

7-1 الأعداد المركبة

الوحدة التخيلية

هي العدد الذي مربعه (-1) ويرمز إليه بالرمز i

$$i = \sqrt{-1} \ , \ i^2 = -1$$

الأعداد التخيلية

- لأي عدد حقيقي موجب m ،

$$\sqrt{-m} = \sqrt{m}\, i$$

- تسمى الأعداد التي على الصورة bi حيث $b \in R^*$ أعدادًا تخيلية.

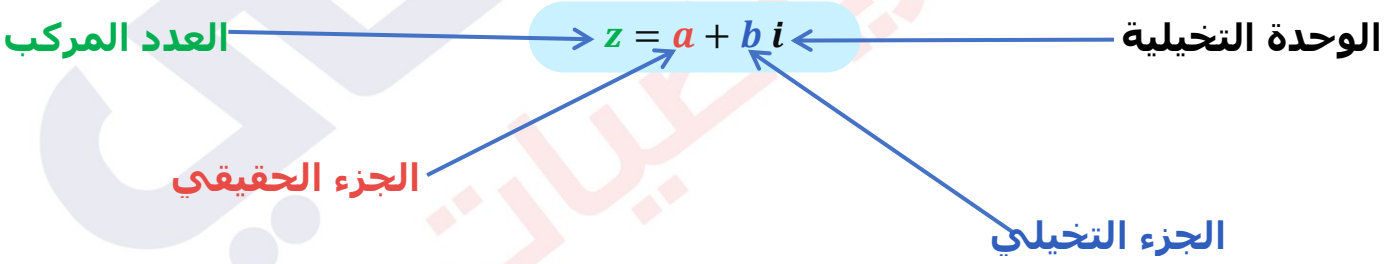
مثال 1 بسط كل عدد مما يلي مستخدمًا الوحدة التخيلية i :

$\sqrt{-36} = 6\, i$ $\quad -\sqrt{-12} = -2\sqrt{3}\ i$ $\quad \sqrt{-2} = \sqrt{2}\, i$

العدد المركب هو عدد على الصورة $z = a + b\, i$ حيث a, b عددان حقيقيان , i الوحدة التخيلية

$a + b\, i$ تسمى الصورة الجبرية للعدد المركب

$a\ , b \in \mathbb{R}$



ويرمز لمجموعة الأعداد المركبة بالرمز $\mathbb{C}$

مثال 2

الجزء التخيلي	الجزء الحقيقي	العدد المركب
3	2	$2 + 3\, i$
-5	4	$4 - 5\, i$
1	-1	$i - 1$
0	7	7
-1	0	$-i$



مثال ٣ اكتب كلا من الأعداد المركبة التالية على الصورة الجبرية:

1) $\sqrt{-9}+6$

$= 3i+6$

$= 6+3\,i$

2) $1-\sqrt{-20}$

$= 1-2\sqrt{5}\,i$

3) $\dfrac{1+\sqrt{-25}}{4}$

$= \dfrac{1+5\,i}{4}$

$= \dfrac{1}{4}+\dfrac{5}{4}\,i$

تساوى عددين مركبين

يتساوى عددان مركبان إذا وفقط إذا تساوى جزءاهما الحقيقيان وتساوى جزءاهما التخيليان.

ليكن : $z_1 = a_1 + b_1 i \ , \ z_2 = a_2 + b_2 i$

$z_1 = z_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2 \ , \ b_1 = b_2$

مثال ٤ أوجد قيم كل من $x \, , y \in R$ في كل مما يلي:

1) $x+5\,i = 7-3\,y\,i$

$x = 7$

$\dfrac{-3y}{-3} = \dfrac{5}{-3}$

$y = \dfrac{-5}{3}$

2) $(x+3)+y^2\,i = 5-y\,i$

$x+3 = 5$

$x = 5-3$

$x = 2$

$y^2 = -y$

$y^2 + y = 0$

$y = -1$ أو $y = 0$

3) $3\,i = 2\,x - 5\,y\,i$

$\dfrac{2x}{2} = \dfrac{0}{2}$

$x = 0$

$\dfrac{-5y}{-5} = \dfrac{-3}{5}$

$y = \dfrac{-3}{5}$

4) $14\,i^2 - 3\,i = 2\,x + (y+5)\,i$

$-14 - 3\,i = 2\,x + (y+5)\,i$

$\dfrac{2x}{2} = \dfrac{-14}{2}$

$x = -7$

$y+5 = -3$

$y = -3-5$

$y = -8$

التمثيل البياني لعدد مركب

يمكن وضع العدد المركب $z = a + b\,i$ على صورة الزوج المرتب $(a\,,b)$.

الإحداثي السيني هو الجزء الحقيقي والإحداثي الصادي هو الجزء التخيلي.

$M(a\,,b)$ ⟷ $z = a + b\,i$

الصورة الديكارتية — الصورة الجبرية



تدريب : اكتب كلا مما يأتى في الصورة الديكارتية :

1) $z_1 = 4 - i$
$(4, -1)$

2) $z_2 = -3\,i$
$(0, -3)$

3) $z_4 = 2$
$(2, 0)$

مثال ٥ اكتب العدد المركب المناظر لكل من النقاط : $J(0,-5)$, $L(2,-1)$, $M(3,2)$

$J\,(0,-5) \rightarrow -5\,i$

$L\,(2,-1) \rightarrow 2 - i$

$M\,(3,2) \rightarrow 3 + 2\,i$

العمليات على مجموعة الأعداد المركبة

أولا: جمع وطرح الأعداد المركبة

إذا كان $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$ عددين مركبين فإن :

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\,i$$

$$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) - (b_1 + b_2)\,i$$

مثال ٦ إذا كان $z_1 = 2 + 3\,i$, $z_2 = 4 - 7\,i$, $z_3 = 2\,i$ فأوجد:

1) $z_1 + z_2$
$= (2 + 3\,i) + (4 - 7\,i)$
$= 6 - 4\,i$

2) $z_2 - z_1$
$= (4 - 7\,i) - (2 + 3\,i)$
$= 2 - 10\,i$

3) $z_3 - z_2 - z_1$
$= (2\,i) - (4 - 7\,i) - (2 + 3\,i)$
$= -4 + 9\,i - (2 + 3\,i)$
$= -6 + 6\,i$

مثال ٧

1) $\left(4 + \sqrt{-9}\right) + \left(6 - \sqrt{-49}\right)$
$= (4 + 3\,i) + (6 - 7\,i)$
$= 10 - 4\,i$

2) $\left(8 - \sqrt{-1}\right) - \left(-3 + \sqrt{-16}\right)$
$= (8 - i) - (-3 + 4\,i)$
$= 11 - 5\,i$



ثانيا: ضرب الأعداد المركبة

إذا كان $c \in R$ ، $z_1 , z_2 \in C$

حيث $z_1 = a_1 + b_1 i$ ، $z_2 = a_2 + b_2 i$ فإن :

❶ $c\, z_1 = c\, a_1 + c\, b_1 i$

❷ $z_1 \bullet z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1\, b_2 + a_2\, b_1)\, i$

مثال ٨ أوجد الناتج :

❶ $(6 - 5\, i)(4 - 3\, i)$

$= 24 - 18\, i - 20\, i + 15 i^2$

$= 24 - 18\, i - 20\, i - 15$

$= 9 - 38\, i$

❷ $(9 + 4\, i)(4 - 9\, i)$

$= 36 - 81\, i + 16\, i - 36 i^2$

$= 36 - 81\, i + 16\, i + 36$

$= 72 - 65\, i$

مثال ٩ $(12i)(7\, i)(i + 1)$

$= 48 i^2 (i + 1)$

$= -84(i + 1)$

$= -84\, i - 84$

$= -84 - 84\, i$

مثال ١٠ بسط كل تعبير مما يلي: :

❶ $-5(1 + 2\, i) + 3\, i(3 - 4\, i)$

$= -5 - 10\, i + 9\, i - 12 i^2$

$= -5 - 10\, i + 9\, i + 12$

$= 7 - i$

❷ $\left(-2 + \sqrt{-9}\right)\left(6 + \sqrt{-25}\right)$

$= (-2 + 3\, i)(6 + 5\, i)$

$= -12 - 10\, i + 18\, i + 15 i^2$

$= -12 - 10\, i + 18\, i - 15$

$= -27 + 8\, i$



مثال ١١ إذا كان $z_1 = 2 - 3i \ , \ z_2 = 1 + 4i$ فأوجد :

1) $-3z_2$

$= -3(1 + 4i)$

$= -3 - 12i$

2) $z_1 \cdot z_2 = (2 - 3i) \cdot (1 + 4i)$

$= 2 + 8i - 3i - 12i^2$

$= 2 + 8i - 3i + 12$

$= 14 + 5i$

قوى العدد المركب

إذا كان p عدد كلي فإن:

$$i^{4p} = 1 \ , \quad i^{4p+1} = i \ , \quad i^{4p+2} = -1 \ , \quad i^{4p+3} = -i$$

مثال ١٢ أوجد :

$5(i)^{73}$

$= 5\ (i)$

$= 5i$

مرافق العدد المركب

مرافق العدد المركب $z = a + bi$ هو العدد المركب $\overline{z} = \overline{a + bi} = a - bi$

خواص مرافق العدد المركب:-

إذا كان $z_1 = a_1 + b_1 i \ , \ z_2 = a_2 + b_2 i$

فإن:

- $z_1 + \overline{z_1} = 2a_1$
- $z_1 - \overline{z_1} = 2bi$
- $z_1 \cdot \overline{z_1} = a_1^2 + b_1^2$
- $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$
- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
- $\overline{(z_1)} = z_1$



مثال ١٣ إذا كان $z_1 = 2 - 7i$, $z_2 = 3 + 5i$ فأوجد:

1) $\overline{z_1} + \overline{z_2}$

$= (2 + 7i) + (3 - 5i)$

$= 5 + 2i$

2) $\overline{z_1 - z_2}$

$= \overline{z_1} - \overline{z_2} = (2 + 7i) - (3 - 5i)$

$= -1 + 12i$

3) $\overline{z_1 \bullet z_2}$

$= \overline{z_1} \bullet \overline{z_2} = (2 + 7i) \bullet (3 - 5i)$

$= 6 - 10i + 12i + 35$

$= 41 + 21i$

المعكوس الضربي

المعكوس الضربي لعدد مركب غير صفري $z = a + bi$ يرمز له بالرمز z^{-1}:

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{a^2 + b^2}$$

مثال ١٤ أوجد المعكوس الضربي لكل من :

1) $z_1 = -3i - 7$

$z_1^{-1} = \frac{-7 + 3i}{(-7)^2 + (-3)^2}$

$= \frac{-7 + 3i}{58}$

$= \frac{-7}{58} + \frac{3}{58}i$

2) $z_2 = 5 + 11i$

z_2^{-1}

$= \frac{5 - 11i}{(5)^2 + (11)^2}$

$= \frac{5 - 11i}{146} = \frac{5}{146} - \frac{11}{146}i$

قسمة عدد مركب

لقسمة عدد مركب z_1 على عدد مركب آخر غير صفري z_2 ، نكتبهما على شكل كسر على الصورة $\frac{z_1}{z_2}$ ، نبسط الكسر بضرب كل من البسط والمقام في مرافق المقام.



مثال ١ أوجد ناتج قسمة $3-2i$ على $1+2i$

مرافق المقام

$$\frac{-3+2i}{1+2i}\cdot\frac{1-2i}{1-2i}$$

$$=\frac{-3+6i+2i+4}{(1)^2+(2)^2}$$

$$=\frac{1+8i}{5}=\frac{1}{5}+\frac{8}{5}i$$

مثال ٢ اكتب كلا مما يلي في الصورة الجبرية :

$$\frac{3+i}{2+5i}$$

$$\frac{3+i}{2+5i}\cdot\frac{2-5i}{2-5i}$$

$$=\frac{6-15i+2i+5}{(2)^2+(5)^2}$$

$$=\frac{11-13i}{29}$$

$$=\frac{11}{29}-\frac{13}{29}i$$

مثال ٣ إذا كان $z=\frac{4i}{1-i\sqrt{3}}$ فأوجد : $\bar{z}$

$$z=\frac{4i}{1-i\sqrt{3}}\cdot\frac{1+\sqrt{3}i}{1+\sqrt{3}i}$$

$$=\frac{4i-4\sqrt{3}}{(1)^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2}$$

$$=\frac{-4\sqrt{3}+4i}{4}=-\sqrt{3}+i$$

$$\bar{z}=-\sqrt{3}-i$$



مثال ٤ إذا كان $z_1 = 3 + 4i \ , \ z_2 = 5 - 2i$

فأوجد كلا مما يلي في الصورة الجبرية :

1 $\overline{3z_1 - 2z_2}$

$\overline{3z_1} - \overline{2z_2} = 3(3 - 4i) - 2(5 + 2i)$

$= 9 - 12i - 10 - 4i$

$= -1 - 16i$

2 $\frac{z_2}{z_1}$

$\frac{z_2}{z_1} = \frac{5 - 2i}{3 + 4i} \times \frac{3 - 4i}{3 - 4i}$

$= \frac{15 - 20i - 6i - 8}{3^2 + 4^2}$

$= \frac{7 - 26i}{25}$

$= \frac{7}{25} - \frac{26}{25}i$

مثال ٥ إذا كان $z_1 = 3 + 4i \ , \ z_2 = 5 - 2i$ فأوجد :

1 $2z_1$

2 $\overline{z_1 + z_2}$

3 $\frac{z_1}{z_2}$

1 $2z_1 = 2(3 + 4i)$

$= 6 + 8i$

---

2 $\overline{z_1 + z_2} = \overline{(3 + 4i) + (5 - 2i)}$

$= \overline{8 + 2i}$

$= 8 - 2i$

---

3 $\frac{z_1}{z_2} = \frac{3 + 4i}{5 - 2i} \times \frac{5 + 2i}{5 + 2i}$

$= \frac{(3 + 4i)(5 + 2i)}{(5 - 2i)(5 + 2i)} = \frac{(15 + 6i) + (20i - 8)}{25 + 4}$

$= \frac{7 + 26i}{29} = \frac{7}{29} + \frac{26}{29}i$



مثال 6 إذا كان $z_1 = 5 - 4i$, $z_2 = 3 + i$ فأوجد :

