الإمارات العربية المتحدة
وزارة التربية والتعليم

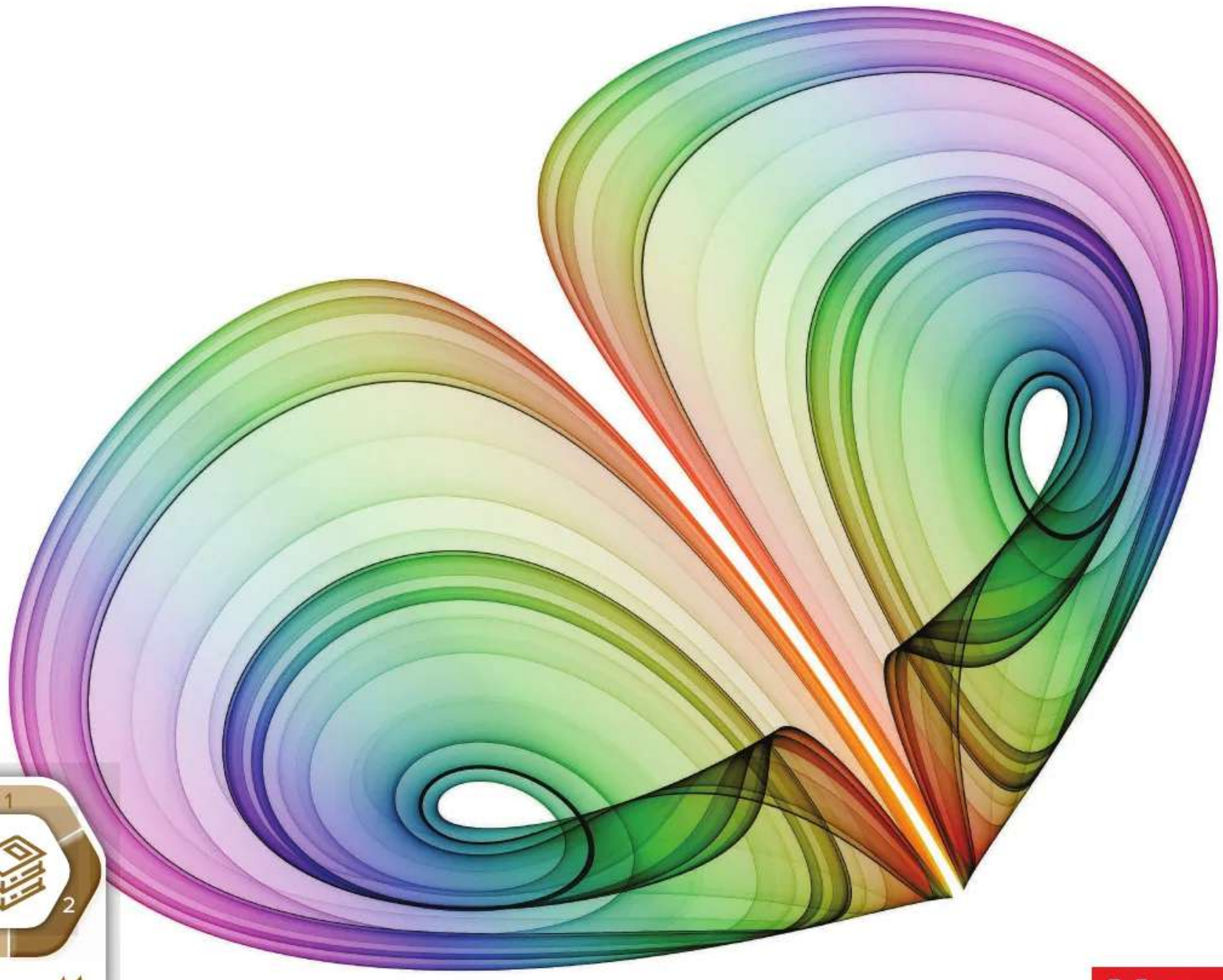
عام المجتمع
YEAR OF COMMUNITY
5 4
UAE ٢٤١

نحن الإمارات
WE THE UAE
2031

2025-2026

الرياضيات

نسخة الإمارات العربية المتحدة



الصف
11
متقدّم

Mc Graw Hill

McGraw-Hill Education

الرياضيات

نسخة الإمارات العربية المتحدة

المسار المتقدّم



عزيزي الطالب/ الطالبة

سيتم استخدام هذا الكتاب في الفصول القادمة.

رحلتك التعليمية لاتنتهي بانتهاء العام الدراسي. فاحرص على الاحتفاظ بالكتاب حتى نهاية المرحلة الثانوية.





Project: McGraw-Hill Education United Arab Emirates Edition Grade 11 Advanced Math SE Vol 2

FM. Front Matter, from Precalculus © 2014
6. Conic Sections, from Algebra 2 Chapter 9 © 2014
& Conic Sections and Parametric Equations, from Precalculus Chapter 7 © 2014
7. Vectors, from Precalculus Chapter 8 © 2014
& Vectors and the Geometries of Space, from Calculus Chapter 10 © 2012
8. Polar Coordinates and Complex Numbers, from Precalculus Chapter 9 © 2014
9. Sequences and Series, from Algebra 2 Chapter 10 © 2014
& Sequences and Series, from Precalculus Chapter 10 © 2014
EM Appendix, from Bluman Elementary Statistics;9e Appendix © 2015
& End Matter/Glossary, from Precalculus © 2014

صورة الغلاف: K-Fractals/Alamy Stock Photo

mheducation.com/prek-12

جميع الحقوق محفوظة © للعام 2021 لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

جميع الحقوق محفوظة. لا يجوز إعادة إنتاج أي جزء من هذا المنشور أو توزيعه في أي صورة أو بأي وسيلة كانت أو تخزينه في قاعدة بيانات أو نظام استرداد من دون موافقة خطية مسبقة من McGraw-Hill Education، بما في ذلك، على سبيل المثال لا الحصر، التخزين على الشبكة أو الإرسال عبرها أو البث لأغراض التعليم عن بُعد.

الحقوق الحصرية للتصنيع والتصدير عائدة لمؤسسة McGraw-Hill Education. لا يمكن إعادة تصدير هذا الكتاب من البلد الذي باعته له McGraw-Hill Education. هذه النسخة الإقليمية غير متاحة خارج أوروبا والشرق الأوسط وإفريقيا.

طُبع في دولة الإمارات العربية المتحدة.

رقم النشر الدولي: 978-1-39-890800-0 (نسخة الطالب)
MHID: 1-39-890800-2 (نسخة الطالب)

1 2 3 4 5 6 7 8 9 XXX 22 21 20 19 18 17

النسخة الإلكترونية

رقم النشر الدولي: 978-1-39-890804-8 (نسخة الطالب)
MHID: 1-39-890804-5 (نسخة الطالب)
رقم النشر الدولي: 978-1-39-890806-2 (نسخة المعلم)
MHID: 1-39-890806-1 (نسخة المعلم)

ملخص المحتويات

الوحدة 1 دوال القوة والدوال كثيرة الحدود والدوال النسبية

2 الدوال الأسيّة واللوغاريتمية

3 الدوال المثلثية

4 المتطابقات والمعادلات المثلثية

5 أنظمة المعادلات والمصفوفات

6 القطوع المخروطية والمعادلات الوسيطية

7 المتجهات

8 الإحداثيات القطبية والأعداد المركبة

9 المتتاليات والمتسلسلات

10 الإحصاء والاحتمالات

11 الدوال من منظور حساب التفاضل والتكامل

12 التفاضل والتكامل

يتم تعريف المحتوى على تطبيق التعلم الذكي

كتيب الطالب

وزارة التربية والتعليم
MINISTRY OF EDUCATION
معتمد
محتوى هذا الكتاب معتمد
من وزارة التربية والتعليم



6 القطوع المخروطية والمعادلات الوسيطية

الاستعداد للوحدة 6 328

6-1 القطع المكافئ 331

التوسّع: مختبر تقنية التمثيل البياني معادلات الدوائر 338

6-2 الدوائر 339

الاستكشاف: مختبر الجبر استكشاف القطع الناقص 346

6-3 القطع الناقص 347

اختبار منتصف الوحدة 355

6-4 القطع الزائد 356

6-5 تحديد القطوع المخروطية 364

التوسّع: مختبر تقنية التمثيل البياني تحليل العلاقات التربيعية 369

الاستكشاف: مختبر الجبر الأنظمة الخطية واللاخطية 371

6-6 حل الأنظمة الخطية اللاخطية 372

6-7 الدوران المحوري للقطوع المخروطية 378

التوسّع: مختبر تقنية التمثيل البياني أنظمة المعادلات والمتباينات غير الخطية 386

6-8 المعادلات الوسيطية 388

التوسّع: مختبر تقنية التمثيل البياني النمذجة باستخدام المعادلات الوسيطية 396

التقييم

دليل الدراسة والمراجعة 397

تدريب على الاختبار 403

التحضير للاختبارات المعيارية 404

تدريب على الاختبار المعياري 406
406

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education



7 المتجهات

الاستعداد للوحدة 7 408

7-1 **مقدمة في المتجهات** 410

7-2 **المتجهات في المستوى الإحداثي** 420

7-3 **الضرب النقطي ومساقط المتجهات** 428

■ **اختبار منتصف الوحدة** 437

7-4 **المتجهات في الفضاء ثلاثي الأبعاد** 438

التوسّع: مختبر تقنية التمثيل البياني تحويل المتجهات باستخدام المصفوفات 445

7-5 **الضرب النقطي والضرب المتجهي للمتجهات في الفضاء** 446

7-6 **بعض خصائص الضرب النقطي والضرب المتجهي** 453

التقييم

■ **دليل الدراسة والمراجعة** 475

■ **تدريب على الاختبار المعياري** 479

■ **الربط مع حساب التفاضل والتكامل المتقدم: مجالات المتجه** 480

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education



8 الإحداثيات القطبية والأعداد المركبة

الاستعداد للوحدة 8 482

8-1 **الإحداثيات القطبية** 484

الاستكشاف: مختبر تقنية التمثيل البياني استكشاف التمثيلات البيانية للمعادلات القطبية 491

8-2 **التمثيلات البيانية للمعادلات القطبية** 492

8-3 **الصور القطبية والديكارتية للمعادلات** 501

■ **اختبار منتصف الوحدة** 510

8-4 **الصور القطبية للقطوع المخروطية** 511

8-5 **الأعداد المركبة ونظرية دي موافر** 519

التقييم

■ **دليل الدراسة والمراجعة** 530

■ **تدريب على الاختبار** 535

■ **الربط مع حساب التفاضل والتكامل المتقدم: طول القوس** 536

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education



9 المتتاليات والمتسلسلات

الاستعداد للوحدة 9 538

9-1 **المتتاليات كدوال** 541

9-2 **المتتاليات والمتسلسلات والرمز سيجما** 548

9-3 **المتتاليات والمتسلسلات الحسابية** 558

9-4 **المتتاليات والمتسلسلات الهندسية** 566

الاستكشاف: مختبر الجبر المساحة تحت المنحنى 573

9-5 **المتسلسلة الهندسية اللانهائية** 575

التوسّع: مختبر تقنية التمثيل البياني النهايات 577

■ **اختبار منتصف الوحدة** 584

9-6 **التكرار والإعادة** 586

التوسّع: مختبر ورقة البيانات تسديد القروض على أقساط 592

9-7 **نظرية ذات الحدين** 593

التوسّع: مختبر الجبر التوافيق ومثلث باسكال 598

9-8 **البرهان بالاستقراء الرياضي** 599

9-9 **الدوال في صورة متسلسلة لا نهائية** 604

التوسّع: مختبر ورقة البيانات اكتشاف الأنماط في البيانات 613

التقييم

■ **دليل الدراسة والمراجعة** 616

■ **تدريب على الاختبار** 623

■ **التحضير للاختبارات المعيارية** 624

■ **تدريب على الاختبار المعياري** 626

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

كتيب الطالب

الرموز والصيغ والمفاهيم الأساسية

الرموز EM-1

القياسات EM-2

العمليات والعلاقات الحسابية EM-3

الصيغ والمفاهيم الجبرية EM-3

الصيغ والمفاهيم الهندسية EM-5

الدوال والمتطابقات المثلثية EM-6

الدوال الأصلية والعمليات الحسابية على الدوال EM-7

النهايات والتفاضل والتكامل EM-7

الصيغ والمفاهيم الاحصائية EM-8

جداول الإحصاء

الجدول A: التوزيع الطبيعي المعياري EM-9

الجدول B: توزيع ستيودنت (توزيع t) EM-11

الجدول C: توزيع كاي تربيع (توزيع χ^2) EM-12

قاموس المصطلحات متوفر في النسخة الإلكترونية

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الوحدة 6

6 القطوع المخروطية والمعادلات الوسيطية



Chapter sourced from Conic Sections and Parametric Equations, from Precalculus Chapter 7 © 2014 McGraw-Hill Education

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

السابق

- إيجاد حل أنظمة المعادلات الخطية جبريًا وبيانيًا.

الحالي

- بعد دراستك لهذه الوحدة ستكون قادراً على::
  - استخدام صيغتي نقطة المنتصف والمسافة.
  - كتابة وتمثيل معادلات القطع المكافئ والدوائر والقطع الناقص والقطع الزائد.
  - تحديد القطوع المخروطية.
  - إيجاد حل أنظمة المعادلات والمتباينات التربيعية.

لماذا؟ ▲

- **الفضاء** تتجلى القطوع المخروطية في جوانب عديدة من الفضاء، وتستخدم معادلات الدوائر لتسيير المركبات الفضائية والأقمار الصناعية في مدارات دائرية حول الأرض والقمر. كما أن الكواكب تسير في مسارات إهليلجية (بشكل القطع الناقص) وليست دائرية كما كان يعتقد سابقًا. وتسير المذنبات على طول أحد فروع قطع زائد. الأمر الذي يمكن أن يساعدنا على التكهن بموعد ظهورها مرة أخرى.

الاستعداد للوحدة

1 خيار الكتاب المدرسي أجب عن أسئلة التدريب السريع التالية. يُرجى الرجوع إلى المراجعة السريعة للحصول على المساعدة.

تدريب سريع	مراجعة سريعة

حُـلّ كل معادلة بإكمال المربع.

1. $x^2 + 8x + 7 = 0$
2. $x^2 + 5x - 6 = 0$
3. $x^2 - 8x + 15 = 0$
4. $x^2 + 2x - 120 = 0$
5. $2x^2 + 7x - 15 = 0$
6. $2x^2 + 3x - 5 = 0$
7. $x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{23}{16} = 0$
8. $3x^2 - 4x = 2$

حُـلّ كل نظام معادلات باستخدام التعويض أو الحذف:

9. $y = x + 3$
   $2x - y = -1$
10. $2x - 5y = -18$
    $3x + 4y = 19$
11. $4y + 6x = -6$
    $5y - x = 35$
12. $x = y - 8$
    $4x + 2y = 4$
13. **أموال** دفع مجلس الطلبة AED 15 مقابل كل اشتراك في أحد المؤتمرات. كما دفعوا AED 10 مقابل كل قميصٍ بإجمالي بلغ AED 180. في العام الماضي، أنفقوا AED 12 لكل اشتراك و AED 9 لكل قميص بإجمالي AED 150 لشراء نفس عدد الاشتراكات والقمصان. اكتب وحل نظامًا من معادلتين يمثل عدد الاشتراكات والقمصان التي تم شراؤها كل عام.

مثال 1

حُـلّ المعادلة $x^2 + 6x - 16 = 0$ بإكمال المربع.

$$x^2 + 6x = 16$$
$$x^2 + 6x + 9 = 16 + 9$$
$$(x + 3)^2 = 25$$
$$x + 3 = \pm 5$$
$$x + 3 = 5 \text{ أو } x + 3 = -5$$
$$x = 2 \qquad x = -8$$

مثال 2

جـد حلاً جبريًا لنظام المعادلات.

$$3y = x - 9$$
$$4x + 5y = 2$$

بما أن x تملك معاملاً قيمته 1 في المعادلة الأولى، فاستخدم طريقة التعويض. أولاً، جـد حل تلك المعادلة من أجل x.

$3y = x - 9 \quad \rightarrow \quad x = 3y + 9$

$4(3y + 9) + 5y = 2$	عوّض $3y + 9$ بـ x.
$12y + 36 + 5y = 2$	خاصية التوزيع
$17y = -34$	جمّع الحدود المتماثلة.
$y = -2$	اقسم كل طرفٍ على 71.

لإيجاد قيمة x، استخدم $y = -2$ في المعادلة الأولى.

$3(-2) = x - 9$	عوّض -2 بـ y.
$-6 = x - 9$	اضرب.
$3 = x$	اجمع 9 إلى كل طرف.

إذن الحل هو $(3, -2)$.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

البدء في هذه الوحدة

سوف تتعلم عدة مفاهيم ومهارات ومفردات جديدة خلال دراستك لهذه الوحدة. للاستعداد، حدد المصطلحات المهمة ونظّم مواردك.
قد ترغب بالرجوع إلى وحدات سابقة لمراجعة المهارات المطلوبة.

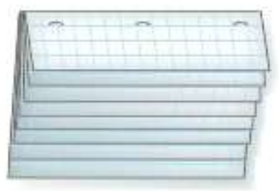
مطويات منظّم الدراسة

القطوع المخروطية اصنع هذه المطوية لتساعدك على تنظيم ملاحظاتك على هذه الوحدة حول القطوع المخروطية. ابدأ باستخدام ثماني ورقات من ورق التمثيل البياني.

1 **دبِّس** كومة ورق التمثيل البياني على طول الجزء العلوي لتشكيل كتيب.



2 **قُصّ** سبعة خطوطٍ من الجزء السفلي للورقة الأولى وستة خطوطٍ من الثانية ... وهكذا.



3 **اكتب** على كل ورقة أرقام الدروس كما هو موضح.



المفردات الجديدة

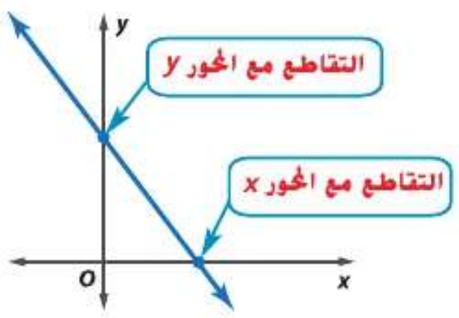
- قطع مكافئ parabola
- بؤرة focus
- دليل directrix
- دائرة circle
- مركز الدائرة center of a circle
- نصف القطر radius
- قطع ناقص ellipse
- البؤرتان foci
- المحور الأكبر major axis
- المحور الأصغر minor axis
- مركز القطع الناقص center of an ellipse
- رؤوس vertices
- رؤوس مرافقة co-vertices
- مجموع ثابت constant sum
- قطع زائد hyperbola
- المحور القاطع transverse axis
- المحور المرافق conjugate axis
- فرق ثابت constant difference

مراجعة المفردات

معادلة تربيعية معادلة بالصيغة $ax^2 + bx + c = 0$.
حيث $a \neq 0$

نظام المعادلات مجموعة من المعادلات لها المتغيرات ذاتها.

التقاطعات مع المحورين x و y
إحداثيات x أو y للنقاط التي يقطع التمثيل البياني عندها المحورين x أو y



حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

6-1 القطع المكافئ

السابق:
- قمتَ بتمثيل الدوال التربيعية بيانيًا.

الحالي:
1. كتابة معادلات القطوع المكافئة بالصيغة القياسية.
2. تمثيل القطوع المكافئة بيانيًا.

لماذا ؟
- يمكن استخدام أطباق الأقمار الصناعية لإرسال الإشارات واستقبالها ويمكن رؤيتها مثبتة على المنازل والمتاجر.

طبق القمر الصناعي هو أحد أنواع الهوائيات التي صُممت لاستقبال الإشارات من الأقمار الصناعية التي تدور في المدارات، وتنعكس الإشارات من سطح الطبق الذي على شكل قطع مكافئ إلى نقطة تجميع مشتركة.



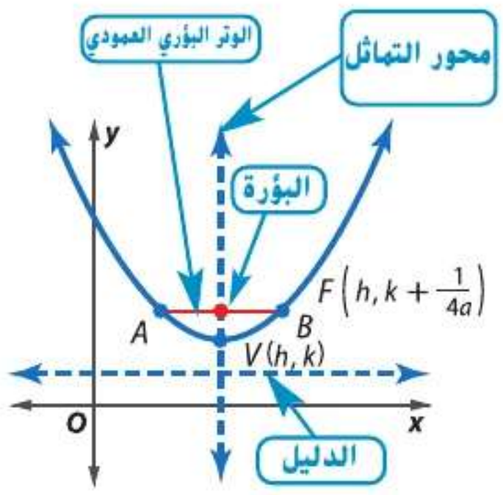
مفردات جديدة
- قطع مكافئ (parabola)
- بؤرة (focus)
- دليل (directrix)
- وتر بؤري عمودي (latus rectum)
- الصيغة القياسية (standard form)
- الصيغة العامة (general form)

ممارسات في الرياضيات
1 فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها.

1 معادلات القطوع المكافئة

يمكن تعريف **القطع المكافئ** بأنه مجموعة جميع النقاط في المستوى التي تبعد مسافةً واحدةً عن نقطةٍ معطاةٍ تدعى **البؤرة** ومستقيمٍ معطىً يدعى **الدليل**.

يطلق على القطعة المستقيمة المارة من بؤرة القطع المكافئ والعمودية على محور التماثل اسم **وتر بؤري عمودي**. تقع النقطتان الطرفيتان للوتر البؤري العمودي على القطع المكافئ.



المفهوم الأساسي صور معادلات القطوع المكافئة

صيغة المعادلة	$y = a(x - h)^2 + k$	$x = a(y - k)^2 + h$
اتجاه الفتحة	للأعلى إذا كانت $a > 0$. للأسفل إذا كانت $a < 0$	لليمين إذا كانت $a > 0$. لليسار إذا كانت $a < 0$
الرأس	(h, k)	(h, k)
محور التماثل	$x = h$	$y = k$
البؤرة	$\left(h, k+\frac{1}{4a}\right)$	$\left(h+\frac{1}{4a}, k\right)$
الدليل	$y = k - \frac{1}{4a}$	$x = h - \frac{1}{4a}$
طول الوتر البؤري العمودي	$\left\|\frac{1}{a}\right\|$ وحدة	$\left\|\frac{1}{a}\right\|$ وحدة

الصيغة القياسية لمعادلة القطع المكافئ الذي يقع رأسه النقطة (h, k) ومحور تماثله $x = h$ هي $y = a(x - h)^2 + k$.

- إذا كانت $a > 0$. فإن k تمثل القيمة الصغرى للدالة المرتبطة والقطع المكافئ مفتوح إلى الأعلى.
- إذا كانت $a < 0$. فإن k تمثل القيمة العظمى للدالة المرتبطة والقطع المكافئ مفتوح إلى الأسفل.

تمثل معادلة القطع المكافئ في الشكل $y = ax^2 + bx + c$ **الصيغة العامة**. أي معادلة بالصيغة العامة يمكن كتابتها بالصيغة القياسية. يعتمد شكل القطع المكافئ والمسافة بين البؤرة والدليل على قيمة a في المعادلة.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

مراجعة المفردات

إكمال المربع

إعادة كتابة تعبير تربيعي بصورة ثلاثي حدودٍ تربيعي كامل

مثال 1 تحليل معادلة القطع المكافئ

اكتب $y = 2x^2 - 12x + 6$ بالصيغة القياسية. حدد رأس القطع المكافئ ومحور تماثله واتجاه فتحته.

$y = 2x^2 - 12x + 6$	المعادلة الأصلية.
$= 2(x^2 - 6x) + 6$	اخرج 2 عامل مشترك من الحدين x^2 و x.
$= 2(x^2 - 6x + \blacksquare) + 6 - 2(\blacksquare)$	أكمل المربع على الطرف الأيمن.
$= 2(x^2 - 6x + 9) + 6 - 2(9)$	العدد 9 الذي تضيفه عندما تكمل المربع مضروبة في 2.
$= 2(x - 3)^2 - 12$	حلل إلى العوامل الأولية.

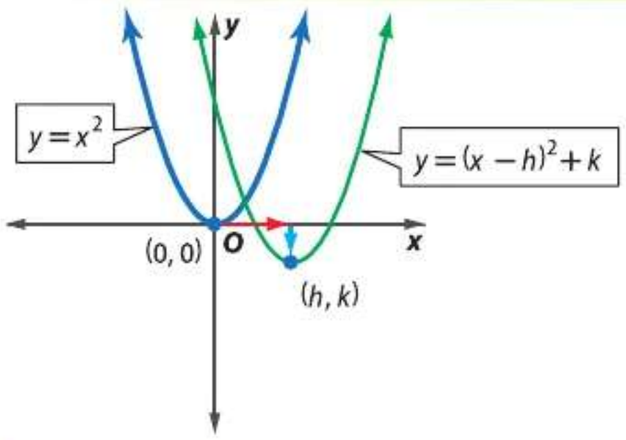
يقع رأس هذا القطع المكافئ عند النقطة $(3, -12)$، ومعادلة محور التماثل هي $x = 3$. فتحة القطع المكافئ للأعلى.

تمرين موجّه

1. اكتب $y = 4x^2 + 16x + 34$ بالصيغة القياسية. حدد رأس القطع المكافئ ومحور تماثله واتجاه فتحته.

2 تمثيل القطع المكافئ بيانيًا

تعلمت في السابق، أن منحنى الدالة التربيعية $y = a(x - h)^2 + k$ هو تحويلٌ لمنحنى الدالة الأصلية $y = x^2$ بعد ازاحة مقدارها h وحدة أفقيًا و k وحدة رأسيًا، وانعكاس و/ أو تمدد حسب قيمة a.



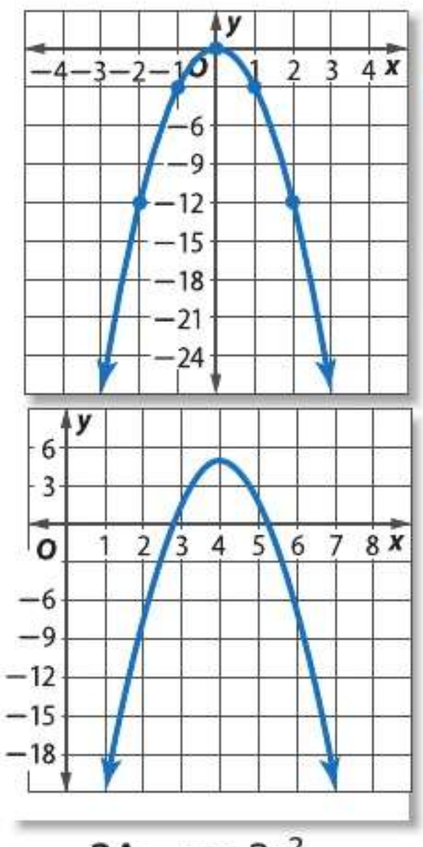
مثال 2 تمثيل القطع المكافئ بيانيًا

مثّل كل معادلة بيانيًا.

a. $y = -3x^2$

في هذه المعادلة، $h = 0$ و $k = 0$. الرأس موجود عند نقطة الأصل. بما أن معادلة محور التماثل $x = 0$. عوّض x بعددٍ صحيح موجب صغير وجد قيم y المقابلة. بما أن التمثيل البياني متماثل حول المحور y، فالنقاط عند $(-3, -27)$ و $(-2, -12)$، $(-1, -3)$ تقع على قطع مكافئ أيضًا. استخدم كل هذه النقاط لرسم التمثيل البياني.

x	y
1	−3
2	−12
3	−27



b. $y = -3(x - 4)^2 + 5$

المعادلة من الشكل $y = a(x - h)^2 + k$، حيث $h = 4$ و $k = 5$. التمثيل البياني لهذه المعادلة هو التمثيل البياني لـ $y = -3x^2$ في الجزء **a** مُزاحًا 4 وحدات لليمين و 5 وحدات للأعلى. الرأس موجود الآن عند $(4, 5)$.

2A. $y = 2x^2$

2B. $y = 2(x - 1)^2 - 4$

انتبه!

البنية تحقق بعناية من قيم h و k قبل البدء بتمثيل المعادلة بيانيًا.

- إذا كانت h موجبة، فأزح التمثيل البياني h وحدة إلى اليمين.
- إذا كانت h سالبة، فأزح التمثيل البياني $|h|$ وحدة إلى اليسار.
- إذا كانت k موجبة، فأزح التمثيل البياني k وحدة للأعلى.
- إذا كانت k سالبة، فأزح التمثيل البياني $|k|$ وحدة للأسفل.

تمرين موجّه

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

معادلات القطوع المكافئة ذات محاور التماثل الرأسية لها الدالة الأم $y = x^2$ وتأخذ الصيغة $y = a(x - h)^2 + k$. وهي دوال. معادلات القطوع المكافئة ذات محاور التماثل الأفقية تأخذ الصيغة $x = a(y - k)^2 + h$ وهي ليست دوال. التمثيل البياني الأصلي لهذه المعادلات هو $x = y^2$.

نصيحة دراسية

التمثيل البياني عند تمثيل هذه الدوال، قد يكون من المفيد رسم التمثيل البياني للدالة الأم.

مثال 3 التمثيل البياني لمعادلة بالصيغة العامة

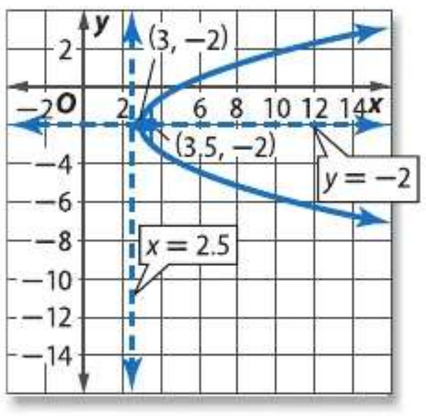
مثّل كل معادلة بيانيًا.

a. $2x - y^2 = 4y + 10$

الخطوة 1 اكتب المعادلة بالصيغة $x = a(y - k)^2 + h$.

