الأيسر لأي مصفوفة موسعة في صورة مستوى صف منخفض. وبشكل عام، إذا كانت A مصفوفة المعاملات لنظام المعادلات، فإن X هي مصفوفة العمود للمتغيرات و B هي مصفوفة العمود للثوابت، فيمكنك كتابة نظام المعادلات كمعادلة من المصفوفات أو معادلة مصفوفية.

نظام المعادلات

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

معادلة المصفوفة

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$A \quad \times \quad X = B$

مثال 3 حل أنظمة المعادلات الخطية

اكتب نظام المعادلات في صورة معادلة مصفوفية $AX = B$. ثم استخدم اختزال جاوس-جوردان على المصفوفة الموسعة لحل النظام.

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 - 2x_3 &= 2 \\ -2x_1 + 3x_2 - 4x_3 &= 5 \\ 3x_1 - 4x_2 + 7x_3 &= -1 \end{aligned}$$

اكتب النظام كمصفوفة بالشكل $AX = B$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -2 & 3 & -4 \\ 3 & -4 & 7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix} \quad A \times X = B$$

اكتب المصفوفة الموسعة $[A \mid B]$. استخدم اختزال جاوس-جوردان لحل النظام.

$$[A \mid B] = \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -4 & 5 \\ 3 & -4 & 7 & -1 \end{array} \right] \quad \text{مصفوفة موسعة}$$

$$[I \mid X] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -13 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array} \right] \quad \text{استخدم عمليات الصف الأولية لتحويل A إلى I.}$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix} \quad \text{يحدد حل المعادلة بواسطة X.}$$

إذًا، فإن حل نظام المعادلة هو $(-13, 1, 6)$.

تمرين موجه

اكتب كل نظام من أنظمة المعادلات في صورة معادلة مصفوفية $AX = B$. ثم استخدم اختزال جاوس-جوردان على المصفوفة الموسعة $[A \mid B]$ لحل النظام.

$$\begin{aligned} 3A. \quad x_1 - 2x_2 - 3x_3 &= 9 \\ -4x_1 + x_2 + 8x_3 &= -16 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3B. \quad x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 &= 4 \\ -x_1 + 4x_2 + x_3 &= 3 \end{aligned}$$

قراءة في الرياضيات

المصفوفة الموسعة يمثل الرمز $[A \mid B]$ والتي تقرأ A الموسعة بواسطة B ، المصفوفة الموسعة والتي تنتج عندما تكون المصفوفة B متصلة بالمصفوفة A .

2 المعكوسات والمحددات أنت تعلم أنه إذا كان a عددًا حقيقيًا غير صفري، فإن $\frac{1}{a}$ أو a^{-1} هو المعكوس الضربي للمتغير a حيث إن $a \times a^{-1} = 1$ $\left(\frac{1}{a}\right) = a \times a^{-1} = 1$. ويطلق على المعكوس الضربي لمصفوفة مربعة اسم **المصفوفة العكسية**.

المفهوم الأساسي معكوس المصفوفة المربعة

افترض أن A هي المصفوفة $n \times n$. فإذا وجدت مصفوفة B بحيث تكون $AB = BA = I_n$. فيطلق على المصفوفة B حينها **معكوس** المصفوفة A وتكتب بالصورة A^{-1} . إذا، $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$.

قراءة في الرياضيات

المصفوفة العكسية يقرأ الرمز A^{-1} على أنه المعكوس.

مثال 4 إثبات صحة المصفوفة العكسية

حدد إذا كان $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ مصفوفتين متعاكستين.

إذا كانت المصفوفة A والمصفوفة B مصفوفتين متعاكستين، فإن $AB = BA = I$.

$$AB = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3+4 & 6+(-6) \\ -2+2 & 4+(-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3+4 & 2+(-2) \\ -6+6 & 4+(-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

حيث إن $AB = BA = I$. يترتب على ذلك أن $B = A^{-1}$ و $A = B^{-1}$.

تمرين موجه

حدد إذا كانت المصفوفة A والمصفوفة B مصفوفتين متعاكستين.

$$4A. A = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$4B. A = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$$

نصيحة دراسية

المصفوفة المنفردة إذا كانت المصفوفة منفردة، فإن المعادلة المصفوفية $AB = I$ ليس لها حل.

وإذا كان للمصفوفة A معكوس، يقال إن المصفوفة A **قابلة للعكس** أو غير منفردة. أما **المصفوفة المنفردة** فليس لها معكوس. وليست جميع المصفوفات المربعة قابلة للعكس. ولإيجاد معكوس مصفوفة مربعة A ، ستحتاج إلى إيجاد المصفوفة A^{-1} . بافتراض وجود A^{-1} وأن ناتج ضرب A و A^{-1} هو المصفوفة المحايدة. بعبارة أخرى، ستحتاج إلى حل المعادلة المصفوفية $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$ لإيجاد قيمة B . وبمجرد تحديد B ، ستحتاج إلى التأكد أن $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$.

من إحدى طرق إيجاد معكوس المصفوفة المربعة استخدام نظام معادلات. افترض أن $A = \begin{bmatrix} 8 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ وافترض وجود A^{-1} . اكتب المعادلة المصفوفية $AA^{-1} = I_2$ ، حيث إن $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

$$\begin{bmatrix} 8 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad AA^{-1} = I_2$$

$$\begin{bmatrix} 8a - 5c & 8b - 5d \\ -3a + 2c & -3b + 2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ضرب المصفوفة}$$

$$\begin{aligned} 8a - 5c &= 1 & 8b - 5d &= 0 \\ -3a + 2c &= 0 & -3b + 2d &= 1 \end{aligned} \quad \text{مساواة العناصر المتناظرة}$$

من مجموعة المعادلات الأربع، ستري أن هناك نظامين من المعادلات يحتوي كل منهما على قيمتين مجهولتين. اكتب المصفوفات الموسعة المقابلة.

$$\begin{bmatrix} 8 & -5 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{لاحظ أن المصفوفة الموسعة لكل نظام لها نفس مصفوفة المعاملات،} \quad \begin{bmatrix} 8 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

بما أن مصفوفة المعاملات للأنظمة متطابقة، يمكننا إجراء عملية خفض الصف على كل من المصفوفتين الموسعتين في نفس الوقت من خلال كتابة مصفوفة موسعة مزدوجة $[A \mid I]$. لإيجاد A^{-1} ، استخدم المصفوفة الموسعة المزدوجة

$$\begin{bmatrix} 8 & -5 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مثال 5 معكوس المصفوفة

جد A^{-1} ، إن وجدت. فإن لم توجد A^{-1} ، فاكتب منفردة.

a. $A = \begin{bmatrix} 8 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

الخطوة 1 أنشئ المصفوفة الموسعة المزدوجة $[A | I]$.

$$[A | I] = \left[\begin{array}{cc|cc} 8 & -5 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

مصفوفة موسعة مزدوجة

الخطوة 2 طبق عمليات الصف الأولية لكتابة المصفوفة في صورة مستوى صف منخفض.

$$\begin{array}{l} \left[\begin{array}{cc|cc} 8 & -5 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{R_1 + 5R_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 8 & 0 & 16 & 40 \\ -3 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ \xrightarrow{3R_1 + 8R_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 8 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 8 \end{array} \right] \xrightarrow{\frac{1}{8}R_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 8 \end{array} \right] = [I | A^{-1}] \\ A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} \end{array}$$

العمودان الأولان هما المصفوفة المحايدة. إذا A قابلة للعكس و $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ تأكد أن $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

التحقق تأكد أن $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 8 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I \checkmark$$

$$A^{-1}A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I \checkmark$$

b. $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{bmatrix}$

$$[A | I] = \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 4 & 1 & 0 \\ -3 & -6 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\frac{1}{2}R_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & \frac{1}{2} & 0 \\ -3 & -6 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{3R_1 + R_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & 1 \end{array} \right]$$

مصفوفة موسعة مزدوجة

طبق عمليات الصف الأولية لكتابة المصفوفة في صورة مستوى صف منخفض.

الخطوة 1

الخطوة 2

لاحظ أنه من المستحيل الحصول على مصفوفة محايدة / على الطرف الأيسر لمصفوفة موسعة مزدوجة

إذا، المصفوفة A منفردة.

تمرين موجه

5A. $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$

5B. $\begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 3 & 7 & 9 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix}$

5C. $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -6 & -3 \end{bmatrix}$

وفيما يلي ملخص العملية المستخدمة لإيجاد معكوس المصفوفة المربعة.

ملخص المفهوم إيجاد معكوس المصفوفة المربعة

- افترض أن A هي المصفوفة $n \times n$.
- اكتب المصفوفة الموسعة $[A | I_n]$.
- أجرِ عمليات الصف الأولية على المصفوفة الموسعة لخفض المصفوفة A صورة مستوى صف منخفض.
- قرر إن كانت A قابلة للعكس.
- إذا أمكن خفض A إلى المصفوفة المحايدة I_n ، فإن A^{-1} هي المصفوفة الموجودة على يمين للمصفوفة الموسعة المحولة $[I_n | A^{-1}]$.
- إذا لم يتمكن من خفض المصفوفة A إلى مصفوفة محايدة I_n ، فإن A مصفوفة منفردة.

تلميح تقني

المصفوفات المنفردة إذا كانت المصفوفة منفردة، فسُظهر حاسبة التمثيل البياني رسالة الخطأ التالية.

ERR: SINGULAR MAT

بالرغم من أن طريقة إيجاد المصفوفة العكسية المستخدمة في المثال 5 تفلح مع أي مصفوفة مربعة، قد نجد القانون التالي مفيدًا عند إيجاد معكوس المصفوفة 2×2 .

المفهوم الأساسي معكوس ومحدد المصفوفة 2×2

افترض $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. يكون للمصفوفة A معكوس فقط إن كان $ad - cb \neq 0$ وهو $A^{-1} = \frac{1}{ad - cb} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

العدد $ad - cb$ يُسمى **مُحدد** المصفوفة 2×2 ويُعبّر عنه بواسطة $\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$.

سُتَبَت هذه النظرية في التمرين 66.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb.$$

إذًا، يقدم محدد المصفوفة 2×2 اختبارًا لتحديد إن كانت المصفوفة قابلة للعكس. لاحظ أن محدد المصفوفة 2×2 هو الفارق بين ناتج ضرب قطري المصفوفة.

مثال 6 محدد ومعكوس المصفوفة 2×2

جد محدد كل من المصفوفات التالية. ثم جد معكوس المصفوفة، إن وُجد.

$$\text{a. } A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 2(4) - 4(-3) = 20$$

$$a = 2, b = -3, c = 4, d = 4$$

$$ad - cb$$

حيث إن $\det(A) \neq 0$ ، A قابلة للعكس. طبق الصيغة لمعكوس المصفوفة 2×2 .

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{ad - cb} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{20} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{20} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{10} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

معكوس مصفوفة 2×2

$$a = 2, b = -3, c = 4, d = 4, ad - cb = 20$$

ضرب الكميات غير المتجهة

$$AA^{-1} = A^{-1}A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \checkmark \quad \text{التحقق}$$

$$\text{b. } B = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 9 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 9 & 6 \end{vmatrix} = 6(6) - 9(4) = 0$$

حيث إن $\det(B) = 0$ ، فإن B غير قابلة للعكس. إذًا، B^{-1} غير موجودة.

تمرين موجه

$$6A. \begin{bmatrix} -4 & 6 \\ 8 & -12 \end{bmatrix}$$

$$6B. \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$$

نصيحة دراسية

معكوس المصفوفة 2×2 تكتب صيغة معكوس المصفوفة 2×2 في الصورة

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

يُعيّن محدد المصفوفة 3×3 باستخدام المحددات 2×2 على النحو المبين.

تلميح تقني

المحدد يمكنك استخدام خاصية $\det$ على حاسبة التمثيل البياني لإيجاد محدد المصفوفة المربعة. إذا حاولت إيجاد محدد مصفوفة بأبعاد غير $n \times n$ ، فسُظهرت حاسبتك رسالة الخطأ التالية.
ERR:INVALID DIM

المفهوم الأساسي محدد مصفوفة 3×3

$$\det(A) = |A| = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \text{ إذا } A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \text{ افترض}$$

وكما هو الحال مع المصفوفات من الرتبة 2×2 ، يكون للمصفوفة A من الرتبة 3×3 معكوس إذا وفقط إذا كان $\det(A) \neq 0$. توجد صيغة لحساب معكوس المصفوفة 3×3 والمصفوفات الأعلى درجة. وعلى الرغم من ذلك، بسبب تعقيد هذه الصيغة، سنستخدم حاسبة التمثيل البياني لحساب معكوس المصفوفة 3×3 والمصفوفة المربعة الأعلى رتبة.

مثال 7 محدد ومعكوس مصفوفة 3×3

جد محدد $C = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$. ثم جد C^{-1} . إن وجد.

$$\det(C) = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -3 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= -3[(-1)(0) - 4(2)] - 2[1(0) - (-1)(2)] + 4[1(4) - (-1)(-1)]$$

$$= -3(-8) - 2(2) + 4(3) = 32$$

حيث إن $\det(A) \neq 0$ لا يساوي الصفر، فإن C^{-1} موجودة. استخدم حاسبة التمثيل البياني لإيجاد قيمة C^{-1} .

$$[C]^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} \dots & .5 & .25 & 1 \\ \dots & .125 & .3125 & 1 \\ \dots & .3125 & .03125 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[C]^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} \dots & .25 & .5 & \dots \\ \dots & -.0625 & .125 & \dots \\ \dots & .09375 & .3125 & \dots \end{bmatrix}$$

يمكن استخدام خاصية $\frac{\text{Frac}}{\text{MATH}}$ تحت قائمة MATH لكتابة المعكوس باستخدام الكسور. على النحو المبين.

$$[C]^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} \dots & .5 & .25 & 1 \\ \dots & .125 & .3125 & 1 \\ \dots & .3125 & .03125 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Ans} \rightarrow \text{Frac}$$

$$\begin{bmatrix} \dots & 1/2 & 1/4 & 1 \\ \dots & 1/8 & 5/16 & 1 \\ \dots & 5/16 & 1/32 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[C]^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} \dots & .5 & .25 & 1 \\ \dots & .125 & .3125 & 1 \\ \dots & .3125 & .03125 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Ans} \rightarrow \text{Frac}$$

$$\begin{bmatrix} \dots & 1/2 & 1/4 & 1 \\ \dots & 1/8 & 5/16 & 1 \\ \dots & 5/16 & 1/32 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{16} & \frac{1}{8} & \frac{5}{16} \\ \frac{3}{32} & \frac{5}{16} & \frac{1}{32} \end{bmatrix} \text{ إذا،}$$

تمرين موجه

جد محدد كل من المصفوفات التالية. ثم جد معكوسها، إن وجد.