1. $z_2 \cdot z_1$
2. $\overline{(z_2 + z_1)}$
3. $(z_2)^{-1}$

1) $z_2 \cdot z_1 = (3 + i)(5 - 4i)$

$= 15 - 12i + 5i + 4$

$= 19 - 7i$

---

2) $z_2 + z_1 = 8 - 3i$

$\overline{(z_2 + z_1)} = 8 + 3i$

---

3) $z_2^{-1} = \frac{1}{3+i} \times \frac{3-i}{3-i}$

$= \frac{3-i}{9+1} = \frac{3}{10} - \frac{1}{10}i$

مثال 7 اكتب العدد المركب $\frac{-5+i}{2-3i}$ في الصورة الجبرية

$= \frac{-5+i}{2-3i} = \frac{-5+i}{2-3i} \times \frac{2+3i}{2+3i}$

$= \frac{-10 - 15i + 2i + 3i^2}{2^2 + 3^2}$

$= \frac{-13 - 13i}{4+9} = -1 - i$

أسئلة موضوعية

1. الصورة الجبرية للعدد $3 + \sqrt{-4}$ هي $3 + 2i$ (✓)
2. مرافق العدد المركب $z = 3 + 4i$ هو $\bar{z} = -3 - 4i$ (✗)
3. المعكوس الجمعي للعدد المركب $z = 3 - 2i$ هو $-z = 3 + 2i$ (✗)
4. الصورة المبسطة للتعبير $(12 + 5i) - (2 - i)$ هي $10 + 6i$ (✓)



اختر الإجابة الصحيحة :-

1 العدد $32+\sqrt{-225}$ يكتب بالصورة الجبرية كما يلي :

Ⓐ $-15+6\,i$ Ⓑ $6+15\,i$ Ⓒ $6-15\,i$ Ⓓ $32+15\,i$

2 حل المعادلة $-10-6\,i=2\,x+3\,y\,i$ هو :

Ⓐ $x=5\bullet y=2$ Ⓑ $x=-5\bullet y=-2$ Ⓒ $x=-5\bullet y=2$ Ⓓ $x=5\bullet y=-2$

3 إذا كان $z_1=5\,i+2$ ، $z_2=-3-i$ فإن $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}$ تساوى :

Ⓐ $\frac{1}{10}+\frac{17}{10}\,i$ Ⓑ $\frac{-1}{10}-\frac{17}{10}\,i$ Ⓒ $\frac{-1}{10}+\frac{17}{10}\,i$ Ⓓ $\frac{1}{10}-\frac{17}{10}\,i$

4 إذا كان $x\,i^2+3\,y\,i=5+3\,i^5$ فإن $(x\ ,\ y)$ تساوي

Ⓐ $(5,1)$ Ⓑ $(-5,-1)$ Ⓒ $(5,-1)$ Ⓓ $(-5,1)$

5 أبسط صورة للتعبير: $(3+\sqrt{-4})(4+\sqrt{-9})$ هي :

Ⓐ $18+17\,i$ Ⓑ $18+3\sqrt{-9}+4\sqrt{-4}$

Ⓒ $6+17\,i$ Ⓓ 18

6 الصورة الجبرية للعدد المركب $z=(1+2\,i)^2$ هي:

Ⓐ $z=-3+4\,i$ Ⓑ $z=5+4\,i$ Ⓒ $z=-3$ Ⓓ $z=5$

7 الصورة الجبرية للعدد المركب $z=(2-i)^3$ هي:

Ⓐ $z=14+13\,i$ Ⓑ $z=14-13\,i$ Ⓒ $z=2-11\,i$ Ⓓ $z=2-13\,i$

8 الصورة الجبرية للعدد المركب $z=\frac{i}{i+2}$ هي :

Ⓐ $z=\frac{1}{5}+\frac{2}{5}\,i$ Ⓑ $z=-\frac{1}{5}-\frac{2}{5}\,i$

Ⓒ $z=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\,i$ Ⓓ $z=-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\,i$

9 إذا كان $z=i$ فإن z^{250} يساوي :

Ⓐ $-i$ Ⓑ i Ⓒ 1 Ⓓ -1

10 ليكن $x\in Z^+$ فإن مجموعة قيم x التي تجعل العدد $(5+i^x)$ عددًا حقيقيا هي:

Ⓐ Z^+ Ⓑ $\{0,2,4,6,\ldots\}$ Ⓒ $\{1,3,5,\ldots\}$ Ⓓ $\{2,4,6,\ldots\}$



11 $\forall\, n \in \mathbb{Z}^+$ فإن قيمة $(i^{2n+2} + i^{2n+8})$ تساوي :

Ⓐ 1 Ⓑ 0 Ⓒ -1 Ⓓ i^{-2n}

12 $(6 - 2i + 3i^5)^2$ تساوي :

Ⓐ $35 - 12i$ Ⓑ $35 + 12i$ Ⓒ $81 - 12i$ Ⓓ $81 + 12i$



7-2 الإحداثيات القطبية والصورة المثلثية لعدد

القيمة المطلقة لعدد مركب

$$\mathcal{Z} = a + b\,i \rightarrow |\mathcal{Z}| = |a + b\,i| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

مثال 1 أوجد:

1. $|6 - 4\,i| = \sqrt{(6)^2 + (-4)^2}$
$= 2\sqrt{13}$

2. $|-2 + 5\,i| = \sqrt{(-2)^2 + (5)^2}$
$= \sqrt{29}$

3. $|3\,i| = \sqrt{(0)^2 + (3)^2} = 3$

الاحداثيات القطبية

يمكن تمثيل أي نقطة في المستوى باستخدام الإحداثيات القطبية $(r\,,\theta)$ حيث :

r : بعد النقطة عن نقطة الأصل θ : هي الزاوية الموجهة في الوضع القياسي التي يمر ضلعها النهائي بالنقطة

للتحويل من الاحداثيات القطبية إلى الديكارتي : $M(r\,,\theta) \Rightarrow M(x\,,y)$

$$(x = r\,,\cos\theta \quad , \quad y = r\,,\sin\theta)$$

مثال 2 أوجد الزوج المرتب (x, y) الذي يمثل الإحداثيات الديكارتية لكل من النقطتين:

1. $A\,(5, 300°)$

$x = r\ \cos\theta$ | $y = r\sin\theta$

$x = 5\ \cos 300$ | $y = 5\sin 300$

$x = \frac{5}{2}$ | $y = \frac{-5\sqrt{3}}{2}$

∴ الاحداثيات الديكارتية هي

$$\left(\frac{5}{2}, \frac{-5\sqrt{3}}{2}\right)$$

2. $B\left(2, \frac{2\,\pi}{3}\right)$

$x = r\ \cos\theta$ | $y = r\sin\theta$

$x = 2\ \cos\frac{2\,\pi}{3}$ | $y = 2\sin\frac{2\,\pi}{3}$

$x = -1$ | $y = \sqrt{3}$

∴ الاحداثيات الديكارتية هي

$$(-1, \sqrt{3})$$



للتحويل من الاحداثيات الديكارتية إلى القطبية : $M(x,y) \Rightarrow M(r,\theta)$

$$r = \sqrt{x^2+y^2} \quad , \quad \text{"زاوية الاسناد"} \ a = \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|$$

ثم يتم حساب الزاوية θ حسب الربع :

$$\theta = \begin{cases} \alpha & x>0, \quad y>0 \\ \pi-\alpha & x<0, \quad y>0 \\ \pi+\alpha & x<0, \quad y<0 \\ 2\pi-\alpha & x>0, \quad y<0 \end{cases} ; \quad 0 \le \theta < 2\pi$$

مثال ٣ أوجد الزوج المرتب (r,θ) لكل نقطة مما يلي حيث (r,θ)

1 $D\left(3\sqrt{3},3\right)$

$x = 3\sqrt{3} \quad , \quad y = 3$

$r = \sqrt{\left(3\sqrt{3}\right)^2 + (3)^2}$

$= 6$

① $\propto = \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|$

$= \tan^{-1}\left|\frac{3}{3\sqrt{3}}\right|$

$= \frac{1}{6}\pi = \frac{\pi}{6}$

② $x>0 \, , y>0$

$\therefore$ θ تقع في الربع الاول

③ $\theta = \propto$

$\therefore \ \theta = \frac{\pi}{6}$

$\therefore$ الاحداثيات القطبية هي

$\left(6, \frac{\pi}{6}\right)$

2 $C\left(4,-2\sqrt{5}\right)$

$x = 4 \quad , \quad y = -2\sqrt{5}$

$r = \sqrt{(4)^2 + \left(-2\sqrt{5}\right)^2}$

$= 6$

① $\propto = \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|$

$= \tan^{-1}\left|\frac{-2\sqrt{5}}{4}\right|$

$= 0.84$

② $x>0 \, , y<0$

$\therefore$ θ تقع في الربع الرابع

③ $\theta = 2\pi - \propto$

$= 2\pi - 0.84$

$= 5.44$

$\therefore \ (6, 5.44)$



الصورة المثلثية

يمكن كتابة العدد المركب $z = x + y\,i$ على الصورة:

$z = r(\cos\theta + i\ \sin\theta)$ وتعرف بالصورة المثلثية للعدد المركب z.

يسمى r مقياس العدد تسمى θ سعة العدد المركب

مثال ٤ ضع كلًا مما يلي في الصورة المثلثية :

1 $1 + \sqrt{3}\,i$

$x = 1\ ,\quad y = \sqrt{3}$

$r = \sqrt{(1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2$

① $\propto = \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|$

$= \tan^{-1}\left|\frac{\sqrt{3}}{1}\right| = \frac{\pi}{3}$

② $x > 0\ ,y > 0$

$\therefore\ \theta$ تقع في الربع الاول

③ $\theta = \propto \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$

$\therefore$ الصورة المثلثية

$z_1 = r\,(\cos\theta + i\sin\theta)$

$z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

2 $z_2 = -2 - 2\,i$

$x = -2\quad ,\quad y = -2$

$r = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}$

① $\propto = \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|$

$= \tan^{-1}\left|\frac{-2}{-2}\right| = \frac{\pi}{4}$

② $x < 0\ ,y < 0$

$\therefore\ \theta$ تقع في الربع الثالث

③ $\theta = \pi + \propto$

$= \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\,\pi}{4}$

$\therefore$ الصورة المثلثية

$z_2 = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\,\pi}{4} + i\sin\frac{5\,\pi}{4}\right)$

مثال ٥

1 $z_3 = \frac{-3}{4}$

$r = \sqrt{\left(\frac{-3}{4}\right)^2 + (0)^2} = \frac{3}{4}$

$\theta = \pi$

$z_3 = \frac{3}{4}\,(\cos\pi + i\sin\pi)$

2 $z_4 = -\frac{5}{2}\,i$

$r = \sqrt{(0)^2 + \left(-\frac{5}{2}\right)^2} = \frac{5}{2}$

$\theta = \frac{3\,\pi}{2}$

$z_4 = \frac{5}{2}\left(\cos\frac{3\,\pi}{2} + i\sin\frac{3\,\pi}{2}\right)$



مثال 6 إذا كان: $z_1 = 1 + i \quad , \quad z_2 = 3 - 4\,i$

1) أوجد $2\,z_1 - \overline{z}_2$

2) اكتب العدد z_1 اكتب في الصورة المثلثية

1) $2\,z_1 - \overline{z}_2 = 2(1+i) - \overline{(3-4\,i)}$

$= 2 + 2\,i - (3 + 4\,i)$

$= 2 + 2\,i - 3 - 4\,i$

$= -1 - 2\,i$

2) $z_1 = 1 + i \Rightarrow x = 1 \quad , \quad y = 1$

$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$

نفرض أن a زاوية الأسناد للزاوية θ :

$\tan a = \left|\frac{y}{x}\right| = \left|\frac{1}{1}\right| = 1$

$a = \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$

$\because \; x > 0 \, , y > 0$

$\therefore \theta = a = \frac{\pi}{4}$

الصورة المثلثية هي :

$z_1 = r\,(\cos\theta + i\,\sin\theta)$

$z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\,\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

مثال 7 إذا كان: $z_1 = -2 - 2\,i \quad , \quad z_2 = 3 - 5\,i$

1) أوجد z_2^{-1}

2) اكتب العدد z_1 اكتب في الصورة المثلثية

1) $z_2^{-1} = \frac{1}{3 - 5\,i} \times \frac{3 + 5\,i}{3 + 5\,i}$

$= \frac{3 + 5\,i}{9 + 25}$

$= \frac{3}{34} + \frac{5}{34}\,i$

2) $z_1 = -2 - 2\,i \Rightarrow x = -2 \, , y = -2$

$r_1 = |z_1| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

نفرض أن a زاوية الأسناد

$\tan a = \left|\frac{y}{x}\right| = \left|\frac{-2}{-2}\right| = 1$

$\therefore a = \frac{\pi}{4}$

$\because \; x_1 < 0 \, , y_1 < 0$ $\therefore \theta$ تقع في الربع الثالث

$\therefore \theta = \pi + a = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\,\pi}{4}$

الصورة المثلثية هي :

$z_1 = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\,\pi}{4} + i\,\sin\frac{5\,\pi}{4}\right)$



مثال ٨ اكتب العدد $\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}$ في الصورة الجبرية

ثم حوله للصورة المثلثية مستخدما السعة الأساسية

$$\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}=\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}\times\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}-i}$$

$$=\frac{2-2\sqrt{3}\,i}{3+1}$$

$$=\frac{2-2\sqrt{3}\,i}{4}$$

$$=\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\,i$$

$$x=\frac{1}{2}\quad,\quad y=\frac{-\sqrt{3}}{2}$$

$$r=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{1}=1$$

نفرض أن a زاوية الأسناد

$$\tan a=\left|\frac{y}{x}\right|=\left|\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}\right|=\sqrt{3}$$

$$\therefore a=\frac{\pi}{3}$$

$\because\ x>0\ ,y<0$ $\therefore\ \theta$ تقع في الربع الرابع

$$\theta=2\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{3}$$

الصورة المثلثية هي :

$$\mathcal{Z}=\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\ \sin\frac{5\pi}{3}\right)$$

أسئلة موضوعية

1. الإحداثيات الديكارتية للنقطة : $A\left(4,\frac{7\pi}{6}\right)$ هي $A(-2\sqrt{3},2)$ (✗)

2. الإحداثيات الديكارتية للنقطة : $B(\sqrt{2},135°)$ هي $B(-1,1)$ (✓)



3 الإحداثيات القطبية للنقطة : $M\left(\frac{-\sqrt{2}}{2},\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$ هي $A\left(1,\frac{5\pi}{4}\right)$ (✓)

4 العدد المركب $z=\sqrt{3}-i$ بصورة المثلثية هو : $z=2\left(cos\frac{\pi}{6}+i\ sin\frac{\pi}{6}\right)$ (✗)

5 الصورة الجبرية للعدد المركب : $z=\sqrt{2}\left(cos\frac{7\pi}{4}+i\ sin\frac{7\pi}{4}\right)$ هي $z=1-i$ (✓)

اختر الإجابة الصحيحة :-

1 الإحداثيات الديكارتية للنقطة $A\left(4,\frac{5\pi}{3}\right)$ هي :

Ⓐ $A(2,2\sqrt{3})$ Ⓑ $A(-2,2\sqrt{3})$ Ⓒ $A(-2,-2\sqrt{3})$ Ⓓ $A(2,-2\sqrt{3})$

2 الإحداثيات القطبية للنقطة $B\left(\frac{-\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ هي :