$2x - y^2 = 4y + 10$	المعادلة الأصلية
$2x = y^2 + 4y + 10$	أضف y^2 لكل طرف لعزل الحد الذي يحوي x .
$2x = (y^2 + 4y + \blacksquare) + 10 - \blacksquare$	أكمل المربع .
$2x = (y^2 + 4y + 4) + 10 - 4$	اجمع واطرح 4، بما أن $\left(\frac{4}{2}\right)^2 = 4$.
$2x = (y + 2)^2 + 6$	حلل العوامل واطرح.
$x = \frac{1}{2}(y + 2)^2 + 3$	$(h, k) = (3, -2)$

الخطوة 2 استخدم المعادلة لإيجاد معلومات حول التمثيل البياني. ثم ارسم التمثيل البياني بالاعتماد على التمثيل البياني الأصلي $x = y^2$.



الرأس: $(3, -2)$

محور التماثل: $y = -2$

البؤرة: $\left(3 + \frac{1}{4\left(\frac{1}{2}\right)}, -2\right)$ أو $(3.5, -2)$

الدليل: $x = 3 - \frac{1}{4\left(\frac{1}{2}\right)}$ أو 2.5

اتجاه الفتحة: لليمين، بما أن $a > 0$

طول الوتر البؤري العمودي: $\left|\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)}\right|$ أو وحدتان

b. $y + 2x^2 + 32 = -16x - 1$

الخطوة 1

$y + 2x^2 + 32 = -16x - 1$	المعادلة الأصلية
$y = -2x^2 - 16x - 33$	جد الحل من أجل y.
$y = -2(x^2 + 8x + \blacksquare) - 33 - \blacksquare$	أكمل المربع.
$y = -2(x^2 + 8x + 16) - 33 - (-32)$	اجمع واطرح -32.
$y = -2(x + 4)^2 - 1$	حلل العوامل وبسّط.

الخطوة 2 الرأس: $(-4, -1)$

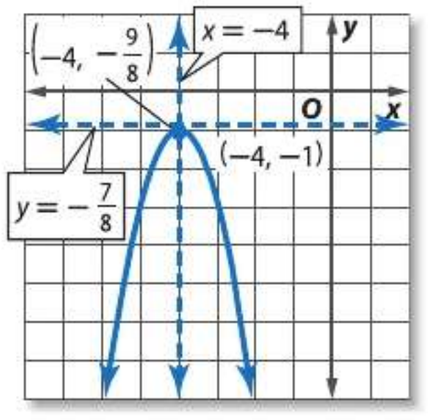
محور التماثل: $x = -4$

البؤرة: $\left(-4, -\frac{9}{8}\right)$

الدليل: $y = -\frac{7}{8}$

طول الوتر البؤري العمودي: $\frac{1}{2}$ وحدة

مفتوح إلى الأسفل



تمرين موجّه

3A $3x - y^2 = 4x + 25$

3B. $y = x^2 + 6x - 4$

قراءة في الرياضيات

وتر بؤري عمودي اشتق الاسم الإنجليزي للوتر البؤري العمودي (latus rectum) من اللاتينية، حيث تعني "*latus* جانب" في حين تعني *rectum* "مستقيم"

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

يمكنك استخدام معلومات محددة حول قطع مكافئ لكتابة معادلة ورسم تمثيلٍ بياني.

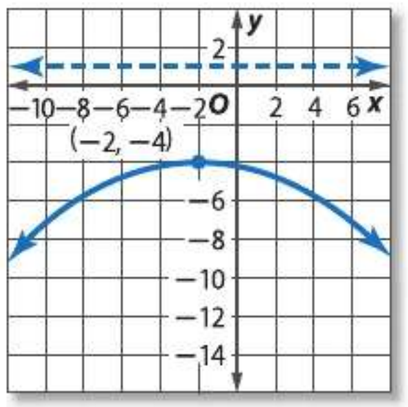
مثال 4 كتابة معادلة القطع المكافئ

اكتب معادلة قطع مكافئٍ يقع رأسه على النقطة (−4, −2) ويقع دليله على المستقيم $y = 1$. ثم مثّل المعادلة بيانيًا.

الدليل مستقيم أفقي، لذا فمعادلة القطع المكافئ من الصيغة $y = a(x - h)^2 + k$. جـد a، و h، و k.

- يقع الرأس عند النقطة $(-2, -4)$. لذلك فإن $h = -2$ و $k = -4$.
- استخدم معادلة الدليل لإيجاد a.

$y = k - \frac{1}{4a}$	معادلة الدليل
$1 = -4 - \frac{1}{4a}$	عوض y بـ 1 و k في -4.
$5 = -\frac{1}{4a}$	أضف 4 إلى كل طرف.
$20a = -1$	اضرب كل طرف في $4a$.
$a = -\frac{1}{20}$	اقسم كل طرف على 20.



ولذلك، فمعادلة القطع المكافئ هي $y = -\frac{1}{20}(x + 2)^2 - 4$.

تمرين موجّه

اكتب معادلة لكل قطعٍ مكافئٍ موضح أدناه. ثم مثّل المعادلة بيانيًا.

4A. الرأس (3, 1)، البؤرة (5, 1)

4B. البؤرة (6, 5)، الدليل $x = -2$

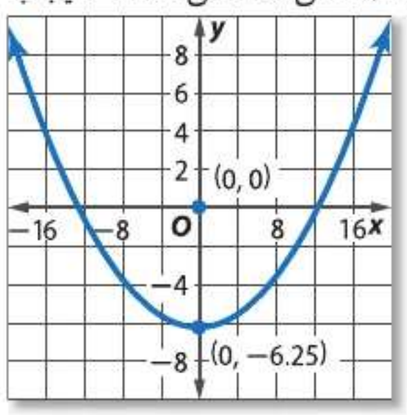
تستخدم القطوع المكافئة في الحياة اليومية أحيانًا.

مثال من الحياة اليومية 5 كتابة معادلة للقطع المكافئ

البيئة يمكن تسخير الطاقة الشمسية باستخدام مرايا لها شكل القطع المكافئ. وتعكس المرايا أشعة الشمس إلى بؤرة القطع المكافئ. محور كل مرآة لها شكل القطع المكافئ في المنشأة الموصوفة إلى اليسار يقع على ارتفاع **1.9 m** فوق الرأس. طول الوتر البؤري العمودي **7.6 m**

a. افترض بأن البؤرة تقع عند نقطة الأصل. اكتب معادلة القطع المكافئ الذي تشكله كل مرآة.

حتى يتسنى للمرايا تجميع طاقة الشمس، يجب أن تكون فتحة القطع المكافئ للأعلى. لذلك يجب أن يكون الرأس تحت البؤرة.



البؤرة: (0, 0) الرأس: (0, −1.9)

قياس الوتر البؤري العمودي 25. لذلك $\left|\frac{1}{a}\right| = 7.6$ و $a = 1/25$.

باستخدام الصيغة $y = a(x - h)^2 + k$ ، فإن معادلة القطع المكافئ الذي تشكله كل مرآة هي $y = \frac{1}{7.6}x^2 - 1.9$.

b. مثّل المعادلة بيانيًا.

استخدم الآن هذه المعلومات لرسم تمثيلٍ بياني.

تمرين موجّه

5. اكتب ومثّل بيانيًا معادلة مرآة لها شكل القطع المكافئ تقع بؤرتها على ارتفاع 1.4 m فوق الرأس ووتر بؤري عمودي يبلغ طوله 5.5 m. عندما تكون البؤرة عند نقطة الأصل.



الربط بالحياة اليومية

في صحراء موهافي بكاليفورنيا، تُستخدم مرايا لها شكل القطع المكافئ لتسخين النفط الذي يتدفق عبر أنابيب موضوعة عند البؤرة. ويُستخدم النفط المسخن لتوليد الكهرباء.

المصدر: Solel

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التحقق من فهمك

مثال 1 **اكتب كل معادلة بالصيغة القياسية. حدد رأس القطع المكافئ ومحور تماثله واتجاه فتحته.**

1. $y = 2x^2 - 24x + 40$

2. $y = 3x^2 - 6x - 4$

3. $x = y^2 - 8y - 11$

4. $x + 3y^2 + 12y = 18$

الأمثلة 2–3 **مثّل كل معادلة بيانيًا.**

5. $y = (x - 4)^2 - 6$

6. $y = 4(x + 5)^2 + 3$

7. $y = -3x^2 - 4x - 8$

8. $x = 3y^2 - 6y + 9$

مثال 4 **اكتب معادلة لكل قطعٍ مكافئٍ موضح أدناه. ثم مثّل المعادلة بيانيًا.**

9. الرأس (0, 2)، البؤرة (0, 4)

10. الرأس (−2, 4)، الدليل $x = -1$

11. البؤرة (3, 2)، الدليل $y = 8$

12. الرأس (−1, −5)، البؤرة (−5, −5)

مثال 5 **13. علم الفلك** خذ بعين الاعتبار المرآة الزئبقية التي لها شكل قطع مكافئ مثل تلك المذكورة في بداية الدرس. البؤرة ترتفع 1.8 m فوق الرأس والوتر البؤري العمودي بطول 7.3 m.

a. افترض بأن البؤرة تقع عند نقطة الأصل. اكتب معادلة القطع المكافئ الذي يشكله الميكروفون ذو شكل القطع المكافئ.

b. مثّل المعادلة بيانيًا.

التمرين وحل المسائل

مثال 1 **اكتب كل معادلة بالصيغة القياسية. حدد رأس القطع المكافئ ومحور تماثله واتجاه فتحته.**

الأمثلة 2–3 **مثّل كل معادلة بيانيًا.**

مثال 4 **اكتب معادلة لكل قطعٍ مكافئٍ موضح أدناه. ثم مثّل المعادلة بيانيًا.**

26. الرأس (0, 1)، البؤرة (0, 4)

27. الرأس (1, 8)، الدليل $y = 3$

28. البؤرة (−2, −4)، الدليل $x = -6$

29. البؤرة (2, 4)، الدليل $x = 10$

30. الرأس (−6, 0)، الدليل $x = 2$

31. الرأس (9, 6)، البؤرة (9, 5)

32. علم الفلك عندما تُرمى كرة البيسبول، فإنها تتحرك في مسار له شكل قطع مكافئ. لنفترض أنه يتم رمي كرة بيسبول من مستوى سطح الأرض، وتصل لأقصى ارتفاع يبلغ 15.2 m، ثم تسقط على الأرض على بعد 61 m من حيث تم رميها. على افتراض أنه يمكن تمثيل هذه الحالة على المستوى الإحداثي بحيث تكون بؤرة القطع المكافئ عند نقطة الأصل، جد معادلة مسار الكرة ذي شكل القطع المكافئ. افترض بأن البؤرة عند مستوى سطح الأرض.

33. المثابرة تستخدم الهوائيات الأرضية والأقمار الصناعية لنقل الإشارات بين مركز عمليات بعثة ناسا والمركبات الفضائية التي يتحكم بها. يبلغ قطر أحد تلك الأطباق التي لها شكل القطع المكافئ 146 ft. وتقع بؤرته على ارتفاع 48 ft فوق الرأس.

a. ارسم خيارين للطبق. أحدهما فتحته للأعلى والآخر فتحته لليسار.

b. اكتب معادلتين تمثلان الرسمين في الجزء **a**.

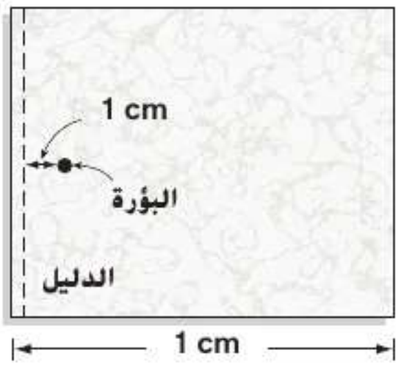
c. إذا أردت معرفة عمق الطبق، فهل يهم أي معادلة تستخدم؟ لِمَ أو لِمَ لا؟

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

34. **المظلات** مظلة شاطئ لها قوس على شكل قطع مكافئ مفتوح إلى الأسفل. وتمتد المظلة 1.8 m من جانب لآخر ويبلغ ارتفاعها 0.45 m. اكتب معادلة قطع مكافئ يمثل القوس. مفترضًا بأن نقطة الأصل تقع عند النقطة التي يلتقي فيها العمود والمظلة مع رأس القوس.

35. **السيارات** يحتوي مصباح سيارة على عاكس له شكل قطع مكافئ. يرتد الضوء المنبعث من المصدر عن العاكس ذو شكل القطع المكافئ ويضيء خارجًا من الجزء الأمامي للمصباح. معادلة المقطع العرضي للعاكس هي $y = \frac{1}{12}x^2$. على أي بعد من الرأس يجب أن توضع شعيرة المصباح؟

36. **التمثيلات المتعددة** ابدأ بصحيفة من ورق الشمع يبلغ طولها 15 سنتيمتر وبعرض 12 cm



a. **العملي** ارسم مستقيمًا عموديًا على جانبي الورقة عن طريق طي الورقة من إحدى النهايتين، ثم افتح الورقة مجددًا. هذا الخط هو الدليل. عيّن نقطة عند منتصف المسافة بين جانبي الورقة تقريبًا بحيث تبعد عن الدليل حوالي 1 cm. هذه هي البؤرة.

b. **العملي** ابدأ بصحيفة جديدة من ورق الشمع. ارسم مخططًا آخر لقطع مكافئ بحيث تبعد بؤرته حوالي 3 cm عن الدليل.

c. **العملي** على صحيفة جديدة من ورق الشمع، ارسم مخططًا ثالثًا لقطع مكافئ تبعد بؤرته حوالي 5 cm عن الدليل.

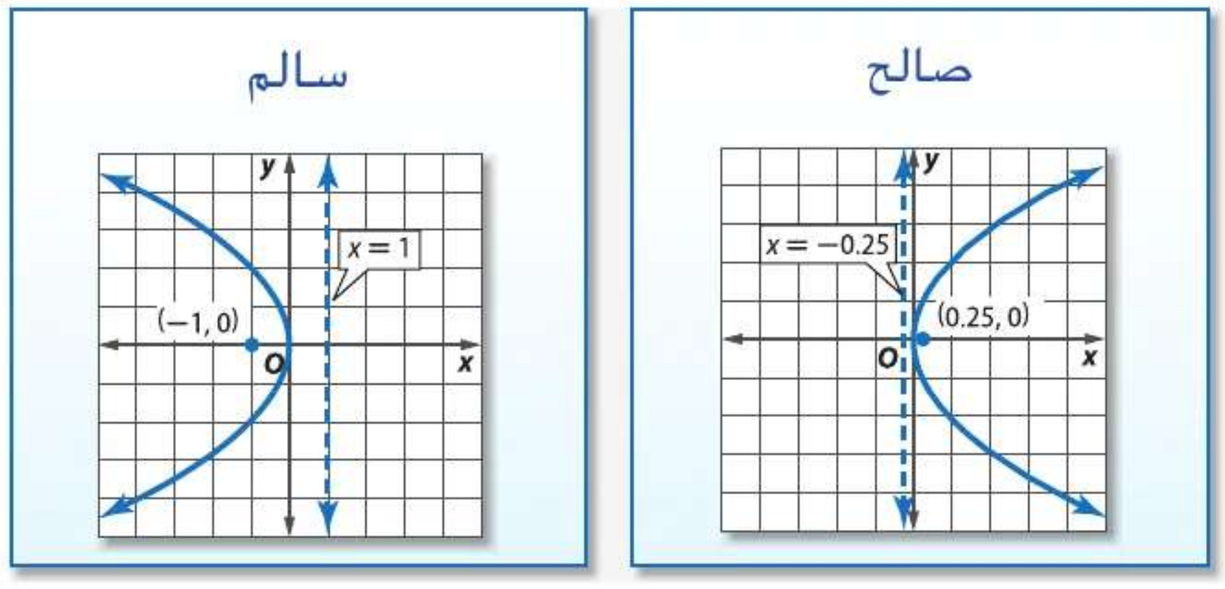
d. **اللفظي** قارن بين أشكال القطوع المكافئة الثلاثة. كيف تؤثر المسافة بين البؤرة والدليل على شكل القطع المكافئ؟

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

37. **الاستدلال** كيف تغير معادلة الدالة الأم $y = x^2$ لتزيح التمثيل البياني لليمين؟

38. **مسألة غير محددة الإجابة** يشترك قطعان مكافئان بالرأس عند $(-3, 1)$ وبالنقطة ذات الإحداثيات $(-1, 0)$. اكتب معادلتين محتملتين لهذين القطعين المكافئين.

39. **النقد** يمثل صالح وسالم $\frac{1}{4}y^2 + x = 0$. فهل أيٌّ منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.



40. **الكتابة في الرياضيات** **لماذا تُستخدم أشكال القطع المكافئ في الحياة اليومية؟**

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تمرين على الاختبار المعياري

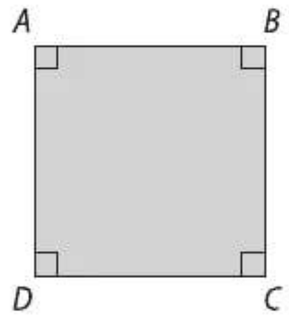
41. يضع البستاني سياجًا حول حديقة مستطيلة مساحتها $1320\ cm^2$. طلب سياجًا بطول $148\ m$ إذا استخدم كامل السياج. فما طول الضلع الأكبر للحديقة؟

A $30\ m$
B $34\ m$
C $44\ m$
D $46\ m$

42. SAT/ACT عند قسمة عددٍ على 5، يكون الناتج أكبر بمقدار 7 من العدد. جـــد العدد.

F $-\frac{35}{4}$
G $-\frac{35}{6}$
H $\frac{35}{6}$
J $\frac{28}{4}$
K $\frac{35}{4}$

43. هندسة ما مساحة المربع التالي، إذا كان طول $\overline{BD}$ يساوي $2\sqrt{2}$ ؟



A 1
B 2
C 3
D 4

44. إجابة قصيرة يقلّ قياس أصغر زاويةٍ في مثلث بمقدار الثلثين عن قياس زاويته الوسطى. وقياس الزاوية الوسطى يساوي ثلاثة أسباع قياس أكبر زاوية. جـــد قياس أكبر زاوية.

مراجعة شاملة

45. الهندسة جـــد محيط المثلث الذي رؤوسه النقاط $(2, 4)$، و $(3, -1)$، و $(-3, 1)$.

46. العمل يستطيع عامل تنظيف جدار بحجم معين خلال 5 ساعات. ويستطيع عامل آخر إنجاز العمل نفسه خلال 4 ساعات. إذا عمل العاملان معًا، كم من الزمن سيستغرقهما القيام بهذه المهمة؟ حدد ما إذا كانت إجابتك منطقية أم لا.

حُـــلّ كل معادلة أو متباينة. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

47. $\ln (x + 1) = 1$
48. $\ln (x - 7) = 2$
49. $e^x > 1.6$
50. $e^{5x} \geq 25$

حوّل لأبسط صورة.

51. $\sqrt{0.25}$
52. $\sqrt[3]{-0.064}$
53. $\sqrt[4]{z^8}$
54. $-\sqrt[6]{x^6}$

أدرج جميع الأصفار النسبية المحتملة لكل دالة.

55. $h(x) = x^3 + 8x + 6$
56. $p(x) = 3x^3 - 5x^2 - 11x + 3$
57. $h(x) = 9x^6 - 5x^3 + 27$

مراجعة المهارات

حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

58. $\sqrt{24}$
59. $\sqrt{45}$
60. $\sqrt{252}$
61. $\sqrt{512}$

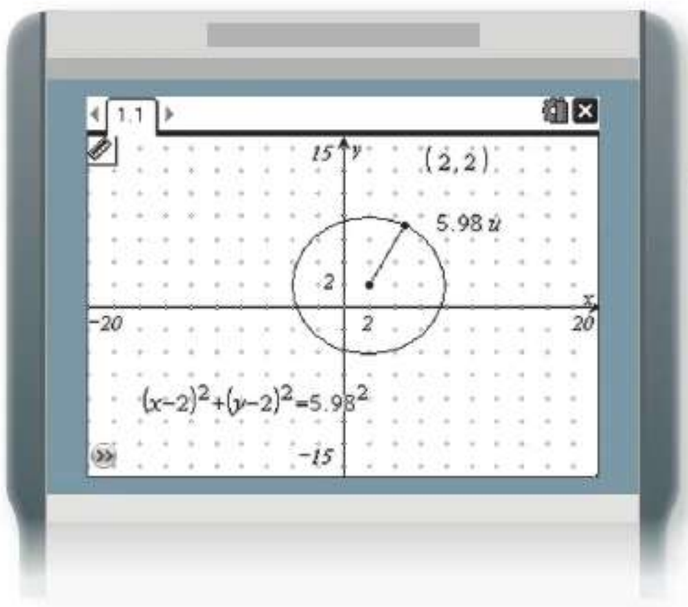
McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

6-2 مختبر تقنية التمثيل البياني
معادلات الدوائر

يمكنك استخدام تقنية التمثيل البياني لفحص خصائص الدوائر وعلاقتها بمعادلة الدائرة.

النشاط

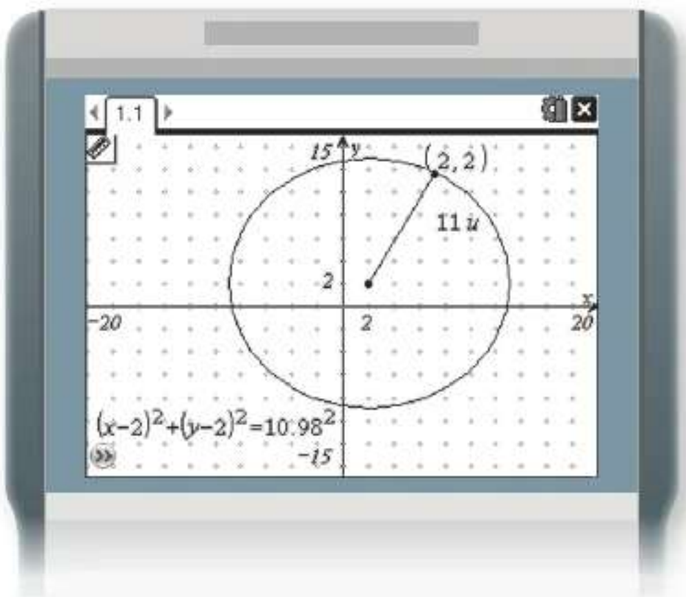
الخطوة 1 ارسم دائرة.



- افتح صفحة Graphs **(تمثيلات بيانية)** جديدة. حدد القائمة Window/Zoom واستخدم الأداة Windows Setting لضبط حجم النافذة كما هو موضح. من القائمة View **(عرض)**، حدد Show Grid **(عرض شبكي)**. ثم من القائمة Shapes **(أشكال)**، حدد Circle **(دائرة)**. ضع المؤشر على النقطة (2 ,2) واضغط على enter **(إدخال)** لتعيين مركز الدائرة. حرك المؤشر للخارج لإنشاء دائرة كالموضحة.
- استخدم الأداة Point On **(نقطة على)** من القائمة Points & Line **(نقاط وخط)** لوضع نقطة على الدائرة.
- استخدم الأداة Segment **(قطعة مستقيمة)** من القائمة Points & Line **(نقاط وخط)** لرسم نصف القطر.

الخطوة 2 أضف الأسماء.

- من القائمة Actions **(إجراءات)**، حدد Coordinates and Equations **(إحداثيات ومعادلات)**.
استخدم المؤشر لتحديد مركز الدائرة لعرض إحداثيه. ثم حدد الدائرة لعرض معادلتها. حرك كل عرض خارج الدائرة.
- استخدم الأداة Length **(طول)** من القائمة Measurement **(قياس)** لعرض طول نصف القطر.



الخطوة 3 غيّر نصف القُطر.

حرك المؤشر بحيث يتم تظليل نقطة على الدائرة. ثم اضغط مع الاستمرار على مركز لوحة اللمس حتى يتم تحديدها. افحص معادلة الدائرة. ثم حرك حافة الدائرة للداخل. ولاحظ التغييرات في المعادلة.

الخطوة 4 حرك مركز الدائرة.

حرك المؤشر بحيث يتم تظليل مركز الدائرة. ثم اضغط مع الاستمرار على مركز لوحة اللمس حتى يتم تحديده. حرك مركز الدائرة. مرة أخرى. افحص معادلة الدائرة.

تحليل النتائج

1. ما تأثير تحريك حافة الدائرة للداخل أو الخارج على معادلة الدائرة؟
2. ما تأثير تحريك مركز الدائرة على المعادلة؟
3. كرر النشاط من خلال وضع مركز دائرة في الربع الثاني. حرك المركز إلى كل من الربعين الآخرين. كيف تتغير المعادلة؟
4. **التخمين** بدون تمثيل بياني. اكتب معادلة لكل دائرة.
   - **a.** المركز: (2 ,4)، نصف القطر: 3
   - **b.** المركز: (1 ,1−)، نصف القطر: 8
   - **c.** المركز: (5- ,6-)، نصف القطر: 2.5
   - **d.** المركز: (h, k)، نصف القطر: r

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

6-2 الدوائر

السابق
- تمثيل معادلات القطع المكافئ بيانيًا وكتابتها.

الحالي
1. كتابة معادلات الدوائر.
2. تمثيل الدوائر بيانيا

لماذا؟
- عند قذف جسم في المياه، تتجه التموجات من المركز نحو الخارج لتكوين دوائر متحدة المركز. إذا تم تعيين إحداثيات نقطة دخول الجسم في المياه، فيمكن تمثيل كل تموج بمعادلة دائرة.

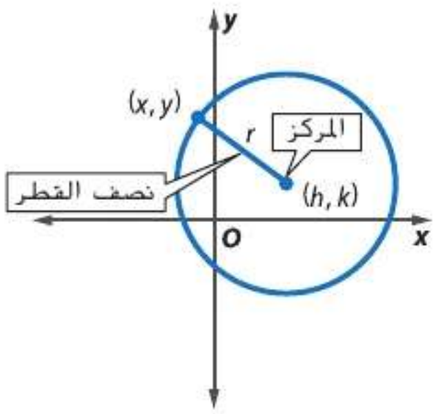


مفردات جديدة
- الدائرة (circle)
- المركز (center)
- نصف القطر (radius)

ممارسات في الرياضيات
4 استخدام نماذج الرياضيات.

1 معادلة الدائرة

الدائرة هي مجموعة جميع النقاط في مستوى والتي تقع على مسافة واحدة من نقطة معطاة في ذلك المستوى. يُطلق عليها **المركز**. أي قطعة مستقيمة بنقطتين طرفيتين واحدة عند المركز والأخرى على الدائرة هي **نصف قطر** للدائرة.



افترض أن (x, y) إحداثيان لنقطة على الدائرة الموضحة. المركز عند (h, k)، ونصف القطر هو r. يمكنك إيجاد معادلة الدائرة باستخدام صيغة المسافة.

$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = d$ صيغة المسافة

$\sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2} = r$ $(x_1, y_1) = (h, k)$, $(x_2, y_2) = (x, y)$, $d = r$

$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ تربيع كل طرف.

المفهوم الأساسي صور معادلة الدائرة

الصيغة القياسية للمعادلة	$x^2 + y^2 = r^2$	$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$
المركز	(0, 0)	(h, k)
نصف القطر	r	r

يمكنك استخدام الصيغة القياسية لمعادلة الدائرة لكتابة معادلة دائرة إذا علمتَ مركز الدائرة ونصف قطرها أو محيطها.

مثال من الحياة اليومية 1 كتابة معادلة إذا علمتَ نصف القطر

التوصيل الأجهزة + المزيد من عروض التوصيل المجاني في مدى **35 km** من المتجر. يقع متجر أبو ظبي على مسافة **100 km** شمال مكتب الشركة و **45 km** شرقًا. اكتب معادلة تمثل حدود التوصيل من متجر أبو ظبي إذا كان مصدر النظام الإحداثي هو مكتب الشركة.

نظرًا لأن مكتب الشركة يقع عند (0, 0)، يقع متجر أولاد علي عند (45, 100). حدود منطقة التوصيل هي الدائرة التي يقع مركزها عند (45, 100) بنصف قطر يبلغ 35 m.

$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ معادلة الدائرة

$(x - 45)^2 + (y - 100)^2 = 35^2$ $(h, k) = (45, 100)$ و $r = 35$

$(x - 45)^2 + (y - 100)^2 = 1225$ بسّط

تمرين موجّه

1. **واي فاي** مدى أحد هواتف واي فاي 30 km في أي اتجاه. إذا كان الهاتف يقع على مسافة 4 km جنوب المقر الرئيسي و 3 km غربًا، فاكتب معادلة تمثل المساحة التي يمكن تشغيل الهاتف في مداها عبر نظام واي فاي.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

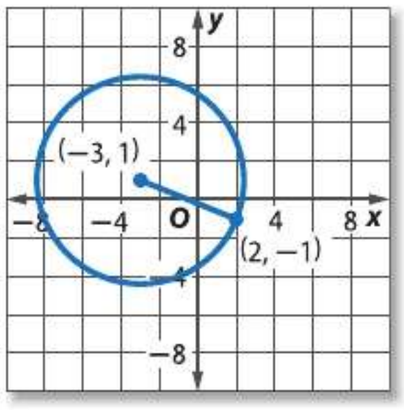
يمكنك كتابة معادلة دائرة إذا علمتَ موقع المركز ونقطة على الدائرة.

نصيحة دراسية

صيغة المركز-نصف القطر تتم الإشارة أحيانًا إلى الصيغة القياسية بمصطلح صيغة *المركز-نصف القطر* لظهور مركز الدائرة ونصف قطرها في المعادلة.

مثال 2 كتابة معادلة من تمثيل بياني

اكتب معادلة للتمثيل البياني.

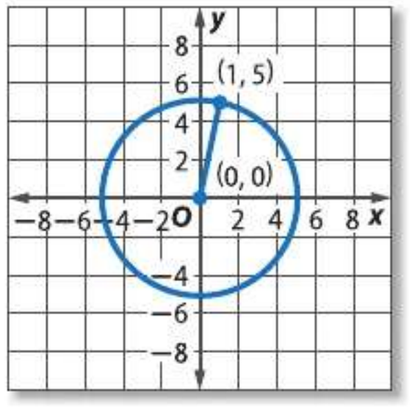


$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$	الصيغة القياسية
$(2+3)^2+(-1-1)^2=r^2$	$x=2,\ y=-1,\ h=-3,\ k=1$
$(5)^2+(-2)^2=r^2$	بسّط
$25+4=r^2$	جد قيمة الأسس.
$29=r^2$	اجمع.