7A. $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

7B. $\begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \\ -3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

اكتب كل نظام من أنظمة المعادلات في صورة معادلة مصنوفة $AX = B$. ثم استخدم اختزال جاوس-جوردان على المصفوفة الموسعة لإيجاد حل النظام. (مثال 3)

11. $2x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 9$
 $4x_1 + x_2 - 6x_3 = 35$
 $-3x_1 + 9x_2 - 7x_3 = -6$
12. $3x_1 - 10x_2 - x_3 = 6$
 $-5x_1 + 12x_2 + 2x_3 = -5$
 $-4x_1 - 8x_2 + 3x_3 = 16$
13. $2x_1 - 10x_2 + 7x_3 = 7$
 $6x_1 - x_2 + 5x_3 = -2$
 $-4x_1 + 8x_2 - 3x_3 = -22$
14. $x_1 + 5x_2 + 5x_3 = -18$
 $-7x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -3$
 $6x_1 + 7x_2 - x_3 = 42$
15. $2x_1 + 6x_2 - 5x_3 = -20$
 $8x_1 - 12x_2 + 7x_3 = 28$
 $-4x_1 + 10x_2 - x_3 = 7$
16. $3x_1 - 5x_2 + 12x_3 = 9$
 $2x_1 + 4x_2 - 11x_3 = 1$
 $-5x_1 + 7x_2 - 15x_3 = -28$
17. $-x_1 - 3x_2 + 9x_3 = 25$
 $-5x_1 + 11x_2 + 8x_3 = 33$
 $2x_1 + x_2 - 13x_3 = -45$
18. $x_1 - 8x_2 - 3x_3 = -4$
 $-3x_1 + 10x_2 + 5x_3 = -42$
 $2x_1 + 7x_2 + 3x_3 = 20$

حدد إذا كانت المصفوفة A والمصفوفة B مصنوفتين متعاكستين. (مثال 4)

19. $A = \begin{bmatrix} 12 & -7 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$
 $B = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 12 \end{bmatrix}$
20. $A = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 5 & -6 \end{bmatrix}$
 $B = \begin{bmatrix} -6 & 5 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$
21. $A = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 6 & -4 \end{bmatrix}$
 $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$
22. $A = \begin{bmatrix} -8 & 4 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}$
 $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$
23. $A = \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$
 $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 5 & -9 \end{bmatrix}$
24. $A = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ -6 & -4 \end{bmatrix}$
 $B = \begin{bmatrix} -4 & -5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$
25. $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$
 $B = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$
26. $A = \begin{bmatrix} 9 & -7 \\ 8 & -5 \end{bmatrix}$
 $B = \begin{bmatrix} 1 & -6 \\ 4 & 10 \end{bmatrix}$

جد A^{-1} ، إن وجدت. فإن لم توجد A^{-1} ، فاكتب منفردة. (مثال 5)

27. $A = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}$
28. $A = \begin{bmatrix} -4 & 8 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$
29. $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$
30. $A = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$
31. $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -3 \\ 3 & 6 & 4 \\ 2 & 1 & 8 \end{bmatrix}$
32. $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 5 \\ 6 & -1 & -4 \end{bmatrix}$
33. $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 4 & 7 & -3 \\ 1 & -5 & 2 \end{bmatrix}$
34. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 3 & 6 & -5 \\ -2 & -8 & 1 \end{bmatrix}$

جد AB و BA ؛ إن أمكن. (مثال 1)

1. $A = \begin{bmatrix} 8 & 1 \end{bmatrix}$
 $B = \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$
2. $A = \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ -7 & 3 \end{bmatrix}$
 $B = \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$
3. $A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \end{bmatrix}$
 $B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$
4. $A = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$
 $B = \begin{bmatrix} 6 & 1 & -10 & 9 \end{bmatrix}$
5. $A = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -6 \end{bmatrix}$
 $B = \begin{bmatrix} 6 & 0 & -1 \\ -4 & 9 & 8 \end{bmatrix}$
6. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -4 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$
 $B = \begin{bmatrix} 0 & 6 & -5 \\ 2 & -7 & 1 \end{bmatrix}$
7. $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -7 & 1 \end{bmatrix}$
 $B = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -8 \\ -6 & 0 & 9 \end{bmatrix}$
8. $A = \begin{bmatrix} 6 & -9 & 10 \\ 4 & 3 & 8 \end{bmatrix}$
 $B = \begin{bmatrix} 6 & -8 \\ 3 & -9 \\ -2 & 5 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$

9. كرة السلة يتم منح قيم نقاط مختلفة للتسديدات المختلفة في كرة السلة. استخدم المعطيات لتحديد إجمالي مقدار النقاط التي أحرزها كل لاعب. (مثال 2)

الضربات	النقاط	اللاعب	رمية حرة	هدف بنقطتين	هدف بثلاث نقاط
رمية حرة	1	عمر	44	32	25
هدف بنقطتين	2	أحمد	37	24	31
هدف بثلاث نقاط	3	جمال	35	39	29

10. السيارات يوضح عدد المركبات التي تصنعها إحدى الشركات يوميًا من مصنعين مختلفين، وكذلك سعر المركبة بمبيعات كل ربع سنوي. استخدم المعطيات لتحديد أي المصنعين حقق أعلى مبيعات في الربع السنوي الرابع. (مثال 2)

المصنع	الطرز			
	سيارة كوبية	سيارة سيدان	سيارة رياضية متعددة الأغراض	سيارة فان صغيرة
1	500	600	150	250
2	250	350	250	400

الطرز	الربع السنوي			
	الأول (AED)	الثاني (AED)	الثالث (AED)	الرابع (AED)
سيارة كوبية	18,700	17,100	16,200	15,600
سيارة سيدان	25,400	24,600	23,900	23,400
سيارة رياضية متعددة الأغراض	36,300	35,500	34,900	34,500
سيارة فان صغيرة	38,600	37,900	37,400	36,900

54. **جميع التبرعات** تقوم مدرسة عبد الله بن الزبير الثانوية بجمع التبرعات عن طريق بيع الفشار. وقد اشترت المدرسة أربع نكهات من الفشار بحسب الكيس. وتوضح أسعار شراء الأنواع المختلفة من الفشار وأسعار بيعها.

الصف الدراسي	أكياس الفشار			
	زبد	توابل	جبن	كراميل
الصف العاشر	152	80	125	136
الصف الحادي عشر	112	92	112	150
الصف قبل الأخير	176	90	118	122
الصف النهائي	140	102	106	143

النكهة	السعر المدفوع للكيس (AED)	سعر البيع للكيس (AED)	الأرباح بكل كيس (AED)
زبد	18.90	42.00	
توابل	21.00	45.00	
جبن	23.10	48.00	
كراميل	25.20	51.00	

- a. أكمل العمود الأخير في الجدول الثاني.
b. أي الصفوف الدراسية حصدت أعلى إجمالي مبيعات؟
c. كم زادت أرباح الصف النهائي عن طلاب الصف الحادي عشر؟

55. افترض أن $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

- a. جد قيم A^2 , A^3 , A^4 . ثم استخدم النمط لكتابة مصفوفة لـ A^n .
b. جد قيم B^2 , B^3 , B^4 , B^5 . ثم استخدم النمط لكتابة صيغة عامة لـ B^n .
c. جد قيم C^2 , C^3 , C^4 , C^5 إلى أن تلاحظ نمطاً. ثم استخدم النمط لكتابة صيغة عامة لـ C^n .
d. استخدم الصيغة التي كتبتها في الجزء c لإيجاد قيمة C^7 .

56. **الخيل** يشتري كل مالك من ملاك إسطبلات الخيل المدرجين أدناه حزم من القش وأكياس من العلف كل شهر. وفي مايو، كانت تكلفة كل حزمة من حزم القش AED 2.50 وتكلفة كل كيس علف AED 7.95. وفي يونيو، كانت تكلفة كل حزمة من حزم القش AED 3.00 وتكلفة كل كيس علف AED 6.75.

أكياس العلف	حزم القش	الإسطبلات
5	45	مزارع الخيل البار
9	75	إسطبل أجياد
16	135	مزارع المهر
11	90	مزارع الأدهم

- a. اكتب مصفوفة X لتمثيل حزم القش i وأكياس العلف j التي يشتريها كل إسطبل شهرياً.
b. اكتب مصفوفة Y لتمثيل تكاليف كل حزمة قش وكيس علف لشهر مايو ويونيه.
c. جد ناتج ضرب YX . وقم بتسمية صفوفه وأعمدته.
d. كم زاد إجمالي التكاليف في شهر يونيه لمزارع المهر عن إجمالي التكاليف لشهر مايو لمزارع الخيل البار؟

جد محدد كل من المصفوفات التالية. ثم جد معكوس المصفوفة، إن وُجد. (المثالان 6 و 7)

35. $\begin{bmatrix} 6 & -5 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$

36. $\begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}$

37. $\begin{bmatrix} -4 & -7 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$

38. $\begin{bmatrix} 12 & -9 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$

39. $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 8 & -5 & 2 \\ -4 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

40. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 5 & 9 & 3 \\ 2 & 7 & 4 \end{bmatrix}$

41. $\begin{bmatrix} 9 & 3 & 7 \\ -6 & -2 & -5 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

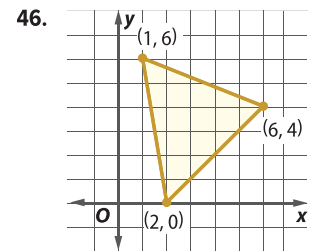
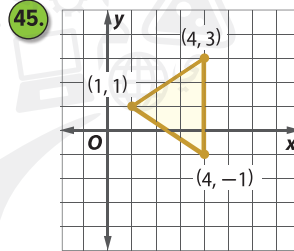
42. $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -4 & -5 & 2 \\ 6 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

43. $\begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 3 & -5 & -3 \\ 4 & 2 & 6 \end{bmatrix}$

44. $\begin{bmatrix} 6 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -4 \\ -3 & 1 & -5 \end{bmatrix}$

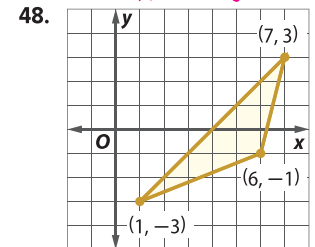
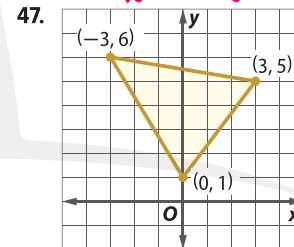
جد المساحة A لكل مثلث بالرؤوس (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) .

باستخدام $A = \frac{1}{2} |\det(X)|$ ، حيث إن X تساوي $\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix}$



6 وحدات مربعة

14 وحدة مربعة



$13\frac{1}{2}$ وحدة مربعة

9 وحدات مربعة

باستخدام A و AB ، جد B .

49. $A = \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$, $AB = \begin{bmatrix} 36 & 48 \\ -24 & 48 \end{bmatrix}$

50. $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$, $AB = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -16 & -6 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}$

جد x و y .

51. $A = \begin{bmatrix} 2x & -y \\ -3y & 5x \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}$, $AB = \begin{bmatrix} -2 \\ 31 \end{bmatrix}$

جد محدد كل من المصفوفات التالية.

52. $\begin{bmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix}$

53. $\begin{bmatrix} c & c & c \\ 0 & c & c \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$

جد قيمة كل تعبير مما يلي.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -1 & 9 & -6 \\ 7 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}$$

$$57. BD + B$$

$$58. DC - A$$

$$59. B(A + C)$$

$$60. AB + CB$$

حل كل معادلة لإيجاد قيمة X . إن وجدت.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -6 & -2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 1 & -3 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$61. A + C = 2X$$

$$62. 4X + A = C$$

$$63. B - 3X = D$$

$$64. DA = 7X$$

65. محددات 3×3 في هذه المسألة، ستكتشف طريقة بديلة لحساب محدد مصفوفة 3×3 .

a. احسب $\det(A) = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ باستخدام الطريقة الموضحة في هذا الدرس.

b. قم بضم أول عمودين إلى يمين $\det(A)$ على النحو الموضح أدناه. ثم جـد الفرق بين مجموع نواتج الضرب على طول الأقطار الحمراء الميمنة بالتحرك لأسفل ومجموع نواتج الضرب على طول الأقطار الزرقاء الميمنة بالتحرك لأعلى.

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 & -2 & 3 \\ 4 & 6 & 5 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

c. قارن بين إجابتك على الجزأين a و b.

d. وضح أنه بوجه عام يمكن إيجاد محدد مصفوفة 3×3 باستخدام الإجراء الموضح أعلاه.

e. هل تفلح هذه الطريقة مع مصفوفة 4×4 ؟ وإذا كانت كذلك، فاشرح استنتاجك. وإذا لم تكن كذلك، فأعط مثلاً مضاداً.

66. البرهان افترض أن $A^{-1} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix}$ و $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ استخدم معادلة المصفوفة $AA^{-1} = I_2$ لاشتقاق صيغة معكوس مصفوفة 2×2 .

67. البرهان اكتب فقرة برهان لتبين إذا كان لمصفوفة مربعة معكوس، فإن هذا المعكوس يكون وحيداً. (تلميح: افترض أن للمصفوفة A معكوسين هما C و B . ثم بين أن $C = B$.)

68. تمثيلات متعددة في هذه المسألة، سوف تكتشف المصفوفات المربعة. يطلق على المصفوفة المربعة مثلثة عليا إذا كانت جميع العناصر تحت قطرها الرئيس تساوي 0. ويطلق عليها مثلثة دنيا إذا كانت جميع العناصر فوق قطرها الرئيسي تساوي 0. إذا لم تكن جميع العناصر على قطر المصفوفة تساوي 0، يطلق على المصفوفة قطرية. في هذه المسألة، سوف تستكشف محدد مصفوفة 3×3 من المصفوفات المثلثة العليا والمثلثة الدنيا والقطرية.

a. التحليل اكتب مصفوفة واحدة مثلثة عليا وأخرى مثلثة دنيا وأخرى قطرية بأبعاد 2×2 . ثم جـد محدد كل مصفوفة.

b. التحليل اكتب مصفوفة واحدة مثلثة عليا وأخرى مثلثة دنيا وأخرى قطرية بأبعاد 3×3 . ثم جـد محدد كل مصفوفة.

c. لفظياً ختن قيمة محدد أي مصفوفة مثلثة عليا أو مثلثة دنيا أو قطرية بالأبعاد 3×3 .

d. التحليل جـد معكوس كل من المصفوفات القطرية التي كتبتها في الجزأين a و b.

e. لفظياً ختن معكوس أي مصفوفة قطرية بأبعاد 3×3 .

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

69. تحج باستخدام A و AB . جـد B .

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \\ 6 & 4 & 1 \end{bmatrix}, AB = \begin{bmatrix} 14 & 6 & 33 \\ 4 & 4 & 13 \\ 1 & 18 & 12 \end{bmatrix}$$

70. الاستنتاج اشرح سبب أنه لا يمكن أن يكون للمصفوفة معكوس.

71. مسألة غير محددة الإجابة اكتب مصفوفتين A و B بحيث يكون $AB = BA$. على ألا تكون A أو B المصفوفة المحايدة.

البرهان بين صحة الخصائص التالية لجميع مصفوفات 2×2 .

72. خاصية التوزيع إلى اليمين

73. خاصية التوزيع إلى اليسار

74. خاصية التجميع في ضرب المصفوفة

75. خاصية التجميع في ضرب الكميات غير المتجهة

76. تحليل الخطأ يناقش علي وناصر المحددات. وقد توصل علي إلى النظرية أن المصفوفة 2×2 لا تتغير إذا تم الإبدال بين صفين من المصفوفة. وتوصل ناصر إلى النظرية أن محدد المصفوفة الجديدة سيكون له نفس القيمة المطلقة ولكن ستختلف علامته. هل أي منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.

77. الاستنتاج إذا كانت AB ذات أبعاد 5×8 . وكانت أبعاد A تساوي 5×6 . فما هي أبعاد B ؟

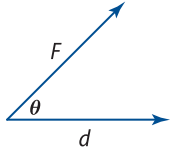
78. الكتابة في الرياضيات اشرح سبب أهمية الترتيب عند إيجاد ناتج ضرب مصفوفتين A و B . اضرب بعض الأمثلة العامة لدعم إجابتك.

اكتب المصفوفة الموسعة لكل نظام من المعادلات الخطية التالية.

$$79. \begin{aligned} 10x - 3y &= -12 \\ -6x + 4y &= 20 \end{aligned}$$

$$80. \begin{aligned} 15x + 7y - 2z &= 41 \\ 9x - 8y + z &= 32 \\ 5x + y - 11z &= 36 \end{aligned}$$

$$81. \begin{aligned} w - 6x + 14y &= 19 \\ 3w + 2x - 4y + 8z &= -2 \\ 9w + 18y - 12z &= 3 \\ 5x + 10y - 16z &= -26 \end{aligned}$$



82. **الفيزياء** يمثل الجهد المبذول لتحريك أحد الأجسام $W = Fd \cos \theta$ ، حيث إن θ هي الزاوية بين الإزاحة d والقوة المبذولة F . فإذا بذلت ليلي جهدًا بمقدار 2400 جول عند بذل قوة بمقدار 120 N في إزاحة قدرها 40 m، ففني أي زاوية قامت ببذل القوة؟

حول قياس الزاوية من الدرجات إلى الراديان كضعاف لـ π ومن الراديان إلى الدرجات.

$$83. -10^\circ$$

$$84. 485^\circ$$

$$85. \frac{3\pi}{4}$$

حل كل من المعادلات التالية.

$$86. \log_{10} \sqrt[3]{10} = x$$

$$87. 2 \log_5 (x - 2) = \log_5 36$$

$$88. \log_5 (x + 4) + \log_5 8 = \log_5 64$$

$$89. \log_4 (x - 3) + \log_4 (x + 3) = 2$$

$$90. \frac{1}{2}(\log_7 x + \log_7 8) = \log_7 16$$

$$91. \log_{12} x = \frac{1}{2} \log_{12} 9 + \frac{1}{3} \log_{12} 27$$

92. **فن الملاحظة الجوية** تمثل البيانات أدناه معدل رفع الجناح لأحد طُرز الطائرات في ممر هوائي بزاوية محددة لهبوب الهواء. وتعتبر زاوية الهبوب α للجناح هي الزاوية ما بين الجناح وهبوب الرياح.

