

صف 11 علمي
الوحدة 5
الدوال الأسية
واللوغاريتمية



نسخة غير محلولة

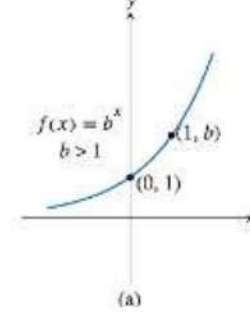
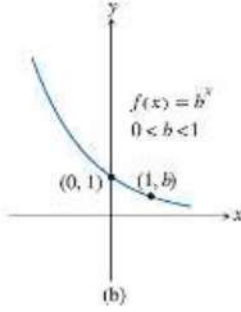


(5.1) الدوال الأسية

$$f(x) = a \times b^x$$

تعريف الدالة الأسية

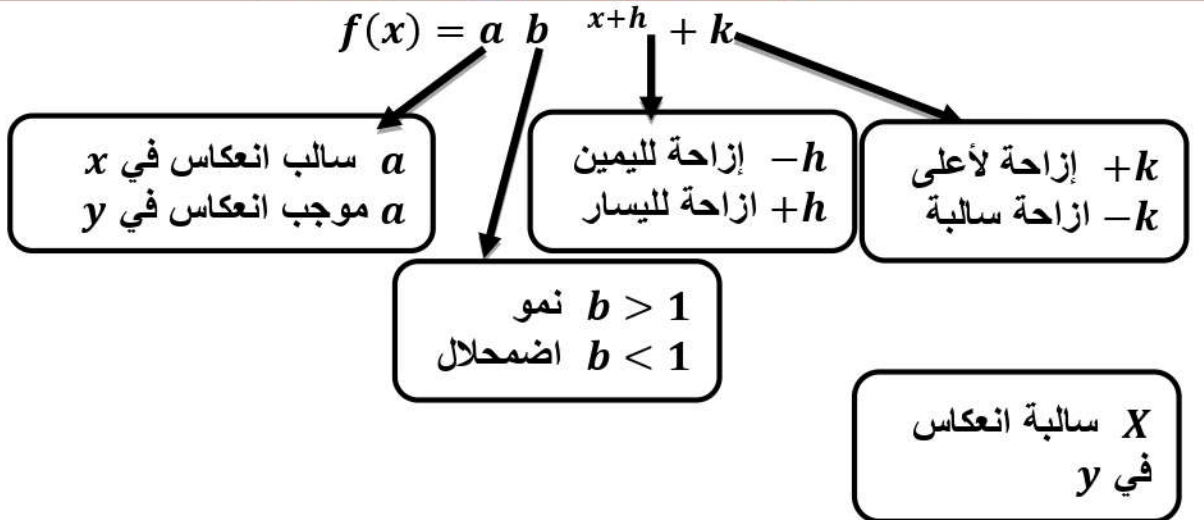
الدوال الأسية $f(x) = b^x$



- المجال: $]-\infty, \infty[$
- المدى: $]0, \infty[$
- متصلة على مجالها
- لا يوجد تناظر: الدالة ليست دالة زوجية ولا فردية
- ليس لها قيم قصوى
- معادلة خط التقارب الأفقي: $y = 0$
- ليس لها خط تقارب رأسي
- دالة متناقصة
- $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$

- المجال: $]-\infty, \infty[$
- المدى: $]0, \infty[$
- متصلة على مجالها
- لا يوجد تناظر: الدالة ليست دالة زوجية ولا فردية
- ليس لها قيم قصوى
- معادلة خط التقارب الأفقي: $y = 0$
- ليس لها خط تقارب رأسي
- f دالة متزايدة
- $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

تحويلات التمثيلات البيانية للدوال الأسية



النمو الأسي والاضمحلال الأسي

نموذج الاضمحلال الأسي	نموذج النمو الأسي
$A(t) = a(1 - r)^t$	$A(t) = a(1 + r)^t$
$a > 0, 0 < b < 1, b = 1 - r$	$a > 0, b > 1, b = 1 + r$

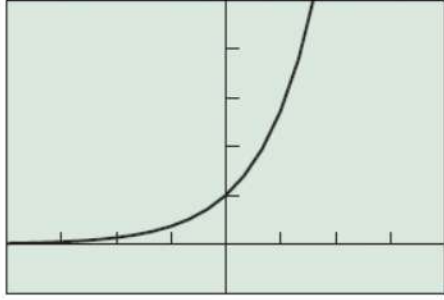
صيغة الفائدة المركبة

<p>المبلغ الأصلي = p</p> <p>نسبة الفائدة السنوية في الصورة العشرية = r</p> <p>عدد فترات استحقاق الفائدة المركبة في السنة = n</p> <p>جملة المبلغ = A</p> <p>الزمن بالسنوات = t</p>	<p>صيغة الفائدة المركبة هي نموذج أسي، وتكتب كما يلي:</p> $A = p \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$
--	--

الفائدة المركبة المتواصلة (المتصلة)

<p>المبلغ الأصلي = p</p> <p>الأساس الطبيعي = e</p> <p>نسبة الفائدة السنوية في الصورة العشرية = r</p> <p>جملة المبلغ = A</p> <p>الزمن بالسنوات = t</p>	$A = p e^{rt}$
--	----------------

الدوال الأسية الطبيعية $f(x) = e^x$

<ul style="list-style-type: none"> المجال: $]-\infty, \infty[$ المدى: $]0, \infty[$ متصلة على مجالها متزايدة لكل قيم x لا يوجد تناظر لأنها ليست دالة فردية ولا زوجية ليس لها قيم قصوى محلية معادلة خط التقارب الأفقي: $y = 0$ ليس لها خط تقارب رأسي السلوك الطرفي: $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ 	
---	---

الدوال الأسية الطبيعية

إذا كانت الدالة

$$f(x) = a \times e^{kx}$$

السؤال رقم (1)

• اختر الإجابة الصحيحة: - أي مما يلي دالة أسية؟

$f(x) = x^3$	<input type="checkbox"/> C	$f(x) = a^2$	<input type="checkbox"/> A
$f(x) = 8^x$	<input type="checkbox"/> D	$f(x) = x^{\frac{2}{3}}$	<input type="checkbox"/> B

السؤال رقم (2)

• اختر الإجابة الصحيحة: - أي النقاط مشتركة بين كل الدوال التي صيغتها $f(x) = b^x$ ، $(b > 0)$ ؟

(0, 1)	<input type="checkbox"/> C	(1, 1)	<input type="checkbox"/> A
(0, 0)	<input type="checkbox"/> D	(1, 0)	<input type="checkbox"/> B

السؤال رقم (3)

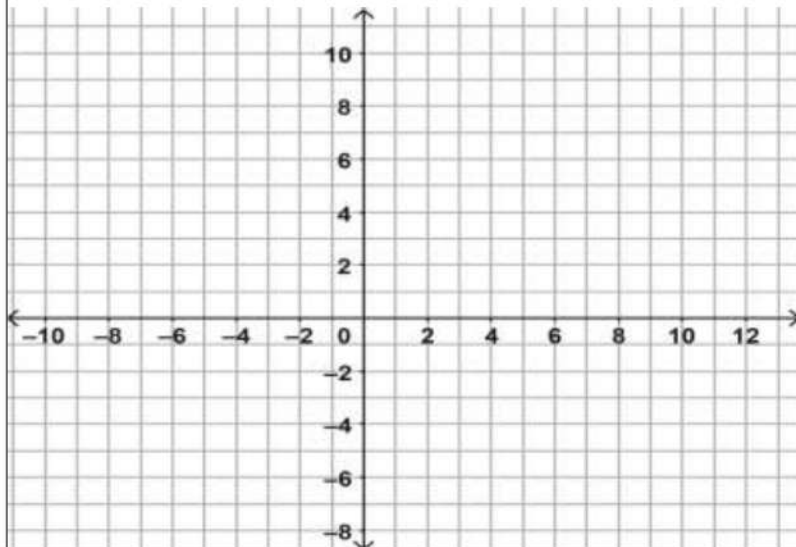
• اختر الإجابة الصحيحة: - معامل النمو للدالة $f(x) = 4 \times 3^x$ هو:

12	<input type="checkbox"/> C	3	<input type="checkbox"/> A
64	<input type="checkbox"/> D	4	<input type="checkbox"/> B

السؤال رقم (4)

• مثل الدالة $f(x) = 4 \times (0.5)^x$ بيانيًا، ثم حدد الخصائص الأساسية لهذه الدالة (المجال، المدى، المقاطع x و y ، وخطوط التقارب، والسلوك الطرفي وفترات التزايد والتناقص).

x	-1	0	1	2
y				



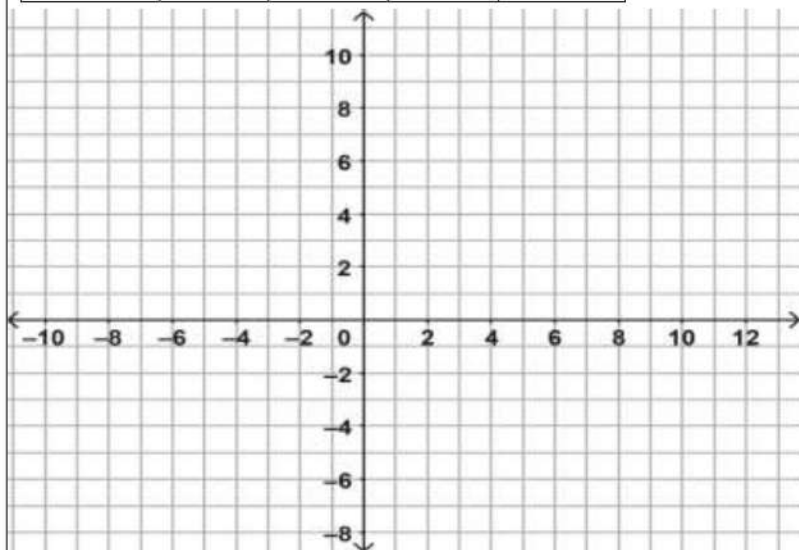
	المجال
	المدى
	مقطع x
	مقطع y
	خطوط التقارب
	فترات التزايد
	فترات التناقص