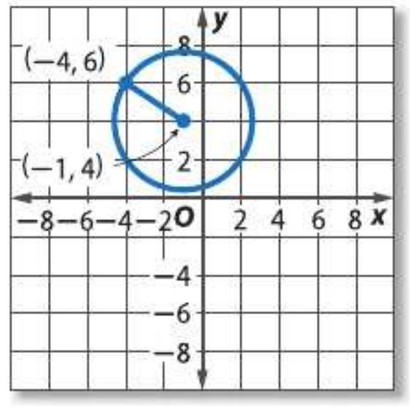
إذًا، معادلة الدائرة هي $(x+3)^2+(y-1)^2=29$.

تمرين موجّه

2A.



2B.



يمكنك استخدام صيغتي نقطة المنتصف والمسافة إذا علمتَ النقطتين الطرفيتين لنصف قطر أو محيط دائرة.

مثال 3 كتابة معادلة إذا كان القُطر معلومًا

اكتب معادلة دائرةٍ النقطتان الطرفيتان لقطرها هما (7, 6) و (−8, −1).

الخطوة 1 جد المركز.

$$(h,k)=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$$ صيغة نقطة المنتصف

$$=\left(\frac{7+(-1)}{2},\frac{6+(-8)}{2}\right)$$ $(x_1, y_1)=(7, 6), (x_2, y_2)=(-1, -8)$

$$=\left(\frac{6}{2},\frac{-2}{2}\right)$$ اجمع

$$=(3,-1)$$ بسّط

الخطوة 2 جد نصف القُطر.

$$r=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$ صيغة المسافة

$$=\sqrt{(3-7)^2+(-1-6)^2}$$ $(x_1, y_1)=(7, 6), (x_2, y_2)=(3, -1)$

$$=\sqrt{(-4)^2+(-7)^2}$$ اطرح.

$$=\sqrt{65}$$ بسّط

نصف قُطر الدائرة هو $\sqrt{65}$ وحدة. إذًا $r^2=65$. عوّض عن h. و k. و r^2 في الصيغة القياسية لمعادلة الدائرة. معادلة الدائرة هي $(x-3)^2+(y+1)^2=65$.

تمرين موجّه

3. اكتب معادلة دائرةٍ النقطتان الطرفيتان لقطرها هما (3, −3) و (5, 1).

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

نصيحة دراسية

محور التماثل كل قطر في دائرة هو محور تماثل. يوجد عدد لا نهائي من محاور التماثل في كل دائرة.

2 التمثيل البياني للدوائر يمكنك استخدام التناظر لمساعدتك في التمثيل البياني للدوائر.

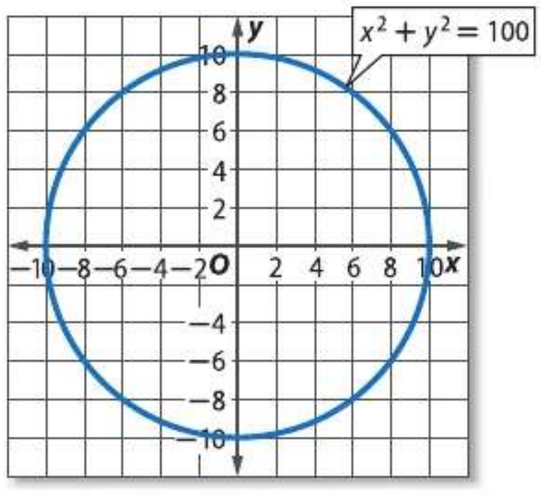
مثال 4 التمثيل البياني لمعادلة بالصيغة القياسية

جـد مركز ونصف قطر دائرة معادلتها $x^2 + y^2 = 100$. ثم مثّل الدائرة بيانيًا.

- مركز الدائرة عند (0, 0)، ونصف القطر 10.
- يدرج الجدول بعض القيم الصحيحة لـ x و y والتي تحقق المعادلة.

x	y
0	10
6	8
8	6
10	0

- لأن مركز الدائرة عند نقطة الأصل، فهي متماثلة حول المحور الرأسي y. ولذلك تقع النقاط (−6, 8) و (−8, 6) و (-10, 0) بالتمثيل البياني.
- الدائرة متماثلة كذلك حول المحور الأفقي x. إذًا، تقع النقاط (-6, -8) و (-8, -6) و (−10, 0) و (−8, 6) و (−6, 8) بالتمثيل البياني.
- قم بتعيين جميع هذه النقاط ورسم الدائرة التي تمر بها.



تمرين موجّه

4. جـد مركز ونصف قطر دائرة معادلتها $x^2 + y^2 = 81$. ثم مثّل الدائرة بيانيًا.

يمكن تمثيل الدوائر التي لا تكون مراكزها (0, 0) بيانياً باستخدام الإزاحة. التمثيل البياني لـ $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ هو التمثيل البياني لـ $x^2 + y^2 = r^2$ مزاحًا بمقدار h وحدة أفقيًا و k وحدة رأسيًا.

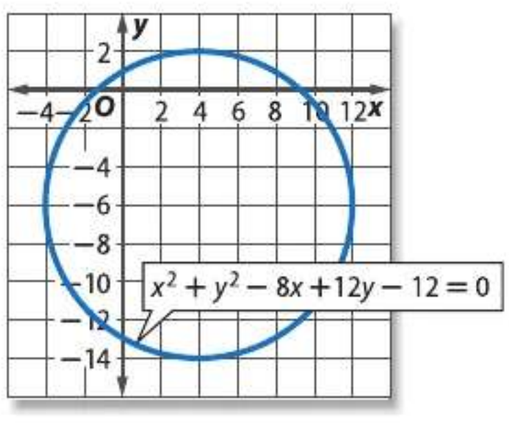
مثال 5 التمثيل البياني لمعادلة ليست بالصيغة القياسية

جـد مركز ونصف قطر دائرة معادلتها $x^2 + y^2 - 8x + 12y - 12 = 0$. ثم مثّل الدائرة بيانيًا.

أكمل المربعات.

$$x^2 + y^2 - 8x + 12y - 12 = 0$$
$$x^2 - 8x + \square + y^2 + 12y + \square = 12 + \square + \square$$
$$x^2 - 8x + \mathbf{16} + y^2 + 12y + \mathbf{36} = 12 + \mathbf{16} + \mathbf{36}$$
$$(x - 4)^2 + (y + 6)^2 = 64$$

مركز الدائرة عند (4, −6)، ونصف القطر هو 8.
التمثيل البياني لـ $(x - 4)^2 + (y + 6)^2 = 64$ هو ذاته $x^2 + y^2 = 64$ مزاحًا بمقدار 4 وحدات لليمين و 6 وحدات لأسفل.



تمرين موجّه

5. جـد مركز ونصف قطر دائرة معادلتها $x^2 + y^2 + 4x - 10y - 7 = 0$. ثم مثّل الدائرة بيانيًا.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التحقق من فهمك

مثال 1

1. الطقس في المتوسط، يبلغ عرض عين الإعصار 200 ft تقريبًا. افترض أن مركز عين الإعصار عند النقطة (72, 39). اكتب معادلة تمثل حدود العين.

اكتب معادلة لكل دائرة إذا علمتَ المركز ونصف القطر.

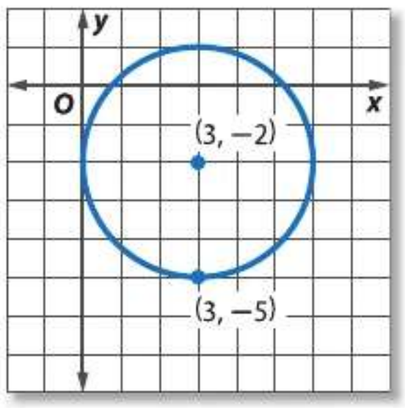
2. المركز: $(-2, -6)$، وحدات $r = 4$

3. المركز: $(-5, 1)$، وحدات $r = 3$

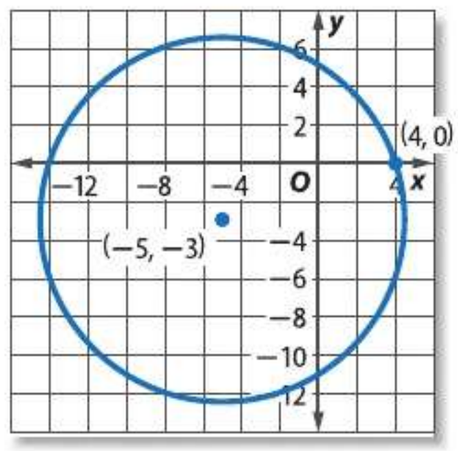
مثال 2

اكتب معادلة لكل تمثيل بياني.

4.



5.



مثال 3

اكتب معادلة لكل دائرة إذا علمتَ النقطتين الطرفيتين للقطر.

6. $(-1, -7)$ و $(0, 0)$

7. $(4, -2)$ و $(-4, -6)$

مثال 4-5

جـد مركز كل دائرة ونصف قطرها. ثم مثّل الدائرة بيانيًا.

8. $x^2 + y^2 = 16$

9. $x^2 + (y - 7)^2 = 9$

10. $(x - 4)^2 + (y - 4)^2 = 25$

11. $x^2 + y^2 - 4x + 8y - 5 = 0$

التمرين وحل المسائل

مثال 1

اكتب معادلة لكل دائرة إذا علمتَ المركز ونصف القطر.

12. المركز: $(4, 9)$، $r = 6$

13. المركز: $(-3, 1)$، $r = 4$

14. المركز: $(-7, -3)$، $r = 13$

15. المركز: $(-2, -1)$، $r = 9$

16. المركز: $(1, 0)$، $r = \sqrt{15}$

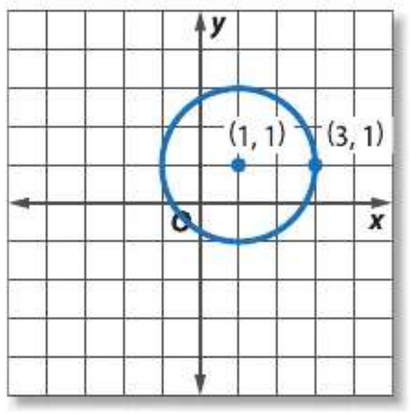
17. المركز: $(0, -6)$، $r = \sqrt{35}$

18. استخدام النماذج يقع رادار برج تحكم مطار عند (10, 5) على خريطة. ويمكنه اكتشاف طائرة على مسافة تصل إلى 20 mi. اكتب معادلة للحدود الخارجية لمنطقة الاكتشاف.

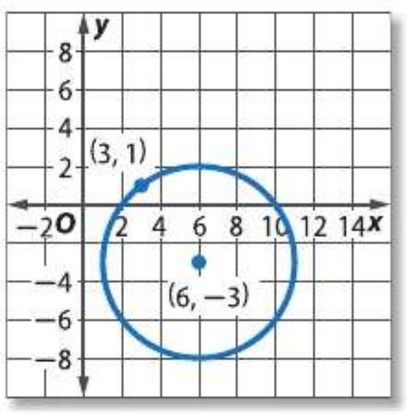
مثال 2

اكتب معادلة لكل تمثيل بياني.

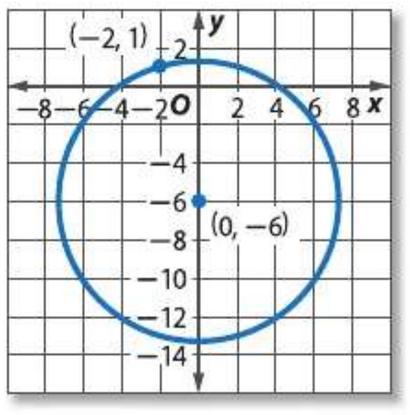
19.



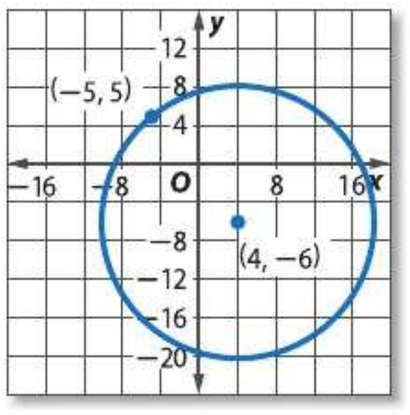
20.



21.



22.



حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 3 **اكتب معادلة لكل دائرة إذا علمتَ النقطتين الطرفيتين للقطر.**

23. (2, 1) و (2, −4)

24. (−4, −10) و (4, −10)

25. (5, −7) و (−2, −9)

26. (−6, 4) و (4, 8)

27. (2, −5) و (6, 3)

28. (18, 11) و (−19, −13)

29. العناية بالعشب تعمل آلة رش على ري قطاع دائري من العشب.

a. اكتب معادلة لتمثيل حدود منطقة الرش إذا علمتَ أن النقطتين الطرفيتين للقطر هما **(16 ,12−)** و **(16− ,12)**.

b. ما مساحة العشب التي ترويها آلة الرش؟

30. الفضاء كانت أبولو 8 أول مركبة فضاء مأهولة تدور حول القمر على ارتفاع متوسط يبلغ 185 km فوق سطح القمر. اكتب معادلة لتمثيل مدار دائري واحد لوحدة التحكم إذا علمتَ أن النقطتين الطرفيتين لقطر القمر هما (0 ,1740) و (0 ,1740−). افترض أن مركز القمر يقع عند نقطة أصل النظام الإحداثي الذي يتم قياسه بالكيلومتر.

مثال 4-5 **جد مركز كل دائرة ونصف قطرها. ثم مثّل الدائرة بيانيًا.**

31. $x^2 + y^2 = 75$

32. $(x - 3)^2 + y^2 = 4$

33. $(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 34$

34. $x^2 + (y - 14)^2 = 144$

35. $(x - 5)^2 + (y + 2)^2 = 16$

36. $x^2 + y^2 = 256$

37. $(x - 4)^2 + y^2 = \frac{8}{9}$

38. $\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{16}{25}$

39. $x^2 + y^2 + 4x = 9$

40. $x^2 + y^2 - 6y + 8x = 0$

41. $x^2 + y^2 + 2x + 4y = 9$

42. $x^2 + y^2 - 3x + 8y = 20$

43. $x^2 + y^2 + 6y = -50 - 14x$

44. $x^2 - 18x + 53 = 18y - y^2$

45. $2x^2 + 2y^2 - 4x + 8y = 32$

46. $3x^2 + 3y^2 - 6y + 12x = 24$

47. الفضاء يدور قمر صناعي في مدار دائري على ارتفاع 25000 mi فوق الأرض.

a. اكتب معادلة لمدار هذا القمر الصناعي إذا علمتَ أن نقطة الأصل تقع عند مركز الأرض. افترض أن قطر الأرض 8000 mi .

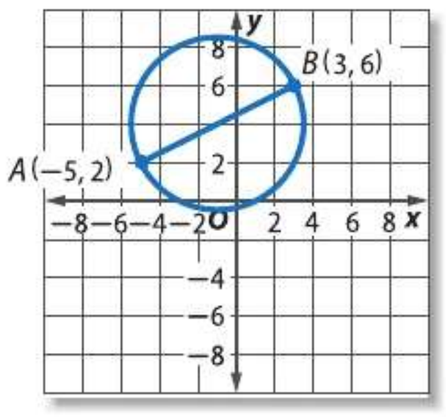
b. ارسم الأرض والمدار بمقياس رسم. ميّز الرسم بالأسماء.

48. التبرير المنطقي افترض أن بث محطة راديو غير محجوب يمكنه الانتقال لمسافة 120 mi . افترض أن المحطة متمركزة عند نقطة الأصل.

a. اكتب معادلةً لتمثيل حدود منطقة البث باستخدام المركز كنقطة الأصل.

b. إذا علمتَ أن برج البث يبعد عن المحطة الحالية مسافة 40 mi شرقًا و 10 mi جنوبًا. وتعمل الإشارة المعززة على بث الإشارات لمسافة 80 mi إضافية. فما المعادلة التي تمثل منطقة البث الجديدة؟

49. الهندسة الدوائر متحدة المركز هي داوئر لها المركز ذاته ولكن بأنصاف أقطار مختلفة. ارجع إلى التمثيل البياني الموضح حيث $\overline{AB}$ هو قطر الدائرة.



a. اكتب معادلة لدائرة تتحد في المركز مع الدائرة الموضحة على اليسار، ولكن نصف قطرها أكبر بمقدار 4 وحدات.

b. اكتب معادلة لدائرة تتحد في المركز مع الدائرة الموضحة على اليسار، ولكن نصف قطرها أصغر بمقدار وحدتين.

c. مثّل بيانيًا الدائرتين من الجزأين a وb على المستوى الإحداثي ذاته.

50. الزلازل يبعد الاستاد عن وسط المدينة تقريبًا بمسافة 35 km غربًا و40 km شمالاً. افترض حدوث زلزال يبعد مركزه عن استاد المدينة بمسافة 55 km تقريبًا. افترض أن نقطة أصل المستوى الإحداثي تقع عند مركز وسط المدينة. اكتب معادلة لمجموعة النقاط التي يمكن أن تكون مركز الزلزال.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الدقة اكتب معادلة للدائرة التي تحقق كل مجموعة من الشروط.

51. المركز $(-8, 9)$، تمر بالنقطة $(22, 19)$

52. المركز $(-\sqrt{15}, 30)$ تمر بنقطة الأصل

53. المركز $(-9, 8)$، تمس المحور الرأسي y

54. المركز $(4, 2)$، تمس المحور الأفقي x

55. المركز في الربع الأول، تمس $x = 5$، والمحور الأفقي x، والمحور الرأسي y

56. المركز في الربع الأول، تمس $y = 1$، و $y = 5$، والمحور الرأسي y

57. **التمثيلات المتعددة** مثّل بيانيًا $y = \sqrt{9 - x^2}$ و $y = -\sqrt{9 - x^2}$ على شاشة الحاسبة البيانية ذاتها.

a. **لفظيًا** صف التمثيل البياني المشكّل بدمج هذين التمثيلين البيانيين.

b. **جبريًا** اكتب معادلة لدمج هذين التمثيلين البيانيين.

c. **لفظيًا** معظم الحاسبات البيانية لا يمكنها التمثيل البياني للمعادلة $x^2 + y^2 = 49$ بشكل مباشر. صف طريقة لاستخدام الحاسبة البيانية لتمثيل المعادلة بيانيًا. ثم مثّل المعادلة بيانيًا.

d. **تحليليًا** حل $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 4$ لإيجاد y. لماذا نحتاج إلى معادلتين لتمثيل دائرة بيانيًا على حاسبة بيانية؟

e. **لفظيًا** هل تعتقد أنه من الأسهل التمثيل البياني للمعادلة في الجزء **d** باستخدام ورق تمثيل بياني وقلم رصاص أم باستخدام حاسبة بيانية؟ اشرح.

جـد مركز كل دائرة ونصف قطرها. ثم مثّل الدائرة بيانيًا.

58. $x^2 - 12x + 84 = -y^2 + 16y$

59. $4x^2 + 4y^2 + 36y + 5 = 0$

60. $(x + \sqrt{5})^2 + y^2 - 8y = 9$

61. $x^2 + 2\sqrt{7}x + 7 + (y - \sqrt{11})^2 = 11$

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

62. **تحليل الخطأ** تدعي هناء أن $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 36$ و $(x - 2) + (y + 3) = 6$ معادلتان متكافئتان. وتدعي سميرة أن المعادلتين *ليستا* متكافئتين. فهل أيٌّ منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.

63. **مسألة غير محددة** الإجابة فكّر في التمثيلات البيانية بمعادلات بالصيغة $(x - 3)^2 + (y - a)^2 = 64$. عيّن ثلاث قيم مختلفة لـ a، ومثّل كل معادلة بيانيًا. صف جميع التمثيلات البيانية بمعادلات بهذه الصيغة.

64. **التبرير** اشرح سبب تضمين العبارة "في مستوى" في تعريف الدائرة. ما الذي سيتم تعريفه إذا *لم* يتم تضمين العبارة؟

65. **مسألة غير محددة الإجابة** الدوائر متحدة المركز لها المركز ذاته، لكن في الأغلب تختلف أنصاف الأقطار. اكتب معادلتين لدائرتين متحدتي المركز. ثم مثّل الدائرتين بيانيًا.

66. **التبرير** افترض أن (x, y) إحداثيان لنقطة على دائرة. المركز عند (h, k)، ونصف القطر هو r. جـد معادلة الدائرة باستخدام صيغة المسافة.

67. **الكتابة في الرياضيات الدائرة** ذات المعادلة $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ تقع في الربع الأول وتمس المحورين الأفقي x والرأسي y. ارسم الدائرة. صف القيم المحتملة لـ a و b و r. كرر نفس الإجراء للدائرة في الأرباع الثاني والثالث والرابع. ناقش أوجه التشابه بين الدوائر.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

تمرين على الاختبار المعياري

68. إجابة شبكية تشترك دائرتان، نصف قطر كل منهما 6، في نقطة واحدة. إذا كانت A نقطة على دائرة وB نقطة على الدائرة الأخرى، فما أقصى طول ممكن للقطعة المستقيمة $\overline{AB}$؟

69. في صف العام النهائي، الفتيات أكثر من الأولاد بنسبة 20%. إذا كان عدد الفتيات 180، فبكم تزيد الفتيات عن الأولاد بين طلاب العام النهائي؟

A 30
B 36
C 90
D 144

70. تم إيداع AED 1000 في بنك يدفع 2% فائدة مركّبة أسبوعيًا. فكم سيكون رصيد الحساب بنهاية 10 أعوام؟

F AED 1200.00
G AED 1218.99
H AED 1221.36
J AED 1224.54

71. متوسط الأعداد الستة هو 20. إذا تمت إزالة أحد الأعداد، فسيكون متوسط الأعداد المتبقية هو 15. ما العدد الذي تمت إزالته؟

A 42
B 43
C 45
D 48

مراجعة شاملة

مثّل كل معادلة بيانيًا. (الدرس 1-6)

72. $y = -\frac{1}{2}(x-1)^2 + 4$

73. $4(x-2) = (y+3)^2$

74. $(y-8)^2 = -4(x-4)$

جـد نقطة المنتصف للقطعة المستقيمة ذات النقطتين الطرفيتين عند الإحداثيات المعطاة. ثم جـد المسافة بين النقاط.

75. $\left(-3, -\frac{2}{11}\right), \left(5, \frac{9}{11}\right)$

76. $\left(2\sqrt{3}, -5\right), \left(-3\sqrt{3}, 9\right)$

77. $(2.5, 4), (-2.5, 2)$

78. إذا كان y يتغير طرديًا مع x و $y = 8$ حيث $x = 6$. فجـد y حيث $x = 15$.

79. إذا كان y يتغير بشكل مشترك مع x و z و $y = 80$ حيث $x = 5$ و $z = 8$. فجـد y حيث $x = 16$ و $z = 2$.

80. إذا كان y يتغير عكسيًا مع x و $y = 16$ حيث $x = 5$. فجـد y حيث $x = 20$.

جـد قيمة كل تعبير.

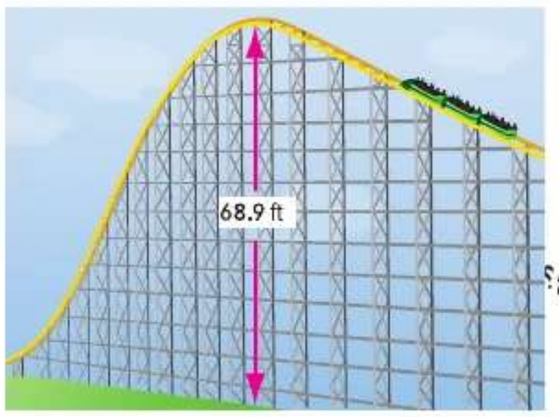
81. $\log_9 243$

82. $\log_2 \frac{1}{32}$

83. $\log_3 \frac{1}{81}$

84. $\log_{10} 0.001$

85. المتنزهات ترتبط السرعة v ft /s لأفعوانية عند أسفل التل بالهبوط العمودي h ft والسرعة v_0 ft /s للأفعوانية على قمة التل عبر الصيغة $v_0 = \sqrt{v^2 - 64h}$.



a. اشرح لماذا $v_0 = v - 8\sqrt{h}$ لا تكافئ الصيغة المعطاة.

b. ما السرعة التي يجب أن تصل إليها الأفعوانية عند قمة التل لبلوغ سرعة 38.1 ft/s عند القاع؟

مراجعة المهارات

حُـلّ كل معادلة بإكمال المربع.

86. $x^2 + 3x - 18 = 0$

87. $2x^2 - 3x - 3 = 0$

88. $x^2 + 2x + 6 = 0$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة Graw-Hill Education

الاستكشاف 6-3

مختبر الجبر
استكشاف القطع الناقص

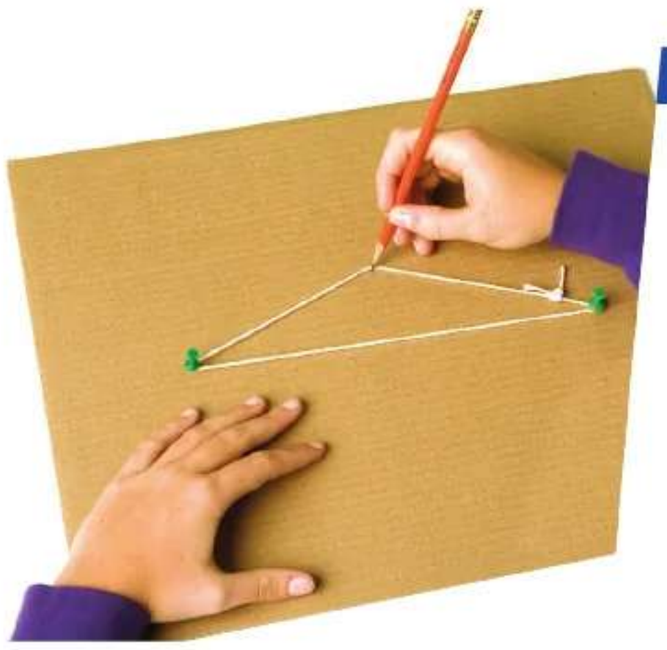
اتبع الخطوات أدناه لإنشاء نوع من القطع المخروطي.

النشاط رسم قطع ناقص

الخطوة 1 اغرز دبوسين على قطعة من الورق المقوى على مسافة قدم تقريبًا.

الخطوة 2 اربط عقدة بقطعة من الخيط ولفها حول الدبوسين. أدخل القلم الرصاص في الخيط.

الخطوة 3 اجعل الخيط مشدودًا وارسم منحنى. تابع الرسم حتى العودة إلى نقطة البداية.

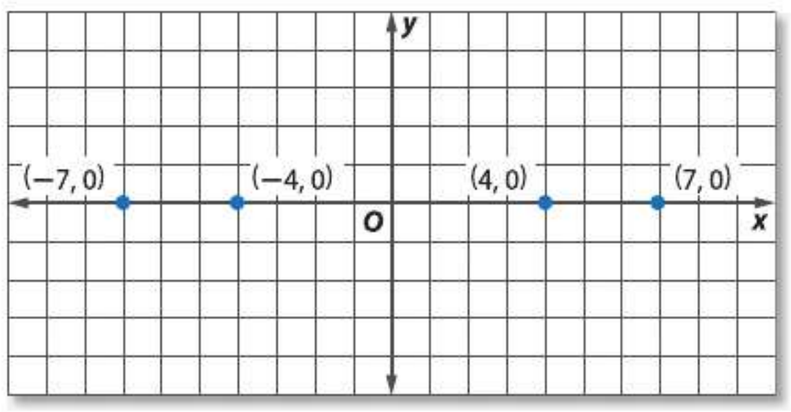


يُطلق على المنحنى الذي رسمتَ **القطع الناقص**. نقاط تواجد الدبابيس تُسمى **البؤرتان** للقطع الناقص.

استخدام النماذج والتحليل

ضع قطعة من ورق المربعات على قطعة من الورق المقوى.

1. ضع الدبوسين عند (0 ,7) و (0 ,−7). اختر خيطًا كافي الطول للدوران حول الدبوسين. ارسم قطعًا ناقصًا.
2. كرر التمرين 1. ولكن ضع الدبوسين عند (0 ,4) و (0 ,−4). استخدم حلقة الخيط ذاتها وارسم قطعًا ناقصًا.
ما وجه المقارنة بين هذا القطع الناقص ونظيره في التمرين 1؟



ضع الدبوسين عند كل مجموعة نقاط وارسم قطعًا ناقصًا. يمكنك تغيير طول حلقة الخيط إن أردتَ.

3. (11, 0), (−11, 0)
4. (3, 0), (−3, 0)
5. (13, 3), (−9, 3)

التخمين

صف ما يحدث لشكل قطع ناقص عند إجراء كل تغيير.

6. تقريب الدبوسين.
7. إبعاد الدبوسين.
8. زيادة طول حلقة الخيط.
9. ترتيب الدبوسين رأسيًا.
10. إزالة دبوس. ولف حلقة الخيط حول الآخر.
11. اختر نقطة على أحد القطوع الناقصة التي رسمتَ. استخدم مسطرة لقياس المسافة من تلك النقطة إلى نقطتي وضع الدبوسين. اجمع المسافتين. كرر الإجراء مع النقاط الأخرى على القطع الناقص ذاته. ما العلاقة التي تلاحظ؟
12. هل يمكن إجراء هذا النشاط باستخدام شريط مطاطي بدلًا من قطعة الخيط؟ اشرح.

ممارسات في الرياضيات

5 استخدام الأدوات الملائمة بطريقة إستراتيجية.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة Graw-Hill Education

6-3 القطع الناقص

السابق:
- تمثيل معادلات الدوائر بيانيًا وكتابتها.

