الوحدة السادسة

تطبيقات التكامل المحدود

رياضيات

الصف 12 متقدم

الفصل الثالث 2024

إعداد / عمرو البيومي

الوحدة السادسة

تطبيقات التكامل المحدود

1. المساحة بين منحنيين
2. الحجم : شرائح وحلقات واقراص
3. الأحجام بالاصداف الاسطوانية
4. طول القوس ومساحة السطح
5. حركة المقزوفات
6. تطبيقات التكامل علي الفيزياء والهندسة
7. الإحتمال

الوحدة السابعة

طرائق التكامل والمعادلات التفاضلية

1. مراجعة الصيغ وطرائق التكامل
2. التكامل بالاجزاء
3. طرائق تكامل الدوال المثلثية
4. تكامل الدوال النسبية بالكسور الجزيئية
5. جداول التكامل وأنظمة الحاسوب الجبرية
6. نمذجة المعادلات التفاضلية
7. المعادلات التفاضلية القابلة للفصل

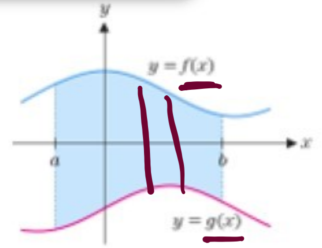
الوحدة السادسة

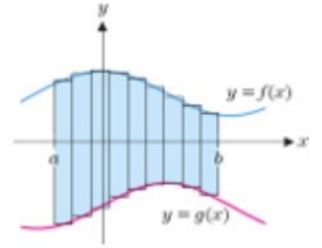
تطبيقات التكامل المحدود

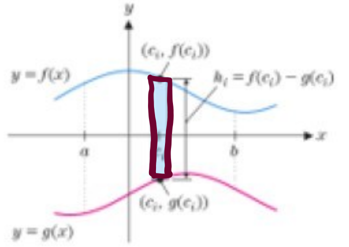
المساحة المحصورة بين منحنين

المساحة بين منحنيين

فوق ـ تحت | **يمين ـ يسار**







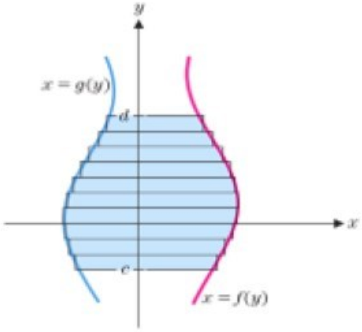
$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} [f(c_i) - g(c_i)]\,\Delta x = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$$

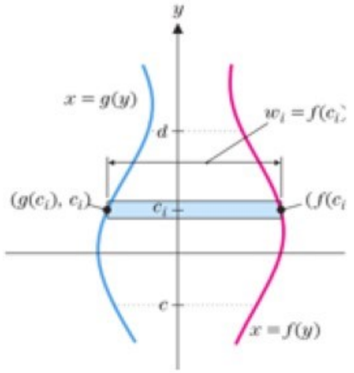
فوق ـ تحت

الدوال $y = f(x) \quad , \quad y = g(x)$

حدود التكامل رأسية من محور x: من اليسار إلى اليمين

$x = a \quad , \quad x = b$





$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} [f(c_i) - g(c_i)]\,\Delta y = \int_c^d [f(y) - g(y)]\,dy.$$

