وزارة التربية والتعليم – مؤسسة الإمارات للتعليم
مكتب العين التعليمي - مدرسة البدع للتعليم الأساسي والثانوي
الصف / الثاني عشر المتقدم

نموذج إجابة الامتحان

التجريبي(3)

لمادة الرياضيات

للصف الثاني عشر المتقدم

الفصل الدراسي الثاني

2023 – 2024 م

إعداد الأستاذ / محمد عبدالحميد الطحاوي

Part I :- Circle the letter corresponding to the correct answer :-

1) Find all critical numbers of $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$	1) أوجد النقاط الحرجة للدالة $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$

A) $x = -1 , 3$

B) $x = 1 , -3$

C) $x = 1 , 3$

D) $x = 0 , -1 , 3$

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 0$

$x = 3 \quad , x = -1$

2) Find the absolute maximum of: $f(x) = (e)^{-x^2+2x}$ on interval $[-1, 2]$	2) اوجد القيمة العظمى المطلقة للدالة $f(x) = (e)^{-x^2+2x}$ في الفترة $[-1, 2]$

A) $\left(-1 , \frac{1}{e^3}\right)$

B) $\left(1 , \frac{1}{e}\right)$

C) $(1 , e)$

D) $(2, 1)$

$f'(x) = (-2x+2)(e)^{-x^2+2x}$

$-2x+2 = 0$

$x = 1$

$f(-1) = 0.04$

$f(1) = 2.71 \longrightarrow (1, e)$ Abs max

$f(2) = 1$

3) Determine where the function is increasing of $f(x) = cos^2x$ on interval $[0, \pi]$	3) اوجد فترات التزايد للدالة $f(x) = cos^2x$ في الفترة $[0, \pi]$

A) $\left(\frac{\pi}{2} , \pi\right)$

B) $\left(0 , \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2} , \pi\right)$

C) $(0 , \pi)$

D) $\left(0 , \frac{\pi}{2}\right)$

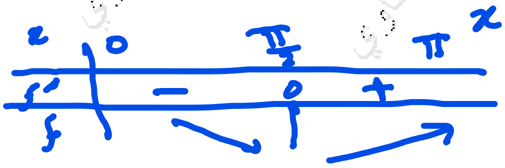
$f'(x) = 2\cos x \cdot -\sin x$

$f'(x) = -\sin 2x = 0$

$\sin 2x = 0$

$\frac{2x}{2} = \frac{0 , \pi , 2\pi}{2}$

$x = 0 , \frac{\pi}{2} , \pi$



4) Determine all local minimum

$$f(x) = xe^{-2x}$$

4) أوجد القيم الصغرى المحلية للدالة

$$f(x) = xe^{-2x}$$

A) $locl\ minimum\ at \quad x = -\frac{1}{2}$ صغرى محلية عند

B) $locl\ minimum\ at. \quad x = \frac{1}{2}$ صغرى محلية عند

C) $locl\ minimum\ at \quad x = 0$ صغرى محلية عند

D) $locl\ minimum\ at \quad x = 1$ صغرى محلية عند

5) Identify inflection points for the function

$$f(x) = x^{\frac{4}{3}} + 3x^{\frac{1}{3}}$$

5) حدد نقاط الانعطاف للدالة

$$f(x) = x^{\frac{4}{3}} + 3x^{\frac{1}{3}}$$

$f'(x) = \frac{4}{3} x^{\frac{1}{3}} + x^{-\frac{2}{3}}$

A) $(0\,,0)$

B) $(-1.5\,,-1.72)$

C) $(1.5\,,5.15)$

D) $(1.5\,,5.15)\,,\ \ (0\,,0)$

$f''(x) = \frac{4}{9} x^{-\frac{2}{3}} - \frac{2}{3} x^{-5/3}$

$= \frac{4}{9} x^{-5/3}\left(x - \frac{3}{2}\right) = \frac{4(x - 3/2)}{9x^{5/3}}$