زاوية هبوب الهواء α	0.1	0.5	1.0	1.5	2.0	3.0	5.0	10.0
معدل الرفع (lbs)	11.7	236.0	476.2	711.6	950.3	1782.6	2384.4	4049.3

a. حدد دالة أسية لتمثيل البيانات.

b. استخدم الدالة لتوقع معدل رفع الجناح عند 4.0 درجات.

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

95. **مراجعة** أنفقت مايسة AED 42 على علبة من بطانة الدهان وعلبتين من الدهان. فإذا كان سعر علبة من الدهان p يساوي 150% من سعر علبة من بطانة الدهان r ، فأني نظام معادلات يمكن استخدامه لإيجاد سعر الدهان وبطانة الدهان؟

$$A \quad p = r + \frac{1}{2}r, r + 2p = 42$$

$$B \quad p = r + 2r, r + \frac{1}{2}p = 42$$

$$C \quad r = p + \frac{1}{2}p, r + 2r = 42$$

$$D \quad r = p + 2p, r + \frac{1}{2} = 42$$

96. **مراجعة** للانضمام إلى فريق كرة قدم، يجب أن يكون المعدل التراكمي للطالب 2.0 على الأقل، وأن يكون قد حضر على الأقل خمسة تمارين بعد الدوام المدرسي. أي نظام متباينات يمثل بشكل أفضل هذا الموقف إذا كان x يمثل المعدل التراكمي للطالب، ويمثل y عدد التمارين التي حضرها الطالب بعد الدوام المدرسي؟

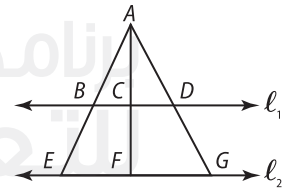
$$F \quad x \geq 2, y \geq 5$$

$$H \quad x < 2, y < 5$$

$$G \quad x \leq 2, y \leq 5$$

$$J \quad x > 2, y > 5$$

93. **SAT/ACT** في الشكل، $\ell_1 \parallel \ell_2$. إذا كانت $EF = x$ و $EG = y$ ، فأني مما يلي يمثل نسبة CD إلى BC ؟



$$A \quad 1 - \frac{y}{x}$$

$$B \quad 1 + \frac{y}{x}$$

$$C \quad \frac{y}{x} - 1$$

$$D \quad 1 - \frac{x}{y}$$

$$E \quad 1 + \frac{x}{y}$$

94. ما أبعاد المصفوفة التي تنتج عن عملية ضرب الموضحة؟

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} j \\ k \\ l \end{bmatrix}$$

$$F \quad 1 \times 3$$

$$H \quad 3 \times 3$$

$$G \quad 3 \times 1$$

$$J \quad 4 \times 3$$



مختبر تقنية التمثيل البياني المحددات ومساحات المضلعات

2-6

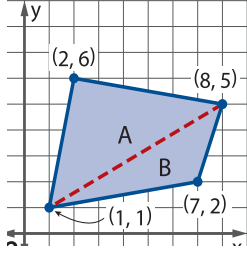
الهدف

استخدام الحاسبة البيانية
لإيجاد مساحات المضلعات
باستخدام المحددات.

لقد تعلمت أن مساحة المثلث X الذي رؤوسه (x_1, y_1) و (x_2, y_2) و (x_3, y_3) يمكن إيجادها بحساب $\frac{1}{2}|\det(X)|$.
ويمكن استخدام هذه العملية لإيجاد مساحة أي مضلع.

نشاط مساحة رباعي الأضلاع

a. جد مساحة الشكل الرباعي الذي رؤوسه $(1, 1)$, $(6, 2)$, $(8, 5)$, $(2, 7)$.



الخطوة 1 ارسم رباعي الأضلاع، ثم اقسمه إلى مثلثين.

الخطوة 2 أنشئ مصفوفة لكل مثلث.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \\ 8 & 5 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 8 & 5 & 1 \\ 7 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

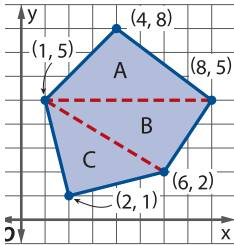
الخطوة 3 أدخل كل مصفوف في حاسبة بيانية، وجد $\det(A)$ و $\det(B)$.

```
MATRIX[A] 3 x3
[[1 1 1]
 [2 6 1]
 [8 5 1]]
3, 3=1
```

```
det([A]) -31
det([B]) -17
```

الخطوة 4 اضرب القيمة المطلقة لكل محدد في $\frac{1}{2}$. وجد المجموع.
المساحة تساوي $|-31| + |-17| = 48$ أو 24 وحدة مربعة.

b. جد مساحة مضلع رؤوسه $(1, 2)$, $(2, 6)$, $(5, 8)$, $(8, 4)$, $(2, 1)$.



الخطوة 1 ارسم خماسي الأضلاع، ثم اقسمه إلى ثلاثة مثلثات.

الخطوة 2 أنشئ مصفوفة لكل مثلث.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \\ 8 & 4 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 8 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

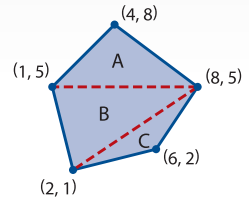
$$C = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

الخطوة 3 أدخل كل مصفوفة في الحاسبة البيانية، وجد المحددات. المحددات هي -21 و -17 و -21 .

الخطوة 4 اضرب القيمة المطلقة لكل محدد في $\frac{1}{2}$ وجد المجموع. المساحة تساوي $\frac{1}{2}|-21| + \frac{1}{2}|-17| + \frac{1}{2}|-21| = 29.5$ أو 29.5 وحدة مربعة.

نصيحة دراسية

قسمة المضلعات قد تكون هناك طرق عديدة لقسمة مضلع محدد إلى مثلثات. فعلى سبيل المثال، يمكن أيضًا تقسيم الشكل الرباعي الموجود في المثال 2 على النحو المبين أدناه.



تمارين جد مساحة المضلع باستخدام الرؤوس المعطاة التالية.

- $(3, 2), (1, 9), (10, 12), (8, 3)$
- $(-2, -4), (-11, -1), (-9, -8), (-1, -12)$
- $(1, 3), (2, 9), (10, 11), (13, 7), (6, 2)$
- $(-7, -6), (-10, 2), (-9, 8), (-5, 10), (8, 6), (13, 2)$

حل الأنظمة الخطية باستخدام المعكوسات وقاعدة كرامر

6-3 الدرس

لماذا؟

الحالي

السابق



تقوم بها بتنزيل البرامج المفضلة لها على مشغل الوسائط المحمول الخاص بها. ويتطلب برنامج الطبيعة ضعف مساحة الذاكرة اللازمة للمسرحية الهزلية، ويتطلب الفيلم ضعف مساحة الذاكرة اللازمة لبرنامج الطبيعة. وبمعرفة حجم الذاكرة الذي تم استخدامه، يمكنك استخدام المصفوفة العكسية (معكوس المصفوفة) لحل نظام المعادلات لإيجاد عدد كل نوع من البرامج التي قامت بها بتنزيلها.

- 1 حل أنظمة المعادلات الخطية باستخدام المصفوفات العكسية.
- 2 حل أنظمة المعادلات الخطية باستخدام قاعدة كرامر.

- تعلمت إيجاد محددات ومعكوسات المصفوفة 2×2 والمصفوفة 3×3 .

1 استخدام المصفوفات العكسية إذا تساوى عدد المعادلات مع المتغيرات في نظام المعادلات الخطية، فإن مصفوفة المعاملات الخاصة به تكون مربعة ويُقال حينئذ إن النظام **نظام مربع**. وإذا كانت مصفوفة المعاملات المربعة هذه قابلة للعكس، فحينها يكون للنظام حل وحيد.

المفهوم الأساسي الأنظمة الخطية المربعة القابلة للعكس

لنفرض أن A هو مصفوفة المعاملات لنظام مكون من n من المعادلات الخطية في n من المتغيرات تحددها المعادلة $AX = B$. حيث X هو مصفوفة المتغيرات و B هو مصفوفة الثوابت. إذا كانت A قابلة للعكس، يكون لنظام المعادلات حل وحيد تحدده المعادلات $X = A^{-1}B$.

مثال 1 إيجاد حل نظام 2×2 باستخدام المصفوفة العكسية

استخدم المصفوفة العكسية لحل نظام المعادلات، إن أمكن.

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= -1 \\ -3x + 5y &= 3 \end{aligned}$$

اكتب النظام في مصفوفة بالشكل $AX = B$.

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$AX = B$$

استخدم هذه الصيغة مع معكوس مصفوفة 2×2 لإيجاد المعكوس A^{-1} .

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ صيغة معكوس مصفوفة } 2 \times 2 \text{ هي}$$

$$= \frac{1}{2(5) - (-3)(-3)} \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$a = 2, b = -3, c = -3, d = 5$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

بسط

اضرب A^{-1} في B لحل النظام.

$$X = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B$$

لذلك، يكون حل النظام هو $(4, 3)$.

تمرين موجه

استخدم المصفوفة العكسية لحل نظام المعادلات، إن أمكن.

$$\begin{aligned} 1A. \quad 6x + y &= -8 \\ -4x - 5y &= -12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1B. \quad -3x + 9y &= 36 \\ 7x - 8y &= -19 \end{aligned}$$

مثال 2 من الحياة اليومية إيجاد حل نظام 3×3 باستخدام المصفوفة العكسية

المعرفة المالية تستثمر بدرجة AED 20,000 بشراء ثلاثة سندات ذات عوائد سنوية متوقعة نسبتهما 10% و 8% و 6%. وتكون الاستثمارات ذات العائد المتوقع الأعلى أكثر خطورة غالباً من الاستثمارات الأخرى. وترغب بدرجة في تحقيق متوسط عائد سنوي يبلغ AED 1340. فإذا كانت تريد استثمار مبلغ في السند ذي العائد 6% يساوي ثلاثة أمثال المبلغ المستثمر في السنتين الآخرين مجتمعين، فكم يكون المبلغ اللازم استثماره في كل سند؟

يمكن تمثيل استثمارها بالمعادلات

$$\begin{aligned}x + y + z &= 20,000 \\3x + 3y - z &= 0 \\0.10x + 0.08y + 0.06z &= 1340.\end{aligned}$$

حيث x و y و z تمثل المبالغ المستثمرة في السندات ذات العوائد السنوية 10% و 8% و 6% على التوالي.

اكتب النظام في مصفوفة بالشكل $AX = B$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \\ 0.10 & 0.08 & 0.06 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20,000 \\ 0 \\ 1340 \end{bmatrix}$$

استخدم حاسبة التمثيل البياني لإيجاد قيمة A^{-1} .

$$[A]^{-1} = \begin{bmatrix} -3.25 & -0.25 & 50 \\ 3.5 & 0.5 & -50 \\ 0.75 & -0.25 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} -3.25 & -0.25 & 50 \\ 3.5 & 0.5 & -50 \\ 0.75 & -0.25 & 0 \end{bmatrix}$$

اضرب A^{-1} في B لحل النظام.

$$\begin{aligned}X &= A^{-1}B \\&= \begin{bmatrix} -3.25 & -0.25 & 50 \\ 3.5 & 0.5 & -50 \\ 0.75 & -0.25 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 20,000 \\ 0 \\ 1340 \end{bmatrix} \\&= \begin{bmatrix} 2000 \\ 3000 \\ 15,000 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

حل النظام هو (2000, 3000, 15,000). إذا، استثمرت بدرجة AED 2000 في السند ذي العائد السنوي 10% و AED 3,000 في السند ذي العائد السنوي 8%، و AED 15,000 في السند ذي العائد السنوي 6%.

التحقق يمكنك التحقق من الحل بإحلاله في النظام الأصلي.

$$2000 + 3,000 + 15,000 = 20,000$$

$$20,000 = 20,000 \quad \checkmark$$

$$3(2,000) + 3(3,000) - 15,000 = 0$$

$$0 = 0 \quad \checkmark$$

$$0.10(2,000) + 0.08(3,000) + 0.06(15,000) = 1,340$$

$$1340 = 1340 \quad \checkmark$$

تمرين موجه

2. **الصناعة** خلال ثلاثة أعوام متتالية، أنتج مصنع لتجميع السيارات إجمالي 720,000 سيارة. فإذا كان عدد السيارات التي أُنتجت في العام الثاني تزيد عن العام الأول بعدد 50,000 سيارة، وكان عدد السيارات التي أُنتجت في العام الثالث تزيد عن الثاني بعدد 80,000، فكم عدد السيارات التي أُنتجت في كل عام؟

الربط بالحياة اليومية

السند بصورة أساسية عبارة عن إقرار بالمديونية تصدره شركة أو حكومة لتمويل عملياتها اليومية أو مشروع معين. فإذا استثمرت في السندات، فإنك تفرض أموالك لجهة إصدار السند لفترة زمنية محددة. وفي المقابل، تستعيد أموالك مضافاً إليها الفوائد.

المصدر: CNN

2 استخدام قاعدة كرامر طريقة أخرى لحل الأنظمة المربعة تُعرف باسم **قاعدة كرامر**. وفيها تُستخدم المحددات بدلاً من تقليل الصفوف أو المصفوفات العكسية (معكوس المصفوفات).

فكر في نظام 2×2 التالي.

$$ax + by = e$$

$$cx + dy = f$$

استخدم طريقة الحذف لإيجاد x .

$$\begin{array}{l} \rightarrow \text{اضرب في } d \\ \rightarrow \text{اضرب في } -b \end{array} \quad \begin{array}{l} adx + bdy = ed \\ (+) -bcx - bdy = -fb \\ \hline (ad - bc)x = ed - fb \end{array} \quad x = \frac{ed - fb}{ad - bc} \text{ إذا.}$$

وبالمثل. يتضح أن $y = \frac{af - ce}{ad - bc}$. ينبغي عليك أن تدرك أن مقام كل كسر بمثابة محدد مصفوفة معامل النظام

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ ويمكن التعبير عن كل من بسط ومقام كل حل باستخدام المحددات.}$$

$$x = \frac{ed - fb}{ad - bc} = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{|A_x|}{|A|} \quad y = \frac{af - ce}{ad - bc} = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{|A_y|}{|A|}$$

لاحظ أن البسطين $|A_x|$ و $|A_y|$ هما محددات المصفوفات التي تتكون باستبدال معامل x أو y على التوالي في مصفوفة المعامل بعمود الحدود الثابتة e و f .

$$\text{من النظام الأصلي} \left[\begin{array}{cc|c} a & b & e \\ c & d & f \end{array} \right]$$

يمكن تعميم قاعدة كرامر على أنظمة n من المعادلات في n من المتغيرات.

المفهوم الأساسي قاعدة كرامر

لنفرض أن A هو مصفوفة المعاملات في نظام مكون من n من المعادلات الخطية في n من المتغيرات. وتحددها المعادلة $AX = B$. فإذا كان $\det(A) \neq 0$ ، فإن الحل الوحيد للنظام تعبر عنه المعادلة

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}, x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}, x_3 = \frac{|A_3|}{|A|}, \dots, x_n = \frac{|A_n|}{|A|},$$

حيث يتم الحصول على A_i باستبدال العمود i th الخاص بـ A بعمود الحدود الثابتة B . وإذا كان المحدد $(A) = 0$ ، فإن $AX = B$ إما ليس لها حل أو لها عدد لا نهائي من الحلول.

مثال 3 استخدام قاعدة كرامر لحل نظام 2×2

استخدم قاعدة كرامر لإيجاد حل نظام المعادلات الخطية، إن وُجد حل وحيد.

$$3x_1 + 2x_2 = 6$$

$$-4x_1 - x_2 = -13$$

مصفوفة المعاملات هي $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}$. احسب محدد A .

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} = 3(-1) - (-4)(2) = 5$$

نظرًا لأن محدد A لا يساوي صفرًا، فيمكنك استخدام قاعدة كرامر.

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ -13 & -1 \end{vmatrix}}{5} = \frac{6(-1) - (-13)(2)}{5} = \frac{20}{5} = 4$$

$$x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ -4 & -13 \end{vmatrix}}{5} = \frac{3(-13) - (-4)(6)}{5} = \frac{-15}{5} = -3$$

إذا، الحل هو $(4, -3)$ أو $x_1 = 4$ و $x_2 = -3$. تحقق من الحل بالتعويض في النظام الأصلي.

انتبه!

القسم على صفر تذكر أن قاعدة كرامر لا تنطبق عندما يكون محدد مصفوفة المعاملات 0. وذلك لأن هذا قد يتسبب في القسم على صفر، والتي تكون نتيجتها "غير محددة".