السؤال رقم (5)

• مثل الدالة $f(x) = 3 \times 3^x$ بيانياً، ثم حدد الخصائص الأساسية للدوال الأسية (المجال، المدى،

والمقاطع x و y ، وخطوط التقارب، وسلوك الدالة الطرفي، وفترات التزايد والتناقص).

x	-2	-1	0	1
y				



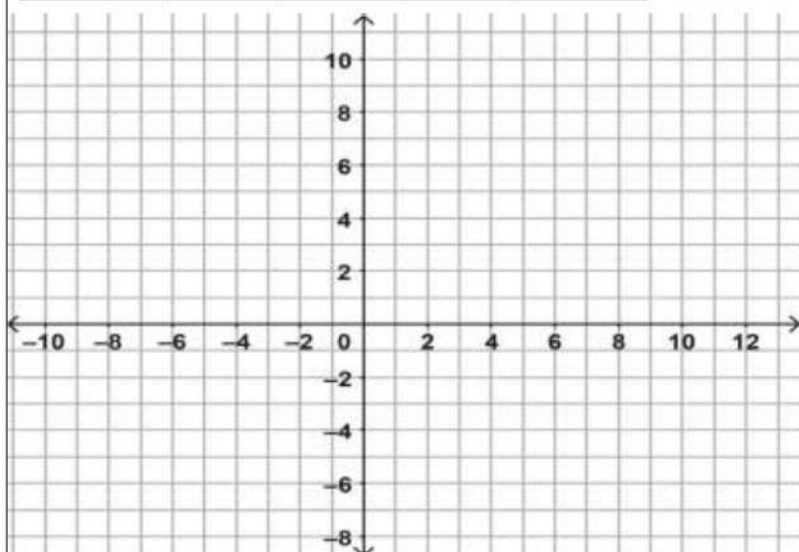
	المجال
	المدى
	مقطع x
	مقطع y
	خطوط التقارب
	فترات التزايد
	فترات التناقص

السؤال رقم (6)

• مثل الدالة $f(x) = (2)^x$ بيانياً، ثم حدد الخصائص الأساسية للدوال الأسية (المجال، المدى،

والمقاطع x و y ، وخطوط التقارب، وسلوك الدالة الطرفي، وفترات التزايد والتناقص).

x	-1	0	1	2
y				



	المجال
	المدى
	مقطع x
	مقطع y
	خطوط التقارب
	فترات التزايد
	فترات التناقص

السؤال رقم (7)

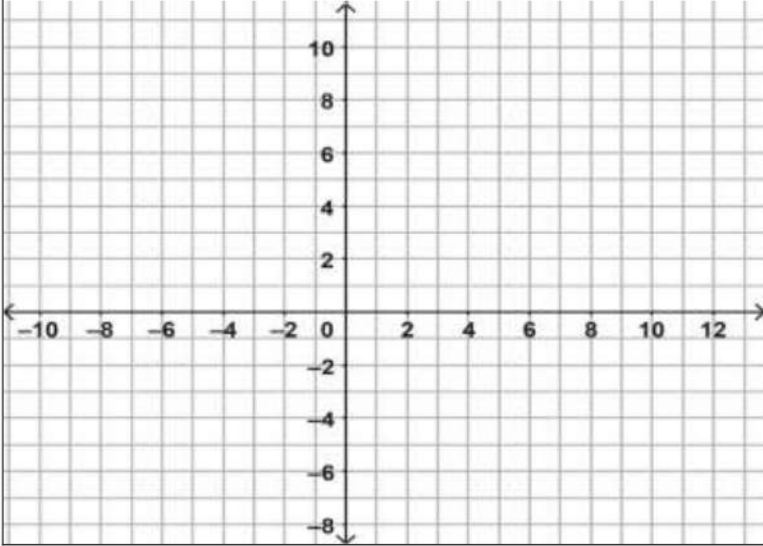
بيانياً، ثم حدد الخصائص الأساسية للدوال الأسية (المجال، والمدى،

$$f(x) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^x$$

• مثل الدالة

x	-1	0	1	2
y				

والمقاطع x و y ، وخطوط التقارب، وسلوك الدالة الطرفي، وفترات التزايد والتناقص).



	المجال
	المدى
	مقطع x
	مقطع y
	خطوط التقارب
	فترات التزايد
	فترات التناقص

السؤال رقم (8)

• صف عملية تحويل التمثيل البياني للدالة f إلى التمثيل البياني للدالة g

• $f(x) = 2^x, g(x) = 2^{x-3}$

• $f(x) = 3^x, g(x) = 3^{x+4}$

• $f(x) = 4^x, g(x) = 4^{-x}$

• $f(x) = 2^x, g(x) = 2^{5-x}$

• $f(x) = 0.5^x, g(x) = 3 \times 0.5^x + 4$

• $f(x) = e^x, g(x) = e^{-2x}$

• $f(x) = e^x, g(x) = -e^{-3x}$

• $f(x) = e^x, g(x) = 2e^{3-3x}$

السؤال رقم (9)

• تم إطلاق 220 صقرًا في منطقة ما في الثاني من يناير 2016. تتمذج الدالة $f(x) = 220(1.05)^x$ عدد الصقور في هذه المنطقة، لمدة x سنوات بعد 2016.
(a) هل تتزايد أعداد الصقور أم تتناقص؟

(b) في أي سنة سيصل عدد الصقور إلى 280 صقرًا.

السؤال رقم (10)

- قدر مئمن قيمة قطعة أرض على فترة عدة سنوات منذ سنة 1950، كانت قيمة قطعة الأرض QR 31 00 سنة 1954، و QR 35 000 سنة 1955. استعمل البيانات لتكتب نموذجًا أسياً يصف قيمة قطعة الأرض.

السؤال رقم (11)

- اكتب نموذجًا أسياً باستعمال النقاط المعطاة.

(8, 25) و (7, 12)

(4, 70) و (3, 55)

السؤال رقم (12)

- اكتب نموذجًا أسياً لكل زوج من النقاط الآتية.

(7, 92) و (6, 85)

(10, 250) و (9, 140)

السؤال رقم (13)

أوجد جملة المبلغ، إذا عُلِمَ المبلغ الأصلي P ، نسبة الفائدة r ، الزمن t ، وفترة التراكم المعطاة.

$t = 25$ سنة، $r = 4\%$ ، $p = QR 16 000$
فائدة مركبة متصلة.

$t = 5$ سنوات، $r = 2.8\%$ ، $p = QR 1 000$
فائدة مركبة متصلة.

السؤال رقم (14)

• يريد جاسم استثمار مبلغ $QR 3 000$ في حساب مصرفي بفائدة سنوية مركبة معدلها 3% ، تستحق شهرياً.

ما قيمة رصيد جاسم بعد 100 سنة؟

ما قيمة رصيد جاسم بعد 10 سنوات؟

السؤال رقم (15)

• تعرف دانة أن أعداد الرسائل الإلكترونية التي ترسلها تزداد بشكل أسي، وقد سجلت الرسائل الإلكترونية التي أرسلتها سنوياً ابتداءً من عام 2009، أوجد النموذج الأسي الذي يصف البيانات.



السؤال رقم (3)

- تريد ثريا استثمار مبلغ $QR\ 5\ 000$ في حساب مصرفي بفائدة سنوية معدلها 4% ، كم سيصبح رصيد ثريا في حسابها المصرفي بعد 3 سنوات إذا كانت الفائدة مركبة سنوية، أو نصف سنوية، أو ربع سنوية، أو شهرية؟

الرصيد بعد 3 سنوات (QR)	صيغة الفائدة المركبة	
	سنوية	
	نصف سنوية	
	ربع سنوية	
	شهرية	

(5.2) اللوغاريتمات

$b^y = x$ ، $\log_b x = y$	لوغاريتم x ذو الأساس b
----------------------------	---

الخصائص الأساسية للوغاريتمات	
• $\log 1 = 0$	• $\log_b 1 = 0$
• $\log 10 = 1$	• $\log_b b = 1$
• $\log 10^y = y$	• $\log_b b^y = y$
• $10^{\log x} = x$	• $b^{\log_b x} = x$
• $\ln 1 = 0$	• $\ln e = 1$
• $\ln e^y = y$	• $e^{\ln x} = x$

السؤال رقم (1)	
• اكتب العبارة في الصورة اللوغاريتمية.	
الصورة الأسية	الصورة اللوغاريتمية
$16 = 4^2$	
$1000 = 10^3$	
$7^2 = 49$	
$y = a^x$	
$25 = 5^2$	
$y = 3^x$	
$e^{-3} \approx 0.0498$	
$e^x = 343$	

السؤال رقم (2)

- اكتب العبارة في الصورة الأسية.

الصورة اللوغاريتمية	الصورة الأسية
$\log \frac{1}{100} = -2$	
$\log_8 64 = 2$	
$\ln 148.41 \approx 5$	
$\log_2 \frac{1}{32} = -5$	
$\log_4 6 = x$	
$\log_3 y = 2$	

السؤال رقم (3)

- أوجد قيمة المقدار اللوغاريتمي.

$\log_5 \frac{1}{125}$	$\log_6(216)$
$\log_3 3^4$	$\log_2 32$
$\log_9 729$	$\log_8 \frac{1}{64}$

السؤال رقم (4)

- حل المعادلة. قرب الإجابة إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

$$\log(7x + 6) = 3$$

$$2.75e^t = 38.6$$

$$\ln(3x - 1) = 2$$

$$10^{t+1} = 50$$

$$1.5e^t = 27$$

$$\log(x - 3) = -1$$

السؤال رقم (5)

إذا أودع المبلغ QR 250 في حساب مصرفي بفائدة سنوية متصلة معدلها 4%، ما الزمن اللازم ليصبح QR 600؟ قرب الإجابة إلى أقرب سنة.