يمين ـ يسار

$x = f(y) \quad , \quad x = g(y)$

أفقية من محور y: من أسفل إلى أعلى

$y = c \quad , \quad y = d$

ت -0544560575

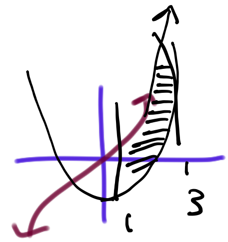
عمرو البيومي

النوع الأول التكامل بالنسبة ل x أي فوق – تحت

جد المساحة المحصورة بين المنحنيين علي الفترة المعطاه

1. $y = x^3, y = x^2 - 1, 1 \le x \le 3$

$$A = \int_1^3 [x^3 - (x^2 - 1)]\, dx = \frac{40}{3}$$



2. $y = \cos x, y = x^2 + 2, 0 \le x \le 2$

$$A = \int_0^2 [x^2 + 2 - \cos x]\, dx = 5.75$$

3. $y = e^x, y = x - 1, -2 \le x \le 0$

$$A = \int_{-2}^0 [e^x - (x - 1)]\, dx = 4.86$$

ارسم وجـد مساحة المنطقة التي تحددها تقاطعات المنحنيات

$$y = x^2 - 1, \quad y = 7 - x^2$$

$x^2 - 1 = 7 - x^2$

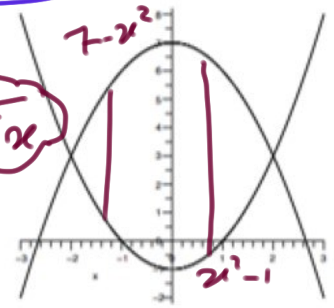
$x = 2$

$x = -2$

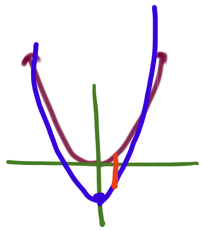
2022

$$A = \int_{-2}^{2} \left[(7 - x^2) - (x^2 - 1)\right] dx$$

$$= \frac{64}{3}$$



$$y = x^2 - 1, \quad y = \frac{1}{2}x^2$$



$$A = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left[\frac{1}{2}x^2 - (x^2 - 1)\right] dx$$

$$= 1.885$$

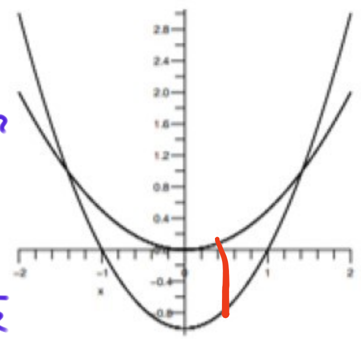
$x^2 - 1 = \frac{1}{2}x^2$

$\frac{1}{2}x^2 = 1$

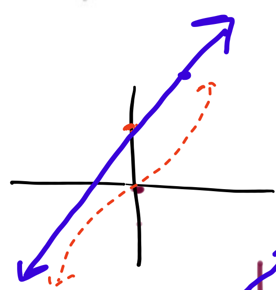
$x^2 = 2$

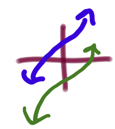
$x = \pm\sqrt{2}$

$= \pm 1.41$



$$y = x^3, \quad y = 3x + 2$$





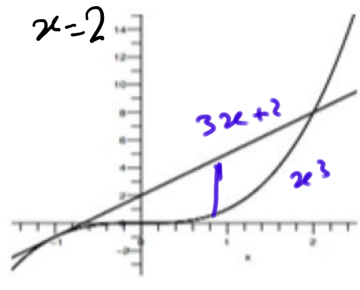
$$A = \int_{-1}^{2} \left[(3x + 2) - x^3\right] dx$$

$$= \frac{27}{4}$$

$x^3 = 3x + 2$

$x^3 - 3x + 2 = 0$

$x = -1 \quad x = 2$



الفصل الثالث

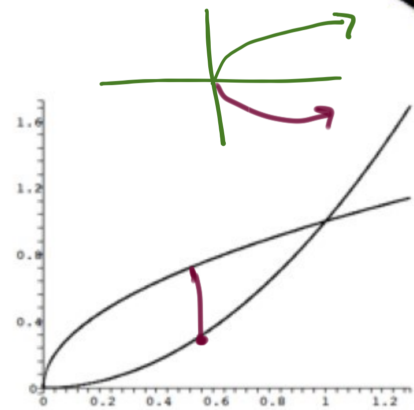
تطبيقات التكامل المحدود

الوحدة السادسة

$$y = \sqrt{x}, y = x^2$$

$$A = \int_0^1 [\sqrt{x} - x^2] dx$$

$$= \frac{1}{3} = 0.333...$$



$$(x^2)^2 = (\sqrt{x})^2$$
$$x^4 = x$$
$$x^4 - x = 0$$
$$x(x^3 - 1) = 0$$
$$x = 0 \quad x^3 - 1 = 0$$
$$x = 1$$