تمرين موجه

استخدم قاعدة كرامر لإيجاد حل كل نظام من المعادلات الخطية، إن وُجد حل وحيد.

3A. $2x - y = 4$
 $5x - 3y = -6$

3B. $-9x + 3y = 8$
 $2x - y = -3$

3C. $12x - 9y = -5$
 $4x - 3y = 11$

مثال 4 استخدام قاعدة كرامر لحل نظام 3×3

استخدم قاعدة كرامر لإيجاد حل نظام المعادلات الخطية، إن وُجد حل وحيد.

$-x - 2y = -4z + 12$
 $3x - 6y + z = 15$
 $2x + 5y + 1 = 0$

مصفوفة المعاملات هي $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 4 \\ 3 & -6 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix}$. احسب محدد A .

الصيغة الخاصة بمحدد مصفوفة 3×3

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 4 \\ 3 & -6 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} -6 & 1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} - (-2) \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$$

بسط

$$= -1[-6(0) - 5(1)] - (-2)[3(0) - 1(2)] + 4[3(5) - 2(-6)]$$

بسط

$$= -1(-5) + 2(-2) + 4(27) = 109$$

نظرًا لأن محدد A لا يساوي صفرًا، فيمكنك استخدام قاعدة كرامر.

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 12 & -2 & 4 \\ 15 & -6 & 1 \\ -1 & 5 & 0 \end{vmatrix}}{109} = \frac{12[(-6)(0) - 5(1)] - (-2)[15(0) - (-1)(1)] + 4[15(5) - (-1)(-6)]}{109} = \frac{218}{109} = 2$$

$$y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 12 & 4 \\ 3 & 15 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{109} = \frac{(-1)[15(0) - 1(-1)] - 12[3(0) - 2(1)] + 4[3(-1) - 2(15)]}{109} = \frac{-109}{109} = -1$$

$$z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -2 & 12 \\ 3 & -6 & 15 \\ 2 & 5 & -1 \end{vmatrix}}{109} = \frac{(-1)[(-6)(-1) - 5(15)] - (-2)[3(-1) - 2(15)] + 12[3(5) - 2(-6)]}{109} = \frac{327}{109} = 3$$

إذًا، الحل هو $(2, -1, 3)$ ، $x = 2, y = -1, z = 3$.

التحقق تحقق من الحل بإحلاله في النظام الأصلي.

$$-(2) - 2(-1) = -4(3) + 12$$

$$0 = 0 \checkmark$$

$$3(2) - 6(-1) + 3 = 15$$

$$15 = 15 \checkmark$$

$$2(2) + 5(-1) + 1 = 0$$

$$0 = 0 \checkmark$$

تمرين موجه

استخدم قاعدة كرامر لحل كل نظام من المعادلات الخطية، إن وُجد حل وحيد.

4A. $8x + 12y - 24z = -40$
 $3x - 8y + 12z = 23$
 $2x + 3y - 6z = -10$

4B. $-2x + 4y - z = -3$
 $3x + y + 2z = 6$
 $x - 3y = 1$

قراءة في الرياضيات

استبدال الأعمدة الرمز $|A_x|$ يُقرأ كالتالي: محدد مصفوفة المعاملات A مع عمود المعاملات x المستبدل بعمود الثوابت.

استخدم المصفوفة العكسية لحل كل نظام معادلات.
إن أمكن. (المثالان 1 و 2)

- $5x - 2y = 11$
 $-4x + 7y = 2$
- $2x + 3y = 2$
 $x - 4y = -21$
- $-3x + 5y = 33$
 $2x - 4y = -26$
- $-4x + y = 19$
 $3x - 2y = -18$
- $2x + y - z = -13$
 $3x + 2y - 4z = -36$
 $x + 6y - 3z = 12$
- $3x - 2y + 8z = 38$
 $6x + 3y - 9z = -12$
 $4x + 4y + 20z = 0$
- $x + 2y - z = 2$
 $2x - y + 3z = 4$
 $3x + y + 2z = 6$
- $4x + 6y + z = -1$
 $-x - y + 8z = 8$
 $6x - 4y + 11z = 21$

9. التوزيع قامت هداية بتنزيل بعض البرامج على مشغل الوسائط

المحمول الخاص بها. وبشكل عام، تستهلك مسرحية هزلية مدتها 30 دقيقة مساحة 0.3 جيجابايت من الذاكرة، ويستهلك برنامج حوار مدته ساعة 0.6 جيجابايت، وقلم مدته ساعتان يستهلك 1.2 جيجابايت، وقامت هداية بتنزيل 9 برامج بمجموع 5.4 جيجابايت. فإذا كانت قامت بتنزيل عدد مسرحيات هزلية يزيد عن عدد الأفلام بمقدار اثنين، فكم عدد كل نوع قامت بتنزيله؟ (مثال 2)

10. كرة السلة يعلم طارق أنه قد سجل 37 مرة إجمالي نقاط يبلغ

70 نقطة حتى الآن في موسم كرة السلة هذا. ويبدو أن يعرف عدد الرميات الحرة، والرميات ذات النقطتين والثلاث نقاط التي أحرزها. وكان مجموع الرميات ذات النقطتين والثلاث نقاط يساوي مثلي عدد الرميات الحرة ناقص اثنين. فكم عدد الرميات الحرة والرميات ذات النقطتين والثلاث نقاط التي أحرزها طارق؟ (مثال 2)

استخدم قاعدة كرامر لإيجاد حل كل نظام من المعادلات الخطية، إن وُجد حل وحيد. (المثالان 3 و 4)

- $-3x + y = 4$
 $2x + y = -6$
- $2x + 3y = 4$
 $5x + 6y = 5$
- $5x + 4y = 7$
 $-x - 4y = -3$
- $4x + \frac{1}{3}y = 8$
 $3x + y = 6$
- $2x - y + z = 1$
 $x + 2y - 4z = 3$
 $4x + 3y - 7z = -8$
- $x + y + z = 12$
 $6x - 2y - z = 16$
 $3x + 4y + 2z = 28$
- $x + 2y = 12$
 $3y - 4z = 25$
 $x + 6y + z = 20$
- $9x + 7y = -30$
 $8y + 5z = 11$
 $-3x + 10z = 73$

19. رحلة بالسيارة توقفت مايسون مرتين خلال رحلة على الطريق للتزود بالوقود، موضح بالأسفل سعر البنزين لكل محطة. وقد اشترت مايسون إجمالي 33.5 L وأنفقت AED 134.28. استخدم قاعدة كرامر لتحديد عدد لترات البنزين التي اشترتها مايسون مقابل AED 3.96 للتر. (مثال 3)

غاز
خالي من الرصاص
AED 3.96

بنزين
خالي من الرصاص
AED 4.05

20. تخطيط جماعي تخطط لجنة إعادة لم شمل دفعة التخرج لاستقبال 400 ضيف في اجتماع لم الشمل العاشر لها. ويمكن للضيوف اختيار واحد من بين ثلاثة اختيارات من الحلوى الموضحة بالأسفل. ويجب أي يستغرق الطاهي القائم على إعداد الحلوى 5 دقائق لكل فطيرة، و 8 دقائق لكل كعكة، و 12 دقيقة لكل كعكة جبن. وكانت التكلفة الإجمالية لأصناف الحلوى AED 1170. كما أمضى الطاهي 45 ساعة بالضبط في إعدادها. استخدم قاعدة كرامر لتحديد عدد الأطباق التي تم إعدادها من كل نوع من الحلوى. (مثال 4)

كعكة جبن بالكرز	ترايبل الشوكولاتة	فطيرة التوت الأزرق
		
AED 4.00	AED 2.50	AED 3.00

21. هواتف قامت كل من نهلة ونسرين ونورا بمراجعة أنظمة الهاتف الخاصة بهم. دفعت نهلة AED 52.90 مقابل 30 دقيقة إضافية من الألعاب، و 12 دقيقة من المكالمات، و 40 رسالة نصية. ودفعت نسرين AED 48.07 مقابل 18 دقيقة من الألعاب، و 15 دقيقة من المكالمات، و 55 رسالة نصية. ودفعت نورا AED 13.64 فقط مقابل 6 دقائق من الألعاب، و 7 دقائق من المكالمات. فإذا كان جميعهم يستخدمون النظام نفسه، فجد تكلفة كل خدمة. (مثال 4)

حل كل معادلة مصفوفية.

- $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -8 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 8 \\ 12 & 6 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 17 & -9 \end{bmatrix}$

26. لياقة بدنية تتدرب شيخة على مسافة نصف ماراثون وتستهلك أسبوعياً جيل وبسكويت ومشروبات طاقة. وقد استهلكت هذا الأسبوع 12 منتج طاقة إجمالي 1450 سعراً حرارياً و 310 جرامات من الكربوهيدرات. موضح بالأسفل المحتوى الغذائي لكل عنصر.

منتج الطاقة	جل	بسكويت	مشروب
السرعات الحرارية	100	250	50
الكربوهيدرات (g)	25	43	14

فكم عدد جل وبسكويت ومشروبات الطاقة التي استهلكتها شيخة هذا الأسبوع؟

لنفرض أن A و B مصفوفتان $n \times n$ ونفرض أن C و D و X مصفوفات $n \times 1$. حُل كل معادلة لإيجاد X . افترض وجود جميع المعكوسات.

$$\begin{aligned} 42. AX &= BX - C & 43. D &= AX + BX \\ 44. AX + BX &= 2C - X & 45. X + C &= AX - D \\ 46. 3X - D &= C - BX & 47. BX &= AD + AX \end{aligned}$$

48. **حساب التفاضل والتكامل** في حساب التفاضل والتكامل، يمكن الحصول على نظام المعادلات باستخدام المشتقات الجزئية. هذه المعادلات تسمى مضاعف لاجرانج. جد قيم x و y بحيث تحقق المعادلات $x + \lambda + 1 = 0$; $2y + \lambda = 0$; $x + y + 7 = 0$.

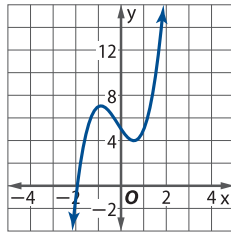
مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

49. **تحليل الخطأ** تحاول عائشة ورنا حل النظام أدناه باستخدام قاعدة كرامر. فهل إجابة أي منهما صواب؟ اشرح استنتاجك.

$$\begin{aligned} 2x + 7y &= 10 \\ 6x + 21y &= 30 \end{aligned}$$

رنا	عائشة
النظام له حل واحد ولكن لا يمكن إيجادها باستخدام قاعدة كرامر.	النظام ليس له حل لأن محدد مصفوفة المعامل يساوي صفرًا.

50. **تحديد** يمر المنحنى أدناه بالنقاط $(-2, -1)$, $(-1, 7)$, $(1, 5)$, $(2, 19)$. اتخذ معادلة المنحنى الشكل $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.



جد معادلة المنحنى من خلال حل نظام المعادلات باستخدام المصفوفة العكسية.

51. **التبرير** إذا كان $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ وكانت A غير منفرجة، فهل $(A^{-1})^{-1} = (A^2)^{-1}$ ؟ اشرح استنتاجك.

52. **مسألة غير محددة الإجابة** أعط مثالاً على نظام معادلات في متغيرين ليس له حل وحيد، ووضح كيف أن النظام المعبر عنه بمعادلة مصفوفة ليس له حل.

53. **الكتابة في الرياضيات** صف أنواع الأنظمة الممكن حلها باستخدام كل طريقة. اشرح استنتاجك.

- حذف جاوس-جوردان
- المصفوفات العكسية
- قاعدة كرامر

حاسبة التمثيل البياني حُل كل نظام معادلات باستخدام المصفوفة العكسية.

$$\begin{aligned} 27. \begin{cases} 2a - b + 4c = 6 \\ a + 5b - 2c = -6 \\ 3a - 2b + 6c = 8 \end{cases} & 28. \begin{cases} 3x - 5y + 2z = 22 \\ 2x + 3y - z = -9 \\ 4x + 3y + 3z = 1 \end{cases} \\ 29. \begin{cases} r + 5s - 2t = 16 \\ -2r - s + 3t = 3 \\ 3r + 2s - 4t = -2 \end{cases} & 30. \begin{cases} -4m + n + 6p = 17 \\ 3m - n - p = 5 \\ -5m - 2n + 3p = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

جد قيم n بحيث لا يمكن حل النظام الذي تعبر عنه المصفوفة الموسعة المعطاة باستخدام المصفوفة العكسية.

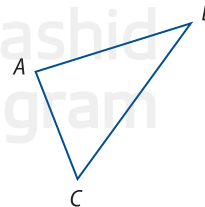
$$\begin{aligned} 31. \left[\begin{array}{ccc|c} n & -8 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \end{array} \right] & 32. \left[\begin{array}{cc|c} 3 & n & 4 \\ n & 2 & -5 \end{array} \right] \\ 33. \left[\begin{array}{ccc|c} -5 & -9 & 3 & 1 \\ n & n & 11 & 1 \end{array} \right] & 34. \left[\begin{array}{cc|c} n & -n & 0 \\ 7 & n & -8 \end{array} \right] \end{aligned}$$

35. **مواد كيميائية** تحتوي ثلاث سبائك من النحاس والفضة على 35% من الفضة الخالصة، و55% من الفضة الخاصة، و60% من الفضة الخالصة على التوالي. فكم المقدار الواجب خلطه من كل معدن للحصول على سبيكة بوزن 2.5 kg وتحتوي على 4.54% فضة إذا كان هناك 0.5 kg زيادة في السبيكة 60% عن السبيكة 55%؟

36. **متجر أغذية** يبيع متجر أغذية إماراتي وجبات الشاورما بالأسفل. في إحدى وجبات الغداء، باع المتجر مجموع 74 وجبة شاورما وكسب AED 1177.26. وكان مجموع كمية اللحم المستخدم في إعداد وجبات الشاورما الصغيرة والكبيرة والضخمة الحجم 7.8 kg. وكان عدد وجبات الشاورما كبيرة الحجم المبيعة يزيد عن ضعف عدد وجبات الشاورما الضخمة المبيعة بمقدار واحد. فكم عدد وجبات الشاورما التي باعها المتجر خلال الغداء من كل نوع؟

صغيرة	كبيرة
85 g من اللحم..... AED 12.86	113.4 g من اللحم..... AED 15.61
170.1 g من اللحم..... AED 19.28	141 g من اللحم..... AED 18.37
ضخمة	الدجاج

37. **الهندسة** يبلغ محيط المثلث $\triangle ABC$ 89 mm. وطول القطعة المستقيمة $\overline{AC}$ أقل من طول الضلعين الآخرين بمقدار 47 mm. ويزيد طول القطعة المستقيمة $\overline{BC}$ بمقدار 20 mm عن نصف طول القطعة المستقيمة $\overline{AB}$. استخدم نظام المعادلات لإيجاد طول كل ضلع.



جد معكوس كل مصفوفة، إن أمكن.

$$\begin{aligned} 38. \begin{bmatrix} e^{2x} & e^{-x} \\ e^x & e^{-3x} \end{bmatrix} & 39. \begin{bmatrix} \frac{1}{x} & \frac{3}{x} \\ x & 2 \end{bmatrix} \\ 40. \begin{bmatrix} \pi^x & 1 \\ 0 & \pi^{-2x} \end{bmatrix} & 41. \begin{bmatrix} i & -3 \\ i^2 & 2i \end{bmatrix} \end{aligned}$$

جد AB و BA ؛ إن أمكن.

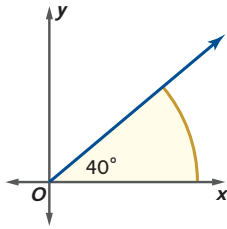
54. $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$

55. $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 7 & 8 & 3 \\ 11 & -5 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 17 & 2 & -4 \\ 10 & -9 & 6 \\ 1 & 0 & -8 \end{bmatrix}$

حدد ما إذا كانت كل مصفوفة لها نموذج درجة الصف.

56. $\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -3 & -6 & 4 \\ 9 & -1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \end{array} \right]$

57. $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 3 & 0 & -24 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right]$



58. **ألعاب القوى** يجب أن تسقط الكرة الحديدية في لعبة رمي الجلة داخل القطاع 40° . تقع رأس الزاوية عند نقطة الأصل، ويمتد أحد الضلعين على طول المحور x . فإذا أسقط اللاعب الكرة عند نقطة إحداثياتها $(17, 18)$ ، فهل ستسقط الكرة داخل المنطقة المطلوبة؟ اشرح استنتاجك.