$x - \frac{3}{2} = 0 \rightarrow x = \frac{3}{2} = 1.5$

$9x^{5/3} = 0 \longrightarrow x = 0$

6) Determine the intervals of the function is concave down

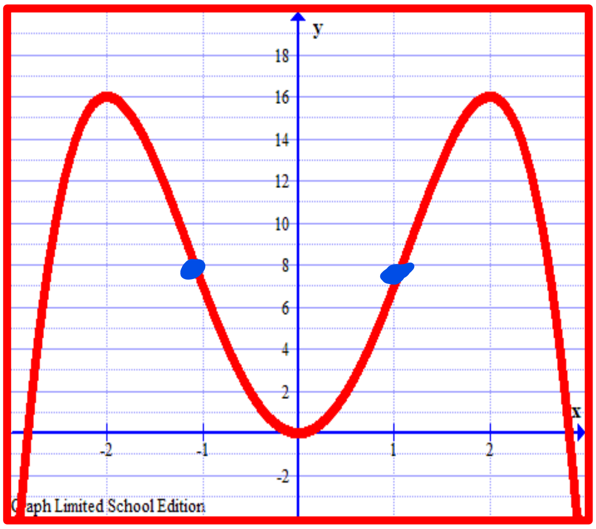
6) حدد فترات التقعرلأسفل للدالة

A) $(0\,,\infty)$

B) $(-\infty\,,-1) \cup (1\,,\infty)$

C) $(-1\,,1)$

D) $(-\infty\,,\infty)$



7) Determine all vertical and horizontal asymptotes $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2+x-2}$	7) حدد خطوط التقارب الرأسية والأفقية ؟ $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2+x-2}$

A) $x = -1, 2 \quad , y = 1$

B) $x = -1 \quad , \ y = 0$

C) $x = 1, -2 \quad , y = 1$

D) $x = 1 \quad , y = 1$

8) Suppose that the charge in electrical circuit is $Q(t) = e^t(3\sin 2t + \cos 2t)$ Coulombs. Find the current.	8) على فرض أن الشحنة في الدائرة الكهربائية $Q(t) = e^t(3\sin 2t + \cos 2t)$ كولوم . جد التيار .

A) $Q'(t) = e^t(6\cos 2t - 2\sin 2t)$

B) $Q'(t) = e^t(\sin 2t + 7\cos 2t)$

C) $Q'(t) = e^t(5\sin 2t + 7\cos 2t)$

D) $Q'(t) = e^t(2\sin 2t + 4\cos 2t)$

$Q'(t) = e^t(3\sin 2t + \cos 2t)$
$+ e^t(6\cos 2t - 2\sin 2t)$
$= e^t[\sin 2t + 7\cos 2t]$

9) ***Evaluate*** $\int \frac{\sin x}{1-\sin^2 x} dx$

A) $\cos x + c$

B) $-\csc x + c$

C) $\sec x + c$

D) $\ln|1 - \sin^2 x| + c$

$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos x} dx$
$= \int \tan x \sec x \, dx$
$= \sec x + c$

10) Determine the position function if the velocity function is
$v(t) = 1 - 6t \ \ ft/s^2 \ \ , s(0) = 5$

10) حدد دالة الموضع إذا كانت دالة السرعة تعطى
$v(t) = 1 - 6t \ \ ft/s^2 \ \ , s(0) = 5$

A) $S(t) = t - 6\,t^2 + 5$

B) $S(t) = t - 3\,t^2 + 5$

C) $S(t) = t - 3t^2$

D) $S(t) = t - 3\,t + 5$

11) Write out all terms and compute the sums
$\sum_{i=1}^{5}(3i^2 - 2)$

11) اكتب جميع الحدود ثم جد المجموع
$\sum_{i=1}^{5}(3i^2 - 2)$

A) $\sum_{i=1}^{5}(3i^2 - 2) = 1 + 10 + 25 + 46 + 73 = 155$

B) $\sum_{i=1}^{5}(3i^2 - 2) = 5 + 14 + 29 + 50 + 77 = 175$

C) $\sum_{i=1}^{5}(3i^2 - 2) = (3 + 12 + 27 + 48 + 75) - 2 = 163$

D) $\sum_{i=1}^{5}(3i^2 - 2) = -2 + 1 + 10 + 25 + 46 + 73 = 153$

12) Use the given function values to estimate the area under the curve using left endpoint evaluation