السؤال رقم (6)

أوجد دالة المعكوس $f(x) = 6^{x-1}$ الحل	أوجد دالة المعكوس $f(x) = 3^{x+2}$ الحل
$y = 2 \log_4(x - 1) + 5$ الحل	$y = 3 \log_3 x - 2$ الحل

السؤال رقم (7)

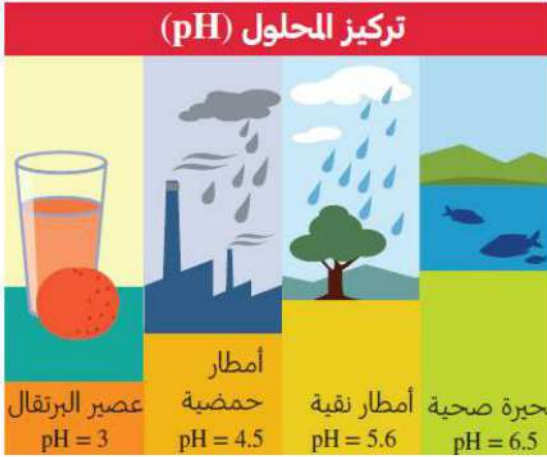
- إذا كانت الدالة $c(t) = 108e^{-0.08t} + 75$ تعطي درجة حرارة كوب من القهوة، بالفهرنهايت، قدم إلى سائق من نافذة مقهي قبل t دقيقة.

(b) بعد كم دقيقة تصبح درجة حرارة القهوة 98 درجة فهرنهايت؟ قرب الإجابة إلى أقرب دقيقة.

(a) أوجد درجة حرارة القهوة لحظة تقديمها إلى السائق من النافذة

السؤال رقم (8)

يقيس الرقم الهيدروجيني pH تركيز أيونات الهيدروجين، الذي يُرمز له بالرمز H^+ ، في محلول معين. يقاس هذا التركيز بوحدة المول لكل لتر، وذلك باستعمال الصيغة: $pH = -\log \frac{1}{[H^+]}$



أوجد تركيز أيونات الهيدروجين في الأمطار الحمضية.

السؤال رقم (9)

- أوجد قيمة المقدار من دون استعمال الحاسبة.

• $7^{\log_7 3}$

• $5^{\log_5 8}$

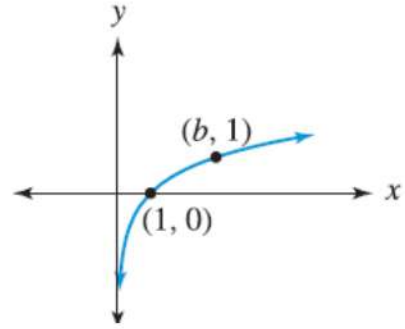
• $10^{\log(0.5)}$

• $10^{\log 14}$

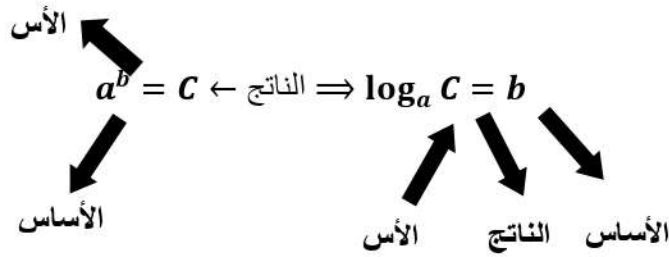
(5.3) الدوال اللوغاريتمية

الدوال اللوغاريتمية $b > 1, f(x) = \log_b x$

- المجال: $]0, \infty[$
- المدى: $] - \infty, \infty [$
- متصلة على مجالها
- متزايدة على مجالها
- لا يوجد تناظر: الدالة ليست دالة زوجية أو فردية
- ليس لها قيم قصوى
- خط التقارب الرأسى: $x = 0$
- ليس لها خط تقارب أفقية
- السلوك الطرفي: $\lim_{x \rightarrow \infty} \log_b x = \infty$

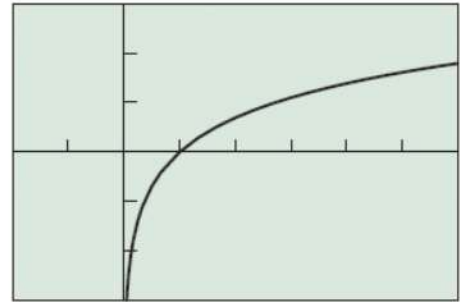


تمثيل الدوال اللوغاريتمية باستعمال التحويلات



الدوال اللوغاريتمية $b > 1, f(x) = \log_b x$

- المجال: $]0, \infty[$
- المدى: $] - \infty, \infty [$
- متصلة على مجالها
- متزايدة على مجالها
- لا يوجد تناظر: الدالة ليست دالة زوجية ولا فردية
- ليس لها قيم قصوى
- خط التقارب الرأسى: $x = 0$
- ليس لها خط تقارب أفقية
- السلوك الطرفي: $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty$



السؤال رقم (1)

• اختر الإجابة الصحيحة: -

أي العبارات بالنسبة للدالة $f(x) = \ln x$ خاطئة؟

متصلة في مجالها.	<input type="checkbox"/> C	متزايدة في مجالها.	<input type="checkbox"/> A
لها خط تقارب أسي.	<input type="checkbox"/> D	متناظرة حول نقطة الأصل.	<input type="checkbox"/> B

السؤال رقم (2)

• اختر الإجابة الصحيحة: -

أي الدوال التالية هي معادلة معكوس الدالة $f(x) = 2 \times 3^x$ ؟

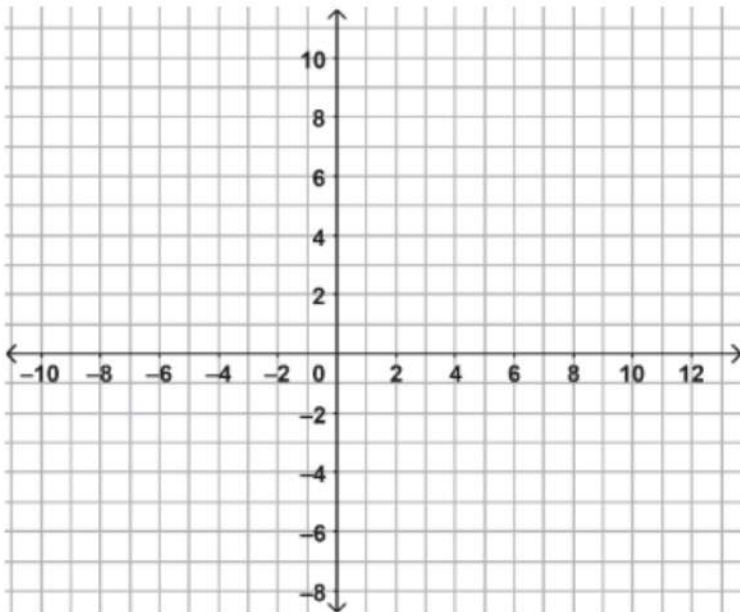
$f^{-1}(x) = 2 \log_3(x)$	<input type="checkbox"/> C	$f^{-1}(x) = \log_3\left(\frac{x}{2}\right)$	<input type="checkbox"/> A
$f^{-1}(x) = 3 \log_2(x)$	<input type="checkbox"/> D	$f^{-1}(x) = \log_2\left(\frac{x}{3}\right)$	<input type="checkbox"/> B

السؤال رقم (3)

مثل الدالة $y = \log_2 x$ بيانياً، ثم حدد المجال والمدى والمقطع x وخط التقارب لهذه الدالة، فترات التزايد و التناقص

x	0.25	0.5	1	2
y				

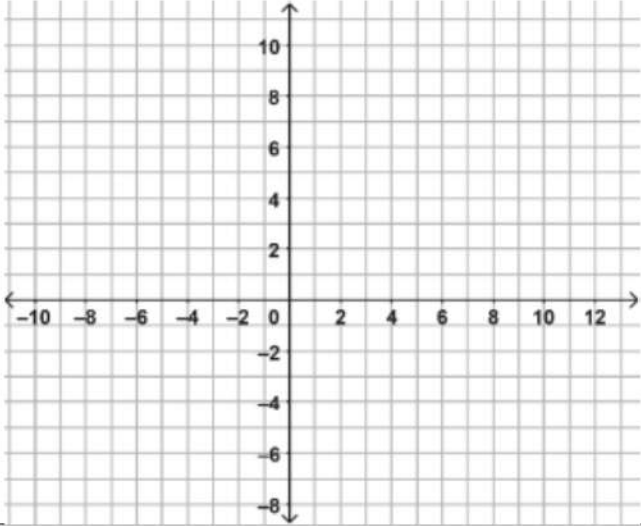
	المجال
	المدى
	مقطع x
	خط التقارب
	فترات التزايد و التناقص



السؤال رقم (4)

مثل الدالة $y = \log_4 x$ بيانياً، وحدد مجالها ومداهما، وكذلك المقاطع وخطوط التقارب، إن وجدت. ثم صف السلوك الطرفي للتمثيل البياني.

x	0.25	0.5	1	2
y				

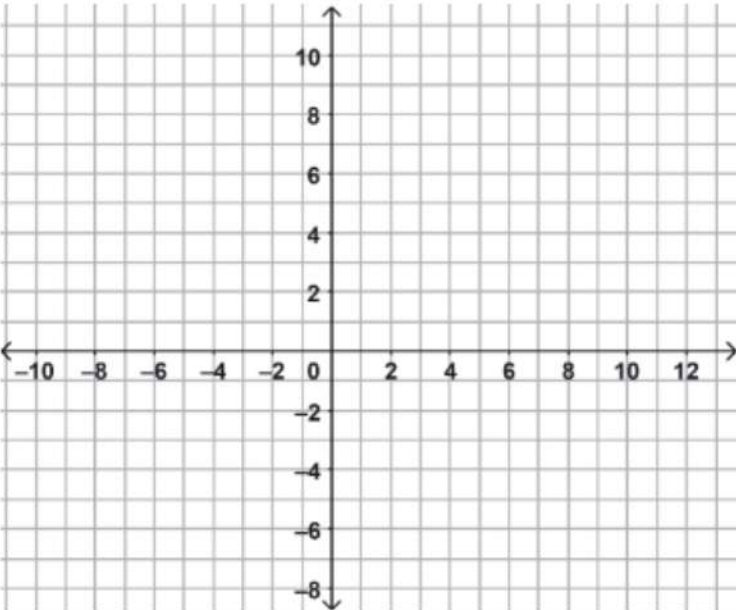


	المجال
	المدى
	مقطع x
	خط التقارب
	فترات التزايد و التناقص

السؤال رقم (5)

مثل الدالة $y = \log_{0.1} x$ بيانياً، وحدد مجالها ومداهما، وكذلك المقاطع وخطوط التقارب، إن وجدت. ثم صف السلوك الطرفي للتمثيل البياني.

x	0.01	0.1	1	10
y				



	المجال
	المدى
	مقطع x
	خط التقارب
	فترات التزايد و التناقص

السؤال رقم (6)

- صف التمثيل البياني للدالة بدلالة تحويلات الدالة الرئيسة لكل دالة .