59. **النجوم** تظهر بعض النجوم ساطعة أكثر من غيرها لقربها الشديد منا. والنصوع المطلق (أو القدر المطلق) M هو وحدة قياس مدى السطوع الذي يظهر عليه النجم إذا كان يبعد عن الأرض مسافة 10 فراسخ نجمية أو حوالي 32 سنة ضوئية. وكلما قل النصوع، دل ذلك على زيادة سطوع النجم. والنصوع المطلق تحدده المعادلة $M = m + 5 - 5 \log d$ ، حيث d هو بُعد النجم عن الأرض مقيسًا بالفراسخ و m هو النصوع الظاهري للنجم.

النجم	النصوع الظاهري	المسافة (بالفرسخ النجمي)
سيرْيوس	-1.44	2.64
فيجا	0.03	7.76

a. سيرْيوس وفيجا اثنان من النجوم الأكثر سطوعًا. فأيهما أكثر سطوعًا؟

b. جد النصوع المطلق لكل من سيرْيوس وفيجا.

c. أي النجمين أكثر سطوعًا في الحقيقة؟ بعبارة أخرى، أيهما له نصوع مطلق أقل؟

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

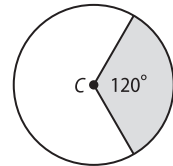
62. **مراجعة** كل عام، يدلي طلاب مدرسة الإمارات الثانوية بتصويتًا على الموضوع الرئيس لمهرجان الترحيب بالطلاب القادمين. حصل الموضوع "ليلة تحت النجوم" على 225 صوتًا. أما الموضوع "لحظة حياتي" فقد حصل على 480 صوتًا. فإذا كان 40% من طلاب الصف الحادي عشر صوتوا على موضوع النجوم، و75% من طلاب الصف الثاني عشر على موضوع الحياة، وقد أدلى الطلاب كلهم بأصواتهم، فكم عدد طلاب العام قبل الأخير والعام الأخير في مدرسة الإمارات؟

- A 854 طالبًا بالصف الثاني عشر و176 طالبًا بالصف الحادي عشر
B 705 طالب بالصف الثاني عشر و325 طالبًا بالصف الحادي عشر
C 395 طالبًا بالصف الثاني عشر و310 طالب بالصف الحادي عشر
D 380 طالبًا بالصف الثاني عشر و325 طالبًا بالصف الحادي عشر

63. **مراجعة** ما حل، $\frac{1}{8}x - \frac{2}{3}y + \frac{5}{6}z = -8$ ، $\frac{3}{4}x + \frac{1}{6}y - \frac{1}{3}z = -12$ ، $\frac{3}{16}x - \frac{5}{8}y - \frac{7}{12}z = -25$

- F $(-4, 6, 3)$ H $(-16, 24, 12)$
G $(-8, 12, 6)$ J ليس لها حل

60. SAT/ACT تقع النقطة C في مركز الدائرة بالشكل أدناه. تبلغ مساحة المنطقة المظللة $3\pi \text{ cm}^2$. فما محيط المنطقة المظللة بالسنتيمترات؟



- A $2\pi + 6$
B $2\pi + 9$
C $2\pi + 12$
D $3\pi + 6$
E $3\pi + 12$

61. اشترت نبيلة في شهر مارس نفتمتين عاديتين وأخرين مميزتين من مقدم خدمات الهاتف المحمول الذي تتعامل معه مقابل 8.96 AED. وفي مايو، دفعت 9.46 AED مقابل نفمة عادية و3 نفمات مميزة. فما سعر كل من النفمة العادية والمميزة؟

- F AED 1.99, AED 2.49 H AED 1.99, AED 2.79
G AED 2.29, AED 2.79 J AED 2.49, AED 2.99

اختبار منتصف الوحدة

الدروس من 6-1 إلى 6-3

6

جد محدد كل من المصفوفات التالية. ثم جد معكوس المصفوفة، إن وُجد. (الدرس 6-2)

$$11. \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$12. \begin{bmatrix} -9 & -5 \\ -7 & -4 \end{bmatrix}$$

$$13. \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 7 & -5 \end{bmatrix}$$

$$14. \begin{bmatrix} 5 & -10 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}$$

15. **التبريض** تعمل حفصة ممرضة بغرفة الطوارئ. وتكسب AED 24 في الساعة خلال نوبات العمل العادية، و AED 30 في الساعة عند العمل لوقت إضافي. ويوضح الجدول التالي ساعات العمل لحفصة خلال الأسابيع الثلاثة الماضية. (الدرس 6-2)

الأسبوع	الساعات العادية	الساعات الإضافية
1	35	7
2	38	0
3	40	9

a. استخدم المصفوفات لتحديد المبلغ الذي جنته حفصة خلال كل أسبوع.

b. خلال الأسبوع الرابع، عملت حفصة ساعات عمل عادية أكثر من ساعات العمل الإضافي بأربع مرات. حدد عدد الساعات التي عملتها إذا كانت قد جنت AED 1008.

استخدم المصفوفة العكسية لحل نظام من المعادلات الخطية، إن أمكن. (الدرس 6-3)

$$16. \begin{cases} 2x - y = 6 \\ 3x + 2y = 37 \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} 2x + y + z = 19 \\ 3x - 2y + 3z = 2 \\ 4x - 6y + 5z = -26 \end{cases}$$

18. **اختيار من متعدد** أي من المصفوفات الموسعة يمثل الحلول لنظام المعادلات؟ (الدرس 6-3)

$$\begin{cases} x + y = 13 \\ 2x - 3y = -9 \end{cases}$$

$$F \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{3}{5} \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} \end{array} \right]$$

$$H \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 7 \end{array} \right]$$

$$G \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array} \right]$$

$$J \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 5 \end{array} \right]$$

استخدم قاعدة كرامر لإيجاد حل كل نظام من المعادلات الخطية، إن وُجد حل فريد. (الدرس 6-3)

$$19. \begin{cases} 2x - y = 6 \\ 4x - 2y = 12 \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} 3x - y - z = 13 \\ 3x - 2y + 3z = 16 \\ -x + 4y - 8z = -9 \end{cases}$$

اكتب كل نظام معادلات في صيغة مثلثية باستخدام حذف جاوس. ثم حل النظام. (الدرس 6-1)

$$1. \begin{cases} 2x - y = 13 \\ 2x + y = 23 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y - z = -3 \\ 3x - 5y + 7z = 14 \end{cases}$$

حل كل من أنظمة المعادلات التالية. (الدرس 6-1)

$$3. \begin{cases} 3x + 3y = -8 \\ 6x - 5y = 28 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} -x + 8y - 2z = -37 \\ 2x + 5y - 11z = -7 \\ 4x - 7y + 6z = 4 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} -2x + 2y + z = 5 \\ 3x - 2y + 2z = 7 \\ 5x - y + 4z = 8 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} x - 5y + 8z = 7 \\ -8x + 3y + 12z = -9 \\ 5x - 4y - 3z = 9 \end{cases}$$

7. **رعاية الحيوانات** اشترت علياء إجمالي 11.34 kg من طعام الأرانب والقطط وحبوب الطيور بمبلغ AED 367.32. ثم اشترت طعام أرانب إضافيًا بزيادة قدرها 4.5 kg عن حبوب الطيور. موضح بالأسفل تكلفة الكيلوجرام لكل نوع من الطعام. (الدرس 6-1)



AED 24.5 لكل كيلوجرام AED 57.13 لكل كيلوجرام AED 32.67 لكل كيلوجرام

a. اكتب مجموعة من المعادلات الخطية للتعبير عن هذه الحالة.

b. حدد عدد الكيلوجرامات لكل نوع طعام اشترته علياء.

8. **اختيار من متعدد** أي مصفوفة غير منفردة؟ (الدرس 6-2)

$$A \begin{bmatrix} 2 & 3 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & -5 & 0 \\ 4 & 4 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$C \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 5 \\ 5 & 1 & -7 & 8 \end{bmatrix}$$

$$B \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 & 0 \\ 10 & 6 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & -1 & 5 \\ 7 & 7 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

جد AB و BA: إن أمكن. (الدرس 6-2)

$$9. A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -2 & 5 & 1 \\ 0 & -4 & -6 \end{bmatrix}$$

$$10. A = \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 5 & -8 & 2 \end{bmatrix}$$

نمذجة الحركة باستخدام المصفوفات

6-4

الدرس

لماذا؟

الآن

سابقًا

● **الرسوم المتحركة باستخدام الكمبيوتر** في عام 1995 تطوّرت الرسوم المتحركة إلى حد كبير مع صدور أول فيلم سينمائي كبير يتم إنشاؤه كليًا باستخدام الحواسيب. تستخدم الرسوم المتحركة برامج الحاسوب لإنشاء نماذج حاسوبية ثلاثية الأبعاد للشخصيات والدعائم والمجموعات. تصف هذه النماذج الحاسوبية شكل الشيء وضوابط الحركة التي يستخدمها مصممو الرسوم المتحركة لإنشاء الحركة والتعبيرات. إنّ نماذج الرسوم المتحركة هي عبارة عن مصفوفات كبيرة جدًا بالفعل.

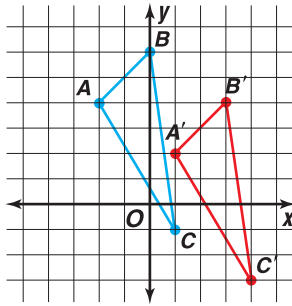
1 استخدام المصفوفات لتحديد إحداثيات مضلع بعد تحويل معطى.

1 بالرغم من أنّ المصفوفات الكبيرة تستخدم في الرسوم المتحركة التي تعتمد على الحاسوب، إلا أنه يمكنك استخدام مصفوفة بسيطة لوصف عدد كبير من الحركات التي تُسمّى **التحويلات** التي تعلمتها في الهندسة. إنّ بعض التحويلات التي ستقوم بفحصها في هذا الدرس هي **إزاحات** (انسحابات) و**انعكاسات** (طّي) و**دورات محورية** (دوران) و**تمدد** (تكبير أو تصغير).

يمكن استخدام $n \times 2$ مصفوفة للتعبير عن رؤوس المضلع n -gon باستخدام الصف الأول من العناصر التي تمثّل إحداثيات المحور x والصف الثاني وهي إحداثيات المحور y لرؤوس المضلع.

يمكن تمثيل المثلث ABC بمصفوفة الرأس التالية.

$$\begin{array}{ccc|c} A & B & C & \\ \hline -2 & 0 & 1 & x \text{ الإحداثي} \\ 4 & 6 & -1 & y \text{ الإحداثي} \end{array}$$



إنّ المثلث $A'B'C'$ متطابق مع المثلث ABC وله الاتجاه نفسه لكن تم تحريكه ثلاث وحدات إلى اليمين ووحدة واحدة إلى الأسفل من مكان $\triangle ABC$. يمكن التعبير عن إحداثيات $\triangle A'B'C'$ مثل مصفوفة الرأس التالية.

$$\begin{array}{ccc|c} A' & B' & C' & \\ \hline 1 & 3 & 4 & x \text{ الإحداثي} \\ 2 & 4 & -3 & y \text{ الإحداثي} \end{array}$$

قارن بين المصفوفتين. إذا أضفت $\begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -2 & -2 & -2 \end{bmatrix}$ إلى المصفوفة الأولى.

فستحصل على المصفوفة الثانية. يمثل العدد 3 تحريك ثلاث وحدات إلى اليمين لكل إحداثي x . وبالمثل، يمثل العدد -2 تحريك وحدتين إلى الأسفل لكل إحداثي y . يُسمّى هذا النوع من المصفوفات **مصفوفة الإزاحة**. في هذا التحويل، يكون المثلث $\triangle ABC$ هو **الصورة قبل التحويل**، ويكون $\triangle A'B'C'$ هو **الصورة بعد الإزاحة**.

المثال 1

على فرض الشكل الرباعي $ABCD$ له الرؤوس $A(-1, 1)$ و $B(4, 0)$ و $C(4, -5)$ و $D(1, -3)$ تم إزاحته بمقدار وحدتين إلى اليسار و4 وحدات إلى الأعلى.

a. ممثّل رؤوس الشكل الرباعي كمصفوفة.

b. اكتب مصفوفة الإزاحة.

c. استخدم مصفوفة الإزاحة لإيجاد رؤوس $A'B'C'D'$ ، صورة الشكل الرباعي A, B, C, D بالإزاحة.

d. ارسم الشكل الرباعي $ABCD$ وصورته.

a. ستكون المصفوفة التي تمثّل إحداثيات رؤوس الشكل الرباعي $ABCD$ مصفوفة 4×2 .

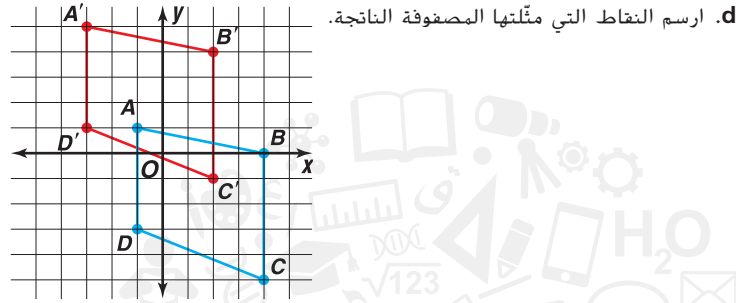
$$\begin{array}{cccc|c} A & B & C & D & \\ \hline -1 & 4 & 4 & -1 & x \text{ الإحداثي} \\ 1 & 0 & -5 & -3 & y \text{ الإحداثي} \end{array}$$

لاحظ أنّ الصورة أثناء الإزاحة لها الشكل والقياس نفسه للصورة قبل التحويل. الأشكال متطابقة.

b. إن مصفوفة الإزاحة هي $\begin{bmatrix} -2 & -2 & -2 & -2 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$

c. اجمع المصفوفتين.

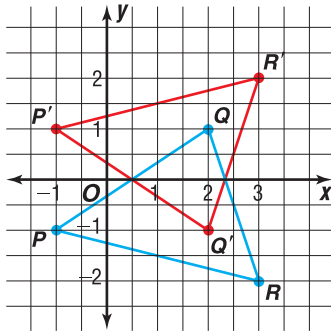
$$\begin{bmatrix} -1 & 4 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & -5 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -2 & -2 & -2 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A' & B' & C' & D' \\ -3 & 2 & 2 & -3 \\ 5 & 4 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$



الصورة الأساسية والصورة
بالإزاحة متطابقتان

يوجد ثلاثة خطوط تنعكس فيها الأشكال بشكل عام.

- المحور x .
- المحور y و
- المستقيم $y = x$



في الشكل الموضح على اليسار، إن المثلث $P'Q'R'$ هو انعكاس للمثلث PQR في المحور x . المصفوفة 2×2 هي **مصفوفة انعكاس** عندما يتم ضربها في مصفوفة الرأس للمثلث PQR سينتج عنها مصفوفة الرأس للمثلث $P'Q'R'$.

لتكن $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ تمثل مصفوفة مربعة مجهولة

لذلك، $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ أو

$$\begin{bmatrix} -a & -b & 2a+b & 3a-2b \\ -c & -d & 2c+d & 3c-2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

بما ان العناصر المتطابقة للمصفوفات المتساوية هي متساوية، ويمكننا كتابة معادلات للحصول على قيم المتغيرات. هذه المعادلات تكون نظامين.

$$\begin{aligned} -a - b &= -1 \\ 2a + b &= 2 \\ 3a - 2b &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -c - d &= 1 \\ 2c + d &= -1 \\ 3c - 2d &= 2 \end{aligned}$$

عندما نحل كل نظام للمعادلات، ستجد أن $a = 1$ و $b = 0$ و $c = 0$ و $d = -1$. لذلك، فإن المصفوفة التي ينتج عنها انعكاس في المحور x هي

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \text{ ستعمل هذه المصفوفة مع أي انعكاس في المحور } x.$$

يمكن الحصول على مصفوفات للانعكاس في المحور y أو المستقيم $y = x$ بطريقة مشابهة. وهذا ملخص أدناه.

مصفوفات الانعكاس		
الانعكاس في:	يرمز إليها بـ:	اضرب مصفوفة الرأس في:
المحور x	المحور R_x	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
المحور y	المحور R_y	$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
المستقيم $y = x$	$R_y = x$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

الرسوم المتحركة لإنشاء صورة تظهر معكوسة في المرآة. ستستخدم الرسوم المتحركة مصفوفة لعكس صورة في المحور y . استخدم مصفوفة انعكاس لإيجاد إحداثيات رؤوس نجمة معكوسة في المرآة (المحور y) إذا كانت إحداثيات النقاط المرتبطة لإنشاء النجمة هي $(-2, 4)$ و $(-3.5, 4)$ و $(-4, 5)$ و $(-4.5, 4)$ و $(-6, 4)$ و $(-5, 3)$ و $(-5, 1)$ و $(-4, 2)$ و $(-3, 1)$ و $(-3, 3)$.