Ⓐ $B\left(1,\frac{-\pi}{4}\right)$ Ⓑ $B\left(1,\frac{\pi}{4}\right)$ Ⓒ $B\left(1,\frac{3\pi}{4}\right)$ Ⓓ $B\left(1,\frac{-3\pi}{4}\right)$

3 الصورة المثلثية للعدد المركب $z=2-2\sqrt{3}\,i$ حيث $\theta\in[0,2\pi]$ هي :

Ⓐ $z=4\left(cos\frac{5\pi}{3}+i\ sin\frac{5\pi}{3}\right)$ Ⓑ $z=4\left(cos\frac{\pi}{3}+i\ sin\frac{\pi}{3}\right)$

Ⓒ $z=4\left(cos\frac{\pi}{6}+i\ sin\frac{\pi}{6}\right)$ Ⓓ $z=4\left(cos\frac{2\pi}{3}+i\ sin\frac{2\pi}{3}\right)$

4 الصورة المثلثية للعدد المركب $z=\frac{-4}{1-i}$ حيث $0\le\theta<2\pi$ هي :

Ⓐ $z=4\left(cos\frac{5\pi}{4}+i\ sin\frac{5\pi}{4}\right)$ Ⓑ $z=2\sqrt{2}\left(cos\frac{5\pi}{4}+i\ sin\frac{5\pi}{4}\right)$

Ⓒ $z=2\sqrt{2}\left(cos\frac{3\pi}{4}+i\ sin\frac{3\pi}{4}\right)$ Ⓓ $z=2\sqrt{2}\left(cos\frac{7\pi}{4}+i\ sin\frac{7\pi}{4}\right)$

5 الصورة الجبرية للعدد المركب $z=3\left(cos\frac{2\pi}{3}-i\ sin\frac{2\pi}{3}\right)$ حيث $0\le\theta<2\pi$ هي :

Ⓐ $z=-\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i$ Ⓑ $z=-\frac{3}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}i$

Ⓒ $z=-\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i$ Ⓓ $z=\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i$



7-3 حل معادلات

أولا : حل معادلات من الدرجة الأولى في $\mathbb{C}$

مثال ١ أوجد مجموعة حل المعادلة: $3z+1-i=7+3i$ في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$

$$3z=7+3i-1+i$$

$$\frac{3z}{3}=\frac{6+4i}{3}$$

$$z=\frac{6}{3}+\frac{4}{3}i$$

$$z=2+\frac{4}{3}i$$

$$\left\{2+\frac{4}{3}i\right\}=ح$$

مثال ٢ أوجد مجموعة حل المعادلة : $2z+i=3+2i$ في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$

$$2z=3+2i-i$$

$$\frac{2z}{2}=\frac{3+i}{2}$$

$$z=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i$$

$$\left\{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i\right\}=ح$$

مثال ٣ أوجد مجموعة حل المعادلة: $5z-4+2i=3z+1-4i$

$$5z-3z=1-4i+4-2i$$

$$\frac{2z}{2}=\frac{5-6i}{2}$$

$$z=\frac{5}{2}-\frac{6}{2}i$$

$$z=\frac{5}{2}-3i\rightarrow\left\{\frac{5}{2}-3i\right\}=ح$$



مثال ٤ أوجد مجموعة حل المعادلة : $2\,z + i\,\bar{z} = 5 - 2\,i$ في $\mathbb{C}$

نفرض $z = x + y\,i \rightarrow \bar{z} = x - y\,i$

$$2\,(x + y\,i) + i\,(x - y\,i) = 5 - 2\,i$$

$$2\,x + 2\,y\,i + x\,i - y\,i^2 = 5 - 2\,i$$

$$2\,x + 2\,y\,i + x\,i + y = 5 - 2\,i$$

$$2\,x + y + (2\,y + x)\,i = 5 - 2\,i$$

$$2\,x + y = 5 \qquad 2\,y + x = -2$$

بالالة الحاسبة $mode\ 51 \leftarrow$

$$x = 4 \quad , \quad y = -3 \rightarrow z = 4 - 3\,i$$

$$\{4 - 3\,i\} = \text{ع ح}$$

مثال ٥ أوجد مجموعة حل المعادلة : $z + i = 2\,\bar{z} + 1$ في $\mathbb{C}$

نفرض $z = x + y\,i \rightarrow \bar{z} = x - y\,i$

$$\therefore (x + y\,i) + i = 2\,(x - y\,i) + 1$$

$$x + y\,i + i = 2\,x - 2\,y\,i + 1$$

$$x + (y + 1)\,i = 2\,x - 2\,y\,i + 1$$

$$x = 2\,x + 1 \qquad y + 1 = -2\,y$$

$$x - 2\,x = 1 \qquad y + 2\,y = -1$$

$$\frac{-x}{-1} = \frac{1}{-1} \qquad 3\,y = -1$$

$$x = -1 \qquad y = \frac{-1}{3}$$

$$z = -1 - \frac{1}{3}\,i$$

$$\left\{-1 - \frac{1}{3}\,i\right\} = \text{ع ح}$$

مثال ٦ أوجد مجموعة حل كل من المعادلات التالية : $z + 2\,\bar{z} = 4 + i$

نفرض $z = x + y\,i \rightarrow \bar{z} = x - y\,i$

$$(x + y\,i) + 2\,(x - y\,i) = 4 + i$$

$$x + y\,i + 2\,x - 2\,y\,i = 4 + i$$

$$3\,x - y\,i = 4 + i$$

$$3\,x = 4 \qquad -y = 1$$

$$x = \frac{3}{4} \qquad y = -1$$

$$z = \frac{3}{4} - i$$

$$\left\{\frac{3}{4} - i\right\} = \text{ع ح}$$



مثال ٧ أوجد مجموعة حل المعادلة :

$$\mathcal{Z} + 3(1+i)\mathcal{Z} - 8(2-i) = 0$$

$$1\mathcal{Z} + (3+3i)\mathcal{Z} - 16 + 8i = 0$$

$$(1+3+3i)\mathcal{Z} = 16 - 8i$$

$$\frac{(4+3i)\mathcal{Z}}{4+3i} = \frac{16-8i}{4+3i} \cdot \frac{4-3i}{4-3i}$$

$$\mathcal{Z} = \frac{64 - 48i - 32i - 24}{(4)^2 + (3)^2}$$

$$\mathcal{Z} = \frac{40 - 80i}{25}$$

$$\mathcal{Z} = \frac{40}{25} - \frac{80}{25}i$$

$$\mathcal{Z} = \frac{8}{5} - \frac{16}{5}i$$

$$\left\{\frac{8}{5} - \frac{16}{5}i\right\} = \text{ح ص}$$

مثال ٨ أوجد مجموعة حل المعادلة :

1) $\mathcal{Z}^2 - 2\mathcal{Z} + 2 = 0$

$a = 1 \ , \quad b = -2 \ , \quad c = 2$

$$\mathcal{Z} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\mathcal{Z} = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(2)}}{2(1)}$$

$$\mathcal{Z} = \frac{2 \pm 2i}{2}$$

$$\mathcal{Z}_1 = \frac{2+2i}{2}$$

$$\therefore \mathcal{Z}_1 = 1 + i$$

$$\mathcal{Z}_2 = \frac{2-2i}{2}$$

$$\therefore \mathcal{Z}_2 = 1 - i$$

$$\{1+i, 1-i\} = \text{ح ص}$$

2) $x^2 + 6x + 25 = 0$

$a = 1 \ , \quad b = 6 \ , \quad c = 25$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{(6)^2 - 4(1)(25)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{-6 \pm 8i}{2}$$

$$x_1 = \frac{-6+8i}{2}$$

$$\therefore x_1 = -3 + 4i$$

$$x_2 = \frac{-6-8i}{2}$$

$$\therefore x_2 = -3 - 4i$$

$$\{-3+4i, -3-4i\} = \text{ح ص}$$



الجذر التربيعي لعدد مركب

مثال ٩ أوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب $z = -3 - 4i$

ليكن $w = m + ni$ جذرا تربيعيا للعدد z : فيكون $w^2 = z$

بالتعويض $(m + ni)^2 = -3 - 4i$

خاصية ضرب كثيرات الحدود $m^2 - n^2 + 2mni = -3 - 4i$

خاصية المساواة لعددين مركبين

$$\begin{cases} m^2 - n^2 = -3 \rightarrow\rightarrow (1) \\ 2mn = -4 \quad \rightarrow\rightarrow (2) \end{cases}$$

نضيف المعادلة: $|w|^2 = |z|$

$$\left(\sqrt{m^2 + n^2}\right)^2 = \left(\sqrt{(-3)^2 + (-4)^2}\right)$$

$$m^2 + n^2 = 5 \rightarrow\rightarrow (3)$$

بجمع المعادلتين $(1), (3)$ نحصل على :

$$\begin{cases} m^2 - n^2 = -3 \\ m^2 + n^2 = 5 \end{cases}$$

$$2m^2 = 2 \Rightarrow m^2 = 1 \Rightarrow m = \pm 1$$

بالتعويض في (1) نحصل على : $\therefore n^2 = 4 \Rightarrow n = \pm 2$

$$\begin{cases} m = 1 \ , \ m = -1 \\ n = 2 \ , \ n = -2 \end{cases}$$

من المعادلة $2mn = -4$ نستنتج أن m, n لهما إشارتان مختلفتان

$\therefore m = 1, n = -2$ أو $m = -1, n = 2$

الجذران التربيعيان للعدد المركب $z = -3 - 4i$

هما $w_1 = 1 - 2i \ , \ w_2 = -1 + 2i$



مثال ١٠ أوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب $\mathcal{Z} = 3 + 4\,i$

ليكن $w = m + n\,i$ جذرا تربيعيا للعدد $\mathcal{Z}$: فيكون $w^2 = \mathcal{Z}$

$$(m + n\,i)^2 = 3 + 4\,i$$

$$m^2 - n^2 + 2\,m\,n\,i = 3 + 4\,i$$

$$\begin{cases} m^2 - n^2 = 3 \to\to (1) \\ 2\,m\,n = 4 \quad \to\to (2) \end{cases}$$

$$|w|^2 = |\mathcal{Z}|$$

$$\left(\sqrt{m^2 + n^2}\right)^2 = \left(\sqrt{3^2 + 4^2}\right)$$

$$m^2 + n^2 = 5 \quad \to\to (3)$$

من (1) ، (3) بالجمع :

$$\begin{cases} m^2 + n^2 = 5 \\ m^2 - n^2 = 3 \end{cases}$$

$$2\,m^2 = 8 \Rightarrow m^2 = 4 \Rightarrow m = \pm 2$$

$$n^2 = 1 \Rightarrow n = \pm 1$$

$$\therefore m = -2 \ , \quad n = -1$$

$$m = 2 \ , \quad n = 1 \text{ أو}$$

∴ الجذران التربيعيان للعدد المركب $\mathcal{Z} = 3 + 4\,i$ هما :

$$w_1 = 2 + i \ , \quad w_2 = -2 - i$$

مثال ١١ أوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب $\mathcal{Z} = -3 + 4\,i$

ليكن $w = m + n\,i$ جذرا تربيعيا للعدد $\mathcal{Z}$: فيكون $w^2 = \mathcal{Z}$

$$\therefore (m + n\,i)^2 = -3 + 4\,i \to m^2 - n^2 + 2\,m\,n\,i = -3 + 4\,i$$

$$\begin{cases} m^2 - n^2 = -3 \to\to (1) \\ 2\,m\,n = 4 \quad \to\to (2) \end{cases} \to \text{ لهما نفس الإشارة } n\,,m$$

$$\therefore |w|^2 = |\mathcal{Z}| \to \left(\sqrt{m^2 + n^2}\right)^2 = \left(\sqrt{(-3)^2 + (4)^2}\right)$$

$$\therefore m^2 + n^2 = 5 \quad \to\to (3)$$

من المعادلة (1) ، (3) نجد أن : $2\,m^2 = 2 \Rightarrow m = \pm 1$

$$2\,n^2 = 8 \Rightarrow n = \pm 2$$

∴ الجذران التربيعيان للعدد المركب $\mathcal{Z} = -3 + 4\,i$ هما :

$$w_1 = 1 + 2\,i \ , \quad w_2 = -1 - 2\,i$$



أسئلة موضوعية

1. حل المعادلة $i - 5 = 2 + \bar{z}$ هو $z = 3 + i$ (✓)
2. حل المعادلة $0 = 5\,i - 3 - \bar{z} + 2\,z$ هو $z = 1 - 5\,i$ (✗)
3. مجموعة حل المعادلة $0 = 5 + z\,4 - z^2$ هي $\{-2 - i\,, 2 + 1\}$ (✗)
4. الجذران التربيعيان للعدد -1 هما $-1\,, 1$ (✗)
5. الجذران التربيعيان للعدد $z = 16 + 30\,i$ هما $z_1 = 5 + 3\,i$، $z_2 = -5 - 3\,i$ (✓)
6. إذا كان $z_1\,, z_2$ جذران تربيعيان للعدد z فإن $z_1 + z_2 = 0$ (✓)

اختر الإجابة الصحيحة :-

1. حل المعادلة $2\,z - 5 + 6\,i = -3\,\bar{z}$ هو :

Ⓐ $z = 1 + 6\,i$ Ⓑ $z = -1 + 6\,i$ Ⓒ $z = 1 - 6\,i$ Ⓓ $z = -1 - 6\,i$

2. مجموعة حل المعادلة $0 = 20 + z\,4 - z^2$ هي :

Ⓐ $\{2 - 4\,i\,, -2 - 4\,i\}$ Ⓑ $\{-2 + 4\,i\,, -2 - 4\,i\}$

Ⓒ $\{2 - 4\,i\,, -2 + 4\,i\}$ Ⓓ $\{2 - 4\,i\,, 2 + 4\,i\}$

3. الجذران التربيعيان للعدد المركب : $z = 33 - 56\,i$ هما :

Ⓐ $\begin{cases} z_1 = -7 - 4i \\ z_2 = 7 + 4i \end{cases}$ Ⓑ $\begin{cases} z_1 = 7 - 4i \\ z_2 = -7 + 4i \end{cases}$

Ⓒ $\begin{cases} z_1 = 7 + 4i \\ z_2 = 7 - 4i \end{cases}$ Ⓓ $\begin{cases} z_1 = -7 - 4i \\ z_2 = -7 + 4i \end{cases}$

4. حل المعادلة $(3 - 4\,i)\,z = 5 - 2\,i$ هو :

Ⓐ $\frac{5}{3} + \frac{1}{2}\,i$ Ⓑ $\frac{5}{3} - \frac{1}{2}\,i$ Ⓒ $\frac{23}{25} + \frac{14}{25}\,i$ Ⓓ $\frac{23}{25} - \frac{14}{25}\,i$



8-1 التمثيل البياني للدوال المثلثية (الجيب، جيب التمام، الظل)

الدوال الجيبية

تسمى الدالة على الصورة $y = a \sin b\,x$ دالة الجيب والدالة على الصورة $y = a \cos b\,x$ دالة جيب التمام حيث $a \neq 0, b \neq 0$ وهما دالتان جيبيتان وكل منهما دورية

1. تسمى $|a|$ سعة الدالة الجيبية.
2. $|b|$ تمثل عدد الدورات في الفترة $[0, 2\pi]$
3. $\frac{2\pi}{|b|}$ تمثل دورة الدالة.