الحالي:
1. كتابة معادلات القطوع الناقصة.
2. تمثيل القطوع الناقصة بيانيًا.

لماذا؟
- لا يدور عطارد، مثله مثل جميع كواكب المجموعة الشمسية، في مسار تام الاستدارة حول الشمس. عند أبعد نقطة، يبعد عطارد 69.2 مليون كيلومتر تقريبًا عن الشمس. عند أقرب نقطة، يبعد عطارد 45.9 مليون كيلومتر تقريبًا عن الشمس. يأخذ هذا المدار شكل قطع ناقص إحدى بؤرتيه هي الشمس.



مفردات جديدة
- قطع ناقص (ellipse)
- بؤرتان (foci)
- محور أكبر (major axis)
- محور أصغر (minor axis)
- المركز (center)
- رؤوس (vertices)
- رؤوس مرافقة (co-vertices)
- مجموع ثابت (constant sum)

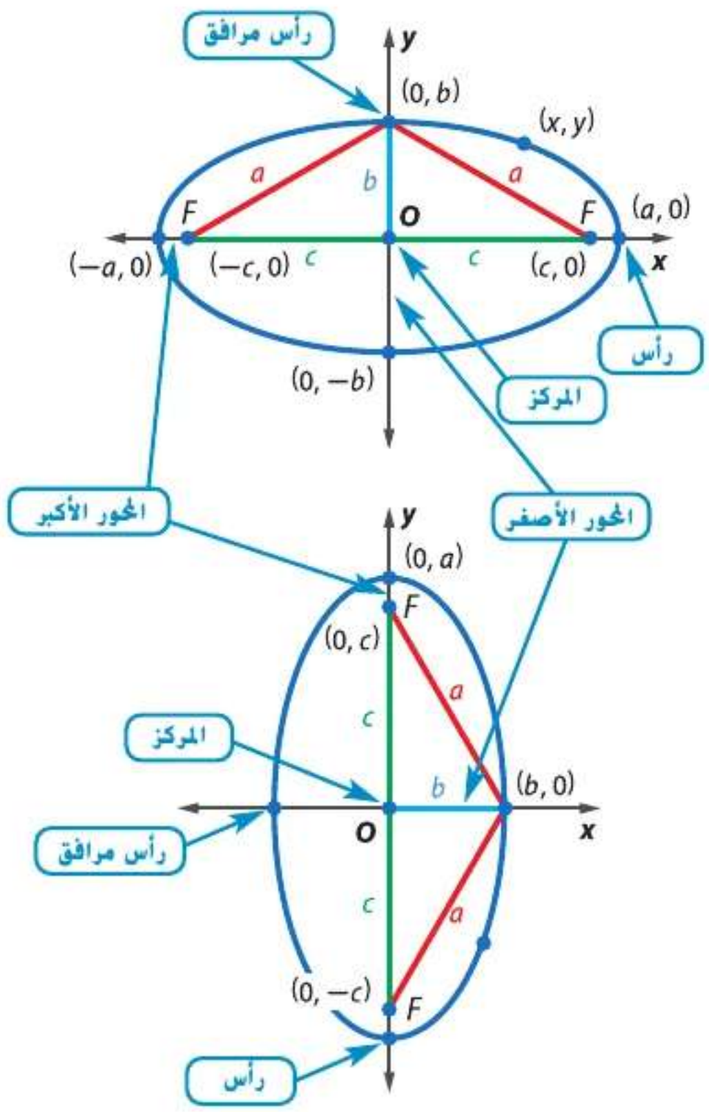
ممارسات في الرياضيات
7 محاولة إيجاد البنية واستخدامها

1 معادلات القطع الناقص القطع الناقص

هو مجموعة جميع النقاط في مستوى والتي يكون مجموع بعدي كلٍ منها عن نقطتين ثابتتين ثابتًا. يُطلق على هاتين النقطتين **البؤرتان** للقطع الناقص.

ذكّر الطلاب أن للقطع الناقص محوري تماثل، وهما **المحور الأكبر** و**المحور الأصغر**. المحوران متعامدان على **مركز** القطع الناقص.

تقع البؤرتان للقطع الناقص دائمًا على المحور الأكبر. النقاط الطرفية للمحور الأكبر هي **رؤوس** القطع الناقص والنقاط الطرفية للمحور الأصغر هي **الرؤوس المرافقة** للقطع الناقص.



المفهوم الأساسي صور معادلات القطوع الناقصة التي يقع مركزها عند نقطة الأصل

الصيغة القياسية	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$
الاتجاه	أفقي	رأسي
البؤرتان	$(c, 0), (-c, 0)$	$(0, c), (0, -c)$
طول المحور الأكبر	$2a$ وحدات	$2a$ وحدات
طول المحور الأصغر	$2b$ وحدات	$2b$ وحدات

هناك العديد من العلاقات الهامة بين الأجزاء المتعددة للقطع الناقص.
- طول المحور الأكبر، $2a$ وحدات، ويساوي مجموع المسافتين من البؤرتين إلى أي نقطة على القطع الناقص.
- ترتبط القيم a و b و c بواسطة المعادلة $c^2 = a^2 - b^2$.
- المسافة من البؤرتين إلى رأس مرافق هي a وحدات.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

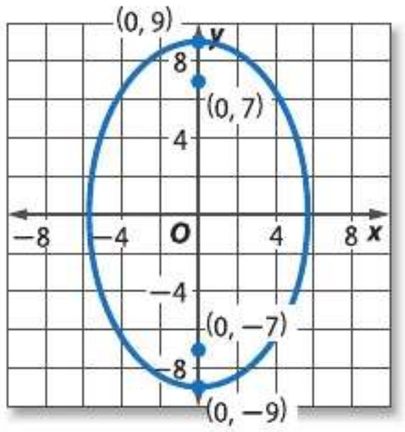
مجموع المسافتين من البؤرتين إلى أي نقطة على القطع الناقص. أو **المجموع الثابت**. يجب أن يكون أكبر من المسافة بين البؤرتين.

نصيحة دراسية

المحور الأكبر بالصيغة القياسية. إذا كان للحد x^2 المقام الأكبر. فإن المحور الأكبر أفقي. إذا كان للحد y^2 المقام الأكبر. فإنه رأسي.

مثال 1 كتابة معادلة إذا علمت الرأسين والبؤرتين

اكتب معادلة قطع ناقص.



الخطوة 1 جـد المركز.
تقع البؤرتان على مسافة واحدة من المركز.
ويقع المركز عند النقطة $(0, 0)$.

الخطوة 2 جـد قيمة a.
الرأسان هما $(0, 9)$ و $(0, -9)$
إذًا. طول المحور الأكبر 18.
قيمة a هي $18 \div 2$ أو 9. و $a^2 = 81$.

الخطوة 3 جـد قيمة b.
يمكن استخدام $c^2 = a^2 - b^2$ لإيجاد b.
تبعد البؤرتان 7 وحدات عن المركز. إذًا $c = 7$.

$c^2 = a^2 - b^2$	معادلة تربط a و b و c
$49 = 81 - b^2$	$a = 9$ و $c = 7$
$b^2 = 32$	جـد حل b^2.

الخطوة 4 اكتب المعادلة.
لأن المحور الأكبر رأسي. a^2 يرتبط مع y و b^2 يرتبط مع x.
معادلة القطع الناقص هي $\frac{y^2}{81} + \frac{x^2}{32} = 1$.

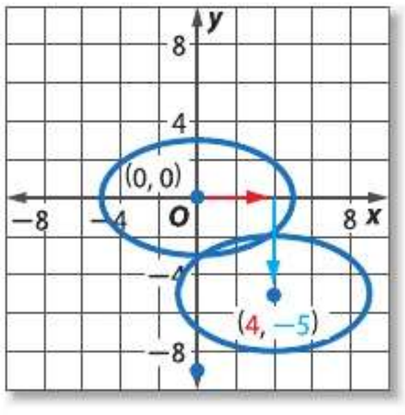
تمرين موجّه

1. اكتب معادلة قطعٍ ناقصٍ يقع رأساه عند النقطتين $(-4, 0)$ و $(4, 0)$ وبؤرتاه عند $(2, 0)$ و $(-2, 0)$.

كما هو الحال مع التمثيلات البيانية الأخرى، يمكن إزاحة التمثيل البياني للقطع الناقص. عند إزاحة التمثيل البياني h وحدات لليمين و k وحدات لأعلى، يكون مركز الإزاحة (h, k). يكافئ هذا التعويض عن x باستخدام $x - h$ والتعويض عن y باستخدام $y - k$ في الدالة الأم.

المفهوم الأساسي صور معادلات القطوع الناقصة التي يقع مركزها عند (h, k)

الصيغة القياسية	$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$	$\frac{(y-k)^2}{a^2} + \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$
الاتجاه	أفقي	رأسي
البؤرتان	$(h \pm c, k)$	$(h, k \pm c)$
الرؤوس	$(h \pm a, k)$	$(h, k \pm a)$
الرؤوس المرافقة	$(h, k \pm b)$	$(h \pm b, k)$



يمكن استخدام هذه المعلومات لتحديد معادلات القطوع الناقصة. القطع الناقص الأصلي الموضح أفقي ومحوره الأكبر 10 وحدات. إذًا $a = 5$.

طول المحور الأصغر 6 وحدات. إذًا $b = 3$.

تمت إزاحة القطع الناقص بمقدار 4 وحدات نحو اليمين و 5 وحدات إلى الأسفل. إذًا. قيمة h هي 4 وقيمة k هي -5.

معادلة القطع الناقص الأصلي هي $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

معادلة الإزاحة هي $\frac{(x-4)^2}{25} + \frac{(y+5)^2}{9} = 1$.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

يمكنك أيضًا تحديد معادلة القطع الناقص إذا علمتَ الرؤوس الأربعة جميعًا.

مثال 2 كتابة معادلة إذا علمت طولي المحورين

اكتب معادلة لقطع ناقص يقع رأساه عند (−8, 6) و (4, 6) ورأساه المرافقان عند (−2, 3) و (−2, 9).

إحداثي x هو ذاته للرأسين. إذًا القطع الناقص رأسي.

يقع مركز القطع الناقص عند $\left(\frac{6+6}{2}, \frac{-8+4}{2}\right)$ أو (6, −2)

طول المحور الأكبر $-8) - 4$ أو 12 وحدة. إذًا $a = 6$.

طول المحور الأصغر $3 - 9$ أو 6 وحدات. إذًا $b = 3$.

معادلة القطع الناقص هي $\frac{(y+2)^2}{36} + \frac{(x-6)^2}{9} = 1$. $a^2 = 36, b^2 = 9$

تمرين موجّه

2. اكتب معادلة لقطع ناقص يقع رأساه عند (8, −3) و (8, 9) ورأساه المرافقان عند (12, 3) و (4, 3).



مهنة من الحياة اليومية

فني الفضاء يعمل فنيو الفضاء في وكالة ناسا ويساعدون المهندسين على إجراء الأبحاث وتطوير الواقع الافتراضي والتواصل اللفظي بين الإنسان وأنظمة الكمبيوتر. بالرغم من أن درجة البكالوريوس مطلوبة، التدريب المهني متاح.

المصدر: وكالة ناسا

يمكن تمثيل العديد من ظواهر الحياة اليومية باستخدام القطوع الناقصة.

مثال من الحياة اليومية 3 كتابة معادلة قطع ناقص



الفضاء راجع التطبيق في بداية الدرس.

أبعد مسافة يبلغها عطارد عن الشمس،
أو ***الأوج***، **69.2** مليون كيلومتر تقريبًا.
أقرب مسافة يبلغها عطارد إلى الشمس،
أو ***الحضيض***، **45.9** مليون ميل تقريبًا.
يبلغ محيط الشمس كيلومتر **1,400,129.3** كيلومتر تقريبًا. استخدم هذه المعلومة لتحديد معادلة ترتبط بمدار عطارد على شكل قطع ناقص حول الشمس بالمليون كيلومتر.

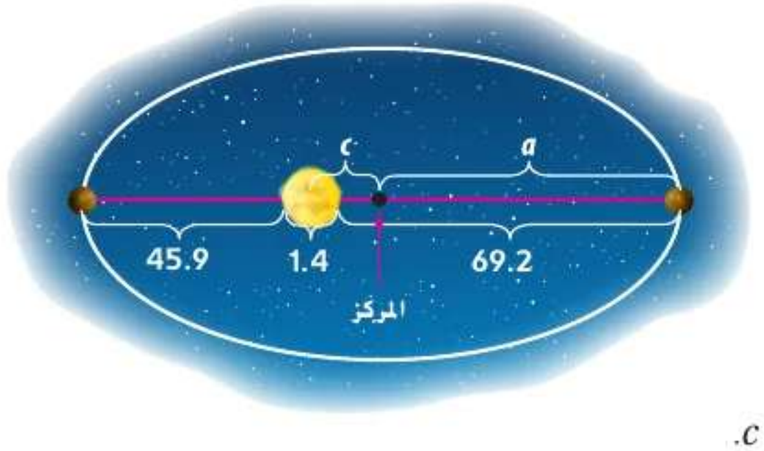
الفهم علينا تحديد معادلة تمثل مدار عطارد حول الشمس.

التخطيط بتضمين محيط الشمس،مجموع الأوج والحضيض ويساوي طول المحور الأكبر للقطع الناقص. يمكن استخدام هذه المعلومة لتحديد قيم a و b و c.

الحل جـد قيمة a.

قيمة a هي نصف طول المحور الأكبر.

$a = 0.5(69.2 + 45.9 + 1.4)$ أو 58.23



جـد قيمة c.

قيمة c هي المسافة من مركز القطع الناقص إلى البؤرة.

هذه المسافة تساوي a ناقص الحضيض ونصف قطر الشمس.

$c = 58.23 - 45.9 - 0.7$ أو 11.67

نصيحة في حل المسائل

التبرير المنطقي قم بعمل رسم تخطيطي عندما يتضمن موقف المسألة الاستنتاج المكاني أو الأشكال الهندسية.

(يُتبع في الصفحة التالية)

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

جـــد قيمة b.

$c^2 = a^2 - b^2$ معادلة تمثل a و b و c

$(7.11.67)^2 = (36.185)^2 - b^2$ $c = 7.25$ و $a = 36.185$

$1309.3542 - b^2$ بسّط.

$136.1889 = 3390.7329 - b^2$ جـــد حل b^2.

$b^2 = 3254.544$ احسب الجذر التربيعي لكل طرف.

$b = 57.0486$

إذًا، عندما يكون مركز المدار عند نقطة الأصل، يمكن تمثيل المعادلة التي تمثل مدار عطارد حول الشمس بواسطة

$$\frac{x^2}{3390.7329} + \frac{y^2}{3254.544} = 1$$

التحقق استخدم إجابتك لإعادة حساب a و b و c ثم حدد الأوج والحضيض بناءً على إجابتك. قارن بالقيم الفعلية.



الربط بالحياة اليومية

مدار الأرض حول الشمس دائري تقريبًا، حيث الفرق بين الحضيض والأوج 3% تقريبًا فقط.

المصدر: مجلة *الأسترونمر*

تمرين موجّه

3. الفضاء يبعد بلوتو عن الشمس مسافة 4.44 مليار كيلومتر عند الحضيض ويبعد 7.38 مليار كيلومتر تقريبًا عند الأوج. حدد معادلة تمثل مدار بلوتو حول الشمس بالمليار كيلومتر بحيث يكون مركز القطع الناقص الأفقي عند نقطة الأصل.

2 التمثيل البياني للقطع الناقص

إذا حصلت على معادلة قطع ناقص ليست بالصيغة القياسية، فيمكنك كتابتها بالصيغة القياسية عبر إكمال المربع لكل من x و y. وعندما تصبح المعادلة بالصيغة القياسية، يمكنك استخدامها لتمثيل القطع الناقص بيانيًا.

مثال 4 تمثيل قطع ناقص بيانيًا

جـــد إحداثيات المركز والبؤرتين، وطولي المحورين الأكبر والأصغر لقطع ناقص معادلته $25x^2 + 9y^2 + 250x - 36y + 436 = 0$. ثم مثّل القطع الناقص بيانيًا.

الخطوة 1 اكتب بالصيغة القياسية. أكمل المربع لكل متغير لكتابة هذه المعادلة بالصيغة القياسية.

$25x^2 + 9y^2 + 250x - 36y + 436 = 0$ المعادلة الأصلية

$25x^2 + 250x + 9y^2 - 36y = -436$ خاصية التجميع

$25(x^2 + 10x) + 9(y^2 - 4y) = -436$ خاصية التوزيع

$25(x^2 + 10x + \blacksquare) + 9(y^2 - 4y + \blacksquare) = -436 + 25(\blacksquare) + 9(\blacksquare)$ أكمل المربعات.

$25(x^2 + 10x + 25) + 9(y^2 - 4y + 4) = -436 + 25(25) + 9(4)$ $4 = (-2)^2$ و $25 = 5^2$

$25(x + 5)^2 + 9(y - 2)^2 = 225$ اكتب كمربعات كاملة.

$\frac{(x + 5)^2}{9} + \frac{(y - 2)^2}{25} = 1$ اقسم كل طرف على 225.

الخطوة 2 جـــد المركز.

$h = -5$ و $k = 2$. إذًا يقع مركز القطع الناقص عند $(-5, 2)$.

الخطوة 3 جـــد طولي المحورين ومثّل بيانيًا.

القطع الناقص رأسي.

$a^2 = 25$. إذًا $a = 5$. $b^2 = 9$. إذًا $b = 3$.

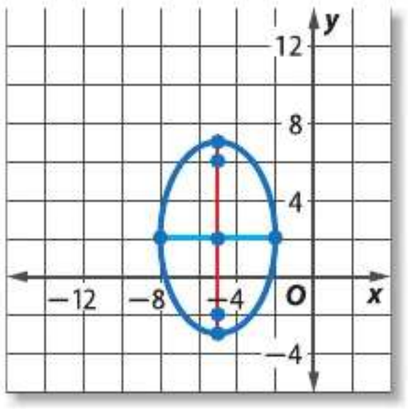
طول المحور الأكبر 5×2 أو 10.

طول المحور الأصغر 3×2 أو 6.

يقع الرأسان عند $(-5, 7)$ و $(-5, -3)$.

يقع الرأسان المرافقان عند $(-2, 2)$ و $(-8, 2)$.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة



الخطوة 4 جـــد البؤرتين.

$c^2 = 25 - 9$ أو 16. إذًا $c = 4$.

تقع البؤرتان عند $(-5, 6)$ و $(-5, -2)$.

الخطوة 5 مثّل القطع الناقص بيانيًّا.

ارسم القطع الناقص الذي يمر عبر الرأسين والرأسين المرافقين.

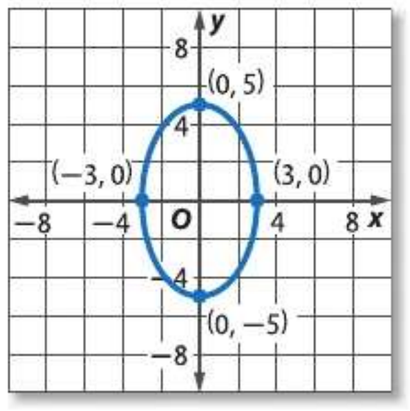
تمرين موجّه

4. جـــد إحداثيات المركز والبؤرتين وطولي المحورين الأكبر والأصغر لقطع ناقص معادلته $x^2 + 4y^2 - 2x + 24y + 21 = 0$. ثم مثّل القطع الناقص بيانيًا.

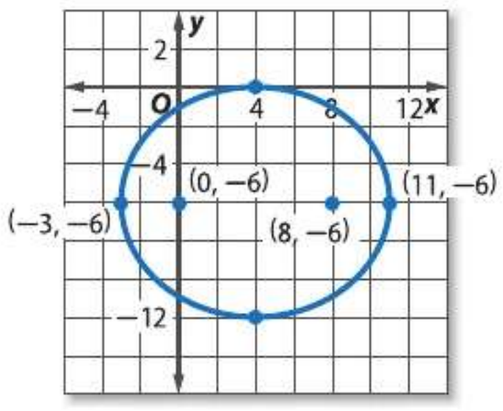
التحقق من فهمك

مثال 1 **اكتب معادلة لكل قطع ناقص.**

1.



2.



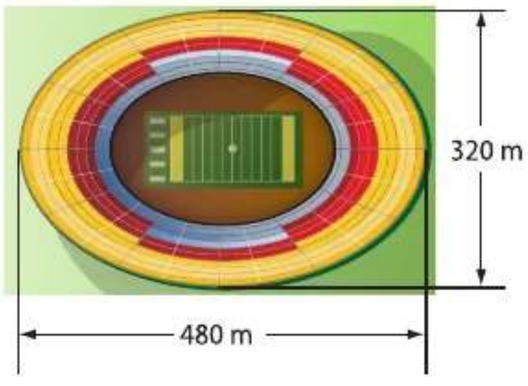
مثال 2 **اكتب معادلة للقطع الناقص الذي يحقق كل مجموعة من الشروط.**

3. يقع الرأسان عند $(-6, -2)$ و $(4, -2)$، ويقع الرأسان المرافقان عند $(1, -5)$ و $(1, -1)$

4. يقع الرأسان عند $(5, -2)$ و $(5, 14)$، ويقع الرأسان المرافقان عند $(1, 6)$ و $(9, 6)$

مثال 3

5. الاستنتاج المنطقي أرسلت شركة هندسة معمارية عرضًا إلى إحدى المدن لبناء المدرج الموضح.



a. حدد قيمة a وb.

b. بافتراض أن المركز يقع عند نقطة الأصل. اكتب معادلة تمثل القطع الناقص.

c. حدد إحداثيات البؤرتين.

6. الفضاء يبلغ مدار الأرض 147.1 مليون كيلومتر تقريبًا عند الحضيض و 152.1 مليون كيلومتر تقريبًا عند الأوج. حدد معادلة تمثل مدار الأرض حول الشمس بالمليون ميل بحيث يكون مركز القطع الناقص الأفقي عند نقطة الأصل.

مثال 4 **جـــد إحداثيات المركز والبؤرتين وطولي المحورين الأكبر والأصغر لقطع ناقص بالمعادلة المعطاة. ثم مثّل القطع الناقص بيانيًا.**

7. $\frac{(y+1)^2}{64} + \frac{(x-5)^2}{28} = 1$

8. $\frac{(x+2)^2}{48} + \frac{(y-1)^2}{20} = 1$

9. $4x^2 + y^2 - 32x - 4y + 52 = 0$

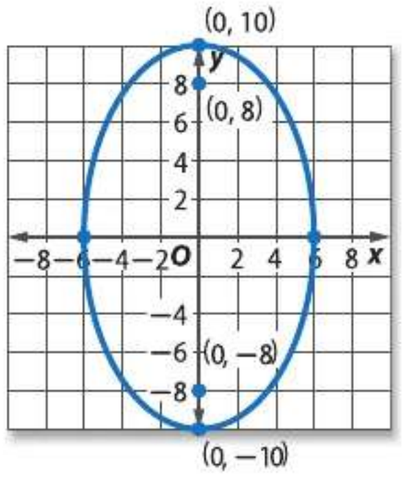
10. $9x^2 + 25y^2 + 72x - 150y + 144 = 0$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

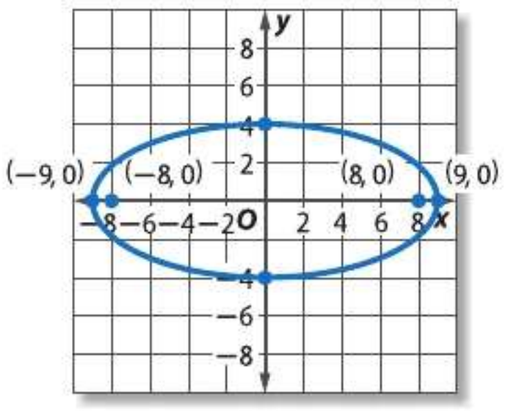
التمرين وحل المسائل

مثال 1 **اكتب معادلة لكل قطع ناقص.**

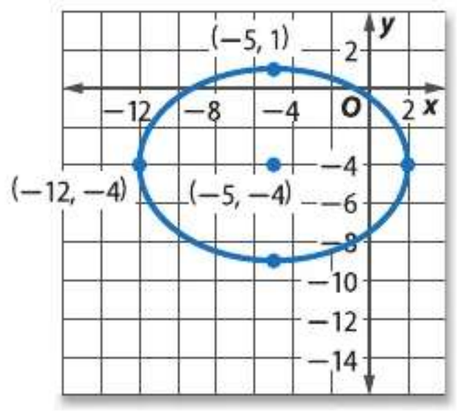
11.



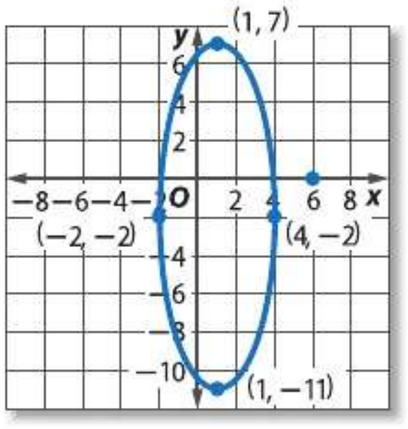
12.



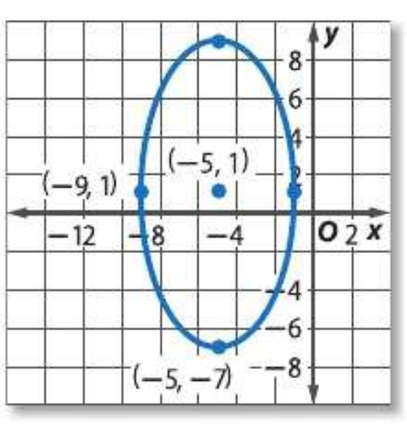
13.



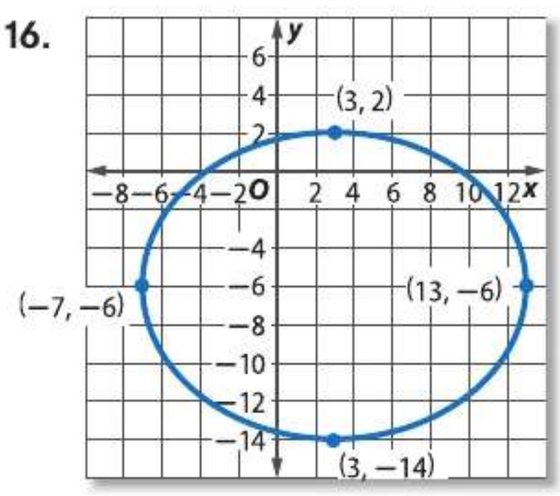
14.



15.



16.



مثال 2 **اكتب معادلة للقطع الناقص الذي يحقق كل مجموعة من الشروط.**

17. يقع الرأسان عند (4 ,6−) و (4 ,12). ويقع الرأسان المرافقان عند (12 ,3) و (4− ,3)

18. يقع الرأسان عند (11 ,1−) و (1 ,1−). يقع الرأسان المرافقان عند (6 ,4−) و (6 ,2)

19. يقع المركز عند (6 ,2−). ويقع الرأس عند (16 ,2−). ويقع الرأس المرافق عند (6 ,1)

20. يقع المركز عند (4− ,3). ويقع الرأس عند (4− ,8). ويقع الرأس المرافق عند (2− ,3)

21. يقع الرأسان عند (12 ,4) و (4− ,4). ويقع الرأسان المرافقان عند (4 ,1) و (4 ,7)

22. يقع الرأسان عند (2 ,11−) و (2 ,1−). ويقع الرأسان المرافقان عند (0 ,6−) و (4 ,6−)

مثال 3

23. **استخدام النماذج** يمكن تمثيل فتحة نفق في الجبال بواسطة أشباه القطوع الناقصة أو أنصاف القطوع الناقصة. يبلغ عرض الفتحة 8.6 m وارتفاعها 8.6 m. حدد معادلة تمثل الفتحة بحيث يكون المركز عند نقطة الأصل.



مثال 4 **جـد إحداثيات المركز والبؤرتين وطولي المحورين الأكبر والأصغر لقطع ناقص بالمعادلة المعطاة. ثم مثل القطع الناقص بيانيًا.**

24. $\frac{(x-3)^2}{36} + \frac{(y-2)^2}{128} = 1$

25. $\frac{(x+6)^2}{50} + \frac{(y-3)^2}{72} = 1$

26. $\frac{x^2}{27} + \frac{(y-5)^2}{64} = 1$

27. $\frac{(x+4)^2}{16} + \frac{y^2}{75} = 1$

28. $3x^2 + y^2 - 6x - 8y - 5 = 0$

29. $3x^2 + 4y^2 - 18x + 24y + 3 = 0$

30. $7x^2 + y^2 - 56x + 6y + 93 = 0$

31. $3x^2 + 2y^2 + 12x - 20y + 14 = 0$

32. **الفضاء** على غرار الكواكب، يدور مذنب هالي حول الشمس في مدار على شكل قطع ناقص. يبلغ الأوج 5283.3 مليون كيلومتر ويبلغ الحضيض 88.3 مليون كيلومتر. حدد معادلة تمثل مدار المذنب حول الشمس بالمليون كيلومتر بحيث يكون مركز القطع الناقص الأفقي عند نقطة الأصل.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

اكتب معادلة للقطع الناقص الذي يحقق كل مجموعة من الشروط.

33. يقع المركز عند $(-2, -5)$، وتقع إحدى بؤرتيه عند $(2, -5)$، والرأس المرافق عند $(-2, -8)$

34. يقع المركز عند $(-3, 4)$، وتقع إحدى بؤرتيه عند $(-3, 9)$، ويقع الرأس المرافق عند $(-5, 4)$

35. تقع البؤرتان عند $(8, -2)$ و $(8, 6)$، ويقع الرأس المرافق عند $(10, 2)$

36. تقع البؤرتان عند $(4, 4)$ و $(14, 4)$، ويقع الرأس المرافق عند $(9, 0)$

37. الحكومة يقع المكتب البيضاوي في الجناح الغربي من البيت الأبيض. وهو غرفة على شكل قطع ناقص وهو المكتب الرئيسي لرئيس الولايات المتحدة. ويبلغ طول المحور الطويل 10.9 m وطول المحور القصير 8.8 m. اكتب معادلة تمثل الجدران الخارجية للمكتب البيضاوي. افترض أن مركز الغرفة يقع عند نقطة الأصل.