أولاً اكتب مصفوفة الرأس للنقاط المستخدمة لتعريف النجمة.

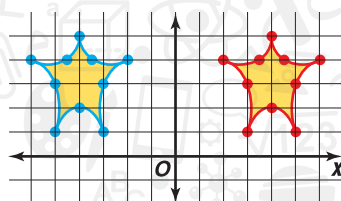
$$\begin{bmatrix} -2 & -3.5 & -4 & -4.5 & -6 & -5 & -5 & -4 & -3 & -3 \\ 4 & 4 & 5 & 4 & 4 & 3 & 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

اضرب في مصفوفة الانعكاس للمحور y

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & -3.5 & -4 & -4.5 & -6 & -5 & -5 & -4 & -3 & -3 \\ 4 & 4 & 5 & 4 & 4 & 3 & 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3.5 & 4 & 4.5 & 6 & 5 & 5 & 4 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 5 & 4 & 4 & 3 & 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

إنّ الرؤوس المستخدمة لتحديد الانعكاس هي $(2, 4)$ و $(3.5, 4)$ و $(4, 5)$ و $(4.5, 4)$ و $(6, 4)$ و $(5, 3)$ و $(5, 1)$ و $(4, 2)$ و $(3, 1)$ و $(3, 3)$.



ربما تتذكّر من الهندسة أنه يمكن القيام بدوران محوري لصورة على المستوى الإحداثي على خط إحداثي من خلال مجموعة من الانعكاسات. على سبيل المثال، يمكن الحصول على تدوير باتجاه معاكس لعقارب الساعة بزاوية 90° بانعكاس الصورة أولاً في المحور y ثم انعكاس الصورة المنعكسة المستقيم $y = x$. يمكن الحصول على **مصفوفة الدوران** Rot_{90} عن طريق مجموعة من الانعكاسات. بما أنه يتم تطبيق المصفوفات باستخدام الضرب، فإن تكوين مصفوفتين منعكستين سيكون هو الناتج. تذكر أنّ $(f \cdot g)(x)$ يعني أنك تحصل على $g(x)$ أولاً ثم حساب نتيجة $f(x)$. لذلك، لتعريف المصفوفة Rot_{90} سنستخدم

$$Rot_{90} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ أو } \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ المحور } Rot_{90} = R_{y=x} \cdot R_x$$

وبالمثل، فإنّ الدوران بزاوية 180° سيكون تدويرًا بزاوية 90° مرتين أو $Rot_{90} \cdot Rot_{90}$. يتكوّن الدوران بزاوية 270° من Rot_{90} و Rot_{180} . إنّ نتائج هذه التركيبات موضّحة أدناه.

مصفوفات الدوران		
للدوران باتجاه معاكس لعقارب الساعة حول نقطة الأصل	يرمز إليها بـ:	اضرب مصفوفة الرأس في:
90°	Rot_{90}	$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
180°	Rot_{180}	$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
270°	Rot_{270}	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

الصورة الأساسية والصورة الناتجة من الدوران متطابقتان.

المثال 3

الرسوم المتحركة على فرض أنه يتم رسم الشكل المتحرك لكي يدور حول نقطة معينة. إن صور الدوران المتعدد ضرورية من أجل تسهيل تحريك الصورة. إذا كانت الصورة تحتوي على نقاط رئيسية عند (1, 4) و (-1, 4) و (-2, 4) و (-2, 3) والدوران مرتبط بنقطة الأصل، جـد موقع هذه النقاط عند 90° و 180° و 270° والدورانات باتجاه معاكس لعقارب الساعة.

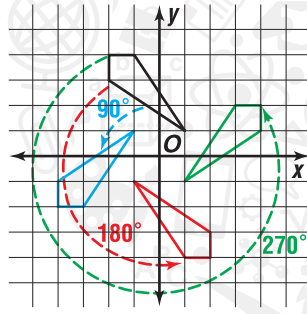
اكتب مصفوفة الرأس أولاً. ثم اضربها في كل مصفوفة دوران.

$$\text{إن مصفوفة الرأس هي } \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & -2 \\ 1 & 4 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{Rot}_{90} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & -2 \\ 1 & 4 & 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -4 & -4 & -3 \\ 1 & -1 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Rot}_{180} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & -2 \\ 1 & 4 & 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & -4 & -4 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\text{Rot}_{270} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & -2 \\ 1 & 4 & 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$



احتفظت كل التحويلات التي ناقشناها بالهيئة والقياس نفسيهما للشكل. ومع ذلك، فإن التمدد يغير قياسات الشكل. إن الشكل المتمدّد مشابه للشكل الأصلي. يمكن تحقيق التمددات التي تستخدم نقطة الأصل كمركز للإسقاط عن طريق ضرب مصفوفة الرأس في معامل المقياس المطلوب من أجل التمدد. يرتبط كل تمدد في هذا الدرس بنقطة الأصل.

المثال 4

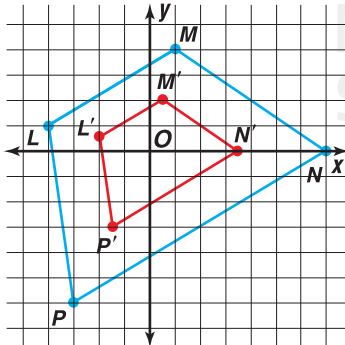
شبه منحرف رؤوسه النقاط $L(-4, 1)$ و $M(1, 4)$ و $N(7, 0)$ و $P(-3, -6)$. جـد إحداثيات شبه المنحرف $L'M'N'P'$ صورة شبه المنحرف $LMNP$ لمعامل المقياس 0.5 صف التمدد

اكتب إحداثيات الرؤوس كمصفوفة أولاً. ثم اضرب بمعامل المقياس.

$$0.5 \begin{bmatrix} -4 & 1 & 7 & -3 \\ 1 & 4 & 0 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0.5 & 3.5 & -1.5 \\ 0.5 & 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

إن رؤوس الصورة هي $L'(-2, 0.5)$ و $M'(0.5, 2)$ و $N'(3.5, 0)$ و $P'(-1.5, -3)$.

للصورة اضلاع طولها نصف طول الصورة الأساسية



اقرأ الدرس وادرسه للإجابة عن كل سؤال.

1. اذكر كل التحويلات الموضحة في هذا الدرس. اذكر طريقة الارتباط بين الصورة قبل التحويل والصورة في كل نوع من التحويل.

2. اشرح العلاقة بين الدوران باتجاه معاكس لعقارب الساعة بزاوية 90° و 180° و 270° والدوران باتجاه عقارب الساعة.

3. مجلة الرياضيات وضّح طريقة تمكّنك من تذكر عناصر مصفوفات الانعكاس إذا نسبت أين ينتمي s و $-1s$ و 0 .

4. صل كل مصفوفة بالعبارة التي تصف نوعها بشكل جيد.

- (1) ندد بعامل المقياس 2
a. $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$
- (2) انعكاس حول المحور y
b. $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
- (3) انعكاس حول المستقيم $y = x$
c. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
- (4) الدوران بزاوية 90° عكس عقارب الساعة حول نقطة الأصل.
d. $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
- (5) الدوران بزاوية 180° حول نقطة الأصل
(6) الإزاحة بمقدار وحدة واحدة إلى اليسار ووحدة واحدة للأعلى

استخدم المصفوفات لإجراء كل تحويل. ثم مثل بيانيًا قبل التحويل والصورة بعد ذلك على شبكة الإحداثيات نفسها.

5. للمثلث JKL الرؤوس $J(-2, 5)$ و $K(1, 3)$ و $L(0, -2)$. استخدم الضرب القياسي لإيجاد إحداثيات المثلث مع عامل التمدد 1.5.

6. للمربع ABCD الرؤوس $A(-1, 3)$ و $B(3, 3)$ و $C(3, -1)$ و $D(-1, -1)$. جد إحداثيات المربع بعد التحريك بالإزاحة وحدة واحدة إلى اليسار ووحدة واحدة إلى الأسفل.

7. للمربع ABCD الرؤوس $A(-1, 2)$ و $B(-4, 1)$ و $C(-3, -2)$ و $D(0, -1)$. جد صورة المربع بالانعكاس حول المحور y .

8. المثلث PQR ممثل بالمصفوفة

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

المثلث بالدوران بزاوية 270° في اتجاه معاكس لعقارب الساعة حول نقطة الأصل.

9. جد صورة $\triangle LMN$ بعد Rot_{180} المحور R_y إذا كانت الرؤوس هي $L(-6, 4)$ و $M(-3, 2)$ و $N(-1, -2)$.

10. الفيزياء كانت الرياح تهب بقوة جدًا عندما كانت جيني تجالس الأطفال. كانت معهم في الخارج عندما كان الأطفال يلعبون الكرة البلاستيكية الكبيرة في الهواء. طيرت الرياح الكرة حتى هبطت على ما يقارب 3 m ناحية الشرق و 4 m ناحية الشمال بعيدًا مكان إلغائها في الهواء.



a. اصنع رسمًا يوضّح المكان الأصلي للكرة وانتقال الكرة إلى نقطة هبوطها.

b. إذا كانت $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ تمثل المكان الأصلي للكرة، فاكتب مصفوفة تمثل موقع الكرة التي نمت إزاحتها.

استخدم الضرب القياسي لتحديد إحداثيات رؤوس كل شكل بالتمدد. ثم مثل بيانيًا قبل التحويل والصورة بعد ذلك على شبكة الإحداثيات نفسها.

11. رؤوس المثلث A(1, 1) و B(1, 4) و C(5, 1). عامل التمدد 3

12. رؤوس المثلث X(0, 8) و Y(-5, 9) و Z(-3, 2). عامل التمدد $\frac{3}{4}$

13. الرباعي PQRS مع مصفوفة رأس $\begin{bmatrix} -3 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$: عامل التمدد 2

14. ارسم مربعًا رؤوسه A(-1, 0) و B(0, 1) و C(1, 0) و D(0, -1) على مستويين إحداثيين منفصلين.

a. على أحد المستويين الإحداثيين، ارسم صورة للمربع ABCD بالتمدد عامله 2. قم بتسميته A'B'C'D'. ثم ارسم التمدد على التمثيل البياني A'B'C'D' بعامل التمدد 3.

b. على المستوى الإحداثي الثاني، ارسم صورة للمربع ABCD بالتمدد عامله 3. قم بتسميته A'B'C'D'. ثم ارسم التمدد على صورة A'B'C'D' بالعامل 2.

c. قارن بين نتائج الجزأين a و b. صف ماذا تلاحظ.

استخدم المصفوفات لتحديد إحداثيات رؤوس كل شكل تمت إزاحته. ثم ارسم صورة الشكل قبل التحويل وبعده على شبكة الإحداثيات نفسها.

15. المثلث WXY مع مصفوفة الرأس $\begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{bmatrix}$ تمت إزاحته 3 وحدات إلى اليمين ووحدة واحدة إلى أسفل

16. الشكل الرباعي رؤوسه $O(0, 0)$ و $P(1, 5)$ و $Q(4, 7)$ و $R(3, 2)$ تمت إزاحته وحدتان إلى اليسار ووحدة واحدة إلى الأسفل

17. المربع CDEF تمت إزاحته 3 وحدات إلى اليمين و4 وحدات إلى الأعلى إذا كانت الرؤوس $C(-3, 1)$ و $D(1, 5)$ و $E(5, 1)$ و $F(1, -3)$

18. ارسم المثلث $\triangle FGH$ رؤوسه $F(4, 1)$ و $G(0, 3)$ و $H(2, -1)$

a. ارسم صورة $\triangle FGH$ بعد إزاحته 6 وحدات إلى اليسار ووحدة واحدة إلى الأسفل. قم بتسمية الصورة $\triangle F'G'H'$.

b. ثم قم بإزاحة $\triangle F'G'H'$ وحدة واحدة إلى اليمين و5 وحدات إلى الأعلى. قم بتسمية الصورة $\triangle F''G''H''$.

c. ما هي الإزاحة التي ستحوّل $\triangle FGH$ إلى $\triangle F''G''H''$ مباشرة؟

استخدم المصفوفات لتحديد إحداثيات رؤوس كل شكل بالانعكاس. ثم ارسم الشكل قبل التحويل والصورة بعد ذلك على شبكة الإحداثيات نفسها.

19. $\triangle ABC$ ذو الرؤوس $A(-1, -2)$ و $B(0, -4)$ و $C(2, -3)$ انعكس في المحور x

20. انعكاس في المحور R_y لمستطيل فيه الرؤوس $D(2, 4)$ و $E(6, 2)$ و $F(3, -4)$ و $G(-1, -2)$

21. شبه منحرف رؤوسه $H(-1, -2)$ و $I(-3, 1)$ و $J(-1, 5)$ و $K(2, 4)$ للانعكاس في المستقيم $y = x$

استخدم المصفوفات لتحديد إحداثيات رؤوس كل شكل بالدوران. ثم ارسم الشكل قبل الدوران والصورة بعد ذلك على شبكة الإحداثيات نفسها.

22. $\triangle LMN$ رؤوسه $L(1, -1)$ و $M(2, -2)$ و $N(3, -1)$ Rot_{90}

23. المربع رؤوسه $O(0, 0)$ و $P(4, 0)$ و $Q(4, 4)$ و $R(0, 4)$ تم دورانه بزاوية 180° .

24. خماسي الأضلاع STUVW رؤوسه $S(-1, -2)$ و $T(-3, -1)$ و $U(-5, -2)$ و $V(-4, -4)$ و $W(-2, -4)$ تم دورانه بزاوية 270° عكس عقارب الساعة.

25. البرهان على فرض أنّ المثلث ABC رؤوسه $A(1, 3)$ و $B(-2, -1)$ و $C(-1, -3)$. استخدم كل نتيجة للتحويل المعطى للمثلث $\triangle ABC$ لكي توضح كيفية اشتقاق مصفوفة هذا الانعكاس أو الدوران.

a. حول المحور R_x $\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

b. حول المحور R_y $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -3 \end{bmatrix}$

c. حول المحور $R_{y=x}$ $\begin{bmatrix} 3 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

d. Rot_{90} بالدوران حول نقطة الأصل $\begin{bmatrix} -3 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

e. Rot_{180} بالدوران حول نقطة الأصل $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

f. Rot_{270} بالدوران حول نقطة الأصل $\begin{bmatrix} 3 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

مسائل مهارات التفكير العليا استخدم مسائل مهارات التفكير العليا

على فرض أنّ المثلث $\triangle JKL$ رؤوسه $J(-6, 4)$ و $K(-3, 2)$ و $L(-1, -2)$. جد إحداثيات كل تحويل مركّب. ثم ارسم الشكل قبل التحويل والصورة بعد ذلك على شبكة الإحداثيات نفسها.

26. الدوران بزاوية 180° تتبعه الإزاحة بمقدار وحدتين إلى اليسار و5 وحدات إلى الأعلى

27. انعكاس في المحور R_y • انعكاس حول المحور R_x

28. Rot_{90} • حول المحور R_y

29. ألعاب كل قطعة على لوحة الشطرنج لها عدد معيّن من المسافات والاتجاهات التي تستطيع أن تتحركها. ابحث في لعبة الشطرنج. وصف التحركات الممكنة لكل قطعة كمصفوفة إزاحة.

a. بيدق

b. الحصان

c. ملك

30. التفكير الناقد وضح أن التمدد باستخدام عامل قياس 1- له النتيجة نفسها مثل Rot_{180} .

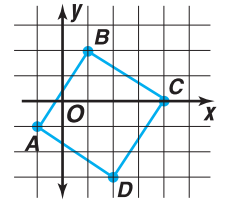
31. التسلية ظهرت العجلة الدوارة لأول مرة في معرض شيكاغو عام 1893. بلغ طول محورها 45 ft.

ويخرج منه قضبان تدعم 36 عربة خشبية تستطيع كل واحدة منها حمل 60 شخصًا. كان قطر العجلة نفسها 250 ft. على فرض أنّ العجلة تم وضعها عند نقطة الأصل. جد إحداثيات العربة الموضوعة على رصيف التحميل. ثم جد موقع العربة عند زاوية 90° في اتجاه عكس عقارب الساعة، وزاوية 180° . وزاوية 270° في مواقع الدوران باتجاه معاكس لعقارب الساعة.

32. **التفكير الناقد** المحور R_y يوفّر مصفوفة لانعكاس الشكل في المحور y . هل تعتقد أنّ المصفوفة التي يمكن أن تمثل انعكاسًا في المستقيم $y = 4$ موجودة؟ إذا كانت كذلك، فافترض تخمينًا واثبت صحته.