الدالة	الإزاحة
$\log_6 x + 1$	
$g(x) = \frac{1}{2} \log_6 x$	
$g(x) = \log_6(-x)$	
$g(x) = -\ln(x + 0.5)$	
$g(x) = \log_2(x - 5)$	
$g(x) = \log_2(x + 3) + 1$	
$g(x) = \log_2(x + 2) - 3$	

السؤال رقم (7)

- أوجد معادلة معكوس الدالة.

$$f(x) = 5^{(x-3)}$$

$$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$$

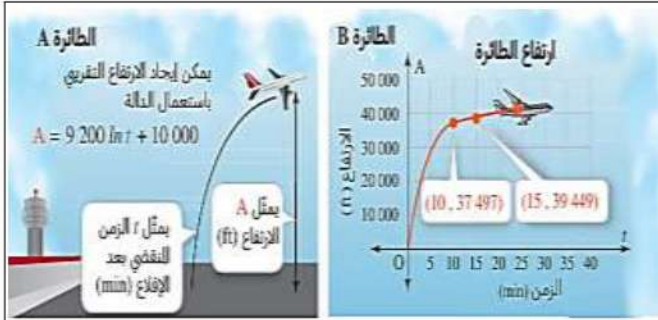
$f(x) = 6^{(x+7)}$	$f(x) = \log_2(8x)$
$f(x) = \ln(x + 3) - 1$	$f(x) = 4 \log_2(x - 3) + 2$

السؤال رقم (8)

<p>يمكن تقدير ارتفاع طائرة y، بالأقدام، بعد t دقيقة من إقلاعها باستخدام الدالة</p> $y = 5\,000 \ln(0.5t) + 8\,000$ <p>أوجد قيمة t بدلالة y. متي يكون من السهل استعمال المعادلة الجديدة التي كتبتها بدلاً من المعادلة الأصلية؟</p>	<p>تستعمل إحدى الشركات الدالة أدناه للربط بين إيرادات المبيعات R وتكاليف الإعلانات a (بالآلاف الريالات). ما معادلة معكوس هذه الصيغة؟ أي معادلة هي الأسهل استعمالاً لإيجاد قيمة a المناسبة لقيمة R معينة؟</p> <p>تمثل R الإيرادات بالآلاف الريالات. وتمثل a تكاليف الإعلانات بالآلاف الريالات.</p> $R = 12 \log(a + 1) + 25$
---	---

السؤال رقم (9)

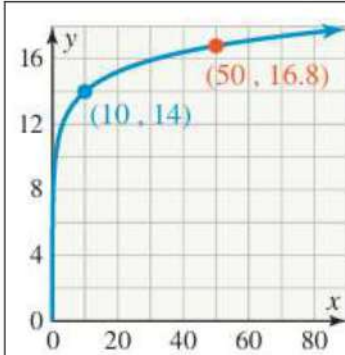
- يمكن استعمال الدوال اللوغاريتمية لإيجاد الارتفاع التقريبي لطائرة بمرور الزمن. أي من الطائرتين يظهر ارتفاعها معدل التغير الأكبر في الفترة $10 \leq t \leq 15$ ؟



B	A

السؤال رقم (12)

- أوجد متوسط معدل التغير للدالة الممثلة بيانياً أدناه في الفترة $10 \leq x \leq 50$ ، ثم قارن بينه وبين متوسط معدل التغير للدالة $y = 3 \log x + 12$ في نفس الفترة.



(5.4) خصائص اللوغاريتمات

خصائص اللوغاريتمات

$\log_b(RS) = \log_b R + \log_b S$	• قاعدة الضرب:
$\log_b \frac{R}{S} = \log_b R - \log_b S$	• قاعدة القسمة:
$\log_b R^c = c \log_b R$	• قاعدة القوة:

صيغة تغيير الأساس اللوغاريتمات

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

السؤال رقم (1)

• اختر الإجابة الصحيحة:

$$\log 12 =$$

$\log 3 + \log 4$	<input type="checkbox"/> C	$3 \log 4$	<input type="checkbox"/> A
$\log 3 \times \log 4$	<input type="checkbox"/> D	$4 \log 3$	<input type="checkbox"/> B

السؤال رقم (2)

• اختر الإجابة الصحيحة: -

$$\ln x^5 =$$

$2 \ln x^3$	<input type="checkbox"/> C	$5 \ln x$	<input type="checkbox"/> A
$3 \ln x^2$	<input type="checkbox"/> D	$x \ln 5$	<input type="checkbox"/> B

السؤال رقم (3)

- كيف يمكنك استعمال خواص اللوغاريتمات لفك المقدارين التاليين؟

$$\log_5(a^2 b^7)$$

$$\ln\left(\frac{25}{3}\right)$$

$$\log_7\left(\frac{r^3 t^4}{v}\right)$$

$$\ln\left(\frac{7}{225}\right)$$

السؤال رقم (4)

- استعمل خواص اللوغاريتمات لتوضح أن بالإمكان كتابة

$$pH = \log[H^+] \text{ في الصورة } pH = -\log\frac{1}{[H^+]}$$

السؤال رقم (5)

- اكتب المقدار مستعملاً اللوغاريتم الطبيعي فقط.

- $\log_3 x = \frac{\ln x}{\ln 3}$

- $\log_2(a + b) = \frac{\ln(a+B)}{\ln 2}$

السؤال رقم (6)

- استعمل خواص اللوغاريتمات لكتابة المقدار في صورة لوغاريتم واحد.

$9 \ln X - 6 \ln y$	$\log_5 6 + \frac{1}{2} \log_5 y$
$8 \log_3 2 + 5 \log_3 c + 7 \log_3 d$	$\frac{1}{3} \ln 27 - 3 \ln(2y)$
$\ln 7 + \ln 2$	$4 \log_4 m + 3 \log_4 n - \log_4 p$
$3 \ln 2 - 2 \ln 5$	$5 \log_2 c - 7 \log_2 n$

السؤال رقم (7)

افترض أن x, y عدنان موجبان
 $\ln x^5 - 2 \ln (xy)$
 في صورة لوغاريتم واحد
الحل

$$\ln\left(\frac{\sqrt{x^2+5}}{x}\right)$$

الحل

افترض أن x, y عدنان موجبان
 في صورة لوغاريتم واحد
 $2 \log_5 y - 4 \log_5 x y$
الحل

استعمل خواص اللوغاريتمات لكتابة اللوغاريتم في صورة فرق أو مجموع أو مضاعفات لوغاريتم
 $\log x y^2$
الحل

$$\log \frac{y}{x^2}$$

الحل

(5-5) المعادلات الأسية واللوغاريتمية

السؤال رقم (1)

- أوجد جميع حلول المعادلة. قرب إجابتك إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

$$3^{2-3x} = 3^{5x-6}$$

$$7^{3x} = 54$$

$$25^{x^2} = 125^{x+3}$$

الحل

$$4^{3x-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+5}$$

$$\frac{e^x + 3e^{-x}}{4} = 1$$

الحل

$$2e^x + 5e^x - 3 = 0$$

الحل

$4^{2x+1} = 4^{3x-5}$	$6^{x-2} = 216$
$2^{3x-2} = 5$	$4 + 5^{6-x} = 15$
$6^{3x+1} = 9^x$	$-3 = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 12$
$3^{2x-3} = 4^x$	$4^{x+2} = 8^{x-1}$

السؤال رقم (2)

- أوجد جميع حلول المعادلة. قرب إجابتك إلى أقرب جزء من ألف.