$$y = 4xe^{-x^2}, y = |x|$$

$$4x e^{-x^2} = x \quad | \quad 4x e^{-x^2} = -x$$

$$4x e^{-x^2} - x = 0$$

$$x(4e^{-x^2} - 1) = 0$$

$$x = 0 \qquad x = -1.17 \; ✗$$

$$x = 1.17$$

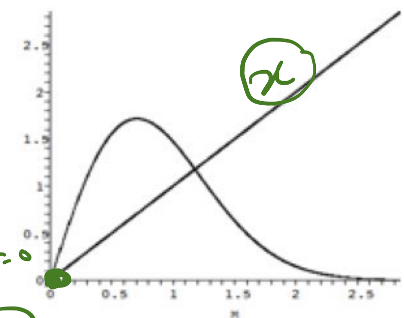
math

✗

$$4x e^{-x^2} + x = 0$$

$$x(4e^{-x^2} + 1) = 0$$

$$x = \; ✗$$

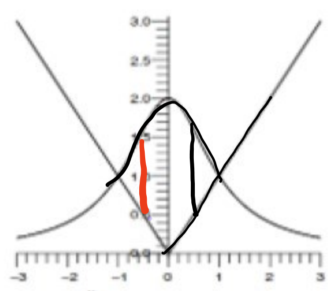


$$A = \int_0^{1.17} [4xe^{-x^2} - x] d$$

$$y = \frac{2}{x^2+1}, y = |x|$$

$$\frac{2}{x^2+1} = x \qquad \frac{2}{x^2+1} = -x$$

$$x = +1 \qquad x = -1$$



$$A = \int_{-1}^{0} \left[\frac{2}{x^2+1} - (-x)\right] dx + \int_0^1 \left[\frac{2}{x^2+1} - x\right] dx$$

$$= 2.14$$

الفصل الثالث

الوحدة السادسة

تطبيقات التكامل المحدود

النوع الثاني التكامل بالنسبة لـ y أي يمين – يسار

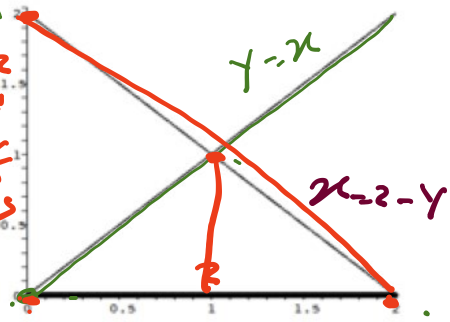
ارسم وجـد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيات بحيث تتم كتابة المساحة كتكامل واحد.