12) استخدم قيم الدالة المحددة لتقدير مساحة المنطقة تحت المنحنى باستخدام نقطة النهاية اليسرى

x	0.3	0.6	0.9	1.2	1.5	1.8	2.1
$f(x)$	1.1	1.7	1.8	1.3	0.8	1.6	1.9

A) $A = 10.2$

B) $A = 3.06$

C) $A = 3.60$

D) $A = 2.49$

13) If $f(x) = \begin{cases} 4x & , x > 2 \\ 5 & , x \leq 2 \end{cases}$ Compute $\int_1^4 f(x)dx$

A) 5

B) 24

C) 29

D) 19

5 4x

1 2 4

$= \int_1^2 5\,dx + \int_2^4 4x\,dx$

$= 5 + 24 = \boxed{29}$

14) Find a value of c that satisfies the conclusion of the integral mean value theorem

$$\int_{-1}^{2}(3x^2 - 2x)dx = 6$$

14) أوجد قيمة c التي تحقق نظرية القيمة المتوسطة في التكامل للدالة

$$\int_{-1}^{2}(3x^2 - 2x)dx = 6$$

A) $c = 1.2\,, -0.5$

B) $c = 2$

C) $c = 3$

D) $c = 1.2$

15) Evaluate $\int_1^4 (5x\sqrt{x} + \frac{1}{x})dx$

A) $66 + 2ln2$

B) $62 + 2ln2$

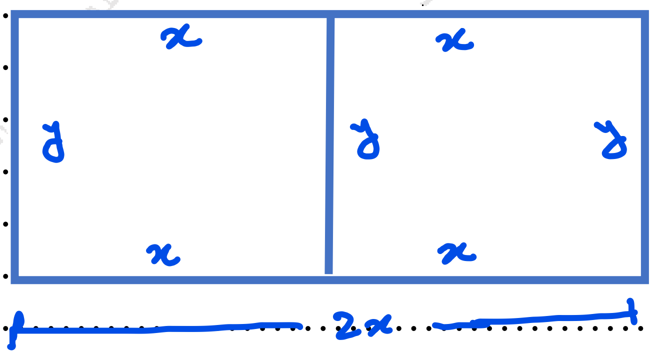
C) $64 + ln4$

D) $62 - 2ln2$

Part II :-

16) A two-pen corral to be built. The outline of the corral forms two identical adjoining rectangles .If there is 240 ft of fencing available. What dimensions of the corral will maximize the enclosed area.

16) يراد عمل سياج اسطبل مستطيل الشكل ومقسوم إلى حجرتين متلاصقتين ومتطابقتين في المساحة إذا كان طول السياج $240\ ft$ أوجد ابعاد الاسطبل لتكون مساحته أكبر ما يمكن .



$4x + 3y = 240$

$3y = 240 - 4x \quad \div 3$

$\boxed{y = 80 - \frac{4}{3}x}$

$A = 2xy$

$A = 2x(80 - \frac{4}{3}x)$

$A = 160x - \frac{8}{3}x^2$

$A' = 160 - \frac{16}{3}x = 0$

$\frac{3}{16} \cdot 160 = \frac{16}{3}x \cdot \frac{3}{16}$

$\boxed{x = 30}$

$A'' = -\frac{16}{3} < 0$

المساحة تكون أكبر ما يمكن عندما تكون الإبعاد

$x = 30 \longrightarrow 2x = 2(30) = \boxed{60}$

$y = 80 - \frac{4}{3}(30) = \boxed{40}$

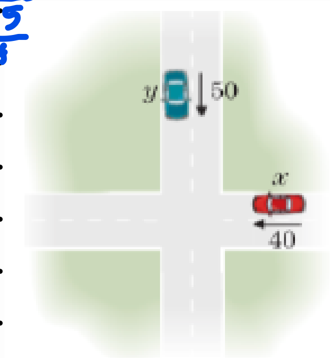
الأبعاد هي $60, 40$

17) A car is travelling at $50mph$ due to south at a point $\frac{1}{2}$ $mile$ norh of an intersection. A police car is travelling 40 mph due to west at a point $\frac{1}{4}$ $mile$ east of the same intersection. At that instant , the radar in the police car measures the rate at which the distance between the two cars is changing. What does the radar gun register?