$$\log_2(4x + 5) = \log_2 x^2$$

$$2 \ln(3x - 2) = \ln(5x + 6)$$

$$\log_4(x^2 - 2x) = \log_4(3x + 8)$$

$$\ln(5x - 2) = \ln(x - 1)$$

$$\ln(2x^2 + 5x) = \ln(2x + 7)$$

$$2 \log(x + 1) = \log(x + 1)$$

$$\log_2 x + \log_2(x - 3) = 2$$

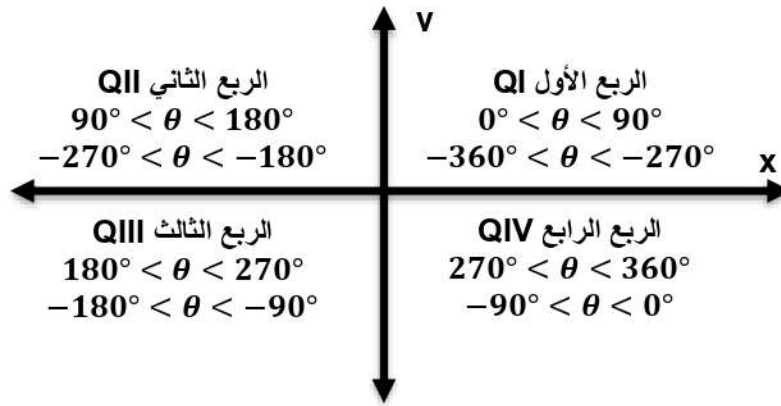
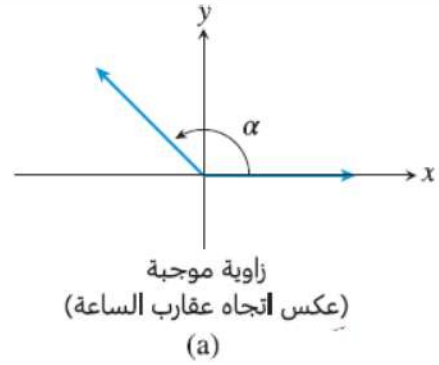
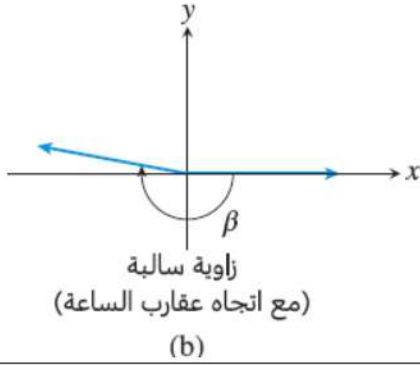
صف 11 علمي
الوحدة السادسة
الدوال الدائرية
وخصائصها



نسخة غير محلولة

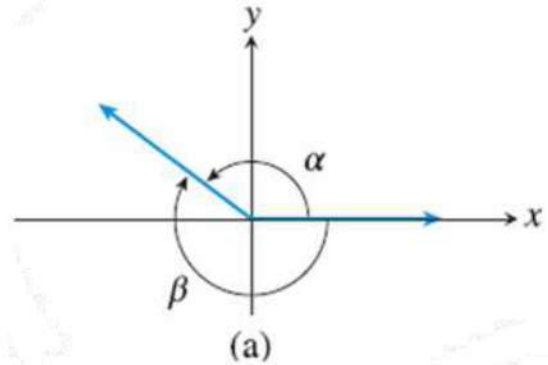
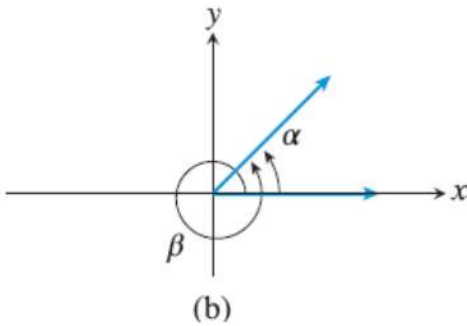


(6.1) النسب المثلثية للزوايا



الزوايا المتطرفة

هما زاويتين الفرق بينهما من مضاعفات العدد 360 أو 2π



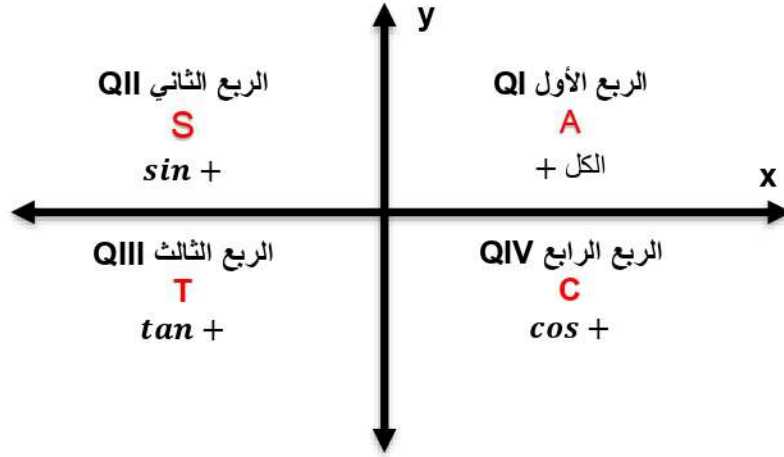
الجيب	جيب التمام	الظل	
$\sin \theta$ $= \frac{\text{طول الضلع المقابل}}{\text{طول الوتر}}$	$\cos \theta$ $= \frac{\text{طول الضلع المجاور}}{\text{طول الوتر}}$	$\tan \theta$ $= \frac{\text{طول الضلع المقابل}}{\text{طول الضلع المجاور}}$	
قاطع تمام	القاطع	ظل تمام	
$\sin \theta$ $= \frac{\text{طول الوتر}}{\text{طول الضلع المقابل}}$	$\sec \theta$ $= \frac{\text{طول الوتر}}{\text{طول الضلع المجاور}}$	$\cot \theta$ $= \frac{\text{طول الضلع المجاور}}{\text{طول الضلع المقابل}}$	

تذكير

قانون المسافة بين نقطتين يمكننا إيجاد المسافة d بين النقطتين (x_1, y_1) و (x_2, y_2) من خلال القاعدة:

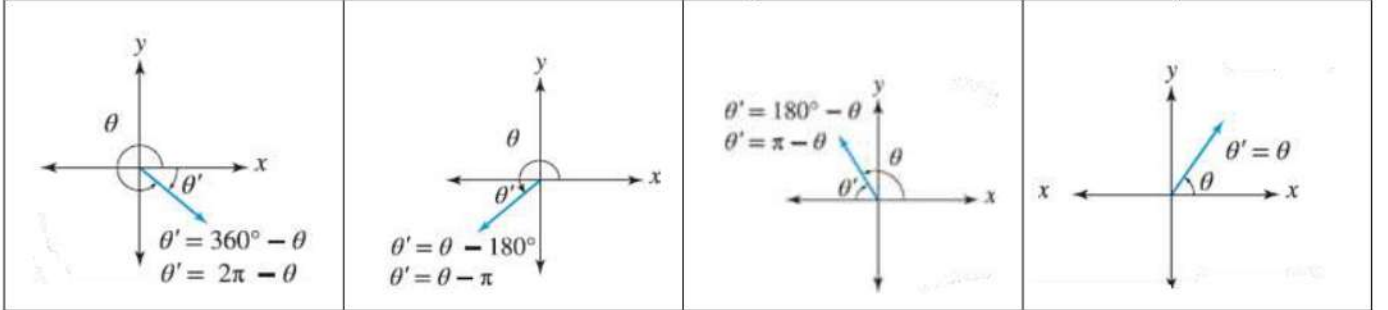
$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

إشارة الدوال المثلثية

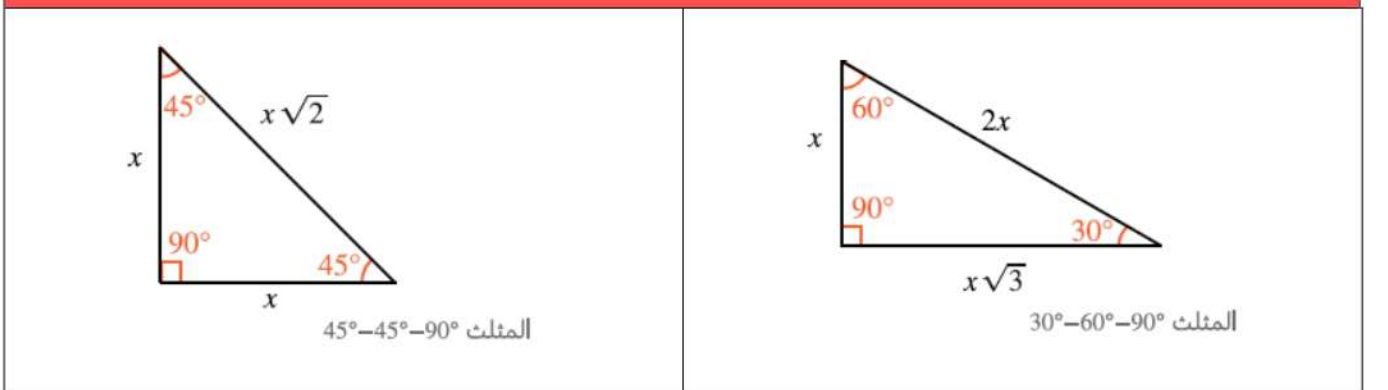


الزاوية المرجعية والمثلث المرجعي

هما زاويتان هي الزاوية الحادة المرسومة بين ضلع الانتهاء ومحور x



المثلثات القائمة الخاصة



السؤال رقم (1)

• اختر الإجابة الصحيحة: -

إذا كان $\cos \theta = \frac{-5}{13}$ و $\tan \theta > 0$ ، أوجد $\sin \theta$

$-\frac{5}{12}$	<input type="checkbox"/> C	$-\frac{12}{13}$	<input type="checkbox"/> A
$\frac{5}{12}$	<input type="checkbox"/> D	$\frac{5}{13}$	<input type="checkbox"/> B

السؤال رقم (2)

• اختر الإجابة الصحيحة: -

أي من قياسات الزوايا التالية لها نفس ضلع الانتهاء لزاوية في الوضع القياسي قياسها 530° ؟

170°	<input type="checkbox"/> C	370°	<input type="checkbox"/> A
-10°	<input type="checkbox"/> D	10°	<input type="checkbox"/> B

السؤال رقم (3)

• اختر النقطة التي تقع على ضلع الانتهاء: -

• $\theta = 45^\circ$

$(1, \sqrt{3})$	<input type="checkbox"/> C	$(2, 2)$	<input type="checkbox"/> A
		$(\sqrt{3}, 1)$	<input type="checkbox"/> B

السؤال رقم (4)

• اختر النقطة التي تقع على ضلع الانتهاء: -

• $\theta = \frac{2\pi}{3}$

$(-1, \sqrt{3})$	<input type="checkbox"/> C	$(-1, 1)$	<input type="checkbox"/> A
		$(-\sqrt{3}, 1)$	<input type="checkbox"/> B

السؤال رقم (5)

- اكمل الجدول التالي .