$y = x, y = 2 - x, y = 0$

$x = y$ $\quad y + x = 2$ $\quad x = 2 - y$

$x = 0 \quad y = 0$
$x = 1 \quad y = 1$
$x = 0 \quad y = 2$
$x = 1 \quad y = 1$

تقاطع y



$$A = \int_0^1 [2 - y - y]\, dy = 1$$

$A = \frac{1}{2} b h \qquad \frac{1}{2} \times 1 \times 2 = 1$

$y = 2 - y$

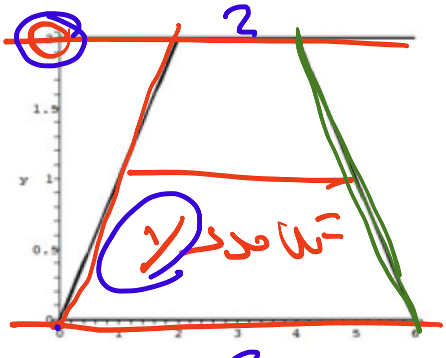
$2y = 2 \qquad y = 1$

$y = x, y = 2, y = 6 - x, y = 0$

$x = 0 \quad y = 0$
$x = 1 \quad y = 5$

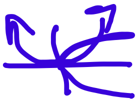
$$A = \int_0^2 [6 - y - y]\, dy$$

$= 8$

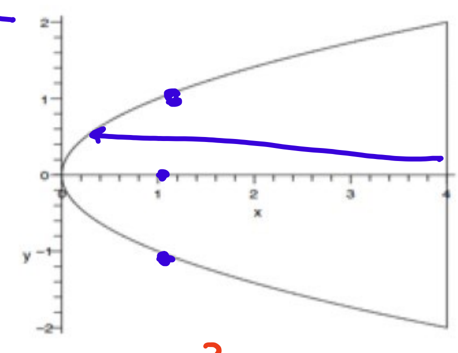


$\frac{1}{2}(6 + 2) \times 2 = 8$

$x = y^2, x = 4$



$y = 4$
$y = -1$



$$A = \int_{-2}^{2} [4 - y^2]\, dy$$

$= 10.6 = \boxed{\frac{32}{3}}$

$y^2 = 4$

$y = \pm 2$

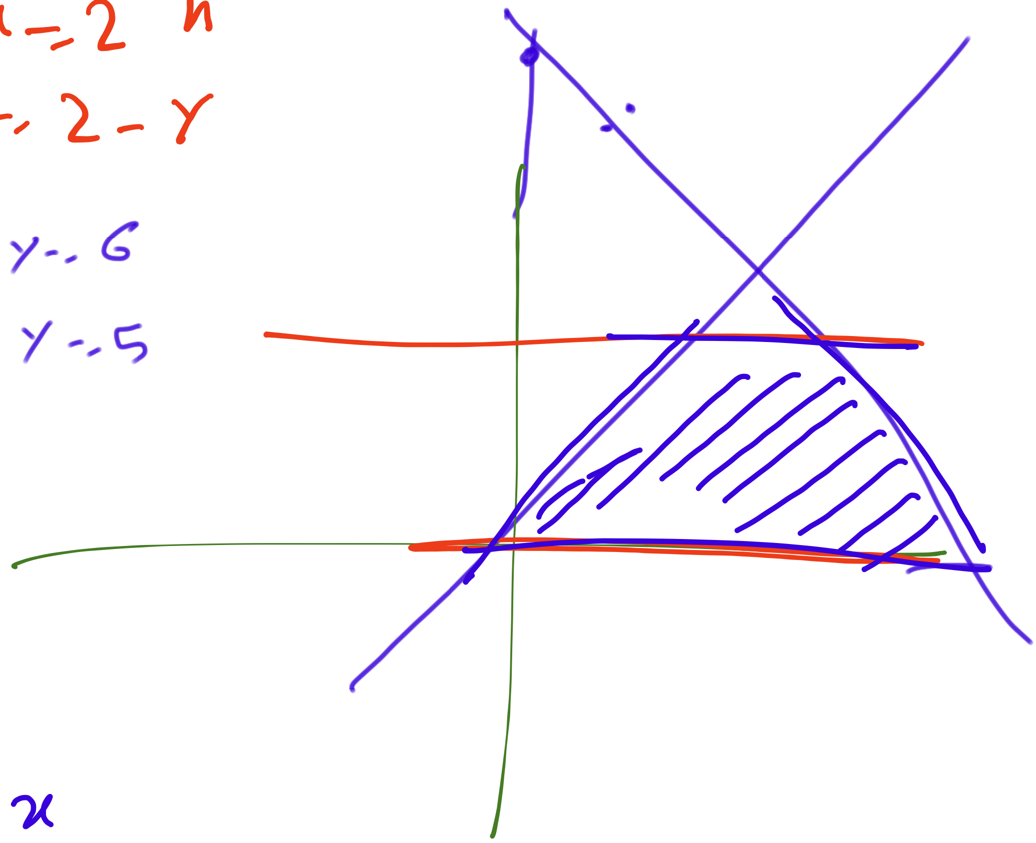
$y = 2 - x$

$y + x = 2$

$x = 2 - y$

$x = 0 \quad y = 6$

$x = 1 \quad y = 5$



$y = 6 - x$

$x = 6 - y$

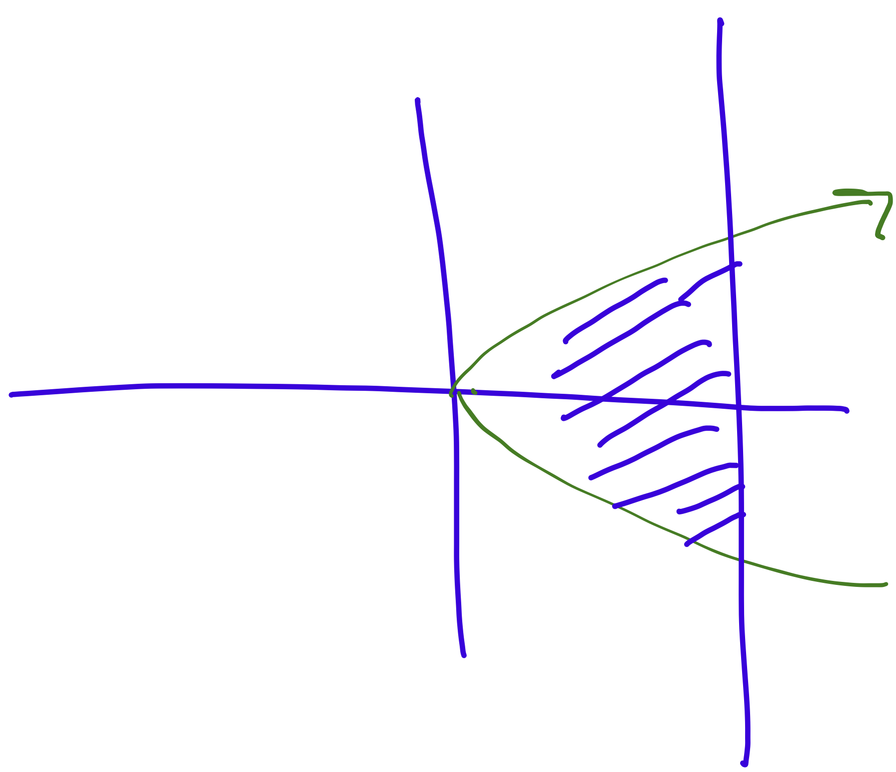
$x = y$

$\int_0^3$