38. الصوت معرض الهمس هو غرفة على شكل قطع ناقص حيث لا يمكن للأشخاص الآخرين في الغرفة سماع صوت همسة خافتة صادرة عند إحدى بؤرتيه، ولكن يمكن لأي شخص عند البؤرة الآخرى سماعها بسهولة. افترض أن طول قطع ناقص 121.9 m وأن عرضه 36.6 m . ما المسافة بين البؤرتين؟

39. التمثيلات المتعددة يقيس *الاختلاف المركزي* للقطع الناقص مدى قربه من شكل الدائرة.

a. **التمثيل البياني** مثّل بيانيًا $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{36} = 1$ و $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{9} = 1$ في التمثيل البياني ذاته.

b. **لفظيًا** صف الفرق بين التمثيلين البيانيين.

c. **جبريًا** الاختلاف المركزي للقطع الناقص هو $\frac{c}{a}$. جد الاختلاف المركزي لكل منها.

d. **تحليليًا** ضع فرضية حول العلاقة بين قيمة الاختلاف المركزي للقطع الناقص وشكل القطع الناقص مقارنة بالدائرة.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

40. تحليل الخطأ تعمل شيماء ومها على تحديد معادلة لقطع ناقص يقع بؤرتاه عند $(-11, -4)$ و $(5, -4)$ ويقع رأساه المرافقان عند $(-3, 2)$ و $(-3, -10)$. فهل أيّ منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.

شيماء

$$\frac{(x-4)^2}{64} + \frac{(y+3)^2}{36} = 1$$

مها

$$\frac{(x+4)^2}{100} + \frac{(y+3)^2}{36} = 1$$

41. مسألة غير محددة الإجابة اكتب معادلة لقطع ناقص تقع بؤرته عند نقطة الأصل.

42. التحدي عندما تتساوى قيمتا a و b، يكون القطع الناقص دائرة. استخدم هذه المعلومة ومعرفتك بالقطوع الناقصة لتحديد صيغة لمساحة قطع ناقص من حيث a و b.

43. التحدي حدد معادلة لقطع ناقص تقع البؤرتان عند $(2, \sqrt{6})$ و $(2, -\sqrt{6})$ يمر بالنقطة $(3, \sqrt{6})$.

44. الفرضيات ماذا يحدث لموقع البؤرتين بينما يقترب القطع الناقص من الشكل الدائري؟ اشرح استنتاجك.

45. الاستنتاج تقع البؤرتان للقطع الناقص عند $(2, -7)$ و $(2, 18)$. إذا كانت $(14, 2)$ نقطة على القطع الناقص، فأثبت أن $(-10, 2)$ نقطة كذلك على القطع الناقص.

46. الكتابة في الرياضيات اشرح لماذا المجال $\{x \mid -a \le x \le a\}$ والمدى $\{y \mid -b \le y \le b\}$ لقطع ناقص معادلته $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تمرين على الاختبار المعياري

47. اضرب.

$$(2 + 3i)(4 + 7i)$$

A $8 + 21i$
B $-13 + 26i$
C $-6 + 10i$
D $13 + 12i$

48. تم تتبع متوسط العمر الافتراضي للمرأة الأمريكية، ونموذج البيانات هو $y = 0.2t + 73$. حيث $t = 0$ تناظر 1960.
ما معنى التقاطع مع المحور y؟

F في 2007، كان متوسط العمر الافتراضي 60.
G في 1960، كان متوسط العمر الافتراضي 58.
H في 1960، كان متوسط العمر الافتراضي 73.
J يزيد العمر الافتراضي بمقدار 0.2 عام كل عام.

49. إجابة شبكية إذا أنقصنا عددًا بمقدار 6 ثم ضاعفنا الناتج، فسوف نحصل على عدد أقل من العدد المبدئي بمقدار 5. فما العدد؟

50. SAT/ACT طول منشور مستطيل أكبر من عرضه بمقدار 121.9 cm . الارتفاع ثلاثة أمثال الطول. جد حجم المنشور.

A $3x^3 + x^2 + 3x$
B $x^3 + x^2 + x$
C $3x^3 + 6x^2 + 3x$
D $3x^3 + 3x^2 + 3x$
E $3x^3 + 3x^2$

مراجعة شاملة

اكتب معادلة للدائرة التي تحقق كل مجموعة من الشروط. (الدرس 2-6)

51. المركز (9−, 8)، تمر بالنقطة (21, 22)

52. المركز عند (2, 4)، تماس المحور الأفقي x

53. المركز في الربع الثاني، وتماس $y = -1$ و $y = 9$ والمحور الرأسي y

54. الطاقة يتم استخدام مرآة على شكل قطع مكافئ لتجميع الطاقة الشمسية. وتعكس المرايا أشعة الشمس إلى بؤرة القطع المكافئ.
بؤرة مرآة معينة ترتفع 9.75 ft فوق الرأس والوتر البؤري العمودي بطول 9.75 ft . (الدرس 1-6)

a. افترض أن البؤرة تقع عند نقطة الأصل. اكتب معادلة القطع المكافئ الذي تشكله المرآة.
b. القدم يساوي 0.3048 من المتر. أعد كتابة معادلة المرآة بالمتر.
c. مثّل إحدى معادلات المرآة بيانيًا.
d. أي المعادلات اخترتَ للتمثيل البياني؟ اشرح لماذا.

حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

55. $\frac{6}{d^2 + 4d + 4} + \frac{5}{d + 2}$

56. $\frac{a}{a^2 - a - 20} + \frac{2}{a + 4}$

57. $\frac{x}{x + 1} + \frac{3}{x^2 - 4x - 5}$

حُـلّ كل معادلة.

58. $\log_{10} (x^2 + 1) = 1$

59. $\log_b 64 = 3$

60. $\log_b 121 = 2$

حوّل لأبسط صورة.

61. $-5ab^2(-3a^2b + 6a^3b - 3a^4b^4)$

62. $2xy(3xy^3 - 4xy + 2y^4)$

63. $(4x^2 - 3y^2 + 5xy) - (8xy + 3y^2)$

64. $(10x^2 - 3xy + 4y^2) - (3x^2 + 5xy)$

مراجعة المهارات

جـد معادلة الخط المار بكل زوج من النقاط.

65. (-2, 5) و (3, 1)

66. (7, 1) و (7, 8)

67. (2, 2) و (3−, 5)

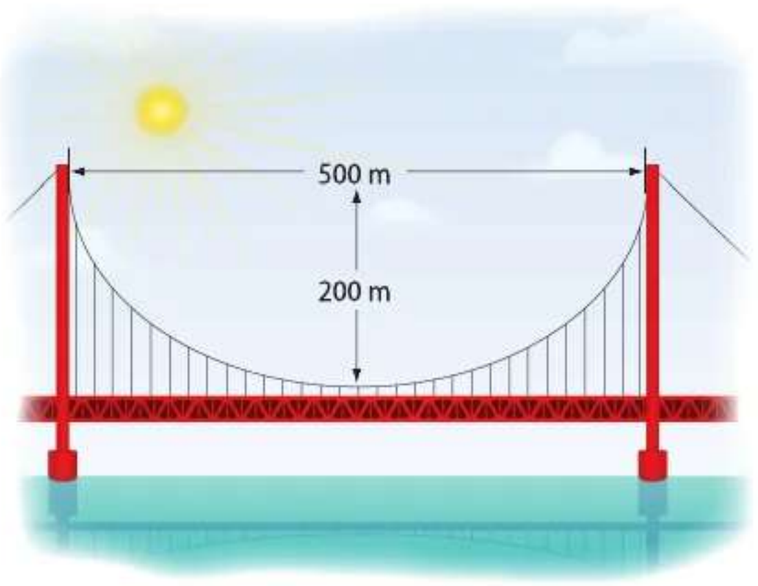
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

6 اختبار منتصف الوحدة
الدروس من 1-6 إلى 3-6

اكتب كل معادلة بالصيغة القياسية. حدد رأس القطع المكافئ ومحور تماثله واتجاه فتحته. (الدرس 1-6)

1. $y = 3x^2 - 12x + 21$
2. $x - 2y^2 = 4y + 6$
3. $y = \frac{1}{2}x^2 + 12x - 8$
4. $x = 3y^2 + 5y - 9$

5. **الجسور** اكتب معادلة قطع مكافئ لتمثيل شكل كابل تعليق الجسر الموضح. افترض أن نقطة الأصل عند النقطة الأكثر انخفاضًا بالكابلات. (الدرس 1-6)



حدد إحداثيات الرأس والبؤرة ومعادلة محور التماثل والدليل واتجاه الفتحه للقطع المكافئ بالمعادلة المعطاة .ثم جـد طول الوتر البؤري العمودي. (الدرس 1-6)

6. $y = x^2 + 6x + 5$
7. $x = -2y^2 + 4y + 1$

8. جـد مركز ونصف قطر دائرة معادلتها $(x - 1)^2 + y^2 = 9$. ثم مثّل الدائرة بيانيًا. (الدرس 2-6)

9. اكتب معادلة دائرة يقع مركزها عند $(-2, 3)$ وتمر بالنقطة $(4, 3)$. (الدرس 2-6)

10. اكتب معادلة دائرة النقطتان الطرفيتان لقطرها هما $(31, 8)$ و$(49, 32)$. (الدرس 2-6)

11. **الاختيار من متعدد** ما نصف قطر دائرة معادلتها $x^2 + 2x + y^2 + 14y + 34 = 0$؟ (الدرس 2-6)

A 2
B 4
C 8
D 16

جـد إحداثيات المركز والبؤرتين وطولي المحورين الأكبر والأصغر لقطع ناقص بالمعادلة المعطاة. ثم مثل القطع الناقص بيانيًا. (الدرس 3-6)

12. $\frac{(x+4)^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$
13. $\frac{(x-1)^2}{20} + \frac{(y+2)^2}{4} = 1$
14. $4y^2 + 9x^2 + 16y - 90x + 205 = 0$

15. **الاختيار من متعدد** أي معادلة تمثل قطعًا ناقصًا تقع النقطتان الطرفيتان لمحوره الأكبر عند $(-4, 10)$ و$(-4, -6)$ وبؤرتاه النقطتين $(-4, 7.3)$ و$(-4, -3.3)$ تقريبًا؟ (الدرس 3-6)

F $\frac{(x-2)^2}{36} + \frac{(y+4)^2}{64} = 1$
G $\frac{(x+4)^2}{64} + \frac{(y-2)^2}{36} = 1$
H $\frac{(y-2)^2}{64} + \frac{(x+4)^2}{36} = 1$
J $\frac{(x-2)^2}{64} + \frac{(y+4)^2}{36} = 1$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الدرس 4-6

4-6 القطع الزائد

السابق:
- تمثيل معادلات القطوع الناقصة بيانيًا وتحليلها.

الحالي:
1. كتابة معادلات القطوع الزائدة.
2. تمثيل القطوع الزائدة بيانيًا. W

لماذا؟
- نظرًا لأن مذنب هالي يدور حول الشمس في مسار على شكل قطع ناقص، فإنه يظهر في سمائنا. تمر المذنبات الأخرى عبر سمائنا مرة واحدة فقط. يسير العديد من هذه المذنبات في مسارات تشبه القطع الزائد.



مفردات جديدة
- قطع زائد hyperbola
- محور قاطع transverse axis
- محور مرافق conjugate axis
- بؤرتان foci
- رؤوس vertices
- رؤوس مرافقة co-vertices
- فرق ثابت constant difference

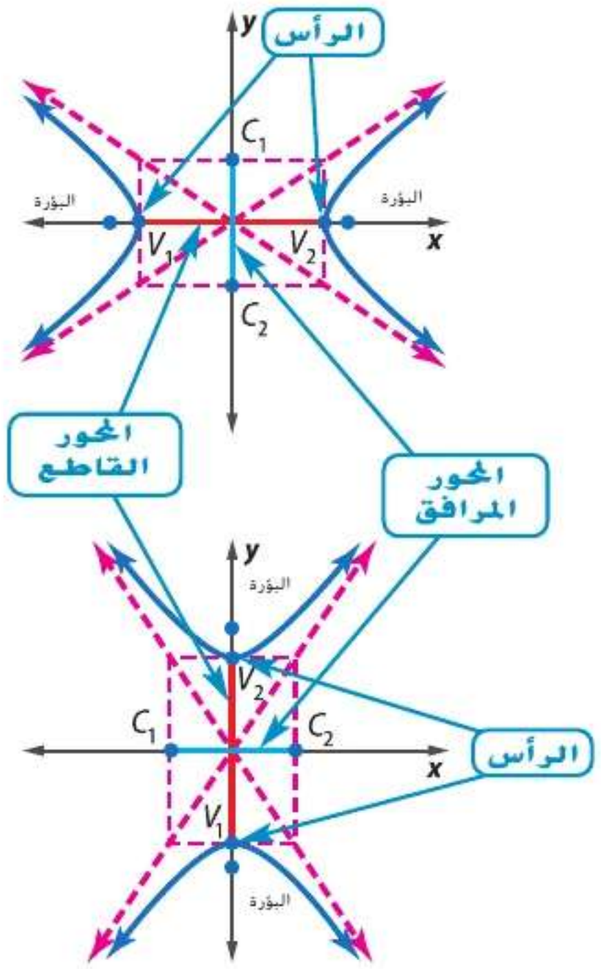
ممارسات في الرياضيات
6 مراعاة الدقة.

1 معادلات القطع الزائد على غرار القطع الناقص. **القطع الزائد** هو مجموعة جميع النقاط في مستوى بحيث تكون القيمة المطلقة لفرق المسافتين من البؤرتين ثابتة.

لكل قطع زائد محورا تماثل. **محور قاطع** و**محور مرافق**. المحوران متعامدان عند مركز القطع الزائد.

تقع **البؤرتان** للقطع الزائد دائمًا على المحور القاطع. **الرأسان** هما النقطتان الطرفيتان للمحور القاطع. **الرأسان المرافقان** هما النقطتان الطرفيتان للمحور المرافق.

بينما ينحسر القطع الزائد عند المركز، يقترب النصفان من خطي التقارب.



المفهوم الأساسي صور معادلات القطع الزائد التي يقع مركزها عند نقطة الأصل

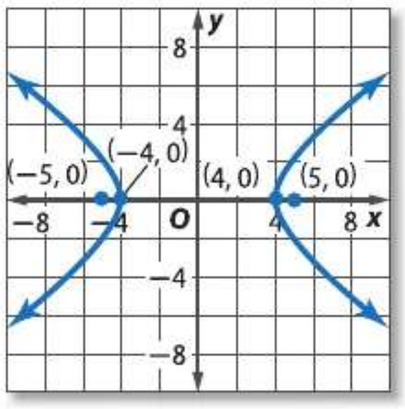
الصيغة القياسية	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$
الاتجاه	أفقي	رأسي
البؤرتان	$(\pm c, 0)$	$(0, \pm c)$
طول المحور القاطع	$2a$ وحدات	$2a$ وحدات
طول المحور المرافق	$2b$ وحدات	$2b$ وحدات
معادلات خطي التقارب	$y = \pm\frac{b}{a}x$	$y = \pm\frac{a}{b}x$

كما هو الحال مع القطوع الناقصة، هناك العديد من العلاقات الهامة بين أجزاء القطوع الزائدة.
- يوجد محورا تماثل.
- ترتبط القيم a وb وc بواسطة المعادلة $c^2 = a^2 + b^2$.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

مثال 1 كتابة معادلة إذا علمت الرأسين والبؤرتين

اكتب معادلةً للقطع الزائد المبيّن في التمثيل البياني.



الخطوة 1 جـــد المركز.

يقع الرأسان على مسافة واحدة من المركز.

ومركزه النقطة $(0, 0)$.

الخطوة 2 جـــد قيم a وb وc.

قيمة a هي المسافة بين الرأس والمركز، أو 4 وحدات.

قيمة c هي المسافة بين البؤرة والمركز، أو 5 وحدات.

$c^2 = a^2 + b^2$ معادلة تربط a وb وc بالقطع الزائد.

$5^2 = 4^2 + b^2$ $a = 4$ و $c = 5$

$9 = b^2$ اطرح 4^2 من كل طرف.

الخطوة 3 اكتب المعادلة.

المحور القاطع أفقي، إذًا المعادلة هي $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

تمرين موجّه

1. اكتب معادلة قطع زائد يقع رأساه النقطتين $(6, 0)$ و$(-6, 0)$ وبؤرتاه النقطتين $(8, 0)$ و$(-8, 0)$.

الربط بتاريخ الرياضيات

هيباتيا (370-415 قبل الميلاد)

كانت هيباتيا عالمة رياضيات وعالمة وفيلسوفة في الإسكندرية في مصر. وتعتبر أول امرأة تكتب في موضوعات الرياضيات. وقامت هيباتيا بتحرير الكتاب حول *مخروطيات أبولونيوس*، بإضافة المسائل والأمثلة الخاصة بها لتوضيح الموضوع لطلابها. وقد ساهم هذا الكتاب في تطوير الأفكار عن القطوع الزائدة والقطوع الناقصة.

يمكن كذلك تحديد القطوع الزائدة باستخدام معادلات خطي التقارب.

مثال 2 كتابة معادلة إذا علم خطي التقارب

خطا التقارب لقطع زائد رأسي هما $y = \frac{5}{3}x$ و $y = -\frac{5}{3}x$ ورأساه النقطتين $(0, 5)$ و$(0, -5)$. اكتب معادلة القطع الزائد.

الخطوة 1 جـــد المركز.

يقع الرأسان على مسافة واحدة من المركز.

ويقع مركز القطع الزائد عند $(0, 0)$.

الخطوة 2 جـــد قيمتي a وb.

القطع الزائد رأسي، إذًا $a = 5$.

من خطي التقارب، $b = 3$.

قيمة c ليست مطلوبة.

الخطوة 3 اكتب المعادلة.

معادلة القطع الزائد هي $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{9} = 1$

تمرين موجّه

2. خطا التقارب لقطع زائد أفقي هما $y = \frac{7}{9}x$ و$y = -\frac{7}{9}x$. الرأسان هما $(9, 0)$ و$(-9, 0)$. اكتب معادلة قطع زائد.

قراءة في الرياضيات

الصيغة القياسية في الصيغة القياسية للقطع الزائد، يتم طرح الحدود التربيعية. بالنسبة إلى القطع الناقص، يتم جمعها.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

2 التمثيلات البيانية للقطع الزائد يمكن إزاحة القطع الزائد بنفس طريقة القطع الناقص.

المفهوم الأساسي صور معادلات القطوع الزائدة التي يقع مركزها عند (h, k)

الصيغة القياسية	$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$	$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$
الاتجاه	أفقي	رأسي
البؤرتان	$(h \pm c, k)$	$(h, k \pm c)$
الرؤوس	$(h \pm a, k)$	$(h, k \pm a)$
الرؤوس المرافقة	$(h, k \pm b)$	$(h \pm b, k)$
معادلات خطي التقارب	$y - k = \pm\frac{b}{a}(x - h)$	$y - k = \pm\frac{a}{b}(x - h)$

نصيحة دراسية

الحاسبة يمكنك تمثيل قطع زائد بيانيًا على حاسبة تمثيل بياني من خلال إيجاد y. ثم تمثيل المعادلتين بيانيًا على الشاشة ذاتها.

مثال 3 التمثيل البياني للقطع الزائد

مثّل $\frac{(x-3)^2}{4} - \frac{(y+2)^2}{16} = 1$ بيانيًا. حدّد الرأسين والبؤرتين وخطي القارب.

الخطوة 1 جـد المركز. يقع المركز عند النقطة $(3, -2)$.

الخطوة 2 حدد a وb وc. من المعادلة، $a^2 = 4$ و$b^2 = 16$. إذًا $a = 2$ و$b = 4$.

$c^2 = a^2 + b^2$ معادلة تربط a وb وc بالقطع الزائد.

$c^2 = 2^2 + 4^2$ $a = 2, b = 4$

$c^2 = 20$ بسّط.

$c = \sqrt{20}$ أو تقريبًا 4.47 احسب الجذر التربيعي لكل طرف.

الخطوة 3 حدّد الرأسين والبؤرتين. القطع الزائد أفقي ويقع الرأسان على بُعد وحدتين من المركز، إذًا يقع الرأسان عند $(1, -2)$ و$(5, -2)$.
تقع البؤرتان على مسافة 4.47 وحدات تقريبًا من المركز.
تقع البؤرتان عند $(-1.47, -2)$ و$(7.47, -2)$.

الخطوة 4 حدد خطي التقارب.

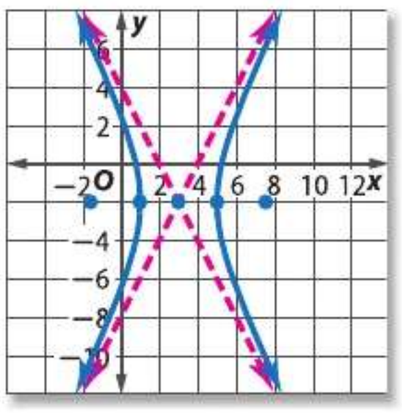
$y - k = \pm\frac{b}{a}(x - h)$ معادلة خطي التقارب لقطع زائد أفقي

$y - (-2) = \pm\frac{4}{2}(x - 3)$ $a = 2$ و$b = 4$ و$h = 3$ و$k = -2$

معادلتا خطي التقارب هما $y = 2x - 8$ و$y = -2x + 4$.

الخطوة 5 مثّل القطع الزائد بيانيًّا. القطع الزائد متماثل حول المحورين القاطع والمرافق. استخدم هذا التماثل لتعيين نقاط إضافية للقطع الزائد.

استخدم خطي التقارب كدليل لرسم القطع الزائد المار بالرأسين والنقاط الأخرى.

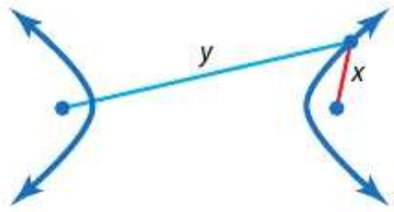


تمرين موجّه

3. مثّل $\frac{(y-4)^2}{9} - \frac{(x+3)^2}{25} = 1$ بيانيًا. حدّد الرأسين والبؤرتين وخطي التقارب.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

في معادلة أي قطع زائد، تمثل قيمة $2a$ **الفرق الثابت**.
هذه هي القيمة المطلقة للفرق بين المسافتين من أي نقطة على القطع الزائد وبؤرتيه.



أي نقطة على القطع الزائد الموضح لها نفس الفرق الثابت. $|y - x|$ أو $2a$.

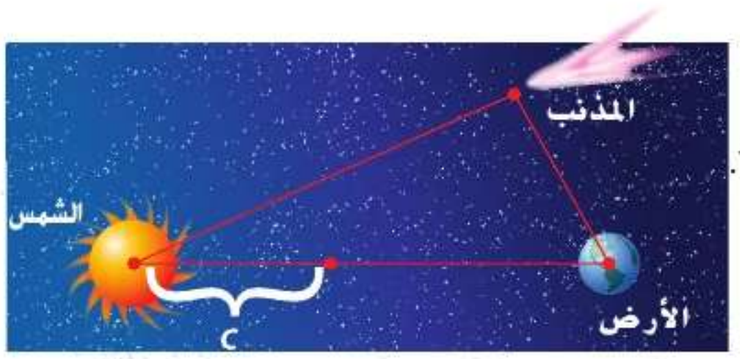
مثال من الحياة اليومية 4 كتابة معادلة قطع زائد

الفضاء تبعد الأرض عن الشمس بمسافة **146** مليون كيلومتر. يتبع المذنب مسارًا يشبه فرعًا من قطع زائد. افترض أن المسافة بين المذنب والشمس أكبر من المسافة بين المذنب والأرض بمقدار **30** مليون كيلومتر. حدد معادلة القطع الزائد الذي يقع مركزه عند نقطة الأصل لمسار المذنب.

الفهم علينا تحديد معادلة القطع الزائد.

التخطيط جـد المركز وقيمتي a وb. عند الحصول على هذه المعلومات، يمكن تحديد المعادلة.

الحل البؤرتان هما الأرض والشمس، ونقطة الأصل بينهما.



قيمة c هي 73 أو 2 ÷ 146.

الفرق بين المسافتين من المذنب إلى كل جسم هي 30.
إذًا، a تساوي 2 ÷ 30 أو 15 مليون كيلومتر.

$c^2 = a^2 + b^2$ معادلة تربط a وb وc بالقطع الزائد.

$73^2 = 15^2 + b^2$ $c = 73$ و $a = 15$

$5104 = b^2$ بسّط

معادلة القطع الزائد هي $\frac{x^2}{225} - \frac{y^2}{5104} = 1$

حيث إن المسافة من المذنب إلى الشمس أكبر، فهو يقع على فرع القطع الزائد القريب من الأرض.

التحقق $(21, 70)$ نقطة تحقق المعادلة.

المسافة بين هذه النقطة والشمس $(-73, 0)$ هي

$\sqrt{[21 - (-73)]^2 + (70 - 0)^2}$ أو 117.2 مليون كيلومتر.

المسافة بين هذه النقطة والأرض $(73, 0)$ هي

$\sqrt{(21 - 73)^2 + (70 - 0)^2}$ أو 87.2 مليون كيلومتر

الفرق بين المسافتين 30. ✓

تمرين موجّه

4. **البحث والإنقاذ** تتلقى محطتا استقبال المسافة بينهما 150 km إشارة من طائرة سقطت. تم تحديد المسافة بين الطائرة والمحطة A وكانت أكبر من المسافة بين الطائرة والمحطة B بمقدار 80 km. حدد معادلة القطع الزائد الذي يقع مركزه عند نقطة الأصل لموقع الطائرة.



الربط بالحياة اليومية
يصبح المذنب هالي مرئيًا للعين المجردة كل 76 عامًا تقريبًا بينما يقترب من الشمس.
المصدر: وكالة ناسا

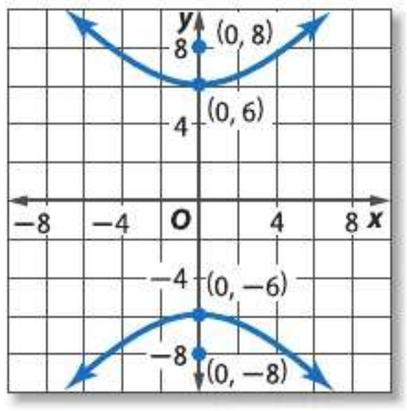
نصيحة دراسية
المواقع الدقيقة من الضروري تواجد محطة استقبال ثالثة لتحديد موقع الطائرة بدقة.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

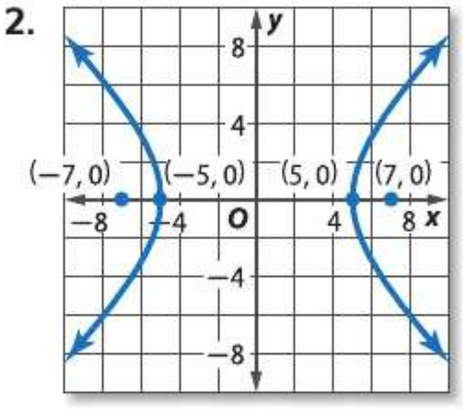
التحقق من فهمك

المثالان 2-1 **اكتب معادلة لكل قطع زائد.**

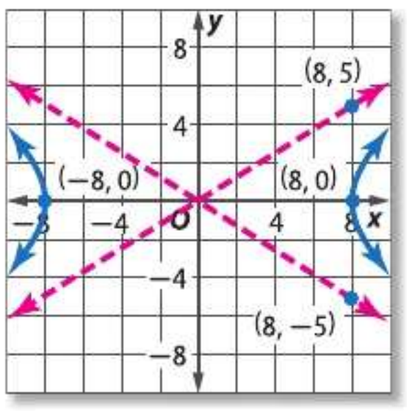
1.



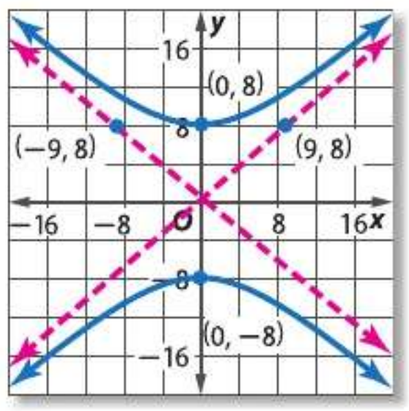
2.



3.



4.



مثال 3 **البنية** مثّل كل قطع زائد بيانيًا. حدّد الرأسين والبؤرتين وخطي التقارب.

5. $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{49} = 1$

6. $\frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{60} = 1$

7. $9y^2 + 18y - 16x^2 + 64x - 199 = 0$

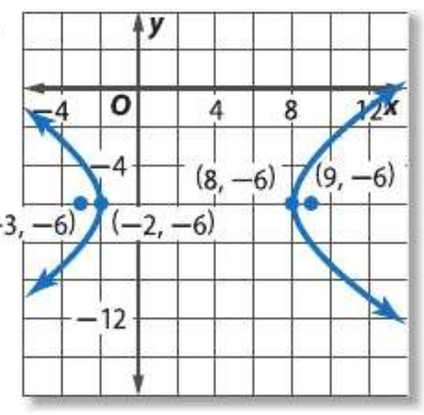
8. $4x^2 + 24x - y^2 + 4y - 4 = 0$

مثال 4 9. **الملاحة** افترض أن سفينةً توصلت إلى أن الفرق في بعدها عن محطتين يساوي 60 ميلاً بحريًا. اكتب معادلة القطع الزائد الذي تقع عليه السفينة إذا علمت أن المحطتين تقعان عند النقطتين $(-80, 0)$ و$(80, 0)$.