الزاوية	زاوية متطارفه	زاوية مرجعية
150°		
210°		
310°		
$\frac{\pi}{6} = 30$		
$\frac{\pi}{3} = 60$		
-30°		

السؤال رقم (6)

- حدد الإشارة (- أو +) للقيم المعطاة من دون استعمال الحاسبة.

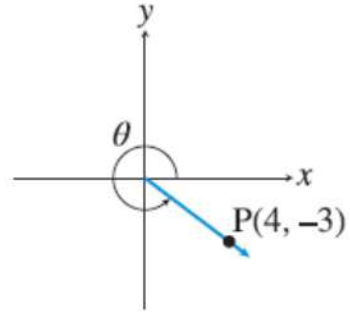
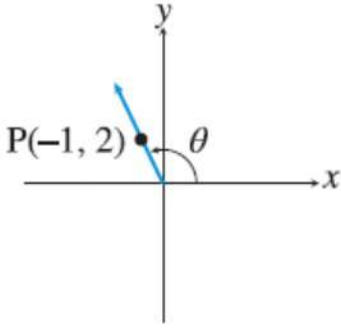
الزاوية	الإشارة
$\sin 110^\circ$	
$\tan 150^\circ$	
$\sec 300^\circ$	
$\sin \frac{\pi}{6}$	
$\cos \frac{5\pi}{3}$	
$\tan - 30^\circ$	

السؤال رقم (6)

<p>• تقع النقطة p على ضلع الانتهاء للزاوية θ. أوجد قيم النسب المثلثية الست للزاوية θ. إذا كانت النسبة غير معرفة، اكتب: غير معرفة"</p> <p>$p(-4, -6)$</p> <p>الإجابة:</p>	<p>• تقع النقطة p على ضلع الانتهاء للزاوية θ. أوجد قيم النسب المثلثية الست للزاوية θ. إذا كانت النسبة غير معرفة، اكتب: غير معرفة"</p> <p>$p(3, 4)$</p> <p>الإجابة:</p>
<p>• تقع النقطة p على ضلع الانتهاء للزاوية θ. أوجد قيم النسب المثلثية الست للزاوية θ. إذا كانت النسبة غير معرفة، اكتب: غير معرفة"</p> <p>$p(0, 5)$</p> <p>الإجابة:</p>	<p>• تقع النقطة p على ضلع الانتهاء للزاوية θ. أوجد قيم النسب المثلثية الست للزاوية θ. إذا كانت النسبة غير معرفة، اكتب: غير معرفة"</p> <p>$p(-3, 0)$</p> <p>الإجابة:</p>

السؤال رقم (7)

- أوجد قيم النسب المثلثية الست للزاوية θ .



السؤال رقم (8)

- في كل مما يلي، أوجد زاوية موجبة وزاوية سالبة تكون لهما الزاوية المرجعية المعطاة.

- 15° في الربع الأول.

- 10° في الربع الثالث.

السؤال رقم (9)

- أوجد قيمة الزاوية في الوضع القياسي التي لها الزاوية المرجعية المعطاة.

- 75° في الربع الرابع.

- 15° في الربع الثاني.

السؤال رقم (10)

• أوجد القيمة من دون استعمال الحاسبة، عبر استعمال النسب في مثلث مرجعي.

• $\cos 120^\circ$

• $\tan 300^\circ$

• $\sin 600^\circ$

• $\csc \frac{3\pi}{4}$

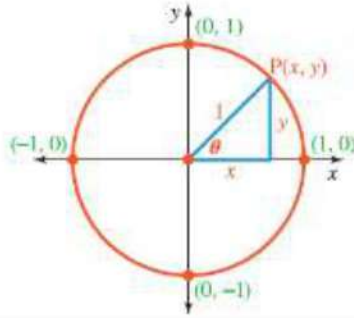
السؤال رقم (11)

أوجد $\cos \theta$ و $\cot \theta$ إذا كان $\sin \theta = \frac{1}{4}$ و $\tan \theta < 0$

(a) أوجد $\sin \theta$ و $\tan \theta$ إذا كان $\cos \theta = \frac{2}{3}$ و $\cot \theta > 0$

(6.2) دائرة الوحدة

دائرة الوحدة هي دائرة مركزها الأصل وطول نصف قطرها يساوي وحدة واحدة وبالتالي فإن معادلتها هي $x^2 + y^2 = 1$



الصفة الدورية للنسب المثلثية

زوايا قياسها معرف بالدرجات	زوايا قياسها معرف بالراديان
$\cos(\theta + 360^\circ k) = \cos \theta$	$\cos(\theta + 2k\pi) = \cos \theta$
$\sin(\theta + 360^\circ k) = \sin \theta$	$\sin(\theta + 2k\pi) = \sin \theta$
$\tan(\theta + 360^\circ k) = \tan \theta$	$\tan(\theta + k\pi) = \tan \theta$

السؤال رقم (1)

• اختر الإجابة الصحيحة: -

أي القيم التالية تساوي $\tan\left(\frac{4\pi}{6}\right)$ ؟

$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	C	$-\sqrt{3}$	A
$-\frac{1}{2}$	D	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	B

السؤال رقم (2)

• اختر الإجابة الصحيحة: -

ما مدى الدالة $f(t) = (\sin t)^2 + (\cos t)^2$ ؟

$[-1, 1]$	C	$\{1\}$	A
$[0, 2]$	D	$[0, 1]$	B

السؤال رقم (3)

• أوجد $\sin \theta$ و $\cos \theta$ من دون استعمال الحاسبة.
الإجابة:

$$\theta = \frac{3\pi}{4}$$

• أوجد $\sin \theta$ و $\cos \theta$ من دون استعمال الحاسبة.

$$\theta = \frac{\pi}{6}$$

الإجابة:

السؤال رقم (4)

<p>• أوجد $\tan \theta$ من دون استعمال الحاسبة. $\theta = 675^\circ$ الإجابة:</p>	<p>• أوجد $\tan \theta$ من دون استعمال الحاسبة. $\theta = \frac{-3\pi}{2} =$ الإجابة:</p>
---	---

السؤال رقم (5)

<p>• أوجد $\cot \theta$ و $\sec \theta$ و $\csc \theta$ من دون استعمال الحاسبة. $\theta = -\frac{10\pi}{4}$ الإجابة:</p>	<p>• أوجد $\cot \theta$ و $\sec \theta$ و $\csc \theta$ من دون استعمال الحاسبة. $\theta = 210^\circ$ الإجابة:</p>
--	---

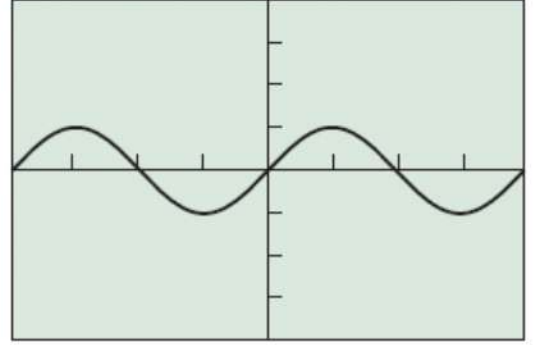
(6.3) التمثيل البياني للدوال الدائرية

$$y = \sin x$$

التمثيل البياني لدالة الجيب

دالة الجيب $f(x) = \sin x$

- المجال: $]-\infty, \infty[$
- المدى: $[-1, 1]$
- متصلة على مجالها
- متزايدة ومتناقصة بالتناوب في موجات دورية
- متناظرة حول نقطة الأصل، دالة فردية
- لها قيم عظمي هي 1
- لها قيمة صغري هي -1
- ليس لها خط تقارب أفقي
- ليس لها خط تقارب رأسي
- الدورة: 2π
- السعة 1
- السلوك الطرفي:
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sin x$ غير موجودتين.
- (تتراوح قيمة الدالة بشكل متواصل بين -1 و 1 ولا تقترب من أي نهاية).



$[-2\pi, 2\pi]$ في $[-4, 4]$

خصائص الدوال الدورية

بشكل عام، للتمثيل البياني للدوال $y = a \cos bx$ ، $y = a \sin bx$ الخصائص التالية:

• السعة $|a|$

• الدورة $\frac{2\pi}{|b|}$

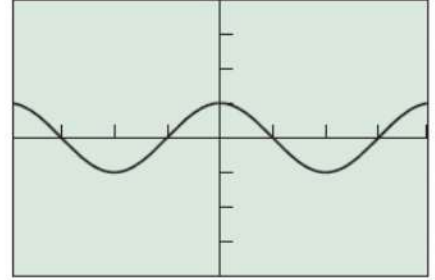
• التردد $\frac{|b|}{2\pi}$

$$y = \cos x$$

التمثيل البياني لدالة جيب التمام

دالة جيب التمام $f(x) = \cos x$

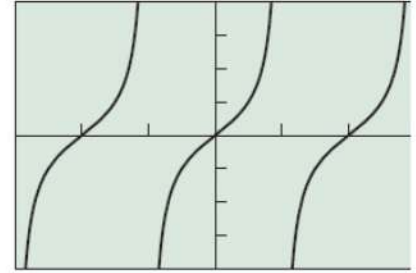
- المجال: $]-\infty, \infty[$
- المدى: $[-1, 1]$
- متصلة على مجالها
- متزايدة ومتناقصة بالتناوب في موجات دورية
- متناظرة حول المحور y ، دالة زوجية
- لها قيمة عظمى هي 1
- لها قيمة صغرى هي -1
- ليس لها خط تقارب أفقي
- ليس لها خط تقارب رأسي
- السلوك الطرفي: $\lim_{x \rightarrow \infty} \cos x$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} \cos x$ غير موجودتين.
- (تتراوح قيمة الدالة بشكل متواصل بين 1 و -1 ولا تقترب من أي نهاية).