$6 - y = y$

$2y = 6$

$y = 3$



$$x = 3y, x = 2 + y^2$$

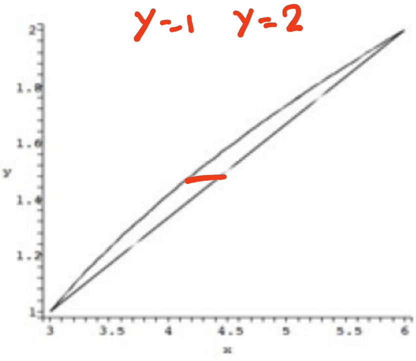
$3y = 2 + y^2$

$y^2 - 3y + 2 = 0$

$y = 1 \quad y = 2$

$$A = \int_1^2 \left[3y - (2 + y^2)\right] dy$$

$$= \frac{1}{6}$$



$$y = 2x\ (x \geq 0),\ y = 3 - x^2,\ x = 0$$

$2x = 3 - x^2$

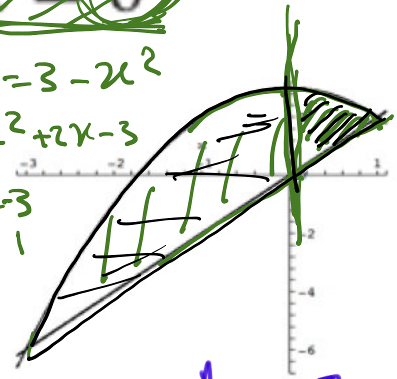
$x^2 + 2x - 3$

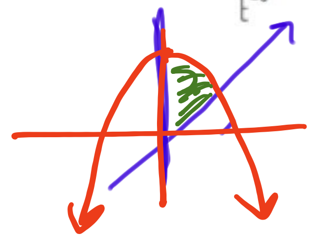
$x = -3$

$x = 1$

$$A = \int_0^1 \left[3 - x^2 - 2x\right] dx$$

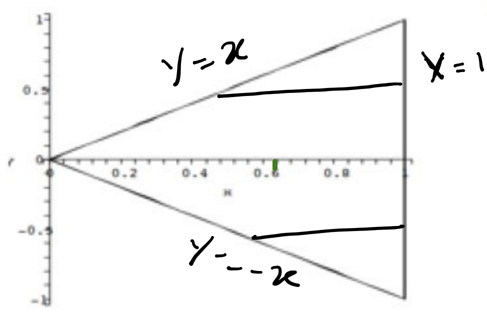
$$= \frac{5}{3}$$





$$x = y, x = -y, x = 1$$

$$\int_0^1 \underline{x} - (-\underline{x}) = 1$$



$$\int_0^1 (1 - y)\, dy + \int_{-1}^0 (1 + y)\, dy$$

$$= \boxed{1}$$

$$\frac{1}{2} \times 1 \times 2 = 1$$

قاعدة سيمبسون

1 4 2 4 2 4 2 1

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx S_n(f) = \frac{b-a}{3n}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \cdots + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)].$$