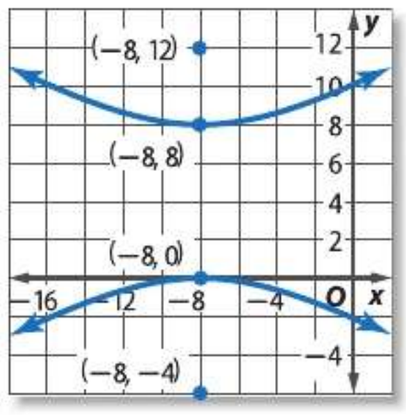
التمرين وحل المسائل

المثالان 2-1 **اكتب معادلة لكل قطع زائد.**

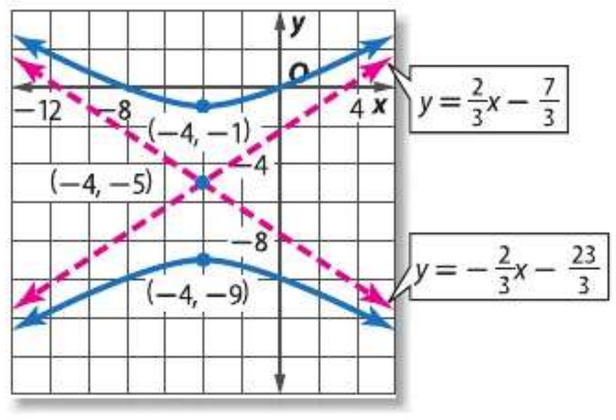
10.



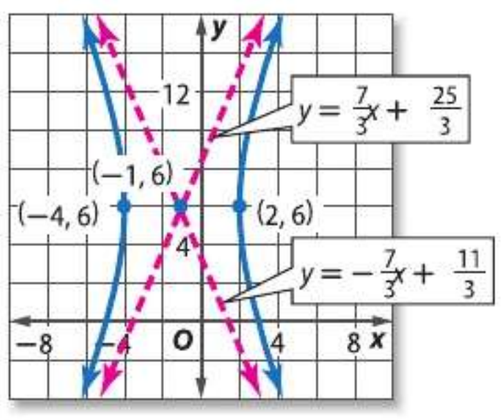
11.



12.



13.



McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

مثال 3 **مثّل كل قطع زائد بيانيًا. حدّد الرأسين والبؤرتين وخطي التقارب**

14. $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{4} = 1$

15. $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{49} = 1$

16. $\frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{25} = 1$

17. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{16} = 1$

18. $\frac{(x-3)^2}{16} - \frac{(y+1)^2}{4} = 1$

19. $\frac{(y+5)^2}{16} - \frac{(x+2)^2}{36} = 1$

20. $9y^2 - 4x^2 - 54y + 32x - 19 = 0$

21. $16x^2 - 9y^2 + 128x + 36y + 76 = 0$

22. $25x^2 - 4y^2 - 100x + 48y - 144 = 0$

23. $81y^2 - 16x^2 - 810y + 96x + 585 = 0$

مثال 4

24. الملاحة افترض أن سفينةً توصلت إلى أن الفرق في بعدها عن محطتين يساوي 80 ميلاً بحريًا. اكتب معادلة القطع الزائد الذي تقع عليه السفينة إذا علمت أن المحطتين تقعان عند النقطتين $(-100, 0)$ و $(100, 0)$.

حدد ما إذا كانت كل من المعادلات التالية تمثل قطعًا ناقصًا أم قطعًا زائدًا.

25. $4x^2 = 5y^2 + 6$

26. $8x^2 - 2x = 8y - 3y^2$

27. $-5x^2 + 4x = 6y + 3y^2$

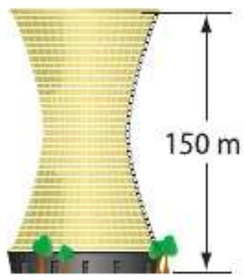
28. $7y - 2x^2 = 6x - 2y^2$

29. $6x - 7x^2 - 5y^2 = 2y$

30. $4x + 6y + 2x^2 = -3y^2$

31. الفضاء راجع التطبيق في بداية الدرس. عندما تمثل الشمس إحدى البؤرتين ويقع المركز عند نقطة الأصل، يتبع مسار مذنب معين فرعًا من قطع زائد. إذا كان زوج إحداثيات المسار هو $(10, 0)$ و$(30, 100)$ حيث الوحدات بالمليون كيلومتر، فحدد معادلة المسار.

32. التبريد يتم بناء أبراج التبريد بتيارات الهواء الطبيعية على شكل قطوع زائدة للمزيد من كفاءة تبريد مصانع الطاقة.



يمكن تمثيل القطع المكافئ للبرج الموضح بواسطة $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{225} = 1$، حيث الوحدات بالمتر. جد عرض البرج عند القمة وعند أضيق نقطة في المنتصف.

33. التمثيلات المتعددة فكّر في $xy = 16$.

a. جدوليًا قم بعمل جدول قيم للمعادلة $-12 \le x \le 12$.

b. بيانيًا مثّل بيانيًا القطع الزائد الممثل بالمعادلة.

c. منطقيًا حدد خطي التقارب للقطع الزائد ومثلهما بيانيًا.

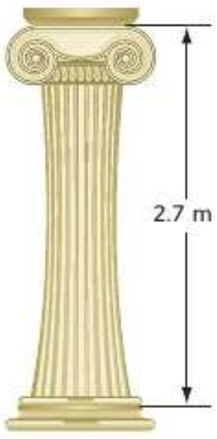
d. تحليليًا ما الخاصية الفريدة التي يمكن ملاحظتها بشأن خطي التقارب؟ القطوع الزائدة التي تمثل هذه الخاصية تُسمى *القطوع الزائدة المستطيلة*.

e. تحليليًا بدون أي حسابات، باعتقادك ماذا ستكون إحداثيات الرأسين لكل من $xy = 25$؟ و$xy = 36$؟

34. استخدام النماذج تتلقى محطتا استقبال المسافة بينهما 250 mi إشارة من طائرة سقطت. تم تحديد المسافة بين الطائرة والمحطة B وكانت أكبر من المسافة بين الطائرة والمحطة A بمقدار 70 mi. حدد معادلة القطع الزائد الأفقي الذي يقع مركزه عند نقطة الأصل لموقع الطائرة

35. الطقس يبعد منزل فاطمة عن منزل عائشة بمسافة 4000 ft بالضبط. أثناء التحدث عبر الهاتف وكل منهما في منزلها، سمعت فاطمة صوت الرعد من النافذة وسمعته عائشة من نافذة منزلها بعد 3 s. إذا علمتَ أن سرعة الصوت 1100 ft/s، فحدد معادلة القطع الزائد الأفقي لموقع البرق.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education



36. الهندسة المعمارية كانت الأعمدة الضخمة ذات المقاطع العرضية على شكل قطوع زائدة شائعة في اليونان القديمة. يمكن تمثيل المنحنيات بواسطة المعادلة $\frac{x^2}{0.16} - \frac{y^2}{4} = 1$، حيث الوحدات بالمتر. إذا علمتَ أن طول الأعمدة 9 m، فجد عرض كل عمود عند القمة وعند أضيق نقطة في المنتصف. قرّب إلى أقرب جزء من المئة من المتر.

اكتب معادلة للقطع الزائد الذي يحقق كل مجموعة من الشروط.

37. الرأسان $(0, -8)$ و$(0, 8)$، وطول المحور المرافق 20 وحدة

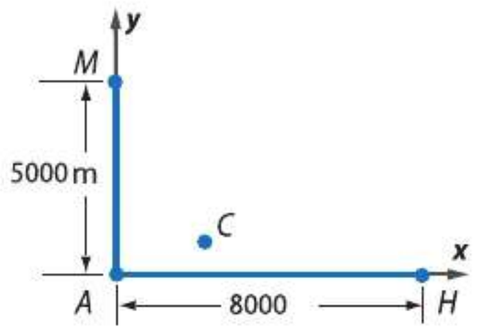
38. الرأسان $(-6, 0)$ و$(6, 0)$، وطول المحور المرافق 24 وحدة

39. الرأسان $(-2, 6)$ و$(-2, -2)$، والبؤرتان $(-2, 10)$ و$(-2, -6)$

40. الرأسان $(4, -3)$ و$(-8, -3)$، والبؤرتان $(9, -3)$ و$(-13, -3)$

41. يقع المركز عند نقطة الأصل وطول المحور القاطع الأفقي 10 وحدات وطول المحور المرافق 4 وحدات

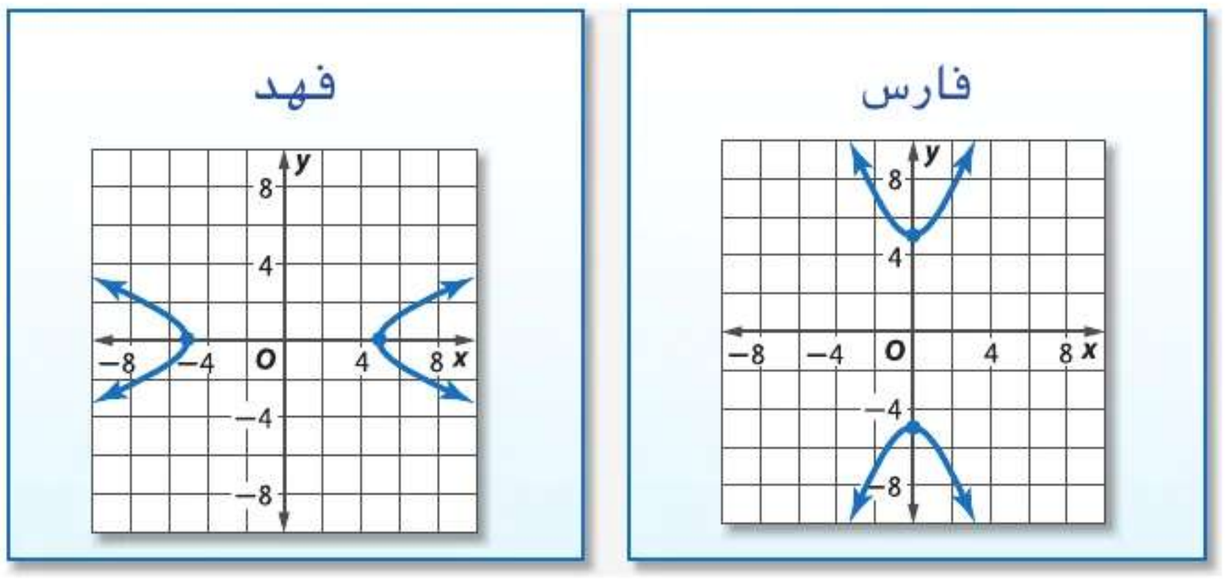
42. يقع المركز عند نقطة الأصل وطول المحور القاطع الرأسي 16 وحدة وطول المحور المرافق 12 وحدة



43. التثليث أثناء بحث أحمد ومحمد وحميد عن قطتهم المفقودة في الغابة، سمعوا صوت مواء. سمعه محمد بعد أحمد بثانيتين وسمعه حميد بعد أحمد بثلاث ثوانٍ. إذا علمتَ أن أحمد عند نقطة الأصل وأن سرعة الصوت 1100 m/s ، فحدد الموقع الدقيق للقطة.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

44. التفكير النقدي يمثّل فارس وفهد بيانيًا $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{4} = 1$ فهل أيٌّ منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.



45. التحدي تقع نقطة الأصل على قطع زائد أفقي. خطا التقارب للقطع الزائد هما $y = -x + 1$ و$y = x - 5$. جد معادلة القطع الزائد.

46. التبرير ماذا يحدث لموقع البؤرتين لقطع زائد بينما تتناقص قيمة a باستمرار عن قيمة b؟ اشرح استنتاجك.

47. الاستنتاج فكّر في $\frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{16} = 1$ صف التغير في شكل القطع الزائد ومواقع الرأسين والبؤرتين إذا تغيرت 36 إلى 9. اشرح سبب حدوث ذلك.

48. مسألة غير محددة الإجابة اكتب معادلة لقطع زائد تقع إحدى بؤرتيه عند نقطة الأصل.

49. الكتابة في الرياضيات لماذا تختار استخدام قطع مخروطي لتمثيل مجموعة من البيانات بدلاً من دالة كثيرة الحدود؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تمرين على الاختبار المعياري

50. لديك قطع نقد معدنية من فئة 10 فلس أكثر من العملات فئة 25 فلس بمقدار 6. لديك إجمالاً 8.25 AED. كم عدد العملات من فئة 10 فلس الموجودة لديك؟

A 19 **C** 13

B 16 **D** 25

51. ما طول شجرة أقصر بمقدار 15 cm من عمود طوله ثلاثة أمثال طول الشجرة؟

F 24.5 cm

G 22.5 cm

H 21.5 cm

J 7.5 cm

52. إجابة قصيرة طول مستطيل 8 m وعرضه 6 m. إذا تمت زيادة كل بُعد بنفس العدد من الأقدام، فسوف تصبح مساحة المستطيل الجديد أكبر من مساحة المستطيل الأصلي بمقدار $32\ m^2$. فما مقدار زيادة كل بُعد بالأمتار؟

53. SAT/ACT عند التمثيل البياني للمعادلة $y = 4x^2 - 5$ في المستوى الإحداثي، أي مما يلي هو التمثيل البياني؟

A مستقيم **D** قطع زائد

B دائرة **E** قطع مكافئ

C قطع ناقص

مراجعة شاملة

اكتب معادلة القطع الناقص الذي يحقق كل مجموعة من الشروط. (الدرس 3-6)

54. النقطتان الطرفيتان للمحور الأكبر عند $(2, 2)$ و$(2, -10)$. والنقطتان الطرفيتان للمحور الأصغر عند $(0, -4)$ و $(4, -4)$

55. النقطتان الطرفيتان للمحور الأكبر عند $(0, 10)$ و$(0, -10)$. والبؤرتان عند $(0, 8)$ و$(0, -8)$

جـد مركز ونصف قطر دائرة بالمعادلة المعطاة. ثم مثّل الدائرة بيانيًا. (الدرس 2-6)

56. $(x - 3)^2 + y^2 = 16$

57. $x^2 + y^2 - 6y - 16 = 0$

58. $x^2 + y^2 + 9x - 8y + 4 = 0$

59. كرة السلة تلعب وفاء كرة السلة لصالح فريق المدرسة الثانوية. حتى الآن في هذا الموسم، أحرزت 6 رميات حرة من أصل 10. وهي عازمة على تحسين نسبة إحراز الرميات الحرة. إذا كان بإمكانها إحراز x من الرميات الحرة المتتابعة.

a. مثّل الدالة بيانيًا.

b. أي جزء من التمثيل البياني يعتبر ذو معنى في سياق المسألة؟

c. صف معنى التقاطع مع المحور y.

d. ما معادلة خط التقارب الأفقي؟ اشرح معناه فيما يتعلق بنسبة أهداف وفاء.

حُـلّ كل من المعادلات التالية.

60. $\left(\frac{1}{7}\right)^{y-3} = 343$

61. $10^{x-1} = 100^{2x-3}$

62. $36^{2p} = 216^{p-1}$

مثّل كل متباينة بيانيًا.

63. $y \geq \sqrt{5x - 8}$

64. $y \geq \sqrt{x - 3} + 4$

65. $y < \sqrt{6x - 2} + 1$

مراجعة المهارات

66. اكتب معادلة قطع مكافئ رأسه عند نقطة الأصل ويمر بالنقطة $(-8, 2)$

67. اكتب معادلة قطع مكافئ رأسه النقطة $(-4, -3)$ ومفتوح للأعلى وتقاطعه مع المحور y هو 8.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة Graw-Hill Education

الدرس 6-5

تحديد القطوع المخروطية

السابق
- تحليل القطوع المخروطية المختلفة.

الحالي
1. كتابة معادلات القطوع المخروطية بالصيغة القياسية.
2. تحديد القطوع المخروطية من خلال معادلاتها.

لماذا؟
- القطع المكافئ والدائرة والقطع الناقص والقطع الزائد يُطلق عليها القطوع المخروطية لأنها المقاطع العرضية التي تتشكل عندما يقطع مستوى مخروطًا مزدوجًا.



ممارسات في الرياضيات
3 بناء فرضيات عملية والتعليق على طريقة استنتاج الآخرين.
8 البحث عن التوافق في الاستنتاجات المتكررة والتعبير عن ذلك.

1 القطوع المخروطية بالصيغة القياسية يمكن كتابة معادلة أي قطع مخروطي بالصيغة $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$، حيث A وB وC غير أصفار جميعًا. يمكن تحويل هذه الصيغة العامة إلى الصيغ القياسية أدناه من خلال إكمال المربع.

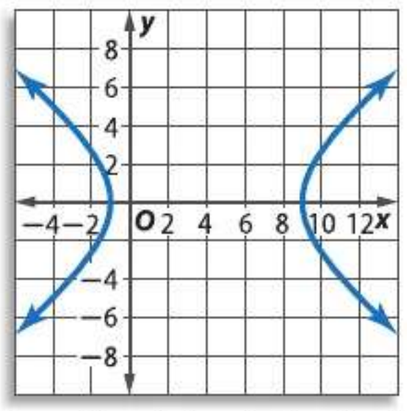
ملخص المفهوم الصيغ القياسية لمعادلات القطوع المخروطية

قطع مخروطي	الصيغة القياسية للمعادلة	
دائرة	$(x-h)^2 + (y-k) = r^2$	
	محور رأسي	محور أفقي
قطع مكافئ	$y = a(x-h)^2 + k$	$x = a(y-k)^2 + h$
قطع ناقص	$\frac{(y-k)^2}{a^2} + \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$	$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$
قطع زائد	$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$	$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

مثال 1 إعادة كتابة معادلة قطع مخروطي

اكتب $16x^2 - 25y^2 - 128x - 144 = 0$ بالصيغة القياسية. اذكر إن كان التمثيل البياني للمعادلة قطعًا مكافئًا أو دائرة أو قطعًا ناقصًا أو قطعًا زائدًا. ثم مثّل المعادلة بيانيًا.

$16x^2 - 25y^2 - 128x - 144 = 0$	المعادلة الأصلية
$16(x^2 - 8x + \blacksquare) - 25y^2 = 144 + 16(\blacksquare)$	اعزل الحدود.
$16(x^2 - 8x + 16) - 25y^2 = 144 + 16(16)$	أكمل المربع.
$16(x-4)^2 - 25y^2 = 400$	مربع كامل
$\frac{(x-4)^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$	اقسم كل طرف على 400.



التمثيل البياني قطع زائد مركزه النقطة (4, 0).

تمرين موجّه

1. اكتب $4x^2 + y^2 - 16x + 8y - 4 = 0$ بالصيغة القياسية. اذكر إن كان التمثيل البياني للمعادلة *قطعًا مكافئًا أو دائرة أو قطعًا ناقصًا أو قطعًا زائدًا*. ثم مثّل المعادلة بيانيًا.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مراجعة المفردات

المميز التعبير $b^2 - 4ac$ من القانون العام

2 تحديد القطوع المخروطية

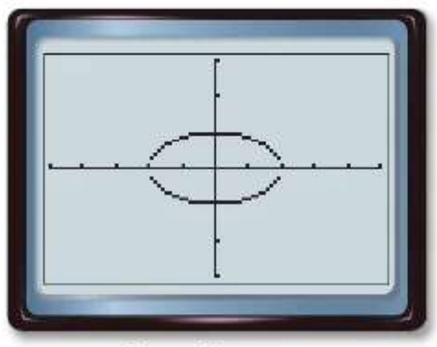
يمكنك تحديد نوع المخروط دون الحاجة إلى كتابة $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ بالصيغة القياسية. عندما يكون هناك حد xy حيث $(B \neq 0)$. يمكنك استخدام المميز. $B^2 - 4AC$ هو مميز $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$.

ملخص المفهوم تصنيف القطوع المخروطية باستخدام المميز

المميز	القطع المخروطي
$B^2 - 4AC < 0;\ B = 0$ و $A = C$	دائرة
$B^2 - 4AC < 0;\ B \neq 0$ أو $A \neq C$	قطع ناقص
$B^2 - 4AC = 0;\ B = 0$ و $A = C$	قطع مكافئ
$B^2 - 4AC > 0;\ B \neq 0$ و $A \neq C$	قطع زائد

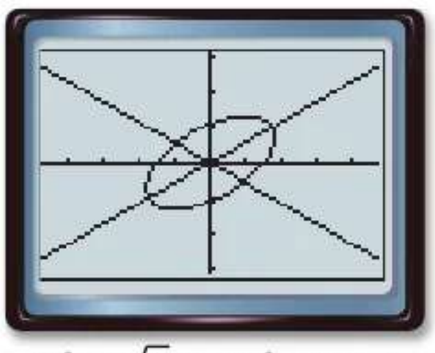
عندما يكون $B = 0$، يكون المخروط رأسيًا أو أفقيًا. عندما يكون $B \neq 0$، لا يكون المخروط رأسيًا ولا أفقيًا.

قطع ناقص أفقي: $B = 0$



$x^2 + 4y^2 - 4 = 0$

قطع ناقص مُدار: $B \neq 0$



$7x^2 - 6\sqrt{3}xy + 13y^2 - 16 = 0$

نصيحة دراسية

لتحديد القطوع المخروطية في حالة عدم وجود الحد xy $(B = 0)$، استخدم A وC.

قطع مكافئ: A أو $C = 0$ لكن ليس كلاهما.

دائرة: $A = C$

قطع ناقص: A وC لهما نفس الإشارة لكن ليسا متساويين.

قطع زائد: A وC لهما علامتان متضادتان.

مثال 2 تحليل معادلة قطع مخروطي

بدون كتابة كل معادلة بالصيغة القياسية، اذكر إن كان التمثيل البياني لها قطعًا مكافئًا أو دائرة أو قطعًا ناقصًا أو قطعًا زائدًا.

a. $y^2 + 4x^2 - 3xy + 4x - 5y - 8 = 0$

$A = 4$ و $B = -3$ و $C = 1$

المميز هو -7 أو $(-3)^2 - 4(4)(1)$.

لأن المميز أقل من 0 و$B \neq 0$. فالمخروط قطع ناقص.

b. $3x^2 - 6x + 4y - 5y^2 + 2xy - 4 = 0$

$A = 3$ و $B = 2$ و $C = -5$

المميز هو 64 أو $2^2 - 4(3)(-5)$.

لأن المميز أكبر من 0. فالمخروط قطع زائد.

c. $4y^2 - 8x + 6y - 14 = 0$

$A = 0$ و $B = 0$ و $C = 4$

المميز هو 0 أو $0^2 - 4(0)(4)$.

لأن المميز يساوي 0. فالمخروط قطع مكافئ.

تمرين موجّه

2A. $8y^2 - 6x^2 + 4xy - 6x + 2y - 4 = 0$

2B. $3xy + 4x^2 - 2y + 9x - 3 = 0$

2C. $3x^2 + 16x - 12y + 2y^2 - 6 = 0$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التحقق من فهمك

مثال 1 **اكتب كل معادلة بالصيغة القياسية. اذكر إن كان التمثيل البياني للمعادلة *قطعًا مكافئًا أو دائرةً أو قطعًا ناقصًا أو قطعًا زائدًا*. ثم مثّل المعادلة بيانيًا.**

1. $x^2 + 4y^2 - 6x + 16y - 11 = 0$

2. $x^2 + y^2 + 12x - 8y + 36 = 0$

3. $9y^2 - 16x^2 - 18y - 64x - 199 = 0$

4. $6y^2 - 24y + 28 - x = 0$

مثال 2 **بدون كتابة كل معادلة بالصيغة القياسية، اذكر إن كان التمثيل البياني لها *قطعًا مكافئًا أو دائرةً أو قطعًا ناقصًا أو قطعًا زائدًا*.**

5. $4x^2 + 6y^2 - 3x - 2y = 12$

6. $5y^2 = 2x + 6y - 8 + 3x^2$

7. $8x^2 + 8y^2 + 16x + 24 = 0$

8. $4x^2 - 6y = 8x + 2$

9. $4x^2 - 3y^2 + 8xy - 12 = 2x + 4y$

10. $5xy - 3x^2 + 6y^2 + 12y = 18$

11. $8x^2 + 12xy + 16y^2 + 4y - 3x = 12$

12. $16xy + 8x^2 + 8y^2 - 18x + 8y = 13$

13. استخدام النماذج تشارك مقاتلة نفاثة في عرض جوي. يمكن تمثيل مسار الطائرة خلال إحدى المناورات بقطع مخروطي معادلته $24x^2 + 1000y - 31{,}680x - 45{,}600 = 0$. حيث يتم تمثيل المسافات بالقدم.

a. حدد شكل المسار المنحني للطائرة النفاثة. اكتب المعادلة بالصيغة القياسية.

b. إذا بدأت الطائرة النفاثة مسارها لأعلى عند $x = 0$، فما المسافة الأفقية التي قطعتها الطائرة من بداية التسلق لنهاية الهبوط؟

c. ما أقصى ارتفاع للطائرة؟

التمرين وحل المسائل

مثال 1 **اكتب كل معادلة بالصيغة القياسية. اذكر إن كان التمثيل البياني للمعادلة *قطعًا مكافئًا أو دائرةً أو قطعًا ناقصًا أو قطعًا زائدًا*، ثم مثل المعادلة بيانيًا.**

14. $3x^2 - 2y^2 + 18x + 8y - 35 = 0$

15. $3x^2 + 24x + 4y^2 - 40y + 52 = 0$

16. $x^2 + y^2 = 16 + 6y$

17. $32x + 28 = y - 8x^2$

18. $7x^2 - 8y = 84x - 2y^2 - 176$

19. $x^2 + 8y = 11 + 6x - y^2$

20. $4y^2 = 24y - x - 31$

21. $112y + 64x = 488 + 7y^2 - 8x^2$

22. $28x^2 + 9y^2 - 188 = 56x - 36y$

23. $25x^2 + 384y - 64y^2 + 200x = 1776$

مثال 2 **بدون كتابة كل معادلة بالصيغة القياسية، اذكر إن كان التمثيل البياني لها *قطعًا مكافئًا أو دائرةً أو قطعًا ناقصًا أو قطعًا زائدًا*.**

24. $4x^2 - 5y = 9x - 12$

25. $4x^2 - 12x = 18y - 4y^2$

26. $9x^2 + 12y = 9y^2 + 18y - 16$

27. $18x^2 - 16y = 12x - 4y^2 + 19$

28. $12y^2 - 4xy + 9x^2 = 18x - 124$

29. $5xy + 12x^2 - 16x = 5y + 3y^2 + 18$

30. $19x^2 + 14y = 6x - 19y^2 - 88$

31. $8x^2 + 20xy + 18 = 4y^2 - 12 + 9x$

32. $5x - 12xy + 6x^2 = 8y^2 - 24y - 9$

33. $18x - 24y + 324xy = 27x^2 + 3y^2 - 5$

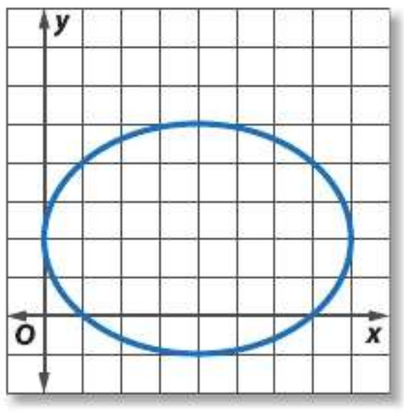
34. الإضاءة يوجد مصباح بالقرب من جدار ويلقي بقوس من الضوء على شكل قطع مخروطي. افترض أنه يمكن تمثيل حافة الضوء بواسطة المعادلة $3y^2 - 2y - 4x^2 + 2x - 8 = 0$. حدد شكل حافة الضوء ومثّل المعادلة بيانيًا.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

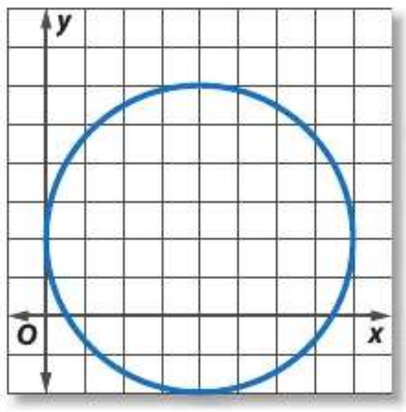
صِل كل تمثيل بياني بالمعادلة المقابلة له.

a. $x^2 + y^2 - 8x - 4y = -4$ b. $9x^2 - 16y^2 - 72x + 64y = 64$ c. $9x^2 + 16y^2 = 72x + 64y - 64$

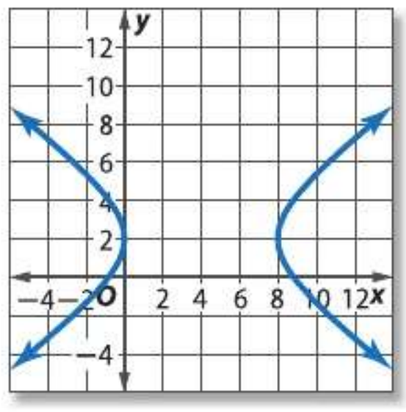
35.



36.



37.



للتمارين 41-38، صل كل موقف بمعادلة يمكن أن تمثله.

a. $47.25x^2 - 9y^2 + 18y + 33.525 = 0$ b. $25x^2 + 100y^2 - 1900x - 2200y + 45{,}700 = 0$

c. $16x^2 - 90x + y - 0.25 = 0$ d. $x^2 + y^2 - 18x - 30y - 14{,}094 = 0$

38. **أجهزة الحاسوب** حدود شبكة لاسلكية مداها 120 ft

39. **اللياقة البدنية** المسار البيضاوي لقدمك على آلة تمارين

40. **الاتصالات** موضع هاتف جوال بين برجين خلويين

41. **رياضة** ارتفاع كرة فوق الأرض بعد ركلها

42. **الاستنتاج المنطقي** الكابلات في جسر معلق على شكل قطع مكافئ تقريبًا. إذا كانت المسافة بين أبراج جسر قيد التخطيط هي 1000 m وأدنى نقطة لكابلات التعليق هي 200 m تحت قمة الأبراج. فاكتب المعادلة بالصيغة القياسية واتخذ الرأس كنقطة أصل.