مثال 1 أوجد الدورة والسعة لكل دالة مما يلي:

1. $y = -2 \cos 5x$

① $a = -2$, $b = 5$

② السعة $= |a|$

$= |-2| = 2$

③ الدورة $= \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{5}$

2. $y = \frac{1}{2}\cos(-x)$

① $a = \frac{1}{2}$, $b = -1$

② السعة $= |a| = \left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$

③ الدورة $= \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$

3. $y = \sin 2x$

① $a = 1$, $b = 2$

② السعة $= |a| = |1| = 1$

③ الدورة $= \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{2} = \pi$

4. $y = 3 \sin \frac{x}{3}$

① $a = 3$, $b = \frac{1}{3}$

② السعة $= |a| = |3| = 3$

③ الدورة $= \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{\frac{1}{3}} = 6\pi$



التمثيل البياني للدوال المثلثية

أولا: دالة الجيب

$y = \sin x$ هي دالة مثلثية مجالها $\mathbb{R}$ ومداها $[-1, 1]$ ، وهي دالة دورية ذات دورة 2π وسعتها تساوي واحد.

مثال ٢ أوجد السعة والدورة لكل دالة مما يلي ثم ارسم بيانها : $y = 3 \sin 2x$

∵ الدالة دالة دورية

① $a = 3$ ، $b = 2$

② السعة $= |a| = |3| = 3$

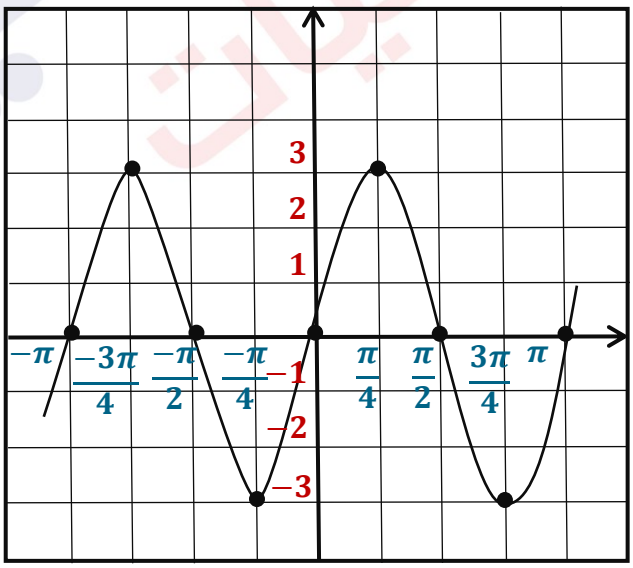
③ الدورة $= \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{2} = \pi$

④ ربع الدورة $= \pi \div 4 = \frac{\pi}{4}$

⑤ جدول (دائمًا — ربع الدورة)

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
y	0	3	0	-3	0

⑥ الرسم





مثال ٣ أوجد السعة والدورة للدالة $y = -3\sin x \ , \ x \in [-\pi \ , \ 2\pi]$ ثم ارسم بيانها

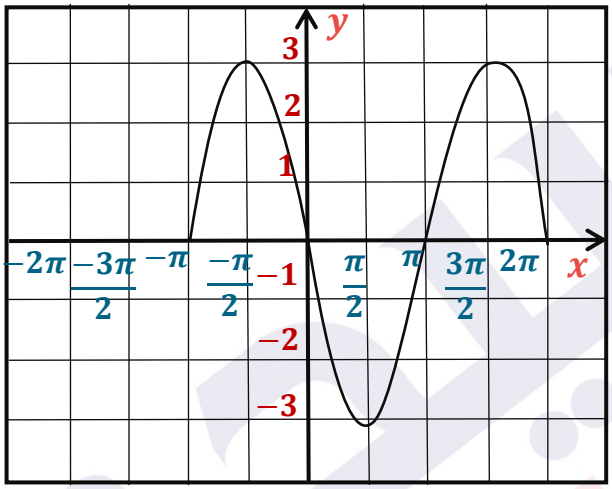
$y = -3\sin x$ هى دالة دورية

السعة : $|a| = |-3| = 3$

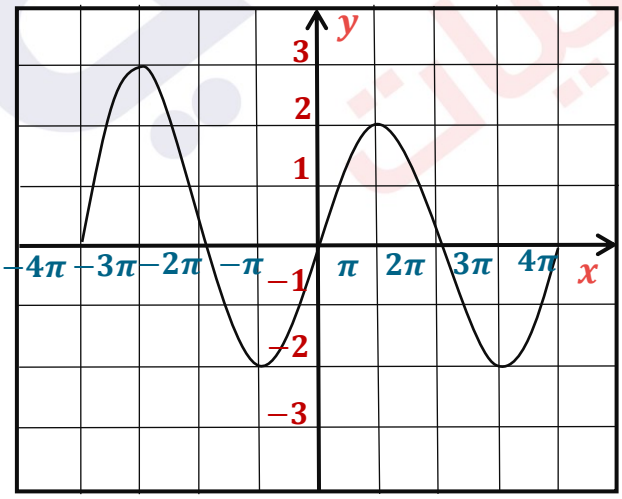
الدورة : $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$

ربع الدورة : $\frac{\pi}{2}$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y = -3\sin x$	0	-3	0	3	0



مثال ٤ أوجد السعة والدورة للدالة ثم ارسم بيانها: $y = 2\sin\left(\frac{1}{2}x\right) \ , -4\pi \leq x \leq 4\pi$



$y = 2\sin\left(\frac{1}{2}x\right)$ هى دالة دورية

السعة : $|a| = |2| = 2$

الدورة : $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{\left|\frac{1}{2}\right|} = 4\pi$

ربع الدورة : π

x	0	π	2π	3π	4π
$y = 2\sin\left(\frac{1}{2}x\right)$	0	2	0	-2	0



ثانيا : دالة جيب التمام

$y = \cos x$ هي دالة مثلثية مجالها هو أيضًا $\mathbb{R}$ ومداها $[-1, 1]$ ، وهي دالة دورية ذات دورة 2π وسعتها تساوي واحد.

مثال ٥ أوجد السعة والدورة لكل دالة مما يلي ثم ارسم بيانها : $y = 3\cos 2x$

∵ الدالة دالة دورية

① $a = 3$ ، $b = 2$

② السعة $= |a| = |3| = 3$

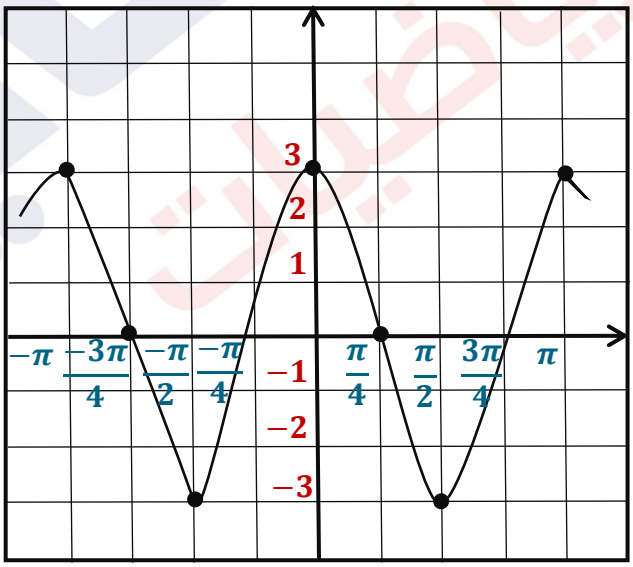
③ الدورة $= \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{2} = \pi$

④ ربع الدورة $= \pi \div 4 = \frac{\pi}{4}$

⑤ جدول

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
y	3	0	-3	0	3

⑥ الرسم





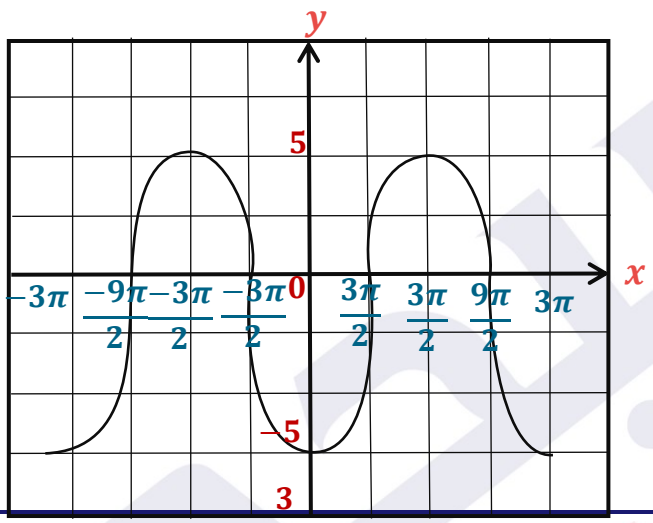
مثال ٦ أوجد السعة والدورة للدالة : $y = -5\cos\left(\frac{2x}{3}\right)$ ثم ارسم بيانها

السعة $= |a| = |-5| = 5$

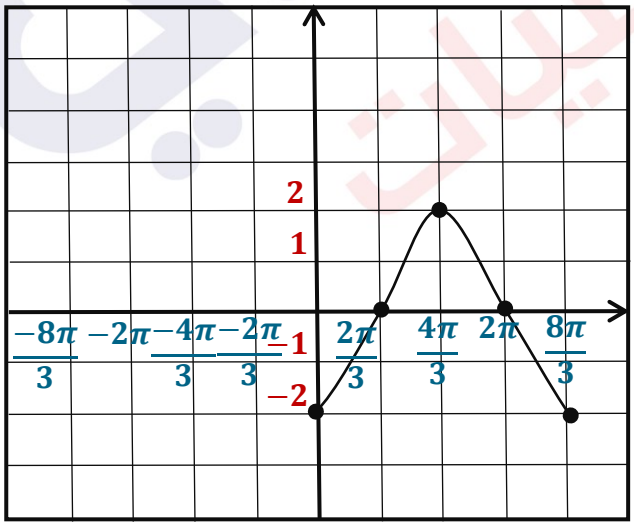
الدورة : $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{\left|\frac{2}{3}\right|} = \frac{3}{2} \times 2\pi = 3\pi$

$\therefore$ ربع الدورة $= \frac{3\pi}{4}$

x	0	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{9\pi}{4}$	3π
$y = -5\cos\left(\frac{2x}{3}\right)$	-5	0	5	0	-5



مثال ٧ أوجد السعة والدورة للدالة : $y = 2\cos\left(\frac{3}{4}x\right)$, $0 \le x \le 2\pi$



دالة دورية

$a = -2$, $b = \frac{3}{4}$

السعة : $|a| = |-2| = 2$

الدورة : $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{\left|\frac{3}{4}\right|} = \frac{8\pi}{3}$

ربع الدورة $= \frac{8\pi}{3} \div 4 = \frac{2\pi}{3}$

x	0	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$	2π	$\frac{8\pi}{3}$
y	-2	0	2	0	-2



ثالثاً : دالة الظل

هي الدالة مثلثية على الصورى $y = \tan x$ وتكتب : $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$: $\cos x \neq 0$

مجالها $D = \mathbb{R} - \left\{x : x = \frac{\pi}{2} + n\pi,\ n \in \mathbb{Z}\right\}$

مداها $\mathbb{R}$

وهي دالة دورية ذات دورة π

مثال ٨ أوجد الدورة لكل دالة مما يلي ثم ارسم بيانها : $y = \tan 2x, x \in \left(\frac{-\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$

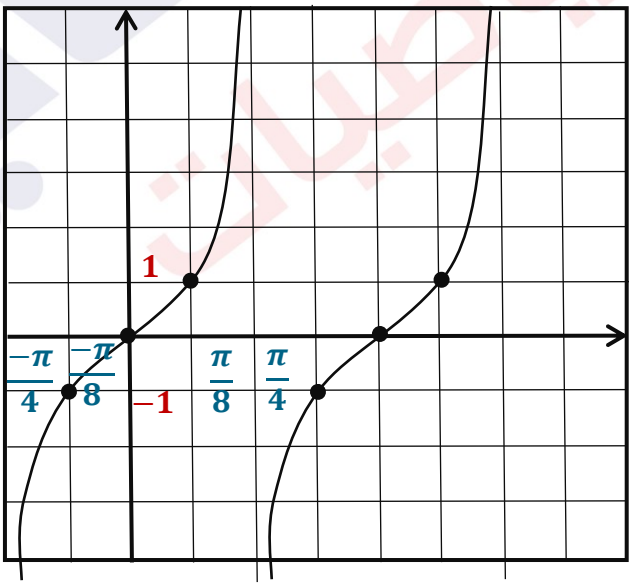
① $b = 2$

② الدورة $= \frac{\pi}{|b|} = \frac{\pi}{2}$

③ ربع الدورة $= \frac{\pi}{2} \div 4 = \frac{\pi}{8}$

④ جدول

x	$\frac{-\pi}{4}$	$\frac{-\pi}{8}$	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$
y	غير معروف	-1	0	1	غير معروف





أسئلة موضوعية

1 معادلة الدالة المثلثية $y = a\sin(b\,\theta)$ حيث السعة 5 والدورة $3\,\pi$ هي $y = 5\sin\left(\frac{2}{3}\theta\right)$ (✗)

2 الدالة التي دورتها $\frac{\pi}{2}$ وسعتها 3 يمكن أن تكون $y = 3\sin\left(\frac{\pi\,\theta}{2}\right)$ (✗)

3 الدالة $y = 3\tan\left(\frac{3}{4}x\right)$ و دورتها $\frac{4}{3}\pi$ (✓)

4 الدالة التي دورتها $\frac{\pi}{3}$ وسعتها 4 يمكن أن تكون $y = -4\cos(6\,x)$ (✓)

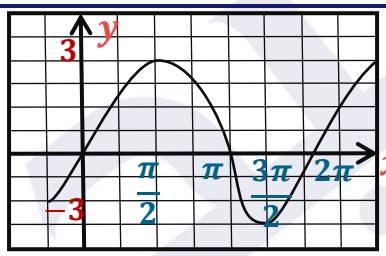
5 سعة الدالة $y = -5\cos 2\,x$ هي -5 (✗)

6 في الدالة f حيث $f(x) = a\cos b\,x$ يكون $2\,|a| = max\,f + min\,f$ (✗)

7 الدالتان g , f حيث $g(x) = \tan 4\,x$ ، $f(x) = \cos 8\,x$ لهما نفس الدورة. (✓)