البداية ، النهاية

عند حدوث اصطدام بين كرة وجسم مصمم للضرب (مثل مضرب بيسبول أو مضرب تنس)، يتغيّر شكل الكرة. تنكمش أولًا ومن ثم تتمدّد. إذا كانت x تمثّل التغيير في قطر الكرة (على سبيل المثال، بالسنتيمتر) لكل $0 \le x \le m$ و $f(x)$ القوة بين الكرة والجسم المصمم للضرب (على سبيل المثال، بالنيوتن). إذًا تتناسب المساحة تحت المنحنى $y = f(x)$ مع الطاقة المنقولة. على فرض $f_c(x)$ هي القوة أثناء الإنكماش و $f_e(x)$ هي القوة أثناء التمدّد. اشرح سبب تناسب $\int_0^m [f_c(x) - f_e(x)]\,dx$ مع الطاقة المفقودة من الكرة (بسبب الاحتكاك) وبذلك تكون $\int_0^m [f_c(x) - f_e(x)]\,dx / \int_0^m f_c(x)\,dx$ هي نسبة الطاقة المفقودة أثناء الاصطدام. بالنسبة لكرة ومضرب بيسبول

x (cm)	0	0.25	0.50	0.75	1
$f_c(x)$ (N)	0	1100	2600	5200	7700
$f_e(x)$ (N)	0	44	440	1200	7700

استخدم قاعدة سيمبسون لتقدير نسبة الطاقة التي احتفظت بها كرة البيسبول.

$$\text{الطاقة المفقودة} = \frac{\int_0^m f_c(x)\,dx - \int_0^m f_e(x)\,dx}{\int_0^m f_c(x)\,dx}$$

$$\int_0^1 f_c(x)\,dx = \frac{1-0}{3(4)}\left(0 + 4(1100) + 2(2600) + 4(5200) + 7700\right)$$

$$= 3175$$

$$\int_0^1 f_e(x)\,dx = \frac{1-0}{3(4)}\left(0 + 4(44) + 2(440) + 4(1200) + 7700\right)$$

$$= 1129.6$$

$$\text{الطاقة المفقودة} = \frac{3175 - 1129.6}{3175} = 0.6442 \times 100$$

$$64\%$$

$$\text{الطاقة المحفوظة} = 1 - 0.6442$$

$$= 0.3557 \times 100$$

$$= 36\%$$

x (cm)	0	1.125	2.250	3.375	4.5
$f_c(x)$ (N)	0	880	2200	4400	7900
$f_e(x)$ (N)	0	550	1540	3000	7900

باستخدام المفهوم نفسه تُعطى القيم للقوة $f_c(x)$ أثناء إنكماش كرة الجولف والقوة $f_e(x)$ أثناء تمدّدها من العلاقة

استخدم قاعدة سمبسون لتقدير نسبة الطاقة التي احتفظت بها كرة الجولف.

$$\int_0^{4.5} f_c(x) = \frac{4.5-0}{3(4)}\left(0+4(880)+2(2200)+4(4400)+7900\right)$$

$$= 12532.5$$

$$\int_0^{4.5} f_e(x) = \frac{4.5-0}{3(4)}\left(0+4(550)+2(1540)+4(3000)+7900\right)$$