43. **التمثيلات المتعددة** فكّر في قطع ناقص مركزه $(-2, 3)$ ورأسه $M(-1, -2)$ ورأسه المرافق $N(3, -4)$.

a. **تحليليًا** حدد الصيغة القياسية لمعادلة القطع الناقص.

b. **جبريًا** حوّل الجزء a إلى الصيغة $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$.

c. **بيانيًا** مثّل القطع الناقص بيانيًا.

d. **تحليليًا** إذا تم تدوير القطع الناقص بحيث يتم نقل M إلى $(-6, 3)$. فحدد موقع N وزاوية الدوران.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

44. **التحدي** عندما يمر مستوى عبر رأس مخروط، يتشكل *مخروط منحسر*.

a. حدد نوع المخروط الذي تمثله $4x^2 + 8y^2 = 0$.

b. مثّل المخروط بيانيًا.

c. صف الفرق بين هذا المخروط المنحسر ومخروط قياسي من نفس النوع حيث $A = 4$ و$B = 8$.

45. **الاستنتاج** هل العبارة التالية *أحيانًا أم دائمًا أم مطلقًا* صحيحة؟ *اشرح*.

إذا كان المخروط رأسيًا وقيمة $A = C$، فهو دائرة.

46. **مسألة غير محددة الإجابة** اكتب معادلة بالصيغة $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$، حيث $A = 9C$، والتي تمثل قطعًا مكافئًا.

47. **الكتابة في الرياضيات** قارن وبين الفرق بين التمثيلات البيانية لأربعة أنواع من المخروطات والمعادلات المناظرة لها.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة Graw-Hill Education

تمرين على الاختبار المعياري

48. SAT/ACT خضع صف دراسي من 25 طالبًا لاختبار في مادة العلوم. حصل 10 طلاب على متوسط درجات 80. وحصل باقي الطلاب على متوسط درجات 60. ما متوسط درجات الصف بأكمله؟

A 66
B 68
C 70
D 72
E 78

49. ستة أضعاف عدد ناقص 11 هو 43. فما العدد؟

F 12
G 11
H 10
J 9

50. إجابة موسعة يمكن تمثيل كمية المياه المتبقية في خزان أثناء تصريفها بواسطة المعادلة $L = -4t^2 - 10t + 130$، حيث يمثل L عدد لترات المياه المتبقية ويمثل t الدقائق من بدء التصريف. كم كان عدد لترات المياه في الخزان في البداية؟ قرّب إلى أقرب جزء من عشرة من الدقيقة للوقت اللازم لتصريف المياه من الخزان تمامًا.

51. لدى أحمد قطعة مربعة من الورق طول كل ضلع 4 in. صنع أحمد من الورقة لفافة على شكل أسطوانة. فما حجم الأسطوانة؟

A $\frac{4}{\pi}$
B $\frac{16}{\pi}$
C 4π
D 16π

مراجعة شاملة

52. علم الفلك افترض أنه يمكن تمثيل مسار مذنب بواسطة فرع قطع زائد معادلته $\frac{y^2}{225} - \frac{x^2}{400} = 1$ جد إحداثيات الرأسين والبؤرتين ومعادلتي خطي التقارب للقطع الزائد. ثم مثّل القطع الزائد بيانيًا. (الدرس 6-4)

جد إحداثيات المركز والبؤرتين وطولي المحورين الأكبر والأصغر لقطع ناقص بالمعادلة المعطاة. ثم مثّل القطع الناقص بيانيًا. (الدرس 6-3)

53. $\frac{y^2}{18} + \frac{x^2}{9} = 1$
54. $4x^2 + 8y^2 = 32$
55. $x^2 + 25y^2 - 8x + 100y + 91 = 0$

مثّل كل دالة بيانيًا.

56. $f(x) = \frac{3}{x}$
57. $f(x) = \frac{-2}{x+5}$
58. $f(x) = \frac{6}{x-2} - 4$

59. الفضاء يتم استخدام النظير المشع كمصدر طاقة للأقمار الصناعية. تم تمثيل خرج الطاقة P (وات) بواسطة $P = 50e^{-\frac{t}{250}}$، حيث يمثل t الزمن باليوم.

a. هل صيغة خرج الطاقة مثال على *النمو* أم *الاضمحلال* الأسي؟
اشرح استنتاجك.

b. جد الطاقة المتاحة بعد 100 يوم.

c. مطلوب 10 وات من الطاقة لتشغيل معدات القمر الصناعي. كم يمكن للقمر الصناعي مواصلة التشغيل؟

مراجعة المهارات

حُلّ كل من أنظمة المعادلات التالية.

60. $6g - 8h = 50$
$6h = 22 - 4g$

61. $3u + 5v = 6$
$2u - 4v = -7$

62. $10m - 9n = 15$
$5m - 4n = 10$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

6-5 مختبر تقنية التمثيل البياني
تحليل العلاقات التربيعية

يمكنك استخدام تقنية التمثيل البياني لتحليل العلاقات التربيعية.

نشاط 1 خصائص علاقة القطع المكافئ

مثّل بيانيًا $f(x) = 9x^2 + 1$، $g(x) = -x^2 + 3x - 4$ و$(y - 3)^2 = -4(x - 2)$. حدد القيمتين العظمى والصغرى ومحوري التماثل.

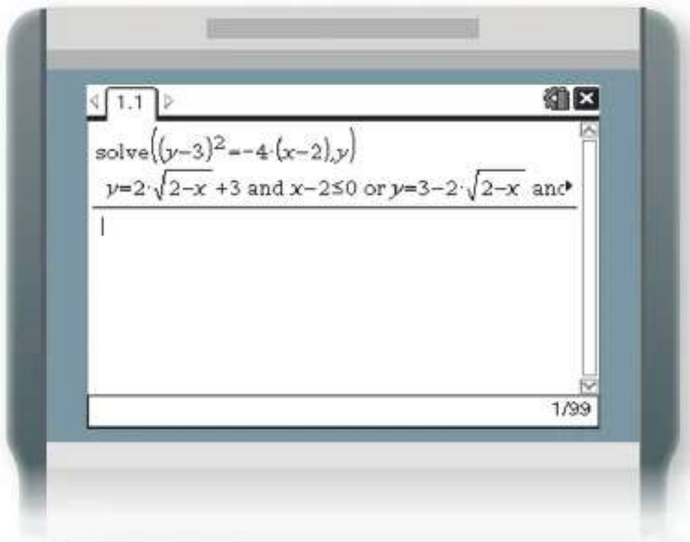
الخطوة 1 افتح صفحة **Graphs** (تمثيلات بيانية) و**Calculator** (حاسبة) جديدة.

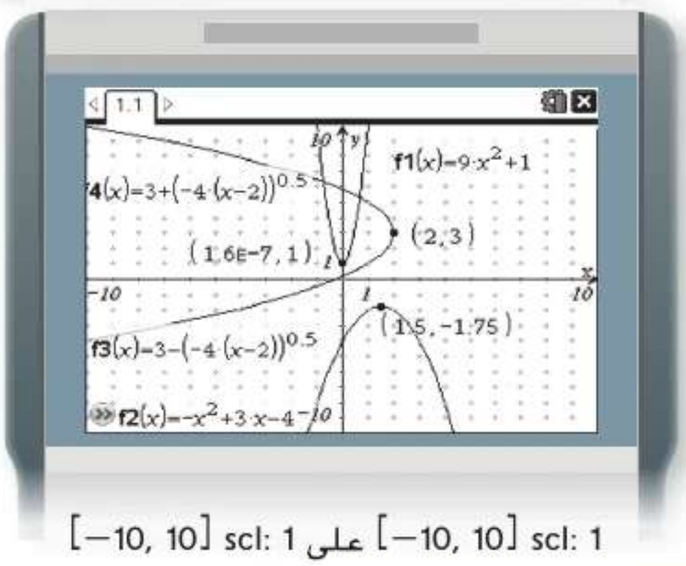
الخطوة 2 أدخل $f(x)$ في **f1** و$g(x)$ في **f2**.

الخطوة 3 في صفحة **Calculator (حاسبة)**. استخدم **solve (حل)** لحل $(y - 3)^2 = -4(x - 2)$ لإيجاد y. اضغط مع الاستمرار على **shift** واستخدم ▶ لتمييز معادلة، ثم اضغط على **ctrl** C. اضغط على ▶ **ctrl** للانتقال إلى صفحة **Graphs (تمثيلات بيانية)**. ثم اضغط على **ctrl** V **tab**. كرر الإجراء لنسخ المعادلة الأخرى في **f4**.

الخطوة 4 استخدم **Analyze Graph, Maximum, Minimum, and Intersection (تحليل التمثيل البياني والقيمة العظمى والقيمة الصغرى والتقاطع)** لإيجاد إحداثيات القيم القصوى. بالنسبة إلى $f(x)$، تقع القيمة الصغرى عند $(0, 1)$؛ وبالنسبة إلى $g(x)$، تقع القيمة العظمى عند $(1.5, -1.75)$؛ وبالنسبة إلى العلاقة، يقع الرأس عند $(2, 3)$.

الخطوة 5 يمكنك استخدام إحداثيات القيم القصوى لإيجاد معادلتي محوري التماثل. بالنسبة إلى $f(x)$، معادلة محور التماثل هي $x = 1.5$؛ وبالنسبة إلى $g(x)$، معادلة محور التماثل هي $x = 0$؛ وبالنسبة إلى العلاقة، معادلة محور التماثل هي $y = 3$.





[−10, 10] scl: 1 على [−10, 10] scl: 1

يمكنك أيضًا استخدام حاسبة تمثيل بياني لتحديد معادلة قطع مكافئ.

نشاط 2 كتابة معادلة للقطع المكافئ

إذا علمتَ أن $f(x)$ له صفران عند 2− و4 ويفتح $f(x)$ لأسفل، فاكتب معادلة للقطع المكافئ.

الخطوة 1 افتح صفحة **Graphs (تمثيلات بيانية)** و**Calculator (حاسبة)** جديدة.

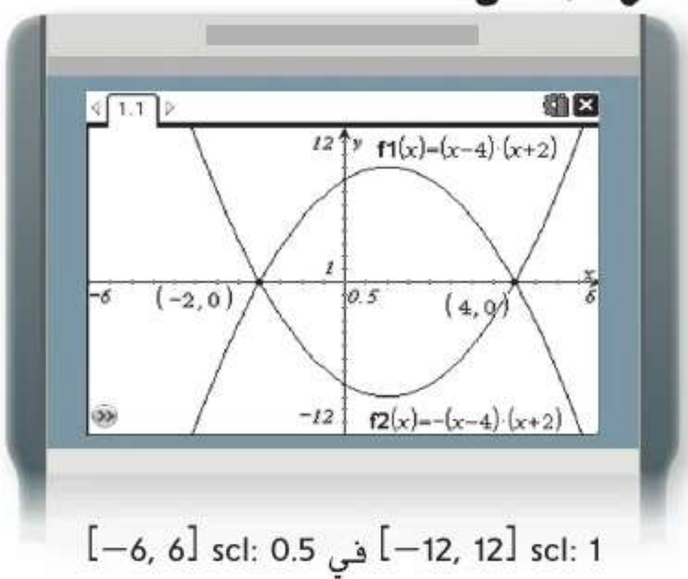
الخطوة 2 لأن الصفرين هما $x = -2$ و$x = 4$. فعاملا المعادلة التربيعية هما $(x + 2)$ و$(x - 4)$.

الخطوة 3 استخدم أمر **expand (توسع)** في صفحة **Calculator (حاسبة)** لضرب $(x + 2)$ و$(x - 4)$. إذًا، $y = x^2 - 2x - 8$.

الخطوة 4 في صفحة **Graphs (تمثيلات بيانية)**. مثّل بيانيًا $y = x^2 - 2x - 8$. تحقق من الجذور واتجاه الفتحة.

الخطوة 5 تفتح الدالة في التمثيل البياني لأعلى، وليس لأسفل. لذا عليك ضرب $x^2 - 2x - 8$ في 1−. إذًا، $y = -x^2 + 2x + 8$. مثّل هذه الدالة بيانيًا.

معادلة قطع مكافئ يقع صفراه عند 2− و4 ويفتح لأسفل هي $y = -x^2 + 2x + 8$.



[−6, 6] scl: 0.5 في [−12, 12] scl: 1

(يُتبع في الصفحة التالية)

McGraw-Hill Education © حقوق الطبع والتأليف محفوظة لصالح مؤسسة

مختبر تقنية التمثيل البياني
تحليل العلاقات التربيعية تابع

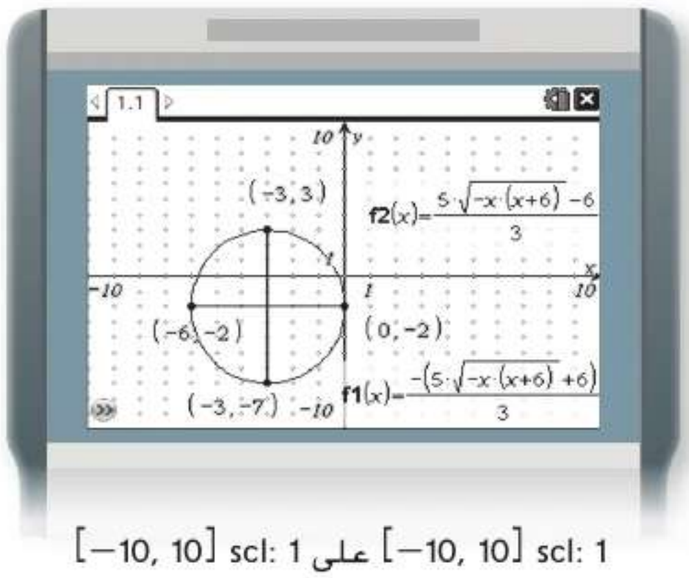
يمكنك أيضًا استخدام حاسبة تمثيل بياني لتحديد معادلة علاقة تربيعية.

نشاط 3 كتابة معادلة قطع ناقص

اكتب معادلة لقطع ناقص يقع رأساه عند (3, −3) و (−7, −3) ويقع رأساه المرافقان عند (0, −2) و (−6, −2).

الخطوة 1 افتح صفحة Graphs (**تمثيلات بيانية**) وCalculator (**حاسبة**) جديدة.

الخطوة 2 شغل الشبكة من View (**عرض**)، Show Axis (**إظهار المحور**). ثم استخدم Points (**نقاط**)، Points On (**نقاط على**) للتمثيل البياني للنقاط الأربع. استخدم Actions, Coordinates and Equations (**الإجراءات والإحداثيات والمعادلات**) لإظهار إحداثيات النقاط.



[−10, 10] scl: 1 على [−10, 10] scl: 1

الخطوة 3 استخدم التمثيل البياني لتحديد نقطة تقاطع القطعة المستقيمة الناشئة من الرأسين والقطعة المستقيمة الناشئة من الرأسين المرافقين. يقع المركز عند (−3, −2).

الخطوة 4 حدد الخصائص الهامة الأخرى. اتجاه القطع الناقص رأسي. طول المحور الأكبر 10. إذًا $a = 5$. طول المحور الأصغر 6. إذًا $b = 3$.

الخطوة 5 اكتب المعادلة بالصيغة القياسية.

$$\frac{[y-(-2)]^2}{5^2} + \frac{[x-(-3)]^2}{3^2} = 1 \quad \text{أو}$$

$$\frac{(y+2)^2}{25} + \frac{(x+3)^2}{9} = 1$$

الخطوة 6 تحقق من المعادلة باستخدام Solve (**حل**) ضمن قائمة Algebra (**الجبر**) في صفحة Calculator (**حاسبة**) لإيجاد y. انسخ معادلتين والصقهما في صفحة Graph (**تمثيل بياني**) لتمثيل القطع الناقص بيانيًا.

تمارين

مثِّل كل دالة وعلاقتها بيانيًا. حدد القيمة العظمى أو الصغرى ومحوري التماثل.

1. $g(x) = x^2 + x - 12$ و $f(x) = -(x-3)^2 + 12$، و$(y+5)^2 = -12(x-2)$.
2. $g(x) = 2x^2 + 2x + 4$ و $f(x) = -0.25x^2 - 3x - 6$، و$(y+1)^2 = 2(x+6)$.
3. إذا علمتَ أن $f(x)$ له صفران عند 1− و3 ومفتوح $f(x)$ لأعلى، فاكتب معادلة للقطع المكافئ.
4. إذا علمتَ أن $f(x)$ له صفران عند 3− و1− ومفتوح $f(x)$ لأسفل، فاكتب معادلة للقطع المكافئ.
5. اكتب معادلة لقطع ناقص يقع رأساه عند (2, −6) و(−8, −6) ويقع رأساه المرافقان عند (−3, −3) و(−3, −9).
6. اكتب معادلة لقطع ناقص يقع رأساه عند (2, −13) و(2, 1) ويقع رأساه المرافقان عند (4, −6) و(0, −6).

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة Graw-Hill Education

الاستكشاف

6-6 مختبر تقنية التمثيل البياني
الأنظمة الخطية واللاخطية

يمكنك استخدام تطبيق التمثيل البياني لحل الأنظمة الخطية واللاخطية بواسطة القائمة Y= للتمثيل البياني لكل معادلة على مجموعة المحاور ذاتها.

مثال الأنظمة الخطية التربيعية

حُـلّ نظام المعادلات.

$$3y - 4x = -7$$
$$4x^2 + 3y^2 = 91$$

الخطوة 1 حل كل معادلة لـ y.

$$3y - 4x = -7 \qquad 4x^2 + 3y^2 = 91$$
$$3y = 4x - 7 \qquad 3y^2 = 91 - 4x^2$$
$$y = \frac{4}{3}x - \frac{7}{3} \qquad y = \pm\sqrt{\frac{91 - 4x^2}{3}}$$

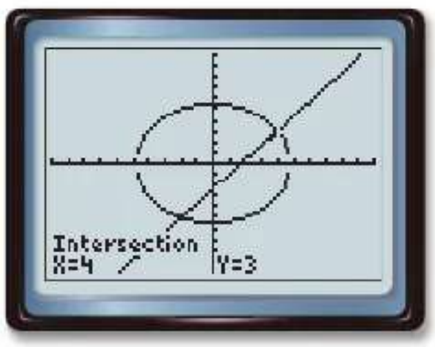
الخطوة 2 أدخل $y = \frac{4}{3}x - \frac{7}{3}$ بالصيغة $y1 =$ $y = \sqrt{\frac{91 - 4x^2}{3}}$ بالصيغة $y2$ $y = -\sqrt{\frac{91 - 4x^2}{3}}$ بالصيغة $Y3$.

ثم قم بالتمثيل البياني للمعادلات في نافذة عرض قياسية.

الخطوات على الحاسبة: Y= 4 ÷ 3 X,T,θ,n − 7 ÷ 3 ENTER 2nd x^2 (91 − 4 X,T,θ,n x^2) ÷ 3) ENTER (−) 2nd x^2 (91 − 4 X,T,θ,n x^2) ÷ 3) ENTER ZOOM 6

الخطوة 3 جـد تقاطع $y = \frac{4}{3}x - \frac{7}{3}$ مع $y = \sqrt{\frac{91 - 4x^2}{3}}$

الخطوات على الحاسبة: اضغط على 2nd TRACE 5 ENTER ENTER ENTER. التمثيلان البيانيان يتقاطعان عند (4, 3).

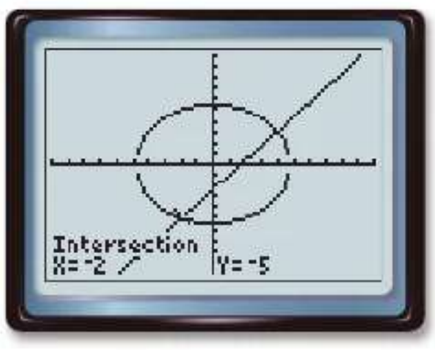


الخطوة 4 جـد تقاطع $y = -\sqrt{\frac{91 - 4x^2}{3}}$ مع $y = \frac{4}{3}x - \frac{7}{3}$

الخطوات على الحاسبة: اضغط على 2nd TRACE 5 ENTER ▼ ENTER. ثم استخدم ◀ لتحريك المؤشر إلى نقطة التقاطع الثانية.

اضغط على ENTER: التمثيلان البيانيان يتقاطعان عند (−2, −5).

حلا النظام هما (4, 3) و(−2, −5).



تمارين

استخدم حاسبة التمثيل البياني لحل كل نظام معادلات.

1. $x^2 + y^2 = 100$
   $x + y = 2$

2. $2y - x = 11$
   $5x^2 + 2y^2 = 407$

3. $21x + 9y = -36$
   $7x^2 + 9y^2 = 1152$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الدرس 6-6

حل الأنظمة الخطية واللاخطية

السابق:
- حل أنظمة معادلات خطية.

الحالي:
1. حل أنظمة المعادلات الخطية واللاخطية جبريًا وبيانيًا.
2. حل أنظمة المتباينات الخطية واللاخطية بيانيًا.

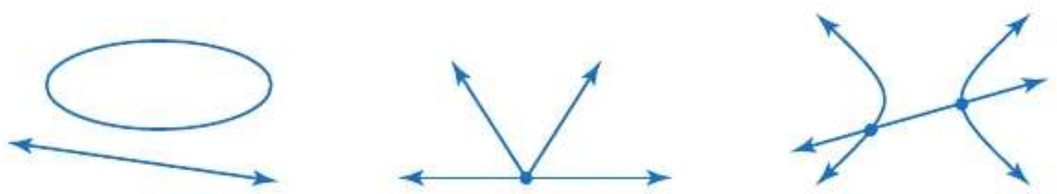
لماذا؟
- هل تفكرتَ يومًا كيف تستطيع هيئات إنفاذ القانون تتبع مكان مستخدم هاتف جوال؟ يمكن تحديد مكان شخص يستخدم الهاتف الجوال حسب موقعه من ثلاثة أبراج خلوية. ويتم استخدام الإحداثيات والمسافات المعنية لكل برج بالنسبة إلى المتصل لتحديد موقع المتصل. ويتم تحقيق هذا باستخدام نظام معادلات تربيعية.



ممارسات في الرياضيات
6 مراعاة الدقة.

1 أنظمة المعادلات

عندما يتكون نظام معادلات من معادلة خطية ولاخطية، فقد يكون للنظام حل أو اثنان أو لا يوجد حل. بعض الحلول المحتملة موضحة أدناه.



يمكنك حل الأنظمة التربيعية الخطية باستخدام الطرق البيانية أو الجبرية.

مثال 1 النظام الخطي التربيعي

جـد حلاً لنظام المعادلات.

$$9x^2 + 25y^2 = 225 \quad (1)$$
$$10y + 6x = 6 \quad (2)$$

الخطوة 1 حل المعادلة الخطية لإيجاد قيمة y:

$10y + 6x = 6$	معادلة (2)
$y = -0.6x + 0.6$	جـد y.

الخطوة 2 عوّض في المعادلة التربيعية وجـد x.

$9x^2 + 25y^2 = 225$	معادلة تربيعية
$9x^2 + 25(-0.6x + 0.6)^2 = 225$	ضع $-0.6x + 0.6$ مكان y.
$9x^2 + 25(0.36x^2 - 0.72x + 0.36) = 225$	بسّط.
$9x^2 + 9x^2 - 18x + 9 = 225$	وزّع.
$18x^2 - 18x - 216 = 0$	بسّط.
$x^2 - x - 12 = 0$	اقسم كل طرف على 18.
$(x - 4)(x + 3) = 0$	حلل إلى العوامل.
$x = 4 = -3$	خاصية ناتج الضرب الصفري

الخطوة 3 عوّض بقيم x في المعادلة الخطية وجـد y.

$y = -0.6x + 0.6$	معادلة (2)	$y = -0.6x + 0.6$	
$= -0.6(4) + 0.6$	عوّض بقيم x	$= -0.6(-3) + 0.6$	
$= -1.8$	حوّل لأبسط صورة.	$= 2.4$	

حلا النظام هما $(4, -1.8)$ و$(-3, 2.4)$.

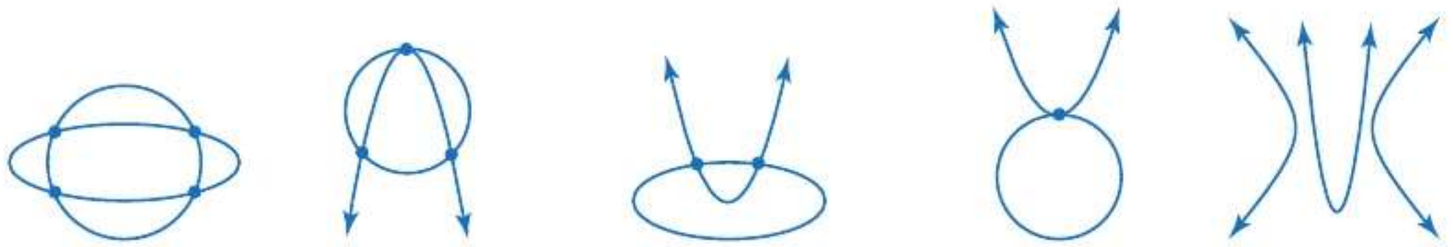
تمرين موجّه

1A. $3y + x^2 - 4x - 17 = 0$
$3y - 10x + 38 = 0$

1B. $3(y - 4) - 2(x - 3) = -6$
$5x^2 + 2y^2 - 53 = 0$

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

في نظام معادلات تربيعية يحتوي على قطوع مخروطية، قد يكون للنظام ما يصل إلى أربعة حلول أو لا يوجد حل. بعض التمثيلات البيانية موضحة أدناه.



يمكنك استخدام الحذف لحل الأنظمة التربيعية-التربيعية.

مثال 2 النظام التربيعي-التربيعي

جـــد حلاً لنظام المعادلات.

$x^2 + y^2 = 45$ (1)
$y^2 - x^2 = 27$ (2)

$y^2 + x^2 = 45$	معادلة (1)، خاصية التبديل
$(+)\ y^2 - x^2 = 27$	معادلة (2)
$2y^2 = 72$	اجمع.
$y^2 = 36$	اقسم كل طرف على 2.
$y = \pm 6$	احسب الجذر التربيعي لكل طرف.

عوّض بالعددين 6 و -6 في إحدى المعادلات الأصلية وجـــد x.

$x^2 + y^2 = 45$	معادلة (1)	$x^2 + y^2 = 45$
$x^2 + 6^2 = 45$	عوّض عن y.	$x^2 + (-6)^2 = 45$
$x^2 = 9$	اطرح 36 من كل طرف.	$x^2 = 9$
$x = \pm 3$	احسب الجذر التربيعي لكل طرف.	$x = \pm 3$

الحلول هي $(-6, -3)$ و $(-3, 6)$ و $(-6, 3)$ و$(3, 6)$.

نصيحة دراسية
الأدوات إذا استخدمتَ ZSquare في قائمة ZOOM (تكبير/تصغير)، فسوف يبدو التمثيل البياني للمعادلة الأولى مثل دائرة.

تمرين موجّه

2A. $x^2 + y^2 = 8$
$x^2 + 3y = 10$

2B. $3x^2 + 4y^2 = 48$
$2x^2 - y^2 = -1$

2 أنظمة المتباينات

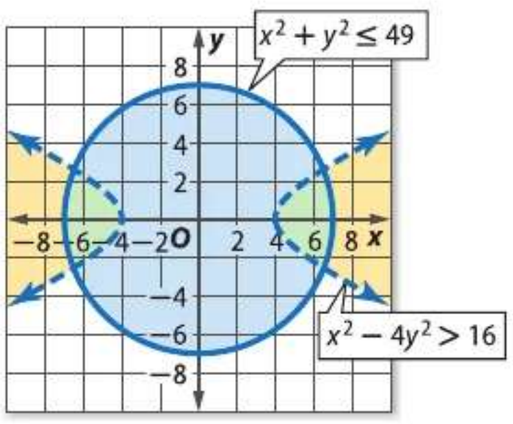
أنظمة المتباينات يمكن حل أنظمة المتباينات التربيعية بواسطة التمثيل البياني.

مثال 3 المتباينات التربيعية

حُـــلّ أنظمة المتباينات باستخدام التمثيل البياني.

$x^2 + y^2 \leq 49$
$x^2 - 4y^2 > 16$

يمثل تقاطع التمثيلات البيانية، المظلل بالأخضر، حل النظام.



التحقق $(6, 0)$ في المنطقة المظللة. استخدم هذه النقطة للتحقق من إجابتك.

$x^2 - 4y^2 > 16$	$x^2 + y^2 \leq 49$
$62 - 4(0)^2 \stackrel{?}{>} 16$	$6^2 + 0^2 \stackrel{?}{\leq} 49$
$36 > 16$ ✓	$36 \leq 49$ ✓

تمرين موجّه

3A. $5x^2 + 2y^2 \leq 10$
$y \geq x^2 - 2x + 1$

3B. $x^2 - y^2 \leq 8$
$x^2 + y^2 \geq 120$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

يمكن كذلك حل الأنظمة التي تتضمن قيمة مطلقة بواسطة التمثيل البياني.

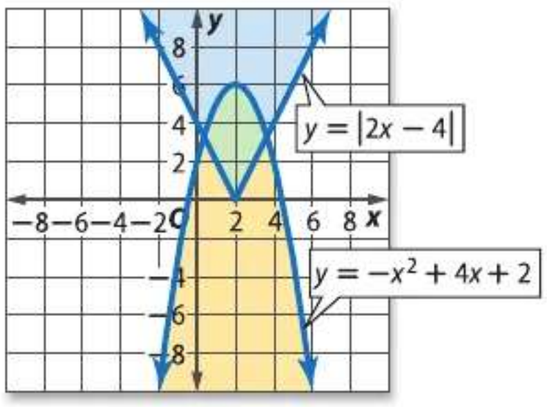
نصيحة دراسية

حاسبة التمثيل البياني على غرار المتباينات الخطية، يمكن التحقق من أنظمة المتباينات التربيعية وذات القيمة المطلقة باستخدام حاسبة التمثيل البياني.

مثال 4 الأنظمة التربيعية ذات القيمة المطلقة

حُـلّ نظام المتباينات باستخدام التمثيل البياني.

$$y \geq |2x - 4|$$
$$y \leq -x^2 + 4x + 2$$



مثّل معادلات الحدود بيانيًا. ثم ظلل بالشكل المناسب.