$[-2\pi, 2\pi]$ في $[-4, 4]$

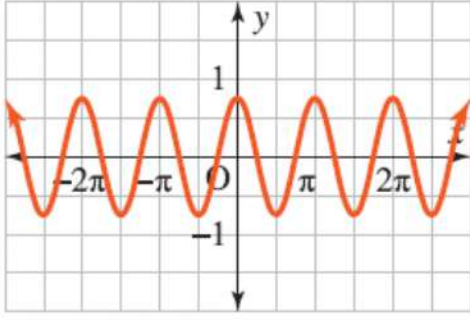
دالة الظل $f(x) = \tan x$

- المجال: كل الأعداد الحقيقية ما عدا المضاعفات الفردية للعدد $\frac{\pi}{2}$
- المدى: $]-\infty, \infty[$
- متصلة في مجالها
- متزايدة في كل فترة في مجالها
- متناظرة عبر نقطة الأصل، دالة فردية
- ليس لها قيم عظمى أو صغرى محلية
- ليس لها تقارب أفقي
- خط تقارب رأسي: $x = k\left(\frac{\pi}{2}\right)$ لكل الأعداد الصحيحة الفردية k
- السلوك الطرفي: $\lim_{x \rightarrow \infty} \tan x$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} \tan x$ غير موجودتين.
- (تتراوح قيم الدالة بشكل متواصل بين $-\infty$ و ∞ ولا تقترب من أي نهاية).



$[-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ في $[-4, 4]$

السؤال رقم (1)



• اختر الإجابة الصحيحة: -

ما هي معادلة التمثيل البياني أدناه؟

$$y = \frac{3}{4} \cos 2x$$

C

$$y = \frac{3}{4} \sin 2x$$

A

$$y = \frac{3}{2} \cos x$$

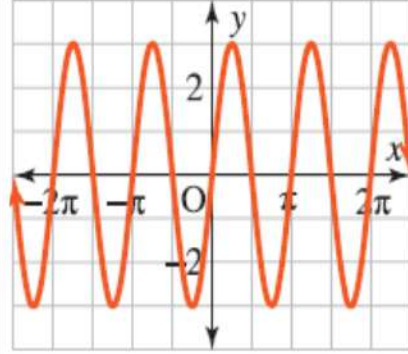
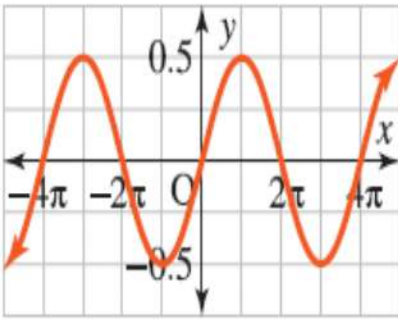
D

$$y = \frac{3}{2} \sin x$$

B

السؤال رقم (2)

• حدد المجال والمدى والقيم القصوى لكل دالة، مبيِّناً الدورة والسعة.



السؤال رقم (3)

<p>• أوجد الدورة وسعة للدالة</p> $y = \frac{7}{4} \sin x$ <p>الإجابة:</p>	<p>• أوجد الدورة وسعة للدالة</p> $y = \frac{2}{3} \sin x$ <p>الإجابة:</p>
<p>• أوجد الدورة وسعة للدالة</p> $y = \cos(-7x)$ <p>الإجابة:</p>	<p>• أوجد الدورة وسعة للدالة</p> $y = \cos(-0.4x)$ <p>الإجابة:</p>

السؤال رقم (5)

• مثل دورة واحدة للدالة بيانياً.

$y = 2 \sin x$

الإجابة:

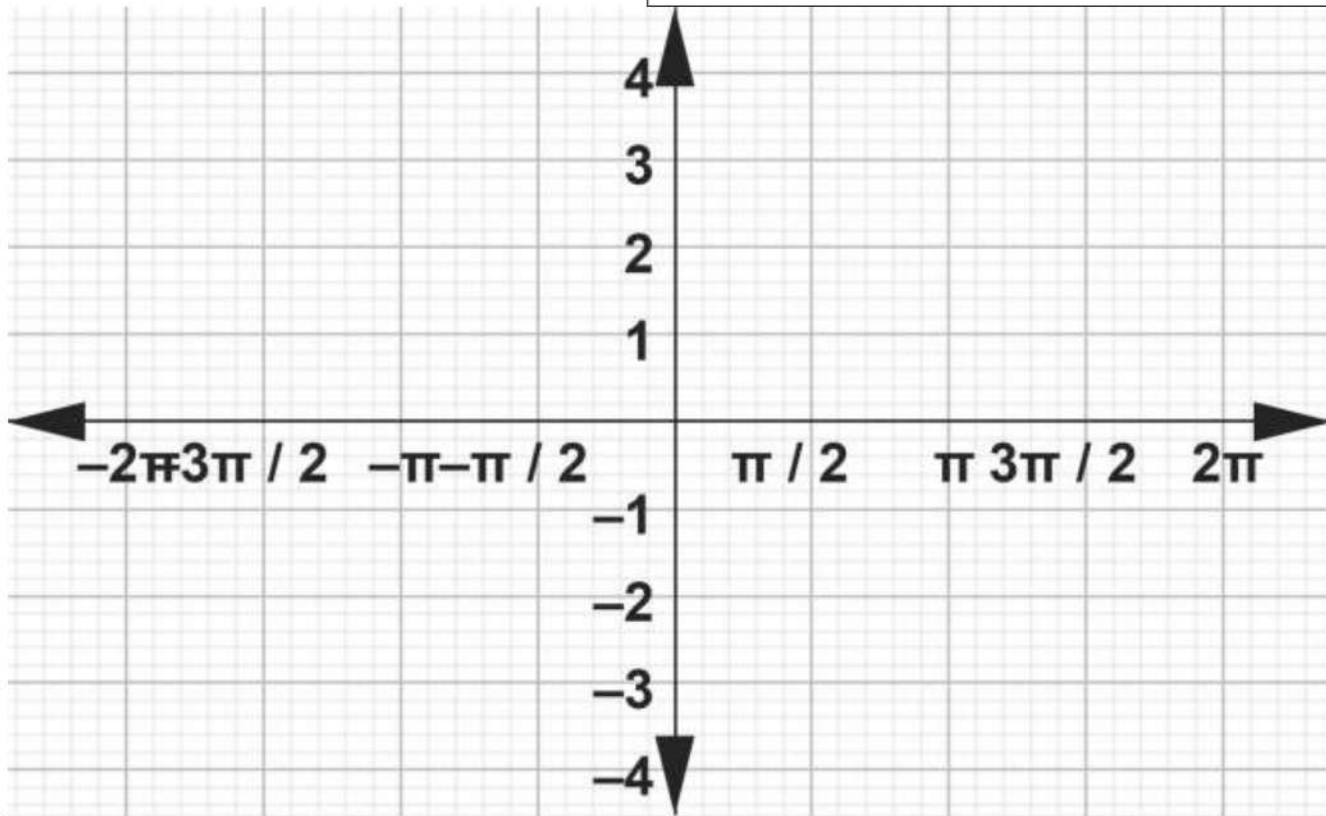
x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y					

• مثل دورة واحدة للدالة بيانياً.

$$y = -2 \cos x$$

الإجابة:

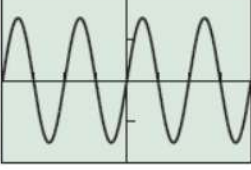
x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y					



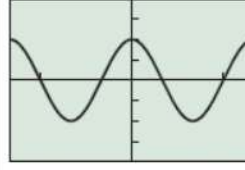
السؤال رقم (6)

- أوجد الدورة والسعة لكل دالة. حدد نافذة العرض التي تبين كل تمثيل بياني. استعمل معلوماتك عن التحويلات (دون استعمال الحاسبة)

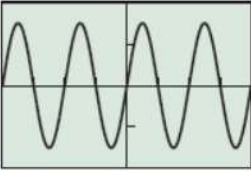
$$y = 1.5 \sin 2x$$



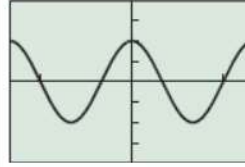
$$y = 2 \cos 3x$$



$$y = -3 \cos 2x$$



$$y = 5 \sin \frac{1}{2} x$$



(6.4) إزاحة الدوال الدائرية

خصائص الدوال الدورية

بشكل عام، للتمثيل البياني للدوال $y = a \sin (b(x - h)) + k$ و $y = a \cos (b(x - h)) + k$ ، الخصائص التالية:

• السعة = $|a|$

• الدورة = $\frac{2\pi}{|b|}$

• التردد = $\frac{|b|}{2\pi}$

عند المقارنة بالتمثيل البياني للدالتين $y = a \sin (bx)$ و $y = a \cos (bx)$ يمكن إضافة الخصائص التالية:

إزاحة رأسية تساوي k وإزاحة الطور تساوي h .

السؤال رقم (1)

- قال علي إن للدالة $y = \frac{1}{2} \cos \left[3 \left(x + \frac{\pi}{4} \right) - 3 \right]$ إزاحة طور مقدارها $\frac{\pi}{4}$ وحدة إلى اليمين وإزاحة رأسية مقدارها 3 وحدات إلى الأسفل. هل هو على صواب؟ برر إجابتك.