33. **الرسوم المتحركة** اقسم ورقتين من شبكة مربعات إلى أرباع عن طريق تقسيم طول وعرض الورق من منتصفه. ارسم شكلًا مبسطًا على إحدى القطع. وارسم الشكل بالتمدد على قطعة أخرى باستخدام معامل المقياس 1.25. وارسم الشكل الأصلي بالتمدد باستخدام معامل المقياس 1.5 على قطعة ثالثة. وارسم الشكل الأصلي بالتمدد باستخدام معامل المقياس 1.75 على القطعة الرابعة. استمر تمديد الشكل الأصلي على كل القطع المتبقية بزيادة قدرها 0.25 في معامل المقياس في كل مرة. ضع القطع بالترتيب وقم بالتقليب بينها. ما هو نوع الحركة الناتجة عن هذه الحركات المتكررة؟

34. **التفكير الناقد** اكتب مصفوفة الرأس للشكل الممثل بيانيًا أدناه.



a. اصنع تخمينًا عن الشكل الناتج إذا قيمت بضرب مصفوفة الرأس في $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

b. انسخ الشكل على شبكة مربعات وارسم مصفوفة الرأس الناتجة بعد توضيح عملية الضرب.

c. كيف هي النتيجة مقارنة بالتخمين السابق يسمى هذا غالبًا بالفض. باعتقادك لماذا يسمى بهذا الاسم؟

برنامج محمد بن راشد
للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid
Smart Learning Program

قم بأجراء العمليات المشار إليها. إذا لم تكن المصفوفة موجودة فاكتب غير ممكن. (الدرس 2-6)

$$35. 4 \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} - 5 \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$$

$$36. 5 \begin{pmatrix} 2 & -2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} - 3 \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$$

$$37. -4 \left(\begin{bmatrix} 8 & 9 \\ -5 & 5 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} -6 & -1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \right)$$

جد حل كل نظام معادلات. (الدرس 3-6)

$$38. 2x - 4y + 3z = -3$$

$$-7x + 5y - 4z = 11$$

$$x - y - 2z = -21$$

$$39. -4x - 2y + 9z = -29$$

$$10x - 12y + 7z = 51$$

$$3x + 5y - 14z = 25$$

$$40. -7x + 8y - z = 43$$

$$3x - 2y + 5z = -43$$

$$2x - 4y + 6z = -50$$

شظيرة	حجم صغير	حجم متوسط	حجم كبير
لحم بقري	AED 4.50	AED 6.75	AED 9.50
نونة	AED 4.50	AED 6.75	AED 9.50
خضراوات	AED 4.00	AED 6.25	AED 8.75
كرات اللحم	AED 4.75	AED 7.50	AED 10.25

41. الأعمال يوضح الجدول قائمة بالأسعار في محل الشطائر. (الدرس 2-6)

a. نظم الأسعار في المصفوفة 4×3 .

b. يقرر المدير خفض الأسعار على كل عنصر بنسبة 20%. نظم هذه المجموعة الجديدة من البيانات في المصفوفة 4×3 .

c. اطرح المصفوفة الثانية من الأولى وحدد الحسومات التي سيحصل عليها المستهلك لكل شظيرة.

42. إعادة نمذجة يقوم المثبت باستبدال السجادة من حجرة معيشة تبلغ 12 ft بواحدة تبلغ 15 ft لغرفة المعيشة. تبلغ تكلفة السجادة الجديدة AED 61.20 لكل ياردة مربعة. القانون $f(x) = 9x$ يحول الياردة المربعة إلى قدم مربع.

a. جد معكوس $f^{-1}(x)$. ما هي دلالة $f^{-1}(x)$ ؟

b. كم سيكلف سعر السجادة الجديدة؟

43. تم تحديد درجات اختبار الصف الدراسي في مادة الفيزياء.

82, 77, 84, 98, 93, 71, 76, 64, 89, 95, 78, 89, 65, 88, 54,
96, 87, 92, 80, 85, 93, 89, 55, 62, 79, 90, 86, 75, 99, 62

أعد مخطط صندوق للاختبار.

ما هو الانحراف المعياري لدرجات الاختبار؟

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

46. الاختيار من متعدد أي من المعادلات الآتية يمثل نتيجة إزاحة

الدالة الأصلية $y = x^3$ بمقدار أربع وحدات إلى الأعلى وخمس وحدات إلى اليمين؟

A $y + 4 = (x + 5)^3$

C $y + 4 = (x - 5)^3$

B $y - 4 = (x + 5)^3$

D $y - 4 = (x - 5)^3$

47. مراجعة أي مما يلي يصف الأعداد في

مجال $\{h(x) = \frac{\sqrt{2x-3}}{x-5}\}$

F $x \neq 5$

H $x \geq \frac{3}{2}, x \neq 5$

G $x \geq \frac{3}{2}$

J $x \neq \frac{3}{2}$

44. SAT/ACT يوضح الشكل تقاطع المستقيمتين الثلاثة. لم يتم رسم الشكل باستخدام المقياس.

$x =$

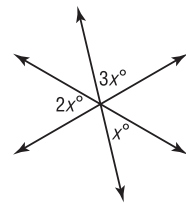
A 16

D 60

B 20

E 90

C 30



45. في المجال $2 < x \leq 3$, أي من الدوال الآتية تحتوي على أكبر قيمة للمتغير y ؟

F $y = \frac{x+3}{x-2}$

H $y = x^2 - 3$

G $y = \frac{x-5}{x+1}$

J $y = 2x$

دليل الدراسة والمراجعة

دليل الدراسة

المفاهيم الأساسية

الأنظمة الخطية متعددة المتغيرات وعمليات الصف (الدرس 1-6)

- كل عملية من عمليات الصف هذه تنتج مصفوفة موسعة مكافئة.
- التبديل بين أي صفين.
- ضرب أحد الصفين في عدد حقيقي غير صفري.
- جمع مضاعف أحد الصفين مع الصف الآخر.

ضرب المصفوفات (الدرس 2-6)

- إذا كانت A هي المصفوفة $m \times r$ و B هي المصفوفة $r \times n$ ، فإن ناتج ضرب AB إذاً هو المصفوفة $m \times n$ التي يكون فيها $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ir}b_{rj}$
- I_n هي مصفوفة $n \times n$ تكون جميع قيمها 1 على قطرها الرئيس، وجميع قيمها 0 بالنسبة لجميع العناصر الأخرى.
- معكوس A هو A^{-1} حيث $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$.

• إذا كان $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ و $ad - cb \neq 0$ ، إذاً $A^{-1} = \frac{1}{ad - cb}$

العدد $ad - cb$ يُسمى مُحدّد $\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

المصفوفة 2×2 ويُعبّر عنه بواسطة $\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

حل الأنظمة (الدرس 3-6)

- افترض أن $AX = B$ ، حيث A هي مصفوفة معاملات النظام الخطي. و X هي مصفوفة المتغيرات، و B هي مصفوفة الحدود الثابتة. إذا كان A قابلاً للعكس، فإن $AX = B$ يكون له إذاً حل فريد يتم التعبير عنه من خلال $X = A^{-1}B$.
- إذا كان $\det(A) \neq 0$ ، فإن الحل الفريد للنظام إذاً يتم التعبير عنه من خلال $x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}, x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}, x_3 = \frac{|A_3|}{|A|}, \dots, x_n = \frac{|A_n|}{|A|}$ ، إذاً كان $\det(A) = 0$ ، فإن $AX = B$ يكون إذاً إما ليس له حل أو له عدد لا نهائي من الحلول.

المفردات الأساسية

حلول مثلى متعددة (multiple optimal solutions)	المصفوفة الموسعة (augmented matrix)
نظام خطي متعدد المتغيرات (multivariable linear system)	مصفوفة المعاملات (augmented matrix)
دالة الهدف (objective function)	قيّد (constraint)
الحل الأمثل (optimization)	قاعدة كرامر (Cramer's Rule)
كسر جزئي (partial fraction)	المُحدّد (determinant)
تحليل الكسر الجزئي (partial fraction decomposition)	حل ممكن (feasible solution)
نموذج درجة الصف المنخفض (reduced row-echelon form)	حذف جاوس (Gaussian elimination)
نموذج درجة الصف (row-echelon form)	المصفوفة المحايدة (identity matrix)
مصفوفة منفردة (singular matrix)	المعكوس (inverse)
نظام مربع (square system)	المصفوفة العكسية (inverse matrix)
غير محدودة (unbounded)	قابل للعكس (invertible)
	البرمجة الخطية (linear programming)

مراجعة المفردات

اختر أفضل كلمة أو عبارة لإكمال الجمل التالية.

1. (المصفوفة الموسعة، مصفوفة المعاملات) هي مصفوفة تتكون من جميع معاملات النظام الخطي وحدوده الثابتة.
2. يختزل/تختزل (حذف جاوس/عمليات الصف الأولية) نظام المعادلات إلى نظام أبسط ومكافئ لتسهيل إيجاد حل له.
3. ناتج حذف جاوس-جوردان هو مصفوفة في صورة (نموذج درجة صف منخفض "أو ما يعرف أيضاً بصورة مستوى صف منخفض"، قابل للعكس).
4. ناتج المصفوفة $n \times n$ المتمثل في A مع اعتبار (المصفوفة العكسية، مصفوفة الوحدة) هو A .
5. المصفوفة المحايدة I تكون هي ذاتها (مصفوفتها الموسعة، مصفوفتها العكسية).
6. المصفوفة المربعة التي ليس لها معكوس تكون (غير منفردة، منفردة).
7. (المُحدّد، النظام المربع) الخاص بـ $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ هو $ad - bc$.
8. عند حل نظام خطي مربع، يكون البديل لحذف جاوس هو (قاعدة كرامر، تحليل الكسر الجزئي).
9. تتكون مسألة البرمجة الخطية ثنائية الأبعاد من (قيود، حلول ممكنة)، والتي تكون عبارة عن متباينات خطية.
10. إذا كان التمثيل البياني لدالة الهدف المطلوب إيجاد حلها الأمثل، f ، يقع في المكان نفسه عند أحد أطراف منطقة الحلول الممكنة، فحينها قد تكون هناك حلول (مثلى متعددة، غير محدودة).

المراجعة التابعة للدرس

6-1 الأنظمة الخطية متعددة المتغيرات وعمليات الصف الأولية (البسيطة)

مثال 1

اكتب كل نظام معادلات في صيغة مثلثية باستخدام حذف جاوس. ثم جد حلًا للنظام.

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 8 \\ 2x - 4y + z &= 2 \\ -3x - 6y + 7z &= 8 \end{aligned}$$

اكتب المصفوفة الموسعة. ثم طبق عمليات الصف الأولية للحصول على نموذج درجة الصف.

$$\begin{array}{c} \text{مصفوفة} \\ \text{موسعة} \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 8 \\ 2 & -4 & 1 & 2 \\ -3 & -6 & 7 & 8 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{l} -2R_1 + R_2 \rightarrow \\ 3R_1 + R_3 \rightarrow \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 8 \\ 0 & -8 & -5 & -14 \\ 0 & 0 & 16 & 32 \end{array} \right]$$

$$\frac{1}{16}R_3 \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 8 \\ 0 & -8 & -5 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right]$$

يمكنك استخدام التعويض لإيجاد أن $x = 1$ و $y = 0.5$. إذا، حل النظام هو $x = 1$ و $y = 0.5$ و $z = 2$. أو المجموعة المرتبة ثلاثية العناصر $(1, 0.5, 2)$.

- | | |
|--|--|
| 11. $3x + 4y = 7$
$2y = -5x + 7$ | 12. $5x - 3y = 16$
$x + 3y = -4$ |
| 13. $x + y + z = 4$
$2x - y - 3z = 4$
$-3x - 4y - 5z = -13$ | 14. $x + y - z = 5$
$2x - 3y + 5z = -1$
$3x - y + 2z = 10$ |
| 15. $2x - 5y = 2z + 11$
$3y + 4z = x - 28$
$3z - x = -18 - 3y$ | 16. $2x - 3z = y - 1$
$5z - 8 = 3x + 4y$
$x + y + z = 3$ |

حل كل من أنظمة المعادلات التالية.

- | | |
|--|---|
| 17. $2x + 2y = 8$
$3x - 8y = -21$ | 18. $x - 2y = 13$
$-5x - 6y = 15$ |
| 19. $x + y = 4$
$x + y + z = 7$
$x - z = -1$ | 20. $x + y = 1$
$3x - 7y + z = -7$
$4x + 8y + 3z = -9$ |
| 21. $3x - y + z = 8$
$2x - 3y = 3z - 13$
$x + z = 6 - y$ | 22. $x + y = z - 1$
$2x + 2y + z = 13$
$3x - 5y + 4z = 8$ |

6-2 ضرب المصفوفة والمعكوسات والمحددات

مثال 2

جد AB و BA ، إن أمكن.

$$23. A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 7 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad 24. A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 7 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$25. A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \end{bmatrix} \quad 26. A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -8 & 5 \\ -7 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix}$$

جد A^{-1} ، في حالة وجودها. وإن لم تكن A^{-1} موجودة، فاكتب منفردة.

$$27. A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 8 \end{bmatrix} \quad 28. A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$29. A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -8 & -12 \end{bmatrix} \quad 30. A = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$$

افتراض أن $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$. جد A^{-1} ، في حالة وجودها. وإن لم تكن A^{-1} موجودة، فاكتب منفردة.

اكتب أولاً مصفوفة موسعة مزدوجة. ثم طبق عمليات الصف الأولية لكتابة المصفوفة في نموذج درجة صف منخفض.

$$\begin{array}{l} \text{مصفوفة موسعة} \rightarrow \\ -2R_1 + R_2 \rightarrow \\ -4R_2 + R_1 \rightarrow \end{array} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 9 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 9 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right]$$

نظرًا لأن النظام له حل، و $a = 9$ ، و $b = -4$ ، و $c = -2$ ، و $d = 1$ ، فإن A قابل للعكس و $A^{-1} = \begin{bmatrix} 9 & -4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$.

6-3 حل الأنظمة الخطية باستخدام المصفوفات وقاعدة كرامر

مثال 3

استخدم المصفوفة العكسية لحل نظام المعادلات، إن أمكن.

$$\begin{aligned} x - y + z &= -5 \\ 2x + 2y - 3z &= -27 \\ -3x - y + z &= 17 \end{aligned}$$

اكتب النظام في صورة مصفوفة.

$$AX = B$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \\ -3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -27 \\ 17 \end{bmatrix}$$

استخدم الحاسبة البيانية لإيجاد قيمة A^{-1} .

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0.25 & 0 & -0.25 \\ -1.75 & -1 & -1.25 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

اضرب A^{-1} في B لحل النظام.

$$X = \begin{bmatrix} 0.25 & 0 & -0.25 \\ -1.75 & -1 & -1.25 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -5 \\ -27 \\ 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5.5 \\ 14.5 \\ 15 \end{bmatrix}$$

إذًا، الحل هو $(-5.5, 14.5, 15)$.

استخدم المصفوفة العكسية لحل كل نظام معادلات، إن أمكن.

$$\begin{aligned} 31. \quad 2x - 3y &= -23 \\ 3x + 7y &= 23 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 32. \quad 3x - 6y &= 9 \\ -5x - 8y &= -6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 33. \quad 2x + y &= 1 \\ x - 3y + z &= -4 \\ y + 8z &= -7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 34. \quad x + y + z &= 1 \\ x + y - z &= -7 \\ y + z &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 35. \quad 3y + 5z &= 25 \\ 2x - 7y - 3z &= 15 \\ x + y - z &= -11 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 36. \quad x - 2y - 3z &= 0 \\ 2x - 3y + 4z &= 11 \\ x - 8y + 2z &= -1 \end{aligned}$$

استخدم قاعدة كرامر لإيجاد حل كل نظام من المعادلات الخطية، إن وُجد حل وحيد.

$$\begin{aligned} 37. \quad 2x - 4y &= 30 \\ 3x + 5y &= 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 38. \quad 2x + 6y &= 14 \\ x - 3y &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 39. \quad 2x + 3y - z &= 1 \\ x + y - 3z &= 12 \\ 5x - 7y + 2z &= 28 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 40. \quad x + 2y + z &= -2 \\ 2x + 2y - 5z &= -19 \\ 3x - 4y + 8z &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 41. \quad -3x - 4y + z &= 15 \\ x - 5y - z &= 3 \\ 4x - 3y - 2z &= -8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 42. \quad 2x + 3y + 4z &= 29 \\ x - 8y - z &= -3 \\ 2x + y + z &= 4 \end{aligned}$$

6-4 نموذج الحركة باستخدام المصفوفات

مثال 4

استخدم المصفوفات لإجراء كل تحويل. ثم مثل بيانيًا الأصل والصورة على شبكة الإحداثيات نفسها.