اختر الإجابة الصحيحة :-

1 البيان التالي يمثل بيان الدالة :



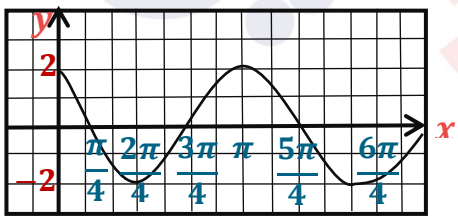
Ⓐ $f(x) = 3\cos x$ Ⓑ $f(x) = 3\sin x$

Ⓒ $f(x) = -3\sin x$ Ⓓ $f(x) = \sin 3\,x$

2 لتكن $f(x) = 3\tan 2\,x$ فإن

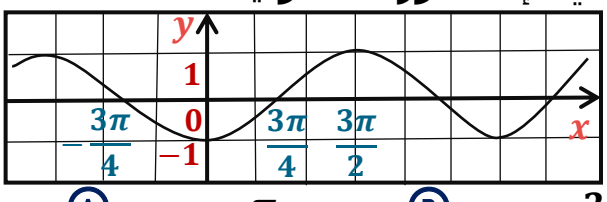
Ⓐ السعة $= 1$ Ⓑ السعة $= 2$ Ⓒ السعة $= 3$ Ⓓ f ليس لها سعة

3 ليكن بيان f كما في الشكل التالي :



Ⓐ $2\cos 2\,x$ Ⓑ $\cos 2\,x$ Ⓒ $\cos\frac{x}{2}$ Ⓓ $\sin 2\,x$

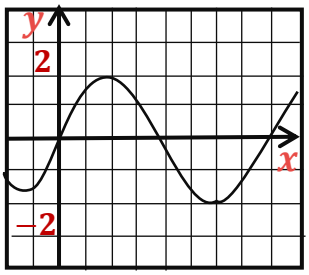
4 ليكن x دالة دورية بيانها كما في الشكل التالي فإن الدورة تساوي :

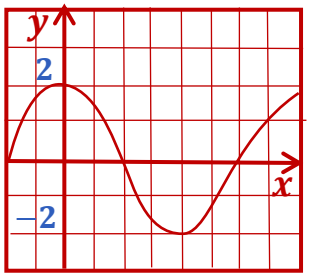


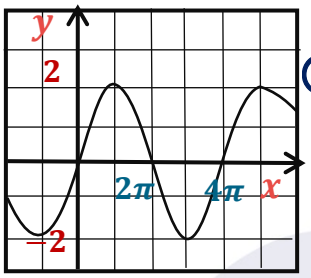
Ⓐ π Ⓑ $2\,\pi$ Ⓒ $3\,\pi$ Ⓓ $\frac{6\,\pi}{4}$

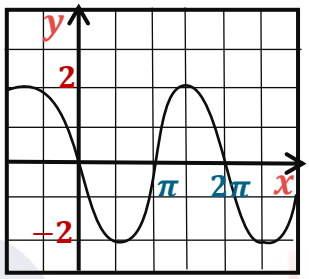


5 لتكن الدالة g حيث $g(x) = a \sin b\,x$ فإن بيان g لا يمكن أن يكون :

Ⓐ 

Ⓑ 

Ⓒ 

Ⓓ 

6 معادلة الدالة المثلثية $y = a\cos(b\,x)$ حيث السعة 4 والدورة 6 يمكن أن تكون :

Ⓐ $y = \frac{1}{4}cos\left(\frac{x}{3}\right)$

Ⓑ $y = -4\cos\left(\frac{\pi}{3}x\right)$

Ⓒ $y = -4\,cos\left(\frac{3}{\pi}x\right)$

Ⓓ $y = 4\,cos\left(\frac{\pi}{3}x\right)$

7 الدالة $y = a\cos(b\,x)$ حيث $a = 2$ ودورتها $\frac{\pi}{4}$ يمكن أن تكون :

Ⓐ $y = 2\,cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)$

Ⓑ $y = 8\,cos(8\,x)$

Ⓒ $y = 2\,cos(8\,x)$

Ⓓ $y = 8\,cos\left(\frac{x}{4}\right)$

8 معادلة الدالة المثلثية $y = a\sin(b\,x)$ حيث السعة 3 والدورة $\frac{\pi}{2}$ يمكن أن تكون :

Ⓐ $y = 3\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ أو $y = -3\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$

Ⓑ $y = 3\sin\left(\frac{2}{\pi}x\right)$ أو $y = -3\sin\left(\frac{2}{\pi}x\right)$

Ⓒ $y = 3\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)$ أو $y = -3\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)$

Ⓓ $y = 3\,sin(4\,x)$ أو $y = -3\,sin(4\,x)$

9 معادلة الدالة المثلثية $y = \tan(b\,x)$ حيث الدورة $\frac{3}{4}$ يمكن أن تكون :

Ⓐ $y = \tan\left(\frac{4}{3}\pi\,x\right)$

Ⓑ $y = \tan\left(\frac{3}{4}x\right)$

Ⓒ $y = \tan\left(\frac{4}{3}x\right)$

Ⓓ $y = \tan\left(\frac{3}{4}\pi\,x\right)$

10 في الدالة المثلثية $y = -2\sin\left(\frac{3}{5}x\right)$ السعة والدورة هما :

Ⓐ $-2\,,\frac{3\,\pi}{5}$

Ⓑ $2\,,\frac{10\,\pi}{3}$

Ⓒ $2\,,\frac{3\,\pi}{5}$

Ⓓ $2\,,\frac{2\,\pi}{15}$



8-3 قانون الجيب

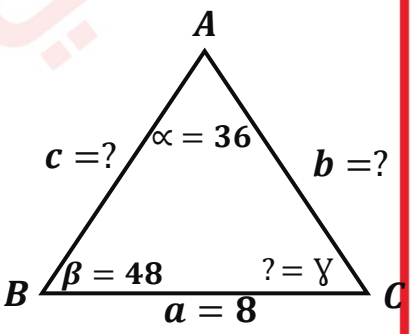
في أي مثلث ABC: فإن

$$\frac{\sin a}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}$$

ملاحظات

1. يستخدم قانون الجيب عند وجود زاوية وضلع متقابلين معلومين.
2. إذا علمنا زاويتين في مثلث يمكن دائماً حساب الزاوية الثالثة من قانون مجموع زوايا المثلث $180°$
3. إذا علمنا ضلعين وزاوية مقابلة لأحدهما في مثلث فإن الزاوية الثانية يمكن أن تكون حادة أو منفرجة وتكون الزاوية المنفرجة مقبولة إذا كان مجموع الزاويتين أقل من $180°$

مثال 1 حل ΔABC حيث : $a = 8\ cm\ ,\ \beta = 48°\ ,\ a = 36°$



$\gamma = 180° - (36° + 48°) = 96°$

لأن مجموع قياسات زوايا المثلث $180°$

$$\because \frac{\sin \propto}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}$$

$$\boxed{\frac{\sin 36}{8}} = \frac{\sin 48}{b} = \frac{\sin 96}{c}$$

$$\frac{\sin 36}{8} = \frac{\sin 48}{b}$$

$$b = \frac{8 \sin 48}{\sin 36}$$

$$b = 10.11\ cm$$

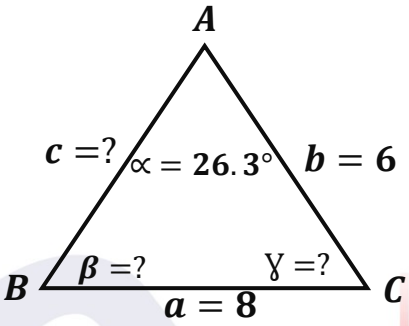
$$\frac{\sin 36}{8} = \frac{\sin 96}{c}$$

$$c = \frac{8 \sin 96}{\sin 36}$$

$$c = 13.53\ cm$$



مثال ٢ حل ΔABC حيث : $a = 7\ cm\ ,\ b = 6\ cm\ ,\ \alpha = 26.3°$



$\because \frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}$

$\frac{\sin 26.3}{7} = \frac{\sin \beta}{6} = \frac{\sin \gamma}{c}$

$\sin \beta = \frac{6 \times \sin 26.3}{7} = 0.37$

$\beta_1 = 21.7°$

$\gamma = 180° - (26.3° + 21.7°) = 132$

$c = \frac{7 \times \sin 132}{\sin 26.3} = 11.74$

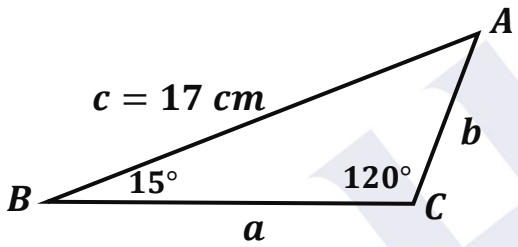
$\beta_2 = 180° - 21.7° = 158.3°$

$\beta_2 + \alpha = 184.6 > 180°$

مرفوض

مثال ٣ حل المثلث ABC

لحل المثلث نوجد a, b, a



$a = 180° - (15° + 120°) = 45°$

$\frac{\sin a}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}$

$\frac{\sin 45°}{a} = \frac{\sin 15°}{b} = \frac{\sin 120°}{17}$

$b = \frac{17 \times \sin 15°}{\sin 120°}$

$b \approx 5.08\ cm$

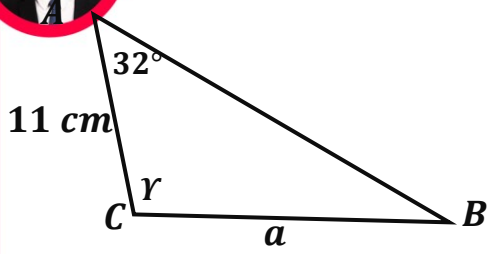
$a = \frac{17 \times \sin 45°}{\sin 120°}$

$a \approx 13.88\ cm$



مثال ٤ في المثلث ABC :

إذا كان $a = 32°$ ، $b = 11\ cm$ ، $a = 17\ cm$ ، أوجد γ



$$\frac{\sin a}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}$$

$$\frac{\sin 32°}{17} = \frac{\sin \beta}{11} = \frac{\sin \gamma}{c}$$

$$\sin \beta = \frac{11 \sin 32°}{17} \approx 0.34 > 0$$

$$\therefore \beta \approx 20.1°$$

توجد زاويتان β تحققان $\sin \beta \approx 0.34$ و $0° < \beta < 180$

$\beta_1 \approx 20.1°$

$\therefore \gamma \approx 180° - (32° + 20.1°) \approx 127.9°$

أو $\beta_2 \approx 180° - 20.1° = 159.9°$

$\beta_2 + a \approx 159.9° + 32° = 191.9° > 180°$ مرفوضة

أسئلة موضوعية

1 في المثلث ABC : $m(\hat{B}) = 30°, m(\hat{A}) = 100°, BC = 20\ cm$ فإن $AC = 10.154\ cm$ (✓)

2 في المثلث ABC : $m(\hat{B}) = 80°, AB = 12\ cm, AC = 16\ cm$ فإن $m(\hat{C}) = 50°$ (✗)

3 في كل مثلث ABC يكون $\frac{a}{\sin a} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{\sin \gamma}{c}$ (✗)

اختر الإجابة الصحيحة :-

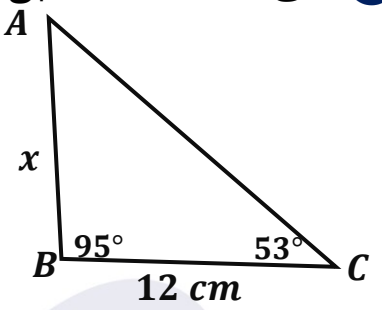
1 في المثلث ABC : $m(\hat{B}) = 40°, m(\hat{A}) = 80°, AC = 10\ cm$ فإن طولى $\overline{BC}, \overline{AB}$ يساويان :

Ⓐ $7.43\ cm, 15.32\ cm$ Ⓑ $6.53\ cm, 13.47\ cm$

Ⓒ $13.47\ cm, 15.32\ cm$ Ⓓ $7.43\ cm, 6.53\ cm$



2 فى المثلث المقابل ، x تساوي حوالي :



Ⓐ $8.6\ cm$ Ⓑ $15\ cm$

Ⓒ $18.1\ cm$ Ⓓ $19.2\ cm$

3 مثلث قياسات زواياه $70°, 60°, 50°$ ، طول أصغر ضلع فيه هو $9\ cm$ فإن أكبر أضلاعه حوالى .....

Ⓐ $11\ cm$ Ⓑ $11.5\ cm$ Ⓒ $12\ cm$ Ⓓ $12.5\ cm$

4 القياسات المعطاة في المثلث ABC : $AB = 19\ cm, AC = 23\ cm, m(\hat{A}) = 56°$ ، طول $\overline{BC}$ يساوي :

Ⓐ $12\ cm$ Ⓑ $18\ cm$

Ⓒ $19\ cm$ Ⓓ لا يمكن استخدام قانون الجيب



8-4 قانون جيب التمام

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos a$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2.a.c.\cos \beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2.a.b.\cos \gamma$$

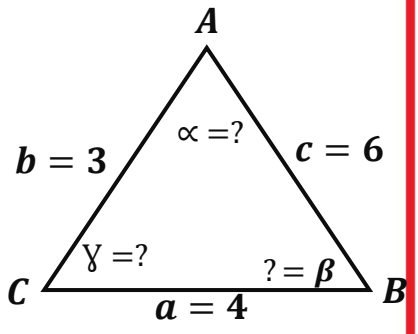
ملاحظات

1. تستخدم القوانين السابقة لإيجاد ضلع بمعلومية ضلعين وزاوية محصورة بينهما.
2. يمكن كتابة القوانين الثلاثة السابقة بطريقة أخرى تستخدم لإيجاد زاوية ما بمعلومية الأضلاع الثلاثة

$$\cos a = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2.b.c}$$
$$\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2.a.c}$$
$$\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2.a.b}$$

3. عند استخدام قانون جيب التمام في حساب احدى الزوايا " إذا علم قياس زاوية و 3 أضلاع" نحصل على قياس واحد فقط مناسب بعكس قانون الجيب الذي يمكن أن يعطينا احتمالين

مثال 1 حل ΔABC حيث : $a = 4\ cm\ ,\ b = 3\ cm\ ,\ c = 6\ cm$



$$\cos \propto = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,b\,c}$$

$$\cos \propto = \frac{(3)^2 + (6)^2 - (4)^2}{2\,(3)(6)} \rightarrow \propto = 36.33° \quad ✓$$