$$= 4442.5$$

الطاقة المفقودة $= \dfrac{12532.5-4442.5}{12532.5} = 0.2465$

الطاقة المحفوظة $= 1-0.2465$

$= 0.7534$

$= 75\,\%$

3. $y = e^x, y = x - 1, -2 \le x \le 0$

A) $5 - e^2$	B) $5 - e^{-2}$	C) $5 - e^4$	D) $5 - e^6$

4. $y = e^{-x}, y = x^2, 1 \le x \le 4$

A) $\frac{340}{3}$	B) $\frac{68}{3}$	C) $\frac{64}{3}$	D) $\frac{80}{3}$

جـد المساحة المحصورة بين المنحنيين

1. $y = x^3, y = x^2 - 1, 1 \leq x \leq 3$

A) $\frac{20}{3}$	B) $\frac{10}{3}$	C) $\frac{40}{3}$	D) $\frac{80}{3}$

2. $y = \cos x, y = x^2 + 2, 0 \leq x \leq 2$

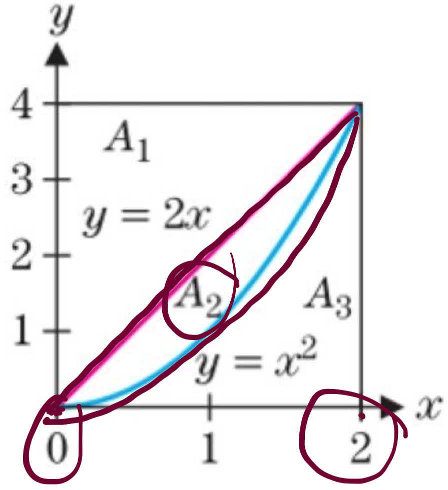
A) $\frac{20}{3} - \sin 2$	B) $\frac{10}{3} - \sin 4$	C) $\frac{40}{3} - \sin 6$	D) $\frac{80}{3} - \sin 10$

25. $y = e^{x}, y = 4e^{-x}, x = 0$

39. بدلالة A_1، A_2 و A_3. حدّد المساحة المُعطاة بكل تكامل.

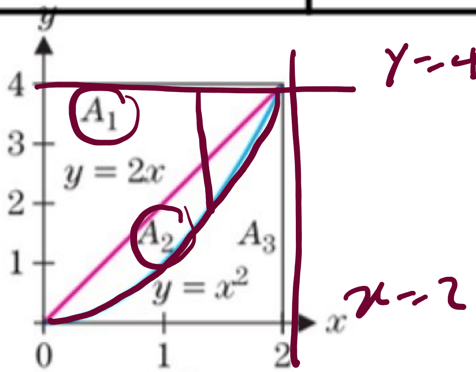
(a) $\int_0^2 (2x - x^2)\, dx$

A) A1	B) A2	C) A3	D) A3-A2



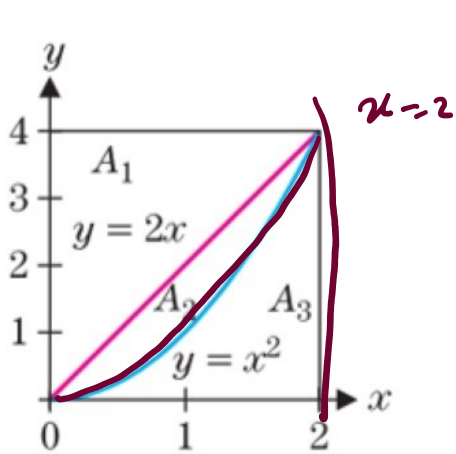
(b) $\int_0^2 (4 - x^2)\,dx$

A) A1	B) A2	C) A3	D) A3-A2



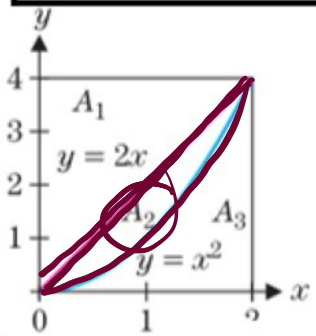
(c) $\int_0^4 (2 - \sqrt{y})\,dy$

A) A1	B) A2	C) A3	D) A3-A2



(d) $\int_0^4 (\sqrt{y} - \frac{y}{2})\, dy$

A)	B)	C)	D)
A1	A2	A3	A3-A2



$y = 2x$

$x = \frac{y}{2}$

$y = x^2$

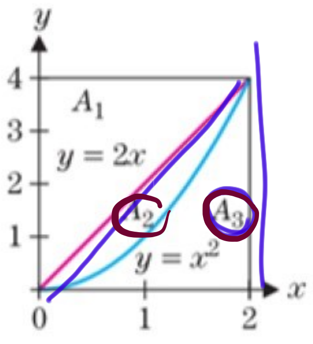
$x = \sqrt{y}$

أعط تكاملًا مساويًا لكل مساحة.