استخدم المصفوفات لتحديد إحداثيات المضلعات بالتحويلات المعطاة.

دوران باتجاه معاكس لدوران عقارب الساعة حول نقطة الأصل

الانعكاس

$$Rot_{90} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_{x\text{-axis}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$Rot_{180} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$R_{y\text{-axis}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Rot_{270} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_{y=x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

49. إزاحة أربع وحدات إلى الأسفل وثلاث وحدات إلى اليسار. $A(-4, 3)$, $B(2, 1)$, $C(5, -3)$

50. $W(-2, -3)$, $X(-1, 2)$, $Y(0, 4)$, $Z(1, -2)$ انعكاس في المحور x .

51. $D(2, 3)$, $E(2, -5)$, $F(-1, -5)$, $G(-1, 3)$ دوران 180° حول نقطة الأصل.

52. $P(3, -4)$, $Q(1, 2)$, $R(-1, 1)$ تمدد بعامل قياسي 0.5.

53. مثلث ABC رؤوسه $A(-4, 3)$, $B(2, 1)$, $C(5, -3)$ بعد $Rot_{90} \cdot R_{x\text{-axis}}$

54. ما هي مصفوفة التحويل التي سوف تعطي النتيجة نفسها على مثلث كإزاحة 6 وحدات إلى أعلى و 4 وحدات إلى اليسار متبوعة بإزاحة 3 وحدات إلى الأسفل و 5 وحدات إلى اليمين.

التطبيقات وحل المسائل

55. **شطائر البرجر البقري** يوضح الجدول التالي عدد شطائر البرجر البقري والبرجر بالجبن والبرجر النباتي المباعة في مطعم خلال فترة غداء تمتد على مدار 3 ساعات. جد سعر كل نوع من أنواع البرجر. (الدرس 5-1)

إجمالي المبيعات (AED)	النباتي	بالجبن	العادي	الساعات
53	2	8	2	11 صباحاً - 12 مساءً
119	8	12	7	12-1 مساءً
64	7	5	1	1-2 مساءً

56. **وضع الدرجات** قررت الأستاذة عبير وضع درجات تقييمية على اختبارات وواجبات منزلية ومشروعات فضلاً عن المشاركة في الصف. وخصصت أوزاناً مئوية مختلفة لكل فئة كما هو موضح. جد الدرجة النهائية لكل طالب مع التقريب إلى أقرب نسبة مئوية. (الدرس 5-2)

المشاركة	المشروعات	الواجبات المنزلية	الاختبارات	الضمة
10%	20%	30%	40%	الوزن

شوقي	كريم	أنور	سامر	الضمة
91	78	72	88	الاختبارات
71	68	90	95	الواجبات المنزلية
85	75	73	80	المشروعات
80	100	95	100	المشاركة

57. **الآيس كريم** يبيع كشك آيس كريم 3 نكهات تتمثل في الفراولة والأناناس والكرز. وتباع كل نكهة بسعر 1.25 AED. في أحد الأيام، جنى الكشك مبلغ 60 AED كإجمالي مبيعات. وقد حقق الكشك زيادة تبلغ 13.75 AED في مبيعات الكرز مقارنة بمبيعات الأناناس و16.25 AED زيادة مقارنة بمبيعات الفراولة. استخدم قاعدة كرامر لتحديد عدد مرات بيع كل نكهة. (الدرس 3-6)

58. **مباراة رياضية** سجلت ثلاث فرق مدرسية في مباراة رياضية النتائج التالية:

المرتبة الثالثة	المرتبة الثانية	المرتبة الأولى	مدرسة
5	5	2	المدرسة A
3	2	8	المدرسة B
1	4	6	المدرسة C

استخدم ضرب المصفوفات لإيجاد إجمالي النقاط الذي حصلت عليها كل من المدارس في حال كان توزيع النقاط على الشكل التالي: 5 للمرتبة الأولى، 3 للمرتبة الثانية، ونقطة واحدة للمرتبة الثالثة.

59. **الهندسة** محيط مثلث يساوي 83 cm. إذا كان طول ضلعه الأكبر ثلاثة أمثال طول ضلعه الأصغر، جد طول كل من أضلاعه باستخدام نظام معادلات.

برنامج محمد بن راشد
للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid
Smart Learning Program

استخدم قاعدة كرامر لإيجاد حل كل نظام من المعادلات الخطية، إن وُجد حل فريد.

$$13. \begin{cases} 3x - 2y = -2 \\ 4x - 2y = 2 \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} 3x - 2y - 3z = -24 \\ 3x + 5y + 2z = 7 \\ -x + 5y + 3z = 25 \end{cases}$$

أجر العمليات المطلوبة. اكتب "مستحيل" في حال كانت المصفوفة غير موجودة.

$$15. -3 \begin{bmatrix} 4a \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$16. \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$17. \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$18. \begin{bmatrix} -5 & 7 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 9 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

19. **مباراة غناء** فازت سهام بالمرتبة النهائية الثانية في مباراة غناء. قامت النتيجة على إعطاء كل متنافس ثلاث نقاط كلما حصل على تصويت يختاره للمرتبة الأولى، ونقطتين للمرتبة الثانية ونقطة واحدة للمرتبة الثالثة. وقد حصلت سهام على مجموع 490 صوتاً يضم كل المراتب التي اختيرت لها، وبلغ عدد النقاط التي فازت بها 878 نقطة. إذا كان عدد الأصوات التي اختارتها للمرتبة الثانية مثلث عدد الأصوات التي اختارتها للمرتبة الثالثة، فما عدد الأصوات التي حصلت عليها لكل مرتبة؟

20. ما نتيجة انعكاس مثلث رؤوسه $A(a,d)$, $B(b,e)$, $C(c,f)$ في المحور x ، ثم إعادة انعكاس صورته في المحور x ؟ استخدم المصفوفات لتبرير إجابتك.

اكتب كل نظام معادلات في صيغة مثلثية باستخدام حذف جاوس. ثم جد حلاً للنظام.

$$1. \begin{cases} -3x + y = 4 \\ 5x - 7y = 20 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x + 4y - 3z = -8 \\ 5x - 7y + 3z = -4 \\ 3x - 2y + 4z = 24 \end{cases}$$

جد حلاً لنظام المعادلات.

$$3. \begin{cases} 5x - 6y = 28 \\ 6x + 5y = -3 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 2x - 4y + z = 8 \\ 3x + 3y + 4z = 20 \\ 5x + y - 3z = -13 \end{cases}$$

5. **المكتبة** استعارت ليلي كتاباً وأسطوانات مضغوطة وأسطوانات DVD من المكتبة. وبلغ إجمالي ما استعارته 16 عنصرًا. وكان إجمالي عدد الأسطوانات المضغوطة وأسطوانات DVD مساوياً لعدد الكتب. واستعارت ليلي أسطوانتين مضغوطتين زيادة عن أسطوانات DVD.

a. افترض أن b = عدد الكتب، و c = عدد الأسطوانات المضغوطة، و d = عدد أسطوانات DVD. اكتب نظامًا من ثلاث معادلات خطية لتمثيل المسألة.

b. جد حلاً لنظام المعادلات. فسر حلك.

جد AB و BA ، إن أمكن.

$$6. A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 5 & -1 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$$

$$7. A = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 4 \\ -2 & 3 & 5 \\ 6 & -3 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -8 \end{bmatrix}$$

8. **الهندسة** يمكن كتابة إحداثيات النقطة (x, y) في صورة

$$2 \times 1 \text{ مصفوفة } \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ افترض أن } A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

a. افترض أن P هي النقطة $(-3, 4)$. ناقش كيف يؤثر ضرب A في P على P .

b. مثلث يحتوي على الرؤوس $(0, 0)$ و $(2, 6)$ و $(8, 3)$. أنشئ مصفوفة 2×3 B لتمثيل المثلث. جد AB . ما التأثير الواقع على المثلث؟ هل يتفق مع إجابتك عن الجزء a؟

جد A^{-1} ، في حالة وجودها. وإن لم تكن A^{-1} موجودة، فاكتب منفردة.

$$9. A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$10. A = \begin{bmatrix} -3 & -5 \\ -6 & 8 \end{bmatrix}$$

استخدم المصفوفة العكسية لحل كل نظام معادلات، إن أمكن.

$$11. \begin{cases} 2x - 3y = -7 \\ 5x + 2y = 11 \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} 2x + 2y + 5z = -6 \\ 2x - 3y + 7z = -7 \\ x - 5y + 9z = 4 \end{cases}$$

الربط مع حساب التفاضل والتكامل المتقدم معدل التغير عند نقطة

التركيز:

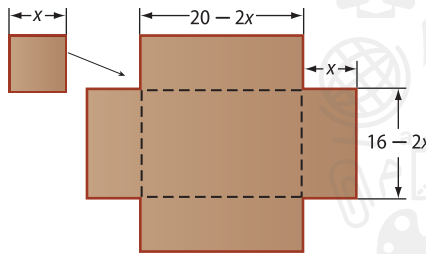
- تقريب حلول مسائل الأمثلية غير الخطية.

لقد تعلّمت كيفية حل مسائل الأمثلية باستخدام البرمجة الخطية. فقد كان يتم تمثيل دالة الهدف ونظام القيود باستخدام دوال خطية. غير أنه، لسوء الحظ، لا يمكن تعريف جميع المواقف التي تتطلب أمثلية بالدوال الخطية.

إن مسائل الأمثلية المتقدمة المشتملة على دوال تربيعية وتكعيبية ودوال غير خطية أخرى تتطلب حساب التفاضل والتكامل لإيجاد الحلول الدقيقة. ومع ذلك، يمكننا إيجاد تقريبات جيدة باستخدام الحاسبات البيانية.

نشاط 1 الحجم الأقصى (أكبر حجم ممكن)

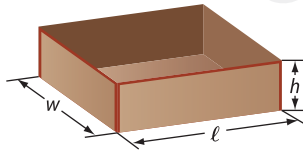
تم استخدام قطعة ورق مقوى مقاسها $20 \text{ cm} \times 16 \text{ cm}$ لصنع صندوق ليس له غطاءً عن طريق قطع المربعات المتطابقة من كل ركن وثني الأضلاع لأعلى. ما أبعاد الصندوق مع اعتبار أكبر حجم ممكن؟ ما الحجم الأقصى؟



الخطوة 1 أعد رسم رسماً تخطيطياً لهذه الحالة.

الخطوة 2 افترض أن x يمثل طول ضلع أحد المربعات المطلوب إزالتها. اكتب تعابير لطول الصندوق وعرضه وارتفاعه بدلالة x .

الخطوة 3 جد معادلة لحجم الصندوق V بدلالة x باستخدام الأبعاد التي حصلت عليها في الخطوة 2.



الخطوة 3 استخدم الحاسبة لتمثيل المعادلة التي حصلت عليها في الخطوة 3 بيانياً.

تحليل النتائج

- صف مجال x . اشرح استنتاجك.
- استخدم الحاسبة لإيجاد إحداثيات النقطة العظمى على التمثيل البياني. فسّر دلالة هذه الإحداثيات.
- ما أبعاد الصندوق مع اعتبار أكبر حجم ممكن؟ ما الحجم الأقصى؟

يختلف الناتج المطلوب والتعقيد حسب مسألة الأمثلية نفسها. ويمكنك استخدام الخطوات التالية لتحليل كل مسألة وإيجاد حل لها.

المفهوم الأساسي الأمثلية

لحل مسائل الأمثلية، راجع هذه الخطوات.

الخطوة 1 أعد رسماً تخطيطياً للحالة مع تسمية جميع الكميات المعروفة وغير المعروفة.

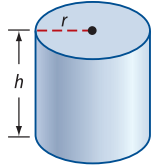
الخطوة 2 حدد الكمية المطلوب اعتبار أقصى أو أدنى حد لها. اختر القيم الضرورية لإيجاد الكمية المطلوبة، ومثل كل قيمة بعدد أو متغير أو تعبير.

الخطوة 3 اكتب معادلة للكمية المطلوب إيجاد حلها الأمثل بدلالة متغير واحد.

الخطوة 4 مثل المعادلة بيانياً مع إيجاد إما القيمة العظمى أو الصغرى. حدد المجال المسموح به للمتغير.

نشاط 2 مساحة السطح الصغرى

عبوة نموذجية تبلغ تقريبًا 2.5 cm عرضًا و 4.75 cm طولًا وتتسع حجمًا يساوي 23.32 cm^3 تقريبًا. ماذا ستكون أبعاد عبوة أخرى إذا ظل الحجم ثابتًا ولكن تم تقليل كمية المادة المستخدمة في صناعة العبوة إلى الحد الأدنى؟



الحجم = 23.32 cm^3

الخطوة 1 أعد رسمًا تخطيطيًا لهذه الحالة.

الخطوة 2 الكمية المطلوب تقليلها إلى الحد الأدنى هي مساحة السطح.

قيمتنا نصف قطر العبوة وارتفاعها مطلوبتان. جد تعبيرًا لارتفاع h الخاص بالعبوة بدلالة نصف القطر r باستخدام الحجم المُعطى.

الخطوة 3 استخدم التعبير الذي حصلت عليه في الخطوة 2 في كتابة معادلة لمساحة السطح SA .

الخطوة 4 استخدم الحاسبة لتمثيل المعادلة التي حصلت عليها في الخطوة 3 بيانيًا. اذكر مجال r .

تحليل النتائج

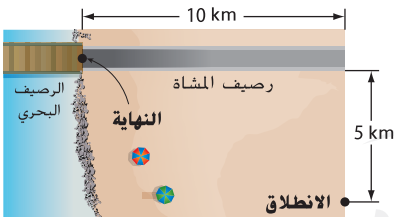
4. جد إحداثيات النقطة الصغرى. فسر دلالة هذه الإحداثيات.

5. ما أبعاد مساحة سطح العبوة مع اعتبار أقل مساحة سطح ممكنة؟

6. من المقرر إنشاء أسطوانة قائمة ليس لها قيمة بمساحة سطح تبلغ 6π سنتيمتر مربعة. ما الارتفاع ونصف القطر اللذان سيزيدان حجم الأسطوانة إلى الحد الأقصى؟ ما الحجم الأقصى؟

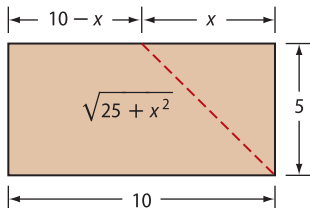
تقليل المواد إلى الحد الأدنى ليس التطبيق الوحيد للأمثلية.

نشاط 3 المسار الأسرع



مشاركون في سباق على الأقدام يركضون على الشاطئ أو على رصيف المشاة وصولاً إلى الرصيف البحري كما هو موضح. ويمكن أن يسلك المتسابقون أي مسار يختارونه. فإذا كان المتسابق يستطيع أن يركض 6 km/h على الرمال و 7.5 km/h على رصيف المشاة، فما المسار الذي يتطلب أقصر مدة زمنية؟

الخطوة 1 أعد رسمًا تخطيطيًا لهذه الحالة.



الخطوة 2 لتقليل المدة الزمنية إلى الحد الأدنى، اكتب تعابير للمسافات

المقطوعة على كل سطح بكل معدل. افترض أن x يمثل

المسافة التي لم يركضها العداء على رصيف المشاة كما هو

موضح. جد تعابير للمسافات المقطوعة على كل سطح

بدلالة x .

الخطوة 3 استخدم التعابير التي حصلت عليها في الخطوة 2 في كتابة معادلة للمدة الزمنية.

الخطوة 4 استخدم الحاسبة لتمثيل المعادلة التي حصلت عليها في الخطوة 3 بيانيًا. اذكر مجال x .

تحليل النتائج

7. جد إحداثيات النقطة الصغرى. فسر دلالة هذه الإحداثيات.

8. ما المسار الذي سوف يتطلب أقصر مدة زمنية؟ ما طول المدة التي سوف يستغرقها؟

9. جد متوسط معدل التغير m عند النقطة الصغرى للتمثيل البياني باستخدام ناتج قسمة الفرق. ما الذي تشير إليه هذه القيمة فيما يتعلق بخط مماس التمثيل البياني عند هذه النقطة؟

10. ضع فرضية بشأن معدلات التغير وخطوط المماس للتمثيلات البيانية عند النقاط الصغرى والعظمى. هل تنطبق فرضيتك على أول نشاطين؟ اشرح.