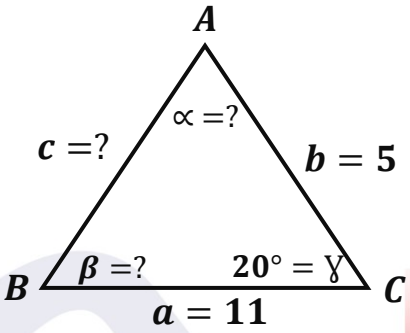
$$\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2\,a\,c}$$

$$\cos \beta = \frac{(4)^2 + (6)^2 - (3)^2}{2\,(4)(6)} \rightarrow \beta = 26.38° \quad ✓$$

$$\gamma = 180° - (36.33° + 26.38°) = 117.29°$$



مثال ٢ حل ΔABC حيث : $a = 11\ cm\ ,\ b = 5\ cm\ ,\ \gamma = 20°$



$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\cos\gamma$$

$$c^2 = (11)^2 + (5)^2 - 2\,(11)(5)\cos 20$$

$$c^2 = 42.63$$

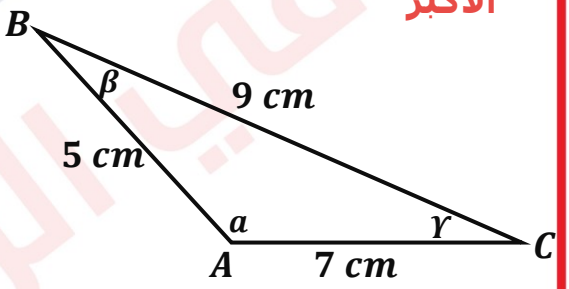
$$c = \sqrt{42.63} = 6.52\ cm$$

$$\cos\propto = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,b\,c}$$

$$\cos\propto = \frac{(5)^2 + 42.63 - (11)^2}{2\,(5)(6.52)} \quad \rightarrow \quad \propto = 144.94°$$

$$\beta = 180° - (20° + 144.94°) = 15.06$$

مثال ٣ في ΔABC حيث : $a = 9\ cm\ ,\ b = 7\ cm\ ,\ c = 5\ cm$ أوجد قياس الزاوية الأكبر



الزاوية الأكبر تقابل أطول ضلع ، أطول ضلع هو $\overline{BC}$

$\therefore a$: هي أكبر زاوية

$$\therefore \cos a = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,b\,c}$$

$$\cos a = \frac{7^2 + 5^2 - 9^2}{2 \times 7 \times 5} = \frac{-1}{10}$$

$$\therefore a = \cos^{-1}\left|\frac{-1}{10}\right| \approx 95.7°$$

أسئلة موضوعية

1. في المثلث ABC : $AB = 24\ cm\ ,\ AC = 19\ cm\ ,\ BC = 27\ cm$ فإن $m(\hat{A}) \approx 76.82°$ (✓)

2. في المثلث ABC : $AB = 20\ cm\ ,\ BC = 44\ cm\ ,\ m(\hat{A}) = 60°$ فإن $AC \approx 50.5\ cm$ (✓)

3. في المثلث ABC : $b^2 + c^2 < 2\,b\,c\cos A$ (✗)

4. إذا كانت أطوال أضلاع مثلث تساوي $5\ cm\ ,8\ cm\ ,12\ cm$ فإن قياس الزاوية في هذا المثلث يساوي حوالي $133.4°$ (✗)



اختر الإجابة الصحيحة :-

1 في المثلث ABC : $B\,C = 20\ cm\ , A\,C = 10\ cm\ , m\left(\widehat{C}\right) = 60°$ فإن طول $\overline{A\,B}$ يساوي :

Ⓐ $A\,B = 10\sqrt{7}\ cm$ Ⓑ $A\,B = 10\sqrt{3}\ cm$ Ⓒ $A\,B = 12.4\ cm$ Ⓓ $A\,B = 29\ cm$

2 في المثلث ABC : $A\,C = 40\ cm\ , A\,B = 30\ cm\ , m\left(\widehat{A}\right) = 120°$ فإن طول $\overline{B\,C}$ يساوي :

Ⓐ $B\,C \approx 60.8\ cm$ Ⓑ $B\,C \approx 36\ cm$ Ⓒ $B\,C \approx 68\ cm$ Ⓓ $B\,C \approx 21\ cm$

3 إذا كان $A\,B = 12\ cm\ , A\,C = 17\ cm\ , B\,C = 25\ cm$ فإنّ قياس الزاوية الكبرى في المثلث ABC يساوي :

Ⓐ $118°$ Ⓑ $110°$ Ⓒ $125°$ Ⓓ $100°$



8-5 مساحة المثلث

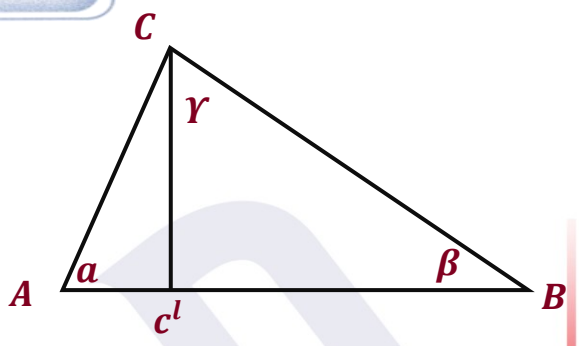
$$Area\ (ABC) = \frac{1}{2} a.b.\sin\gamma$$

$$= \frac{1}{2} a.c.\sin\beta$$

$$= \frac{1}{2} b.c.\sin a$$

$$Area\ (ABC) = \frac{1}{2} A\,B.C\,C^{l}$$

نصف القاعدة ضرب الارتفاع



قاعدة هيرون

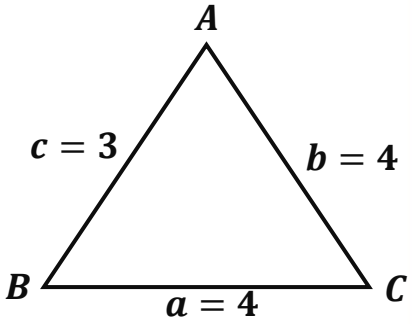
يمكننا أيضًا إيجاد مساحة مثلث بمعرفة أطوال أضلاعه الثلاثة بالقاعدة التالية :

$$Area\ (ABC) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

حيث نصف محيط المثلث

$$s = \frac{1}{2}(a+b+c)$$

مثال 1 أوجد مساحة المثلث ABC حيث : $a = 4\ cm\ ,\ b = 4\ cm\ ,c = 3\ cm$



① $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$

$= \frac{1}{2}(4+4+3) = 5.5$

② $Area = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{5.5(5.5-4)(5.5-4)(5.5-3)} = 5.56\ cm^2$



مثال ٢ ABC مثلث فيه $a = 3\ cm\ ,\ b = 8\ cm\ ,c = 7\ cm$

أوجد : ١ قياس أكبر زاوية

٢ مساحة سطح المثلث ABC مستخدماً قاعدة هيرون

١ قياس أكبر زاوية هو β لأنها تقابل أطول ضلع

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2\,a\,c}$$

$$\cos\beta = \frac{3^2 + 7^2 - 8^2}{2\,(3)(7)} = \frac{-1}{7}$$

$$\therefore \beta \approx 98.21°$$

٢ $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$

$$= \frac{1}{2}(3 + 8 + 7) = 9$$

$$Area = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{9(9-3)(9-8)(9-7)}$$

$$= \sqrt{108} = 6\sqrt{3}\ cm^2$$

مثال ٣ أوجد مساحة سطح مثلث أطوال أضلاعه :

$$a = 9\ cm\ ,\quad b = 7\ cm\ ,c = 6\ cm$$

$$s = \frac{1}{2}(a + b + c)$$

$$s = \frac{1}{2}(9 + 7 + 6) = \frac{1}{2}(22) = 11$$

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$A = \sqrt{11(11-9)(11-7)(11-6)}$$

$$A = \sqrt{11 \times 2 \times 4 \times 5}$$

$$A = 2\sqrt{110}\ cm^2$$

أسئلة موضوعية

١ إذا عرفت أطوال أضلاع مثلث فيمكن استخدام قاعدة هيرون لإيجاد مساحته.

(✓)



2 لا يمكن إيجاد مساحة مثلث بمعلومية قياسات زواياه الثلاثة. (✓)

3 لا يمكن استخدام قاعدة هيرون إذا كان المثلث قائم الزاوية. (✗)

4 إن معرفة قياس إحدى زوايا مثلث هو شرط ضروري لإيجاد مساحته. (✗)

5 إذا كان طولا ضلعين متتاليين في متوازي أضلاع و θ قياس الزاوية بينهما فإن مساحة متوازي الأضلاع تساوي $a\,b\sin\theta$ (✓)

6 في المثلث ABC : $AC = 9\ cm\ , AB = 7\ cm\ , BC = 5\ cm$
فإن مساحة المثلث ABC تساوي حوالى $15\ cm^2$ (✗)

اختر الإجابة الصحيحة :-

1 إذا كان $a = 2\ cm\ , b = 3\ cm\ , m(\widehat{C}) = 40°$ فإن مساحة المثلث ABC تساوي حوالى :

Ⓐ $4.6\ cm^2$ Ⓑ $3.86\ cm^2$ Ⓒ $1.93\ cm^2$ Ⓓ $2.3\ cm^2$

2 مساحة المثلث الذي أطوال أضلاعه $7\ cm\ , 8\ cm\ , 9\ cm$ هي :

Ⓐ $6\sqrt{15}\ cm^2$ Ⓑ $12\sqrt{5}\ cm^2$ Ⓒ $16\sqrt{3}\ cm^2$ Ⓓ $18\sqrt{3}\ cm^2$

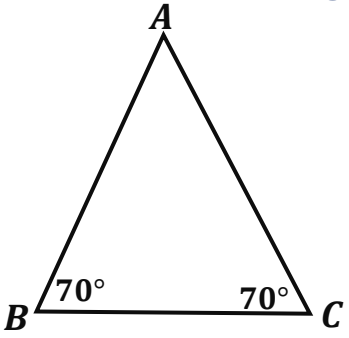
3 مساحة مثلث متطابق الأضلاع طول ضلعه a هي :

Ⓐ $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\ units^2$ Ⓑ $a^2\ units^2$ Ⓒ $\frac{1}{2}a^2\ units^2$ Ⓓ $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}\ units^2$

4 إذا كانت مساحة المثلث ABC تساوي حوالى $8\ cm^2$ فإن طول $\overline{AB}$ هو حوالي :

Ⓐ $5\ cm$ Ⓑ $8\ cm$

Ⓒ $4\ cm$ Ⓓ $6\ cm$





9-1 المتطابقات المثلثية

المتطابقات المثلثية الأساسية

المتطابقات المثلثية الأساسية Trigonometric Identities

متطابقات القسمة (الظل وظل التمام)

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \quad , \quad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

متطابقات المقلوب

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \quad , \quad \csc\theta = \frac{1}{\sin\theta} \quad , \quad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

متطابقات فيثاغورث

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \quad , \quad 1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta \quad , \quad 1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$$

مثال 1 أثبت صحة كل متطابقة مما يلي:

1) $\dfrac{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}{\cos^2\theta} = \tan^2\theta$

$$L\,H\,S = \frac{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}{\cos^2\theta}$$

$$= \frac{1-\cos^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$$

$$= \left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2 = \tan^2\theta = R\,H\,S$$

---

2) $\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta} + \dfrac{1+\cos\theta}{\sin\theta} = 2\csc\theta$

$$L\,H\,S = \frac{\sin^2\theta + (1+\cos\theta)^2}{(1+\cos\theta)\sin\theta}$$

$$= \frac{\sin^2\theta + 1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta}{(1+\cos\theta)\sin\theta}$$

$$= \frac{2\,(1+\cos\theta)}{(1+\cos\theta)\sin\theta} = 2\csc\theta = R\,H\,S$$



مثال ٢ أثبت صحة كل متطابقة مما يلي:

1 $2\cot x \ \csc x = \dfrac{1}{\sec x - 1} + \dfrac{1}{\sec x - 1}$

$$R\,H\,S = \frac{(\sec x + 1) + (\sec x - 1)}{(\sec x - 1)(\sec x + 1)} = \frac{2\sec x}{\tan^2 x} = 2\,\frac{1}{\cos x} \bullet \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}$$

$$= 2\,\frac{\cos x}{\sin x \ \sin x} = 2\cot x \ \csc x = L\,H\,S$$

---

2 $\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x} - \dfrac{1-\sin x}{1+\sin x} = 4\tan x \bullet \sec x$

$$L\,H\,S = \frac{(1+\sin x)^2 - (1-\sin x)^2}{(1-\sin x)(1+\sin x)}$$

$$= \frac{(1 + 2\sin^2 x + \sin^2 x) - (1 - 2\sin x + \sin^2 x)}{(1)^2 - (\sin x)^2}$$

$$= \frac{1 + 2\sin x + \sin^2 x - 1 + 2\sin x - \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{4\sin x}{\cos x \ \cos x} = 4\tan x \ \sec x = R\,H\,S$$

مثال ٣ أثبت صحة كل متطابقة مما يلي:

1 $\dfrac{\cos x}{1-\sin x} = \dfrac{1+\sin x}{\cos x}$

$$L\,H\,S = \frac{\cos x}{1-\sin x} \times \frac{1+\sin x}{1+\sin x} = \frac{\cos x\,(1+\sin x)}{(1)^2 - (\sin x)^2}$$

$$= \frac{\cos x\,(1+\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1+\sin x}{\cos x} = R\,H\,S$$

---

2 $\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x} = (\csc x - \cot x)\,2$

$$L\,H\,S = \frac{1-\cos x}{1+\cos x} \times \frac{1-\cos x}{1-\cos x} = \frac{(1-\cos x)^2}{(1)^2 - (\cos x)^2}$$

$$= \frac{(1-\cos x)^2}{\sin x^2} = \left(\frac{1-\cos x}{\sin x}\right)^2$$

$$= \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{\cos x}{\sin x}\right)^2 = (\csc x - \cot x)^2 = R\,H\,S$$



مثال ٤ أثبت صحة كل متطابقة مما يلي:

1 $\dfrac{\cot^2\theta}{1+\csc\theta} = \cot\theta\,(\sec\theta - \tan\theta)$

$$LHS = \frac{\cot^2\theta}{1+\csc\theta} = \frac{\csc^2\theta - 1}{1+\csc\theta}$$
$$= \frac{(\csc\theta - 1)(\csc\theta + 1)}{1+\csc\theta}$$
$$= \csc\theta - 1$$

$$RHS = (\cot\theta)(\sec\theta - \tan\theta)$$
$$= \cot\theta\ \sec\theta - \cot\theta\ \tan\theta$$
$$= \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\ \frac{1}{\cos\theta} - 1$$
$$= \csc\theta - 1$$

$$\therefore LHS = RHS$$

---

2 $\dfrac{\sec x + \tan x}{\cot x + \cos x} = \sin x + \sin x\ \tan^2 x$

$$LHS = \frac{\sec x + \tan x}{\cot x + \cos x} = \frac{\frac{1}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\cos x}{1}}$$
$$= \frac{\left(\frac{1+\sin x}{\cos x}\right)}{\left(\frac{\cos x + \cos x\ \sin x}{\sin x}\right)}$$
$$= \frac{1+\sin x}{\cos x} \times \frac{\sin x}{\cos x + \cos x\ \sin x}$$
$$= \frac{1+\sin x}{\cos x} \times \frac{\sin x}{\cos x\,(1+\sin x)}$$
$$= \frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

$$RHS = \sin x + \tan^2 x$$
$$= \sin x\,(1 + \tan^2 x)$$
$$= \sin x\ \sec^2 x$$
$$= \sin x \frac{1}{\cos^2 x}$$
$$= \frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

$$\therefore LHS = RHS$$

مثال ٥ أثبت صحة كل متطابقة مما يلي:

1 $(\cos x)(\tan x + \sin x \cot x)$

$= \sin x + \cos^2 x$

$L\,H\,S = \cos x \tan x + \cos x \sin x \cot x$

$= \cos x \bullet \dfrac{\sin x}{\cos x} + \cos x \sin x \dfrac{\cos x}{\sin x}$

$= \sin x + \cos^2 x = R\,H\,S$

---

2 $(\sin x)(\cot x + \cos x \tan x)$

$= \cos x + \sin^2 x$

$L\,H\,S = \sin x \cot x + \sin x \cos x \tan x$

$= \sin x \dfrac{\cos x}{\sin x} + \sin x \cos x \dfrac{\sin x}{\cos x}$

$= \cos x + \sin^2 x = R\,H\,S$

---

3 $(1 - \tan x)^2 = \sec^2 x - 2\tan x$

$L\,H\,S = (1)^2 - 2(1)\tan x + \tan^2 x$

$= 1 + \tan^2 x - 2\tan x$

$= \sec^2 x - 2\tan x$

---

4 $\tan x + \cot x = \sec x \csc x$

$L\,H\,S = \tan x + \cot x = \dfrac{\sin x}{\cos x} + \dfrac{\cos x}{\sin x}$

$= \dfrac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x}$

$= \dfrac{1}{\sin x \cos x} = \dfrac{1}{\sin x} \bullet \dfrac{1}{\cos x}$

$= \csc x \bullet \sec x = R\,H\,S$

5 $\tan x + \cot x + 2$

$= \dfrac{(\sin x + \cos x)^2}{\sin x \cos x}$

$R\,H\,S = \dfrac{\sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x}{\sin x \cos x}$

$= \dfrac{\sin^2 x}{\sin x \cos x} + \dfrac{2\sin x \cos x}{\sin x \cos x} + \dfrac{\cos^2 x}{\sin x \cos x}$

$= \dfrac{\sin x}{\cos x} + 2 + \dfrac{\cos x}{\sin x}$

$= \tan x + \cot x + 2 = L\,H\,S$

---

6 $\dfrac{1}{1 - \cos x} + \dfrac{1}{1 + \cos x}$

$L\,H\,S = \dfrac{(1 + \cos x) + (1 - \cos x)}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}$

$= \dfrac{1 + \cos x + 1 - \cos x}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}$

$= \dfrac{2}{1^2 - \cos^2 x} = \dfrac{2}{\sin^2 x} = 2 \bullet \dfrac{1}{\sin^2 x}$

$= 2 \bullet \csc^2 x = R\,H\,S$

---

7 $\dfrac{\tan x}{\sec x - 1} = \dfrac{\sec x + 1}{\tan x}$

$L\,H\,S = \dfrac{\tan x}{\sec x - 1} \bullet \dfrac{\sec x + 1}{\sec x + 1}$

$= \dfrac{\tan x (\sec x + 1)}{\sec^2 x - 1^2}$

$= \dfrac{\tan x (\sec x + 1)}{\tan^2 x}$

$= \dfrac{(\sec x + 1)}{\tan x} = R\,H\,S$



أسئلة موضوعية

1. $3\sin x = \sin(3x)$ تمثل متطابقة. (✗)
2. $\cos 2x = \sin^2 x - \cos^2 x$ تمثل متطابقة. (✗)
3. $\sec x - \cos x = \tan x \ \sin x$ تمثل متطابقة. (✓)

اختر الإجابة الصحيحة :-

1. المقدار $\frac{\sec^2 x - 1}{\sin x}$ متطابق مع المقدار :

Ⓐ $\sin x \ \tan x$ Ⓑ $\sin x \ \sec^2 x$

Ⓒ $\cos x \ \sec^2 x$ Ⓓ $\sin x \ \csc x$

2. المقدار $(\cos x + \sin x)^2 - (\cos x - \sin x)^2$ متطابق مع المقدار :

Ⓐ $-4\sin x \ \cos x$ Ⓑ 2 Ⓒ -2 Ⓓ $4\sin x \ \cos x$

3. المقدار $\frac{1}{\tan x} + \tan x$ متطابق مع المقدار :

Ⓐ $\sec x \ \csc x$ Ⓑ $\sec x \ \sin x$

Ⓒ $\sec x \ \cos x$ Ⓓ $\sin x \ \cos x$

4. المقدار $\tan^2 x - \sin^2 x$ متطابق مع المقدار :

Ⓐ $\tan^2 x$ Ⓑ $\cot^2 x$

Ⓒ $\tan^2 x \ \sin^2 x$ Ⓓ $\cot^2 x \ \cos^2 x$

5. المقدار $\frac{\sin x}{\csc x} + \frac{\cos x}{\sec x} + 1$ متطابق مع المقدار :

Ⓐ 1 Ⓑ -1

Ⓒ 2 Ⓓ -2

6. المقدار $\frac{\cos^2 x - 1}{\cos x}$ متطابق مع المقدار :

Ⓐ $-\tan x \ \sin x$ Ⓑ $-\tan x$

Ⓒ $\tan x \ \sin x$ Ⓓ $\tan x$



9-3 حل معادلة مثلثية

مثال 1 حل المعادلة : $2\cos x + \sqrt{3} = 0$

① $\frac{2}{2}\cos x = \frac{-\sqrt{3}}{2}$

$\cos x = \frac{-\sqrt{3}}{2} \in [-1, 1]$

② $\cos \propto = \left|\frac{-\sqrt{3}}{2}\right| \rightarrow shift\ \cos \left|\frac{-\sqrt{3}}{2}\right|$

$\propto = \frac{\pi}{6}$

③ $\because \cos x < 0$

② + sin	① + الكل
③ + tan	④ + cos

$\therefore x$ تقع فى الربع الثانى او الثالث

الربع الثالث

$x = (\pi + \propto) + 2k\pi$

$= \left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi$

$= \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$

④ **الربع الثانى**

$x = (\pi - \propto) + 2k\pi$

$= \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi$

$= \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$



مثال ٢ حل المعادلة : $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

نفرض أن a هي زاوية الاسناد للزاوية x

$$\therefore \sin x = |\sin x| = \left|\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore a = \frac{\pi}{3}$$

$$\because \sin x > 0$$

$\therefore x$ تقع في الربع الأول أو الربع الثاني

عندما x تقع في الربع الأول :

$$x = \left(\frac{\pi}{3}\right) + 2\,k\,\pi \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$$

عندما x تقع في الربع الثانى :

$$x = \left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 2\,k\,\pi$$

$$\therefore x = \frac{2\,\pi}{3} + 2\,k\,\pi$$

$\therefore$ حل المعادلة :

$$x = \frac{\pi}{3} + 2\,k\,\pi \text{ أو } x = \frac{2\,\pi}{3} + 2\,k\,\pi \text{ حيث } k \in \mathbb{Z}$$



مثال ٣ حل المعادلة : $2\sin\theta + 1 = 0$

$$2\sin\theta + 1 = 0$$

$$2\sin\theta = -1$$

$$\sin\theta = -\frac{1}{2}$$

نفرض أن a هي زاوية الاسناد للزاوية θ :

$$\therefore \sin a = |\sin\theta| = \left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$$

$$\therefore a = \frac{\pi}{6}$$

$$\because \sin\theta < 0$$

$\therefore \theta$ تقع في الربع الثالث أو الربع الرابع

عندما θ تقع في الربع الثالث :

$$\theta = (\pi + a) + 2k\pi \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$= \left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$$

عندما θ تقع في الربع الرابع :

$$\theta = (2\pi - a) + 2k\pi \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$= \left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$$

$\therefore$ حل المعادلة :

$k \in \mathbb{Z}$ حيث $\frac{11\pi}{6} + 2k\pi$ أو $\frac{7\pi}{6} + 2k\pi$



مثال ٤ حل المعادلة : $3\sin\theta + 1 = \sin\theta$

$$3\sin\theta - \sin\theta = -1 \quad \Rightarrow \quad 2\sin\theta = -1$$

نفرض أن a هي زاوية الاسناد للزاوية θ :

$$\sin a = |\sin\theta| = \left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$$

$$\therefore a = \frac{\pi}{6}$$

$$\because \sin\theta < 0$$

$\therefore \theta$ تقع في الربع الثالث أو الربع الرابع

عندما θ تقع في الربع الثالث :

$$\theta = \left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\therefore \theta = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$$

عندما θ تقع في الربع الرابع :

$$\theta = \left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\therefore \theta = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$$

$\therefore$ حل المعادلة هو :

$$\theta = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \text{ أو } \theta = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$$



مثال ٥ حل المعادلة : $5\sin\theta - 2 = \sin\theta$ حيث $0 \le \theta \le 2\pi$

$5\sin\theta - 2 = \sin\theta$

$5\sin\theta - \sin\theta = 2$

$4\sin\theta = 2$ $\qquad$ $\sin\theta = \frac{1}{2}$

نفرض أن a هي زاوية الاسناد للزاوية θ :

$\sin a = |\sin\theta| = \left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $\therefore a = \frac{\pi}{6}$

$\because \sin\theta > 0$

$\therefore \theta$ تقع في الربع الأول أو الثاني

عندما θ تقع في الربع الأول :

$\theta = a$ $\qquad$ $\therefore \theta = \frac{\pi}{6}$

عندما θ تقع في الربع الثاني :

$\theta = \pi - \frac{\pi}{6}$ $\qquad$ $\therefore \theta = \frac{5\pi}{6}$

مثال ٦ حل المعادلة : $\tan x = \sqrt{3}$

① $\tan x = \sqrt{3}$

② $\tan\propto = \left|\sqrt{3}\right| \rightarrow$ $shift\ \tan\left|\sqrt{3}\right|$

$\propto = \frac{\pi}{3}$

③ $\because \tan x > 0$

$\therefore x$ تقع فى الربع الاول أو الثالث

الربع الأول	الربع الثالث
$x = (\propto) + k\pi$	$x = (\pi + \propto) + k\pi$
$= \frac{\pi}{3} + k\pi$	$= \left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) + k\pi$
	$= \frac{4\pi}{3} + k\pi$



مثال ٧ حل المعادلة: $2\cos\theta\ \sin\theta = -\sin\theta$

$2\cos\theta\ \sin\theta + \sin\theta = 0$

$\sin\theta\,(2\ \cos\theta + 1) = 0$

$\sin\theta = 0$

$\theta = 0 + 2\,k\,\pi$

أو

$\theta = \pi + 2\,k\,\pi$

$2\cos\theta + 1 = 0$

$\frac{2}{2}\cos\theta = \frac{-1}{2}$

$\cos\theta = \frac{-1}{2} \in [-1, 1]$

$\cos\propto = \left|\frac{-1}{2}\right|$

$\propto = \frac{\pi}{3}$

$\because \cos\theta < 0$

$\therefore \theta$ تقع فى الربع الثانى أو الثالث

الربع الثانى	الربع الثالث
$\theta = \pi + \propto + 2\,k\,\pi$	$\theta = \pi - \propto + 2\,k\,\pi$
$\theta = \pi + \frac{\pi}{3} + 2\,k\,\pi$	$= \pi - \frac{\pi}{3} + 2\,k\,\pi$
$= \frac{4\,\pi}{3} + 2\,k\,\pi$	$= \frac{2\,\pi}{3} + 2\,k\,\pi$

مثال ٨ حل المعادلة: $\sin\theta\ \cos\theta - \cos\theta = 0$

$\cos\theta\ (\sin\theta - 1) = 0$

$\cos\theta = 0$

$\theta = \frac{\pi}{2} + 2\,k\,\pi$

أو

$\theta = \frac{3\,\pi}{2} + 2\,k\,\pi$

$\sin\theta - 1 = 0$

$\sin\theta = 1$

$\theta = \frac{\pi}{2} + 2\,k\,\pi$

$k \in \mathbb{Z}$



مثال ٩ حل المعادلة: $2\cos x \sin x - \cos x = 0 \quad , \quad x \in [0, 2\pi]$

$\cos x\ (2\sin x - 1) = 0$

$\therefore \cos x = 0 \quad or \quad 2\sin x - 1 = 0$

$2\sin x - 1 = 0$

$\sin x = \frac{1}{2}$

نفرض أن a هي زاوية حيث $\sin a = |\sin x|$

$= \left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$

$\therefore a = \frac{\pi}{6}$

$\because \sin\theta > 0$

$\therefore x$ تقع في الربع الأول أو الثاني

في الربع الأول : $x = a = \frac{\pi}{6}$

في الربع الثاني : $x = \pi - a = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$

$\therefore$ حل المعادلة هو :

$\therefore x = \frac{\pi}{2} \ , \ x = \frac{3\pi}{2} \ , \ x = \frac{\pi}{6} \ , \ x = \frac{5\pi}{6}$

مثال ١٠ حل المعادلة: $\cos^2 x + 3\cos x + 2 = 0$

$(\cos x + 2)(\cos x + 1) = 0$

أما $\cos x + 1 = 0$

$\cos x = -1$

$x = \pi + 2k\pi \ , \ k \in \mathcal{Z}$

أو

$\cos x + 2 = 0$

$\cos x = -2 \notin [-1, 1]$

لا يوجد قيم تحقق هذه المعادلة

ومنه يكون : $x = \pi + 2k\pi$ حيث $k \in \mathcal{Z}$ حلا للمعادلة



مثال 11 حل المعادلة : $2\sin^2 x - 3\sin x - 2 = 0$

$(2\sin x + 1)(\sin x - 2) = 0$

$(2\sin x + 1) = 0$ أو $(\sin x - 2) = 0$

$\sin x = 2$ عندما

$y = \sin x$ مداها $[-1, 1]$

$2 \notin [-1, 1]$

$\sin x = 2$ ليس لها حل $\therefore$

$\sin x = \frac{-1}{2}$ نأخذ

نفرض أن a هي زاوية الاسناد للزاوية θ :

$\therefore \sin a = |\sin x| = \left|\frac{-1}{2}\right| = \frac{1}{2}$

$\therefore a = \frac{\pi}{6}$

$\because \sin\theta < 0$

$\therefore x$ تقع في الربع الثالث أو الرابع

عندما x تقع في الربع الثالث : $k \in \mathcal{Z}$ ، $x = (\pi + a) + 2k\pi$

$x = \left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi$

$x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$

عندما x تقع في الربع الرابع : $k \in \mathcal{Z}$ ، $x = (2\pi - a) + 2k\pi$

$x = \left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi$

$x = \left(\frac{11\pi}{6}\right) + 2k\pi$

$\therefore$ حل المعادلة هو :