السؤال رقم (2)

- أراد حامد أن يجد إزاحة الطور للدالة المبينة في الشكل أدناه. هل عمله صحيح؟ برر إجابتك.

$$y = \cos \left(3x + \frac{\pi}{2} \right)$$

مقدار إزاحة الطور يساوي $\frac{\pi}{2}$
وحدات إلى اليسار

السؤال رقم (3)

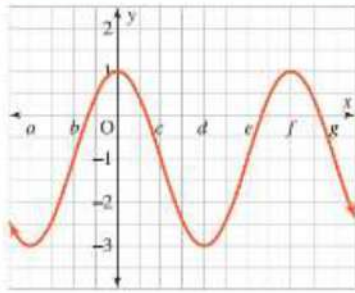
• اختر الإجابة الصحيحة: -

أي المعلومات التالية عن الدالة $y = \frac{3}{4} \cos \left(3 \left(x + \frac{\pi}{6} \right) \right) - 5$ صحيحة؟

الدورة هي 3	<input type="checkbox"/> C	السعة هي $\frac{3}{4}$	<input type="checkbox"/> A
الإزاحة الرأسية مقدارها 5 وحدات إلى الأعلى.	<input type="checkbox"/> D	إزاحة الطور مقدارها $\frac{\pi}{6}$ وحدات إلى اليمين.	<input type="checkbox"/> B

السؤال رقم (4)

• اختر الإجابة الصحيحة: -

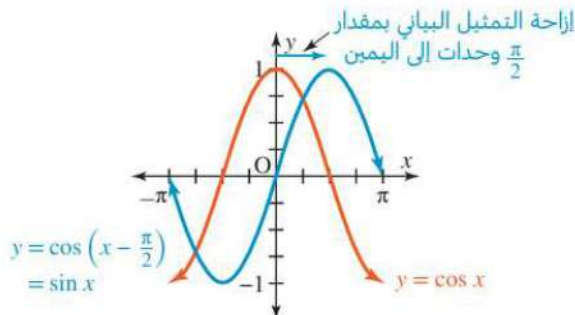


مثل حمد الدالة $y = 2 \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right) - 1$ بيانياً ولكنه نسي أن يحدد قيم النقاط على المحور x . اختر مما يلي قيمة d الصحيحة على المحور x :

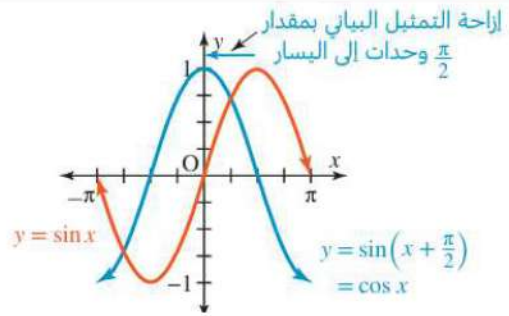
$\frac{\pi}{2}$	<input type="checkbox"/> C	π	<input type="checkbox"/> A
$\frac{3\pi}{2}$	<input type="checkbox"/> D	2π	<input type="checkbox"/> B

السؤال رقم (5)

اكتب الدالة $y = \sin x$ في شكل إزاحة للدالة $y = \cos x$
الحل



اكتب الدالة $y = \cos x$ في شكل إزاحة للدالة $y = \sin x$
الحل



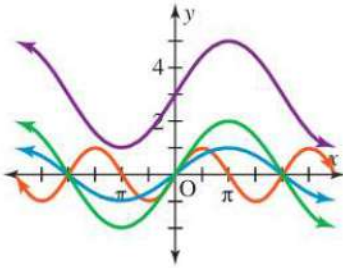
السؤال رقم (6)

ارسم التمثيل البياني للدالة

$$y = 2 \sin \frac{x}{2} + 3$$

الحل

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y					
\dot{y}					



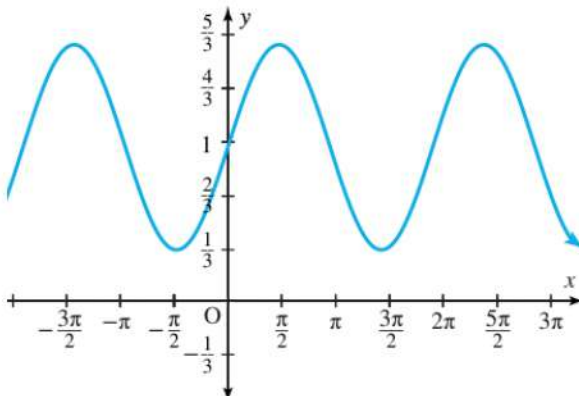
السؤال رقم (7)

ارسم التمثيل البياني للدالة

$$y = \frac{2}{3} \cos \left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 1$$

الحل

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y					
\dot{y}					



صف 11 علمي
الوحدة السابعة
المتطابقات
والمعادلات المثلثية



نسخة غير محلولة



7.1 المتطابقات المثلثية

المتطابقات المثلثية الأساسية

متطابقات المقلوب

$$\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}$$

$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$$

$$\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$$

$$\sin \theta = \frac{1}{\csc \theta}$$

$$\cos \theta = \frac{1}{\sec \theta}$$

$$\tan \theta = \frac{1}{\cot \theta}$$

متطابقات ناتج القسمة

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

متطابقات فيثاغورس

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

$$1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$$

$$\cot^2 \theta + 1 = \csc^2 \theta$$

متطابقات الزاويتين المتتامتين

$$\sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) = \cos \theta$$

$$\cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) = \sin \theta$$

$$\tan \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) = \cot \theta$$

$$\cot \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) = \tan \theta$$

$$\sec \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) = \csc \theta$$

$$\csc \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) = \sec \theta$$

متطابقات الدوال الفردية والدوال الزوجية

$$\sin(-x) = -\sin x$$

$$\cos(-x) = \cos x$$

$$\tan(-x) = -\tan x$$

$$\csc(-x) = -\csc x$$

$$\sec(-x) = \sec x$$

$$\cot(-x) = -\cot x$$

السؤال رقم (1)

• اختر الإجابة الصحيحة: -

أي المقادير التالية ليس مساوياً للقيمة $\sin x$ كمتطابقة؟

$-\sin(-x)$	C	$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$	A
$\tan x \sec x$	D	$\sqrt{1 + \cos^2 x}$	B

السؤال رقم (3)

• أوجد قيمة المقدار باستعمال المتطابقات.

<p>(b) إذا كان $\sin \theta = 0.45$، أوجد $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$.</p> <input type="text"/>	<p>(a) إذا كان $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = -5.32$، أوجد $\cot \theta$.</p> <p>الحل</p> <input type="text"/>
<p>(d) إذا كان $\cot(-\theta) = 7.89$، أوجد $\tan\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$.</p> <p>الحل</p> <input type="text"/> <input type="text"/>	<p>(c) إذا كان $\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = 0.73$، أوجد $\cos(-\theta)$.</p> <p>الحل</p> <input type="text"/>

السؤال رقم (4)

• بسط المقدار باستعمال المتطابقات الأساسية أو متطابقات فيثاغورس.

• $\tan x \cos x$

الحل

• $\cot x \tan x$

الحل

• $\sec y \sin \left(\frac{\pi}{2} - y\right)$

الحل

• $\cot u \sin u$

الحل

• $\frac{1+\tan^2 x}{\csc^2 x}$

الحل

• $\frac{1-\cos^2 \theta}{\sin \theta}$

الحل

السؤال رقم (5)

• أثبت صحة المتطابقة.

• $(\cos x) (\tan x + \sin x \cot x) = \sin x + \cos^2 x$

الحل

• $(\sin x) (\cot x + \cos x \tan x) = \cos x + \sin^2 x$

الحل

• $(1 - \tan x)^2 = \sec^2 x - 2 \tan x$	• $(\cos x - \sin x)^2 = 1 - 2 \cos x \sin x$
--	---

السؤال رقم (6)

• أثبت صحة المتطابقة.

$$\frac{\tan x}{\sec x - 1} = \frac{\sin x}{1 - \cos x}$$

الحل

• $\frac{\sin x}{1 + \cos x} + \frac{1 + \cos x}{\sin x} = 2 \csc x$

$$\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} = \frac{1 - 2 \cos x \sin x}{1 + 2 \cos x \sin x}$$

(7.2) المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما

متطابقات الجيب للفرق والمجموع	متطابقات جيب التمام للفرق والمجموع
$\sin (u + v) = \sin u \cos v + \cos u \sin v$ $\sin (u - v) = \sin u \cos v - \cos u \sin v$	$\cos (u - v) = \cos u \cos v + \sin u \sin v$ $\cos (u + v) = \cos u \cos v - \sin u \sin v$

متطابقات الظل للفرق والمجموع

$$\tan (u - v) = \frac{\tan u - \tan v}{1 + \tan u \tan v}$$

$$\tan (u + v) = \frac{\tan u + \tan v}{1 - \tan u \tan v}$$

السؤال رقم (1)

• اختر الإجابة الصحيحة: -

إذا كان $\cos A \cos B = \sin A \sin B$ ، فإن $\cos (A + B)$ يساوي:

1	<input type="checkbox"/> C	0	<input type="checkbox"/> A
$\cos B + \cos A$	<input type="checkbox"/> D	$\cos A + \cos B$	<input type="checkbox"/> B

السؤال رقم (2)

• اختر الإجابة الصحيحة: -

دالة لها خاصية $f(1 + 2) = \frac{f(1)+f(2)}{1-f(1)f(2)}$

$f(x) = \tan x$	<input type="checkbox"/> C	$f(x) = \sin x$	<input type="checkbox"/> A
$f(x) = e^x$	<input type="checkbox"/> D	$f(x) = \sec x$	<input type="checkbox"/> B

السؤال رقم (3)

• أوجد القيمة الدقيقة باستعمال متطابقة مجموع أو فرق

• $\sin 15^\circ$

• $\tan 15^\circ$

• $\cos 75^\circ =$

• $\cos \frac{\pi}{12}$

السؤال رقم (4)

• أكتب المقدار في صورة جيب أو جيب التمام، أو ظل لزاوية.

• $\sin 42^\circ \cos 17^\circ - \cos 42^\circ \sin 17^\circ$

• $\cos 94^\circ \cos 18^\circ + \sin 94^\circ \sin 18^\circ$

• $\sin \frac{\pi}{5} \cos \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2}$

• $\sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{7} - \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{\pi}{3}$

• $\frac{\tan 19^\circ + \tan 47^\circ}{1 - \tan 19^\circ \tan 47^\circ}$

• $\frac{\tan \left(\frac{\pi}{5}\right) - \tan \left(\frac{\pi}{3}\right)}{1 + \tan \left(\frac{\pi}{5}\right) \tan \left(\frac{\pi}{3}\right)}$