17) تسير سيارة بسرعة $50\ mph$ في اتجاه الجنوب عند نقطة $\frac{1}{2}mi$ شمال التقاطع ، تسير سيارة شرطة بسرعة $40\ mph$ في اتجاه الغرب عند نقطة $\frac{1}{4}mi$ شرق نفس التقاطع .في تلك اللحظة يقيس الرادار في سيارة الشرطة معدل تغير المسافة بين السيارتين .ما السرعة التي يسجلها الرادار هل قياس الرادار لسرعة السيارة صحيح ؟

$x = \frac{1}{4}$, $y = \frac{1}{2}$ $\rightarrow$ $L = \sqrt{(\frac{1}{4})^2 + (\frac{1}{2})^2} = \frac{\sqrt{5}}{4}$

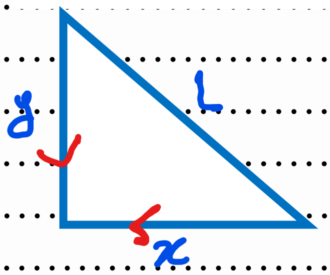
$\frac{dx}{dt} = -40$, $\frac{dy}{dt} = -50$ $\qquad \frac{dL}{dt} = \_\_\_$



$L^2 = x^2 + y^2$

$\cancel{2}L \frac{dL}{dt} = \cancel{2}x \frac{dx}{dt} + \cancel{2}y \frac{dy}{dt}$

$\frac{\sqrt{5}}{4} \frac{dL}{dt} = \frac{1}{4}(-40) + \frac{1}{2}(-50) = -35$



$\frac{dL}{dt} = -35 \div \frac{\sqrt{5}}{4} = -28\sqrt{5} \approx -62.6\ mph$

18) Suppose that a population grows according to the logistic equation $p'(t) = 2p(t)[7 - 2p(t)]$ .Find the population for which the growth rate is a maximum

18) على فرض أن النمو السكاني يعطى بالمعادلة $p'(t) = 2p(t)[7 - 2p(t)]$ المعادلة اللوجستية باستخدام أوجد التعداد السكاني الذي يكون فيه معدل النمو هو القيمة العظمى .

$f(P) = P'(t) = 2P(7 - 2P)$

$f(P) = 14P - 4P^2$

$f'(P) = 14 - 4P = 0$

$P = \frac{7}{2} = 3.5$

$f''(P) = -4 < 0$

يكون التعداد السكاني قيمة عظمى عندما يكون

$P = 3.5$

19) Use Riemann sum and a limit to compute the exact area under the curve $f(x) = x^2 + 2x$ on the interval $[0, 12]$.

19) باستخدام مجموع ريمان والنهاية أوجد المساحة الدقيقة تحت المنحنى $f(x) = x^2 + 2x$ في الفترة $[0, 2]$.

$\Delta x = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n}$

$x_i = 0 + \frac{2}{n} i = \frac{2}{n} i$

$f(x_i) = \left(\frac{2}{n} i\right)^2 + 2\left(\frac{2}{n} i\right) = \frac{4}{n^2} i^2 + \frac{4}{n} i$

$f(x_i) \cdot \Delta x = \frac{2}{n}\left(\frac{4}{n^2} i^2 + \frac{4}{n} i\right) = \frac{8}{n^3} i^2 + \frac{8}{n^2} i$

$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x = \frac{8}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{8}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2}$

$= \frac{8n(2n^2+3n+1)}{6n^3} + \frac{8n(n+1)}{2n^2}$

$A = \lim_{n \to \infty} \frac{8n(2n^2+3n+1)}{6n^3} + \lim_{n \to \infty} \frac{8n(n+1)}{2n^2}$

$= \frac{8(2)}{6} + \frac{8}{2} = \frac{8}{3} + 4 = \boxed{\frac{20}{3}}$ unit^2

20) If $y = \int_0^{\sin x} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt$, $|x| < \frac{\pi}{2}$, compute $\frac{dy}{dx}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} \cdot \cos x$

$= \frac{1}{\sqrt{\cos^2 x}} \cdot \cos x$

$= \frac{1}{\cos x} \cdot \cos x = 1$

$\frac{dy}{dx} = \boxed{1}$