$k \in \mathcal{Z}$ $x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$ ، $x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$



مثال ١٢ حل المعادلة: $4\sin^2 x - 8\sin x + 3 = 0$

$$(2\sin x - 3)(3\sin x - 1) = 0$$

$2\sin x - 3 = 0$

$\frac{2}{2}\sin x = \frac{3}{2}$

$\sin x = \frac{3}{2} \notin [-1, 1]$

ليس لها حل

$3\sin x - 1 = 0$

$\sin x = \frac{1}{3} \in [-1, 1]$

$\sin \propto = \left|\frac{1}{3}\right|$

$\propto = 0.339$

$\sin x > 0$

$\therefore x$ تقع فى الربع الأول أو الثانى

الربع الأول	الربع الثانى
$x = \propto + 2k\pi$	$x = \pi - \propto + 2k\pi$
$= 0.339 + 2k\pi$	$= \pi - 0.339 + 2k\pi$
	$= 2.8 + 2k\pi$

$k \in \mathbb{Z}$

أسئلة موضوعية

1. حل المعادلة $\sin x = \frac{1}{2}$ هو $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ، حيث k عدد صحيح. (✗)
2. حل المعادلة $\cos x = \sqrt{2}$ هو $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ أو $x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ، حيث k عدد صحيح. (✗)
3. حل المعادلة $\tan x = -\sqrt{3}$ هو $x = \frac{5\pi}{6} + k\pi$ ، حيث k عدد صحيح. (✗)
4. حلول المعادلة $\tan^2 x = \sin x$ على الفترة $(0, \pi)$ هي $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{3\pi}{4}$ (✓)
5. حلول المعادلة $2\sin^2 x = 1$ على الفترة $(0, 2\pi)$ هي $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{5\pi}{4}$ (✗)



اختر الإجابة الصحيحة :-

1 إذا كان $\sin x + \cos x = 0$ فإن x تقع في الربع :

Ⓐ الأول Ⓑ الأول أو الثالث Ⓒ الثالث Ⓓ الثاني أو الرابع

2 حلول المعادلة $2\sin x + 3\sin^2 x + 1 = 0$ على الفترة $[0\,,2\,\pi]$ هي :

Ⓐ $-\frac{\pi}{6}\,,\frac{7\,\pi}{6}\,,\frac{3\,\pi}{6}$ Ⓑ $\frac{4\,\pi}{3}\,,\frac{3\,\pi}{2}\,,\frac{5\,\pi}{3}$

Ⓒ $\frac{3\,\pi}{2}\,,\frac{11\,\pi}{6}$ Ⓓ $\frac{7\,\pi}{6}\,,\frac{3\,\pi}{2}\,,\frac{11\,\pi}{6}$

3 حلول المعادلة $2\sqrt{2}\sin x\ \cos x - \sqrt{2}\cos x - 2\sin x = -1$ على الفترة $[0\,,2\,\pi]$ هي :

Ⓐ $\frac{\pi}{6}\,,\frac{\pi}{4}$ Ⓑ $\frac{\pi}{6}\,,\frac{\pi}{4}\,,\frac{5\,\pi}{6}\,,\frac{7\,\pi}{4}$

Ⓒ $\frac{\pi}{6}\,,\frac{4\,\pi}{4}\,,\frac{5\,\pi}{6}\,,\frac{5\,\pi}{4}$ Ⓓ $\frac{\pi}{4}\,,\frac{\pi}{3}\,,\frac{4\,\pi}{3}$



9-4 منطابقات المجموع والفرق



$$\cos(\beta + a) = \cos\beta \ \cos a - \sin\beta \ \sin a$$

$$\cos(\beta - a) = \cos\beta \ \cos a + \sin\beta \ \sin a$$

$$\sin(\beta + a) = \sin\beta \ \cos a + \cos\beta \ \sin a$$

$$\sin(\beta - a) = \sin\beta \ \cos a - \cos\beta \ \sin a$$

$$\tan(\beta + a) = \frac{\tan\beta + \tan a}{1 - \tan\beta \ \tan a}$$

$$\tan(\beta - a) = \frac{\tan\beta - \tan a}{1 + \tan\beta \ \tan a}$$

مثال 1 أوجد دون استخدام الآلة الحاسبة كلا مما يلي :

1 $\sin 15°$

$= \sin(45° - 30°)$

$= \sin 45 \ \cos 30 - \cos 45 \ \sin 30$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2}$

$= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

2 $\cos 75°$

$= \cos(45 + 30)$

$= \cos 45 \ \cos 30 - \sin 45 \ \sin 30$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2}$

$= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

3 $\tan 105°$

$= \tan(45 + 60) = \frac{\tan 45 + \tan 60}{1 - \tan 45 \ \tan 60}$

$= \frac{1 + \sqrt{3}}{1 - 1 \times \sqrt{3}} = -2 - \sqrt{3}$



مثال ٢ إذا كان : $\sin a = \frac{4}{5} , 0 < a < \frac{\pi}{2}$

$\cos \beta = \frac{-12}{13} , \pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$

أوجد كلا مما يلي:

1 $\sin(a+\beta)$ 2 $\cos(a-\beta)$ 3 $\tan(a-\beta)$

(a)

$\because \sin a = \frac{4}{5}$

$\therefore \cos^2 a = 1 - \sin^2 a$

$\therefore \cos^2 a = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$

$\cos a = \pm\sqrt{\frac{9}{25}} = \pm\frac{3}{5}$

$\because 0 < a < \frac{\pi}{2}$

$\therefore \cos a = \frac{3}{5}$

$\tan a = \frac{\sin a}{\cos a}$

$\tan a = \frac{4}{5} \div \frac{3}{5} = \frac{4}{3}$

(β)

$\because \cos \beta = \frac{-12}{13}$

$\because \sin^2 \beta = 1 - \cos^2 \beta$

$\sin \beta = \pm\sqrt{\frac{25}{169}} = \pm\frac{5}{13}$

$\because \pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$

$\therefore \sin \beta = \frac{-5}{13}$

$\tan \beta = \frac{\sin \beta}{\cos \beta}$

$\tan \beta = \frac{-5}{13} \div \frac{-12}{13} = \frac{5}{12}$

---

1 $\sin(a+\beta) = \sin a \ \cos \beta + \cos a \ \sin \beta$

$= \frac{4}{5} \times \frac{-12}{13} + \frac{3}{5} \times \frac{-5}{13} = \frac{-63}{65}$

2 $\cos(a-\beta) = \cos a \ \cos \beta + \sin a \ \sin \beta$

$= \frac{3}{5} \times \frac{-12}{13} + \frac{4}{5} \times \frac{-5}{13} = \frac{-56}{65}$

3 $\tan(a-\beta) = \frac{\tan a - \tan \beta}{1 + \tan a \ \tan \beta}$

$= \frac{\frac{4}{3} - \frac{5}{12}}{1 + \frac{4}{3} \times \frac{5}{12}} = \frac{33}{56}$



مثال ٣ إذا كان : $\sin a = \frac{3}{5}$ ، $\cos \beta = \frac{24}{25}$ حيث a ، β زاويتين حادتين

أوجد كلا مما يلي:

1 $\cos(a - \beta)$ 2 $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)$

$\sin^2 a + \cos^2 a = 1$

$\cos^2 a = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2$

$\cos^2 a = \frac{16}{25} \rightarrow \cos a = \pm\frac{4}{5}$

$\therefore \cos a = \frac{4}{5}$

$\sin^2 \beta + \cos^2 \beta = 1$

$\sin^2 \beta = 1 - \left(\frac{24}{25}\right)^2$

$\sin^2 \beta = \frac{49}{625} \rightarrow \sin \beta = \pm\frac{7}{25}$

$\therefore \sin \beta = \frac{7}{25}$

1 $\cos(a - \beta) = \cos a \ \cos \beta + \sin a \ \sin \beta$

$= \left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{24}{25}\right) + \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{24}{25}\right)$

$= \frac{117}{125}$

2 $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \cos \beta$

$= \frac{24}{25}$

أسئلة موضوعية

1 $\sin 75° = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ (✓)

2 $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ (✗)



3 $\cos\left(h+\frac{\pi}{2}\right)=-\cos h$ (✗)

4 $\tan^2\frac{\pi}{12}+\tan^2\frac{5\pi}{12}=14$ (✓)

اختر الإجابة الصحيحة :-

1 $\tan\frac{7\pi}{12}$ تساوى :

Ⓐ $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{6}}$ Ⓑ $\sqrt{2}+\sqrt{6}$

Ⓒ $\sqrt{2}+\sqrt{6}$ Ⓓ $-2-\sqrt{3}$

2 $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ تساوى :

Ⓐ $\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x$ Ⓑ $\frac{1}{2}(\sin x+\cos x)$

Ⓒ $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x$ Ⓓ $\frac{1}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x$

3 $\tan\left(h+\frac{\pi}{4}\right)$ تساوى :

Ⓐ $1+\tan h$ Ⓑ $\frac{1-\tan h}{1+\tan h}$

Ⓒ $\frac{1+\tan h}{1-\tan h}$ Ⓓ $1-\tan h$

4 $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ تساوى :

Ⓐ $\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x-\sin x)$ Ⓑ $\sqrt{2}\,(\cos x+\sin x)$

Ⓒ $\frac{\sqrt{3}}{2}(\cos x+\sin x)$ Ⓓ $\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x+\sin x)$

5 $\cos 94^\circ\ \cos 18^\circ+\sin 94^\circ\ \sin 18^\circ$ تساوى :

Ⓐ $\cos 112^\circ$ Ⓑ $\cos 76^\circ$

Ⓒ $\sin 112^\circ$ Ⓓ $\sin 76^\circ$



6 $\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{7}-\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{3}$ تساوى :

(A) $\cos\frac{4\pi}{21}$
(B) $\sin\frac{4\pi}{21}$
(C) $\cos\frac{10\pi}{21}$
(D) $\sin\frac{10\pi}{21}$

7 $\frac{\tan\frac{\pi}{5}-\tan\frac{\pi}{3}}{1+\tan\frac{\pi}{5}\tan\frac{\pi}{3}}$ تساوى :

(A) $\tan\frac{2\pi}{15}$
(B) $\tan\frac{8\pi}{15}$
(C) $\tan\left(\frac{-8\pi}{15}\right)$
(D) $\tan\left(\frac{-2\pi}{15}\right)$



متطابقات ضعف الزاوية ونصفها



1. $\sin(2a) = 2\sin a \cos a$
2. $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$
   $= 1 - 2\sin^2 a$
   $= 2\cos^2 a - 1$
3. $\tan(2a) = \dfrac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}$

مثال 1 إذا كان $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, $\cos\theta = \frac{3}{5}$ فأوجد $\sin 2\theta$

$\because \cos\theta = \frac{3}{5}$

$\therefore \sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$

$\sin^2\theta = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$

$\sin\theta = \pm\sqrt{\frac{16}{25}} = \pm\frac{4}{5}$

$\because \theta$ تقع في الربع الأول

$\sin\theta = \frac{4}{5}$

$\sin 2\theta = 2\sin\theta \cos\theta$

$= 2 \times \frac{4}{5} \times \frac{3}{5}$

$= \frac{24}{25}$



مثال ٢ إذا كان $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$, $\sin\theta = \frac{-12}{13}$

أوجد $\sin 2\theta$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\left(\frac{-12}{13}\right)^2 + \cos^2\theta = 1$

$\cos^2\theta = 1 - \frac{144}{169} = \frac{25}{169}$

$\therefore \cos\theta = \frac{5}{13}$ أو $\cos\theta = -\frac{5}{13}$

$\because \frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi \Rightarrow \cos\theta > 0$

$\therefore \cos\theta = \frac{5}{13}$

$\sin 2\theta = 2\sin\theta \cos\theta$

$= 2\left(\frac{-12}{13}\right)\left(\frac{5}{13}\right)$

$= -\frac{120}{169}$

متطابقات نصف الزاوية



1. $\cos\left(\frac{a}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos a}{2}}$
2. $\sin\left(\frac{a}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{2}}$
3. $\tan\left(\frac{a}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{1+\cos a}}$



مثال ٣ إذا كان $180° < \theta < 270°$, $\sin\theta = -\frac{24}{25}$ فأوجد $\sin\frac{\theta}{2}$

$$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$$

$$\cos^2\theta = 1 - \left(\frac{-24}{25}\right)^2 = \frac{49}{625}$$

$$\cos\theta = \pm\sqrt{\frac{49}{625}} = \pm\frac{7}{25}$$

$\because \theta$ تقع في الربع الثالث

$$\cos\theta = \frac{-7}{25}$$

$$\sin\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{1-\frac{-7}{25}}{2}}$$

$$= \pm\frac{4}{5}$$

$$\frac{180°}{2} < \frac{\theta}{2} < \frac{270°}{2}$$

$$90° < \frac{\theta}{2} < 135°$$

$\therefore \frac{\theta}{2}$ تقع في الربع الثانى

$$\sin\frac{\theta}{2} = \frac{4}{5}$$



مثال ٤ إذا كان $\sin a = \frac{4}{5}$ ، $0 < a < \frac{\pi}{2}$

أوجد كلاً مما يلي : $\cos \beta = \frac{-12}{13}$ ، $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$

1 $\sin(a+\beta)$ 2 $\tan 2\beta$

$$\sin^2 a + \cos^2 a = 1$$

$$\cos^2 a = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2$$

$$\cos^2 a = \frac{9}{25} \rightarrow \cos a = \pm\frac{3}{5}$$

$$\because 0 < a < \frac{\pi}{2} \rightarrow \therefore \cos a = \frac{3}{5}$$

$$\sin^2 \beta + \cos^2 \beta = 1$$

$$\sin^2 \beta = 1 - \left(\frac{-12}{13}\right)^2$$

$$\sin^2 \beta = \frac{25}{129} \rightarrow \sin \beta = \pm\frac{5}{13}$$

$$\because \pi < \beta < \frac{3\pi}{2} \rightarrow \therefore \sin \beta = \frac{-5}{13}$$

$$\tan \beta = \frac{\sin \beta}{\cos \beta}$$

$$= \frac{\frac{-5}{13}}{\frac{-12}{13}} = \frac{5}{12}$$

1 $\sin(a+\beta) = \sin a \ \cos \beta + \cos a \ \sin \beta$

$$= \left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{-12}{13}\right) + \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{-5}{13}\right) = \frac{-63}{65}$$

2 $$\tan 2\beta = \frac{2\tan \beta}{1 - \tan^2 \beta} = \frac{2 \times \frac{5}{12}}{1 - \left(\frac{5}{12}\right)^2}$$

$$= \frac{120}{119}$$