(a) $A_2 + A_3$

صح

A)	B)	C)	D)
$\int_0^4 \left(2 - \frac{y}{2}\right) dy.$ ✓	$\int_0^2 (4 - 2x)\, dx$	$\int_0^4 (2 - \sqrt{y})\, dy$	$\int_0^2 (4 - x^2)\, dx$



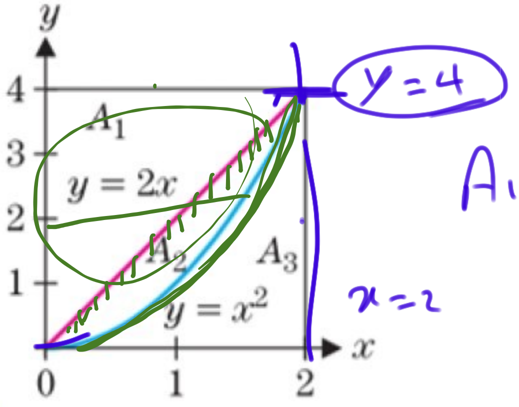
$A_2 = \int_0^2 2x - x^2\, dx$

$A_3 = \int_0^2 x^2\, dx$

$\int_0^4 (2 - \frac{y}{2})\, dy$

(b) $A_1 + A_2$

A)	B)	C)	D)
$\int_0^4 \left(2 - \frac{y}{2}\right) dy.$	$\int_0^2 (4 - 2x)\, dx$	$\int_0^4 (2 - \sqrt{y})\, dy$	$\int_0^2 (4 - x^2)\, dx$



$x = y^2$

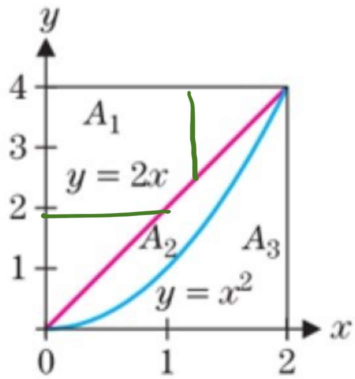
$x = \sqrt{y}$

$A_1 + A_2 = \int_0^2 (4 - x^2)\, dx$

$\int_0^4 \sqrt{y}\, dy$

(c) A_1

A)	B)	C)	D)
$\int_0^4 \left(2 - \frac{y}{2}\right) dy.$	$\int_0^2 (4 - 2x)\, dx$	$\int_0^4 (2 - \sqrt{y})\, dy$	$\int_0^2 (4 - x^2)\, dx$

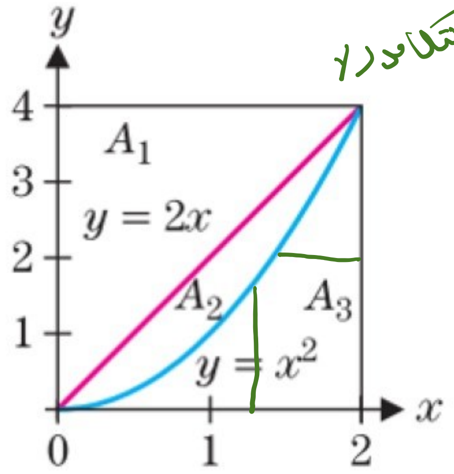


$A_1 = \int_0^2 (4 - 2x)\, dx$

$A_1 = \int_0^4 \frac{y}{2}\, dy$

(d) A_3

A) $\int_0^4 \left(2-\frac{y}{2}\right) dy.$	**B)** $\int_0^2 (4-2x)\,dx$	**C)** $\int_0^4 (2-\sqrt{y})\,dy$	**D)** $\int_0^2 (4-x^2)\,dx$



تكامل dy

$A_3 = \int_0^4 (2 - \sqrt{x})\,dy$