يمثل تقاطع التمثيلات البيانية، المظلل بالأخضر، حل النظام.

التحقق (2, 4) في المنطقة المظللة. استخدم النقطة للتحقق من إجابتك.

$y \geq |2x - 4|$ $\quad$ $y \leq -x^2 + 4x + 2$

$4 \stackrel{?}{\geq} |2(2) - 4|$ $\quad$ $4 \stackrel{?}{\leq} -(2)^2 + 4(2) + 2$

$4 \geq 0$ ✓ $\quad$ $4 \leq 6$ ✓

تمرين موجّه

4A. $y > |-0.5x + 2|$
$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{36} \leq 1$

4B. $x^2 + y^2 \leq 49$
$y \geq |x^2 + 1|$

التحقق من فهمك

المثالان 1-2 **جــد حلاً لكل نظام معادلات.**

1. $8y = -10x$
$y^2 = 2x^2 - 7$

2. $x^2 + y^2 = 68$
$5y = -3x + 34$

3. $y = 12x - 30$
$4x^2 - 3y = 18$

4. $6y^2 - 27 = 3x$
$6y - x = 13$

5. $x^2 + y^2 = 16$
$x^2 - y^2 = 20$

6. $y^2 - 2x^2 = 8$
$3y^2 + x^2 = 52$

7. $x^2 + 2y = 7$
$y^2 - x^2 = 8$

8. $4y^2 - 3x^2 = 11$
$3y^2 + 2x^2 = 21$

9 المثابرة راجع بداية الدرس. يمكن تحديد مكان شخص يستخدم الهاتف الجوال حسب موقعه من ثلاثة أبراج خلوية. في نظام إحداثي حيث تمثل الوحدة كيلومتر، تم تحديد موقع المتصل على مسافة 50 km من البرج عند نقطة الأصل. يتواجد هذا الشخص كذلك على مسافة 40 km من برج يقع عند (0, 30) وعلى مسافة 13 km من برج يقع عند (35, 18). فأين المتصل؟

الأمثلة 3-4 **حُـلّ أنظمة المتباينات باستخدام التمثيل البياني.**

10. $6x^2 + 9(y - 2)^2 \leq 36$
$x^2 + (y + 3)^2 \leq 25$

11. $16x^2 + 4y^2 \leq 64$
$y \geq -x^2 + 2$

12. $4x^2 - 8y^2 \geq 32$
$y \geq |1.5x| - 8$

13. $x^2 + 8y^2 < 32$
$y < -|x - 2| + 2$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة Graw-Hill Education

التمرين وحل المسائل

المثالان 2-1 **جــد حلاً لكل نظام معادلات.**

14. $3x^2 - 2y^2 = -24$
$2y = -3x$

15. $5x^2 + 4y^2 = 20$
$5y = 7x + 35$

16. $x^2 + 3x = -4y - 2$
$y = -2x + 1$

17. $y = 2x$
$4x^2 - 2y^2 = -36$

18. $2y = x + 10$
$y^2 - 4y = 5x + 10$

19. $9y = 8x - 19$
$8x + 11 = 2y^2 + 5y$

20. $2y^2 + 5x^2 = 26$
$2x^2 - y^2 = 5$

21. $x^2 + y^2 = 16$
$x^2 - 4x + y^2 = 12$

22. $x^2 + y^2 = 8$
$5y^2 = 3x^2$

23. $y^2 - x^2 + 3y = 26$
$x^2 + 2y^2 = 34$

24. $x^2 - y^2 = 25$
$x^2 + y^2 + 7 = 0$

25. $x^2 - 10x + 2y^2 = 47$
$y^2 - 2x^2 = -14$

26. الألعاب النارية تم إطلاق اثنتين من الألعاب النارية في الوقت ذاته ولكن من ارتفاعين مختلفين. تم تمثيل ارتفاع إحداهما y بالقدم بواسطة $y = -16t^2 + 120t + 10$. حيث يمثل t الزمن بالثانية. ويتم تمثيل ارتفاع الأخرى بواسطة $y = -16t^2 + 60t + 310$.

a. بعد كم ثانية ستكون الألعاب النارية على الارتفاع ذاته؟

b. ما الارتفاع؟

الأمثلة 4-3 **الأدوات** حُــلّ أنظمة المتباينات باستخدام التمثيل البياني.

27. $x^2 + y^2 \geq 36$
$x^2 + 9(y + 6)^2 \leq 36$

28. $-x > y^2$
$4x^2 + 14y^2 \leq 56$

29. $12x^2 - 4y^2 \geq 48$
$16(x - 4)^2 + 25y^2 < 400$

30. $8y^2 - 3x^2 \leq 24$
$2y > x^2 - 8x + 14$

31. $y > x^2 - 6x + 8$
$x \geq y^2 - 6y + 8$

32. $x^2 + y^2 \geq 9$
$25x^2 + 64y^2 \leq 1600$

33. $16(x - 3)^2 + 4y^2 \leq 64$
$y \leq -|x - 2| + 2$

34. $x^2 - 4x + y^2 + 6y \leq 23$
$y > |x - 2| - 6$

35. $2y - 4 \geq |x + 4|$
$12 - 2y > x^2 + 12x + 36$

36. $18y^2 - 3x^2 \leq 54$
$y \geq |2x| - 6$

37. $x^2 + y^2 < 16$
$y \geq |x - 2| + 6$

38. $x^2 < y - 2$
$y \leq |x + 8| - 7$

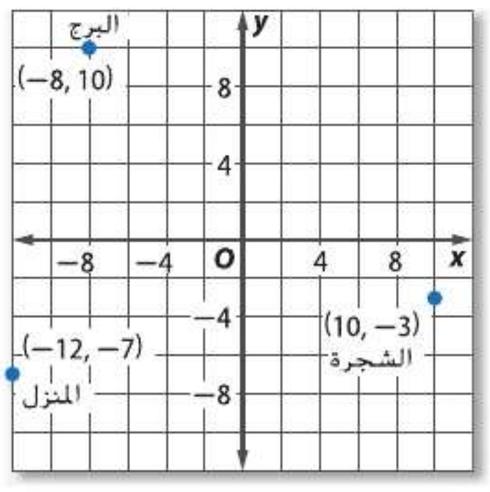
39. الفضاء تم وضع قمرين صناعيين في مدار حول الأرض. معادلتا المدارين هما $\frac{x^2}{(600)^2} + \frac{y^2}{(690)^2} = 1$, $\frac{x^2}{(300)^2} + \frac{y^2}{(900)^2} = 1$ حيث المسافتين بالكيلومتر والأرض مركز كل منحنى.

a. جــد حل كل معادلة لإيجاد y.

b. استخدم حاسبة تمثيل بياني لتقدير نقاط تقاطع المدارين.

c. قارن مداري القمرين الصناعيين.

40. الحيوانات الأليفة فُقد قط أسماء من يوم. لحسن الحظ، كان القط يرتدي جهاز رصد إلكتروني. إذا علمتَ أن القط على مسافة 10 وحدات من الشجرة، و13 وحدة من البرج، و20 وحدة من المنزل، فحدد إحداثيات موقعه.



41. كرة القاعدة في 1997، بعد أن حقق مارك ماكجواير هدفًا، ادعى البعض أن الكرة كانت ستطير لمسافة 538 ft لو لم تسقط في المدرجات. يمكن تمثيل مسار كرة القاعدة بواسطة $y = -0.0037x^2 + 1.77x - 1.72$ ويمكن تمثيل المدرجات بواسطة $y = \frac{3}{7}x - 128.6$. كم يبعد موضع سقوط الكرة رأسيًا وأفقيًا عن اللوح الأصلي؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education



42. الإعلانات شعار شركة تصنيع سيارات موضح على اليسار. اكتب نظامًا من ثلاث معادلات لتمثيل الشعار.

اكتب نظام معادلات يحقق كل شرط.

43. تتقاطع دائرة وقطع ناقص عند نقطة

44. يتقاطع قطع مكافئ وقطع ناقص عند نقطتين

45. قطع زائد ودائرة لا يتقاطعان

46. يتقاطع قطع ناقص وقطع مكافئ عند ثلاث نقاط

47. يتقاطع قطع ناقص وقطع زائد عند أربع نقاط

48. المعرفة المالية يتم ضبط الأسعار على منحنى توازن. حيث يتساوى العرض من منتج ما مع الطلب المناظر من المستهلكين. يمثل أحد خبراء الاقتصاد العرض من منتج ما بواسطة $y = p2 + 10p$ والطلب المناظر بواسطة $y = -p2 + 40p$، حيث يمثل p السعر. حدد سعر التوازن.

49. كرة الطلاء يمكن تمثيل شكل ميدان كرة الطلاء بواسطة $x^2 + 4y^2 = 10{,}000$ بالمتر حيث المركز عند نقطة الأصل. يتم تزويد الفرق بأجهزة لاسلكي قصيرة المدى يبلغ أقصى مدى لها 80 m. فهل تستطيع الفرق سماع بعضها في أي مكان في الميدان؟ اشرح استنتاجك بيانيًا.

50. الانتقال تنتقل ليلى إلى مدينة جديدة ويجب أن يحقق موقع منزلها الجديد الشروط التالية.

- يجب أن يكون على مسافة أقل من 10 mi من المكتب الذي ستعمل به.
- نظرًا للرائحة الكريهة لمصنع الورق المحلي، يجب أن يكون على مسافة 15 mi على الأقل من المصنع.

إذا علمتَ أن المصنع يقع على مسافة 9.5 mi شرق مكتب ليلى و 6 mi غربًا، فاكتب ومثّل بيانيًا نظام متباينات لتمثيل المناطق المناسبة للبحث عن منزل.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

51. التحدي جـــد جميع قيم k بحيث يكون لنظام المعادلات التالي حلان.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad x^2 + y^2 = k^2$$

52. الفرضيات عندما يقع رأس قطع مكافئ على قطع ناقص، كم عدد الحلول الممكنة للنظام التربيعي الممثل بالتمثيلين البيانيين؟ اشرح استنتاجك مستخدمًا التمثيلات البيانية.

53. مسألة غير محددة الإجابة اكتب نظامًا من معادلتين، إحداهما قطع زائد والأخرى قطع ناقص، بحيث يكون الحل $(-4, 8)$.

54. الكتابة في الرياضيات اشرح كيف يمكن أن يساعدك التمثيل البياني لنظام تربيعي في إيجاد الحل.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تمرين على الاختبار المعياري

55. إجابة قصيرة حل.

$$4x - 3y = 0$$
$$x^2 + y^2 = 25$$

56. لديك 16 طابعًا. بعضها طوابع بطاقات بريدية تكلفتها AED 0.23. والباقي تكلفته AED 0.41. إذا أنفقتَ على الطوابع إجمالاً AED 5.30. فكم عدد طوابع البطاقات البريدية التي لديك؟

A 7
B 8
C 9
D 10

57. حصلت ميساء على ترقية وزاد راتبها بنسبة 7.2%. أصبح راتبها الجديد AED 53,600 سنويًا. فكم كان راتبها قبل الزيادة.

F AED 50,000
G AED 53,600
H AED 55,000
J AED 57,500

58. SAT/ACT عند ضرب عدد في $\frac{2}{3}$ يصبح الناتج 188. جـد العدد.

A 292
B 282
C 272
D 262
E $125\frac{1}{3}$

مراجعة شاملة

صل كل معادلة بالموقف الذي يمكن تمثيله باستخدامها. (الدرس 5-6)

a. $9x^2 + 4y^2 - 36 = 0$
b. $0.004x^2 - x + y - 3 = 0$
c. $x^2 + y^2 - 20x + 30y - 75 = 0$

59. الرياضة رحلة كرة قاعدة في الهواء

60. التصوير الفتحة البيضاوية في إطار صورة

61. الجغرافيا مجموعة جميع النقاط على مسافة 20 km من المعلَم

جـد إحداثيات الرأسين والبؤرتين ومعادلتي خطي التقارب لقطع زائد بالمعادلة المعطاة. ثم مثّل القطع الزائد بيانيًا. (الدرس 4-6)

62. $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{25} = 1$

63. $\frac{(y-3)^2}{25} - \frac{(x-2)^2}{16} = 1$

64. $6y^2 = 2x^2 + 12$

حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

65. $\frac{12p^2 + 6p - 6}{4(p+1)^2} \div \frac{6p-3}{2p+10}$

66. $\frac{x^2 + 6x + 9}{x^2 + 7x + 6} \div \frac{4x+12}{3x+3}$

67. $\frac{r^2 + 2r - 8}{r^2 + 4r + 3} \div \frac{r-2}{3r+3}$

مثّل كل دالة بيانيًا. واذكر المجال والمدى.

68. $f(x) = -\left(\frac{1}{5}\right)^x$

69. $y = -2.5(5)^x$

70. $f(x) = 2\left(\frac{1}{3}\right)^x$

مراجعة المهارات

اكتب الصيغة بدلالة المتغير المحدد.

71. $d = rt$, بالنسبة إلى r

72. $x = \frac{-b}{2a}$, بالنسبة إلى a

73. $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, بالنسبة إلى h

74. $A = \frac{1}{2}h(a+b)$, بالنسبة إلى b

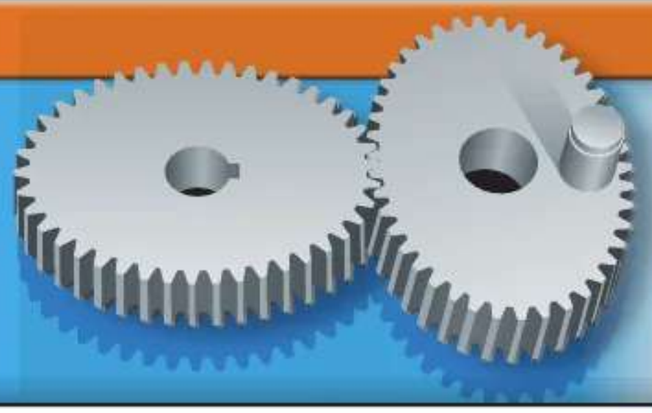
McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف

6-7 الدوران المحوري للقطوع المخروطية

السابق:
- حددت ومثلت القطوع المخروطية.

الآن:
1. إيجاد دوران المحاور لكتابة معادلات دوران القطوع المخروطية.
2. تمثيل القطوع المخروطية بعد الدوران بيانيا

لماذا؟
- تقترن التروس بيضاوية الشكل بدورانها حول بؤرتيها. يدور ترس الدوران بسرعة ثابتة، ويغير الترس المدار سرعته باستمرار عند كل دورة.



1 دوران القطوع المخروطية

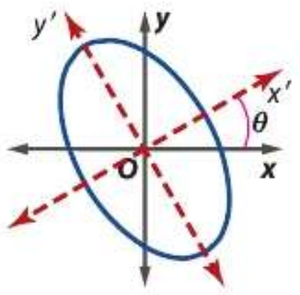
تعلمت سابقًا أنه عندما يكون القطع المخروطي رأسي أو أفقي وتكون محاوره موازية لمحوري x و y، فإن $B = 0$ في معادلته العامة. لا تتضمن معادلة هذا القطع المخروطي الحد xy.

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$ محاور القطع المخروطي موازية لمحاور الإحداثيات

ستدرس في هذا الدرس القطوع المخروطية ومحاورها المدارة غير الموازية لمحاور الإحداثيات. في المعادلة العامة لدوران هذه القطوع المخروطية $B \neq 0$، لذلك يوجد هنا الحد xy.

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$ دوران محاور القطع المخروطي من محاور الإحداثيات

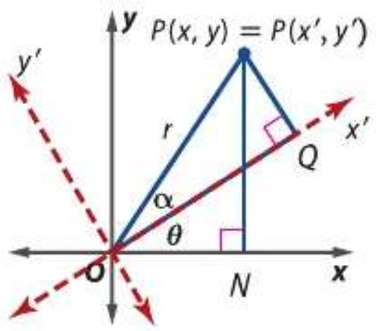
إذا حذف الحد xy، فستكتب معادلة دوران القطع المخروطي بالصيغة القياسيّة من خلال إكمال المربع. ولحذف هذا الحد، نقوم بتدوير محاور الإحداثيات حتى توازي محاور القطع المخروطي.



عند دوران محاور الإحداثيات من خلال الزاوية θ كما هو موضح، تبقى نقطة الأصل ثابتة وتتشكل المحاور x' وy' الجديدة. في ما يلي الشكل العام لمعادلة القطع المخروطي في المستوى الجديد $x'y'$.

$$A(x')^2 + C(y')^2 + Dx' + Ey' + F = 0$$ المعادلة في المستوى $x'y'$ هي

يمكن استخدام حساب المثلثات لوضع المعادلات المتعلقة بالنقطة $P(x, y)$ في المستوى xy و $P(x', y')$ في المستوى $x'y'$.



انظر الشكل على اليسار. لاحظ المثلث القائم الزاوية PNO. $OP = r$ و $ON = x$ و $PN = y$ و $m\angle NOP = \alpha + \theta$ باستخدام $\triangle PNO$، يمكنك إنشاء العلاقات التالية.

$= r \cos(\alpha + \theta)$ نسبة الـ cosine

$= r \cos \alpha \cos \theta - r \sin \alpha \sin \theta$ متطابقة الـ cosine للمجموع

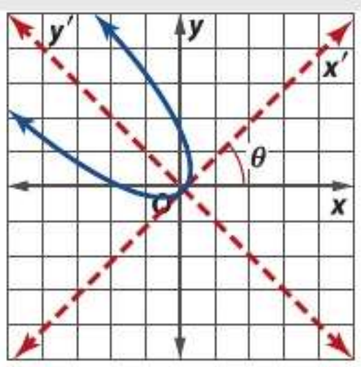
$= r \sin(\alpha + \theta)$ نسبة الـ sine

$= r \cos \alpha \cos \theta - r \sin \alpha \sin \theta$ متطابقة الـ sine للمجموع

باستخدام المثلث القائم الزاوية POQ، حيث $OP = r$ و$OQ = x'$ و$PQ = y'$ و $m\angle QOP = \alpha$. يمكنك إنشاء علاقة $x' = r \cos \alpha$ و $y' = r \sin \alpha$. بالتعويض عن هذه القيم في المعادلات السابقة، يمكنك الحصول على ما يلي.

$$x = x' \cos \theta - y' \sin \theta \qquad y = y' \cos \theta + x' \sin \theta$$

المفهوم الأساسي دوران محاور القطوع المخروطية



المعادلة $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ في المستوى الاحداثي xy يمكن إعادة صياغتها كما يلي $A(x')^2 + C(y')^2 + Dx' + Ey' + F = 0$ في دوران المستوى الاحداثي $x'y'$.

يمكن إيجاد المعادلة في المستوى $x'y'$-باستخدام المعادلات التالية، حيث θ هي زاوية الدوران.

$$x = x' \cos \theta - y' \sin \theta \quad y = x' \sin \theta + y' \cos \theta$$

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

المثال 1 كتابة معادلة في المستوى $x'y'$

استخدم $\theta = \frac{\pi}{4}$ لكتابة $6x^2 + 6xy + 9y^2 = 53$ في المستوى $x'y'$. ثم حدد القطع المخروطي.

جد معادلات لـ x و y.

$$x = x' \cos\theta - y' \sin\theta \qquad \text{معادلات الدوران } x \text{ و } y \qquad y = x' \sin\theta + y' \cos\theta$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}x' - \frac{\sqrt{2}}{2}y' \qquad \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ و } \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad = \frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y'$$

عوّض في المعادلة الأساسية.

$$6x^2 + 6xy + 9y^2 = 53$$

$$6\left(\frac{\sqrt{2}x' - \sqrt{2}y'}{2}\right)^2 + 6\left(\frac{\sqrt{2}x' - \sqrt{2}y'}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}x' + \sqrt{2}y'}{2}\right) + 9\left(\frac{\sqrt{2}x' + \sqrt{2}y'}{2}\right)^2 = 53$$

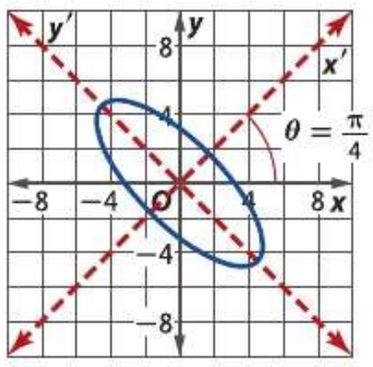
$$\frac{6[2(x')^2 - 4x'y' + 2(y')^2]}{4} + \frac{6[2(x')^2 - 2(y')^2]}{4} + \frac{9[2(x')^2 + 4x'y' + 2(y')^2]}{4} = 53$$

$$3(x')^2 - 6x'y' + 3(y')^2 + 3(x')^2 - 3(y')^2 + \frac{9}{2}(x')^2 + 9x'y' + \frac{9}{2}(y')^2 - 53 = 0$$

$$6(x')^2 - 12\,x'y' + 6(y')^2 + 6(x')^2 - 6(y')^2 + 9(x')^2 + 18x'y' + 9(y')^2 - 106 = 0$$

$$21(x')^2 + 6x'y' + 9(y')^2 - 106 = 0$$

المعادلة في المستوي $x'y'$ هي $21(x')^2 + 6x'y' + 9(y')^2 - 106 = 0$ في هذه المعادلة. $B^2 - 4AC = 6^2 - 4(21)(9)$ أو -720 حيث إن $-720 < 0$. فإن القطع المخروطي هو القطع الناقص كما هو موضح.



تمرين موجّه

1. استخدم $\theta = \frac{\pi}{6}$ لكتابة $7x^2 + 4\sqrt{3}xy + 3y^2 - 60 = 0$ في المستوي $x'y'$. ثم حدد القطع المخروطي.

عند اختيار θ بشكل مناسب يمكن حذف الحد $x'y'$ من الشكل العام للمعادلة. وستكون محاور القطع المخروطي موازية لمحاور $x'y'$-المستوى.

بعد التعويض عن θ $x = x' \cos\theta - y' \sin\theta$ و $y = x' \sin\theta + y' \cos\theta$ في الشكل العام للقطع المخروطي، $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$، فإن معامل الحد $x'y'$ هو $B\cos 2\theta + (C - A)\sin 2\theta$. بتحديد هذا مساويًا 0 يمكن حذف الحد $x'y'$.

$B\cos 2\theta + (C - A)\sin 2\theta = 0$ معامل الحد $x'y'$

$B\cos 2\theta = -(C - A)\sin 2\theta$ اطرح $(C - A)\sin 2\theta$ من الطرفين.

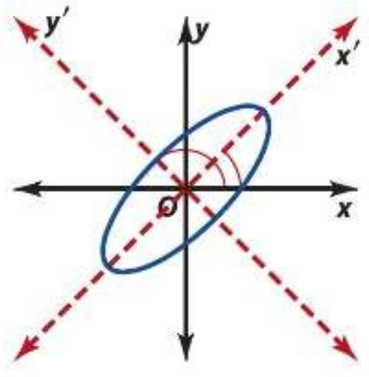
$B\cos 2\theta = (A - C)\sin 2\theta$ خاصية التوزيع

$\frac{\cos 2\theta}{\sin 2\theta} = \frac{A - C}{B}$ اقسم الطرفين على $B\sin 2\theta$

$\cot 2\theta = \frac{A - C}{B}$ $\frac{\cos 2\theta}{\sin 2\theta} = \cot 2\theta$

نصيحة دراسية

زاوية الدوران زاوية الدوران θ هي زاوية حادة نظرًا لحقيقة أن إما المحور x' أو المحور y' سيكون في الربع الأول. على سبيل المثال، في حين أنه قد يكون دوران المستوى في الشكل التالي 123°. فإن الدوران 33° هو المطلوب لمحاذاة المحاور.



المفهوم الأساسي زاوية الدوران المستخدمة لحذف الحد xy

زاوية الدوران θ حيث إن $\cot 2\theta = \frac{A - C}{B}, B \neq 0, 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. سيحذف الحد xy من معادلة المقطع المخروطي في دوران نظام الإحداثيات $x'y'$

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

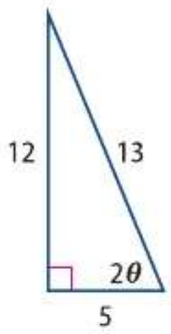
المثال 2 كتابة معادلة بالصيغة القياسيّة

استخدم زاوية مناسبة لدوران القطع المخروطي الذي معادلته $8x^2 + 12xy + 3y^2 = 4$. اكتب معادلة بالصيغة القياسيّة.

القطع المخروطي هو القطع الزائد لأن $B^2 - 4AC > 0$ جـد θ.

$$\cot 2\theta = \frac{A - C}{B}$$ دوران المحاور

$$= \frac{5}{12}$$ $A = 8$ و $B = 12$ و $C = 3$



يوضح الشكل مثلثًا فيه $\cot 2\theta = \frac{5}{12}$

إذًا. $\sin 2\theta = \frac{12}{13}$ و $\cos 2\theta = \frac{5}{13}$

استخدم متطابقات نصف الزاوية لتحديد $\sin \theta$ و $\cos \theta$

$$\sin \theta = \sqrt{\frac{1 - \cos 2\theta}{2}}$$ متطابقات نصف الزاوية

$$= \sqrt{\frac{1 - \frac{5}{13}}{2}}$$ $\cos 2\theta = \frac{5}{13}$

$$= \frac{2\sqrt{13}}{13}$$ بسّط

$$\cos \theta = \sqrt{\frac{1 + \cos 2\theta}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{1 + \frac{5}{13}}{2}}$$

$$= \frac{3\sqrt{13}}{13}$$

ثم جـد معادلات x و y.

$$x = x' \cos \theta - y' \sin \theta$$ معادلات الدوران x و y

$$= \frac{3\sqrt{13}}{13}x' - \frac{2\sqrt{13}}{13}y'$$ $\sin \theta = \frac{2\sqrt{13}}{13}$ و $\cos \theta = \frac{3\sqrt{13}}{13}$

$$= \frac{3\sqrt{13}x' - 2\sqrt{13}y'}{13}$$ بسّط

$$y = x' \sin \theta + y' \cos \theta$$

$$= \frac{2\sqrt{13}}{13}x' + \frac{3\sqrt{13}}{13}y'$$

$$= \frac{2\sqrt{13}x' + 3\sqrt{13}y'}{13}$$

عوّض في المعادلة الاساسية.

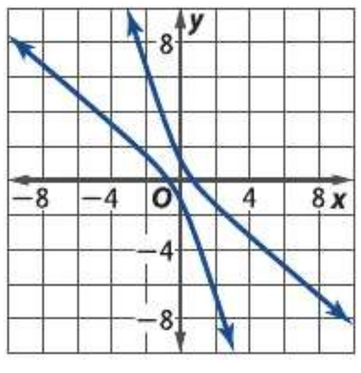
$$8x^2 + 12xy + 3y^2 = 4$$

$$8\left(\frac{3\sqrt{13}x' - 2\sqrt{13}y'}{13}\right)^2 + 12\,\frac{3\sqrt{13}x' - 2\sqrt{13}y'}{13} \cdot \frac{2\sqrt{13}x' + 3\sqrt{13}y'}{13} + 3\left(\frac{2\sqrt{13}x' + 3\sqrt{13}y'}{13}\right)^2 = 4$$

$$\frac{72(x')^2 - 96x'y' + 32(y')^2}{13} + \frac{72(x')^2 + 60x'y' - 72(y')^2}{13} + \frac{12(x')^2 + 36x'y' + 27(y')^2}{13} = 4$$

$$\frac{156(x')^2 - 13(y')^2}{13} = 4$$

$$3(x')^2 - \frac{(y')^2}{4} = 1$$



الصيغة القياسيّة للمعادلة في المستوى $x'y'$ هو $\frac{(x')^2}{\frac{1}{3}} - \frac{(y')^2}{4} = 1$

التمثيل البياني لهذا القطع الزائد.

نصيحة دراسية

الحد $x'y'$ عند استبدال قيم x' و y' بالحد x و y بشكل صحيح، يصبح معامل الحد $x'y'$ صفر. وإذا لم يكن معامل هذا الحد صفرًا، فهناك خطأ حدث.

تمرين موجّه

استخدم زاوية مناسبة لدوران القطع المخروطي مع كل معادلة معطاة واكتب معادلة بالصيغة القياسيّة.

2A. $2x^2 - 12xy + 18y^2 - 4y = 2$

2B. $20x^2 + 20xy + 5y^2 - 12x - 36y - 200 = 0$

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

يمكن استخدام صيغ أخرى تربط x' و y' بـ x و y لإيجاد معادلة المستوى xy لدوران القطع المخروطي.

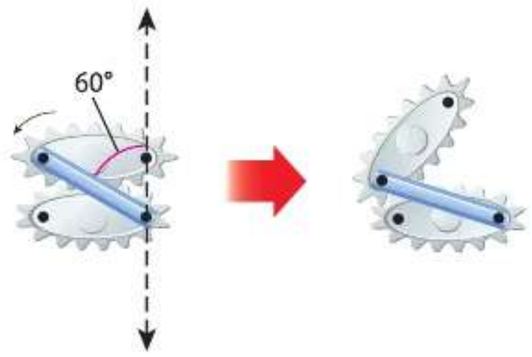
المفهوم الأساسي دوران محاور القطوع المخروطية

عند إعادة كتابة معادلة القطع المخروطي $x'y'$ للمستوى من خلال دوران محاور الإحداثيات من θ، فيمكن إيجاد المستوى xy باستخدام

$$x' = x\cos\theta + y\sin\theta \text{ و } y' = y\cos\theta - x\sin\theta.$$

المثال 3 كتابة معادلة المستوى xy

يمكن استخدام التروس بيضاوية الشكل لتوليد سرعات الإنتاج المتغيرة. بعد الدوران بدرجة $60°$، تكون معادلة دوران الترس في المستوى $x'y'$: $\frac{(x')^2}{36} + \frac{(y')^2}{18} = 1$ اكتب معادلة القطع الناقص التي يشكلها دوران الترس في المستوى xy.



استخدم صيغة دوران x' وy' لإيجاد معادلة دوران القطع المخروطي في المستوى xy.

	معادلات دوران x' وy'	
$x' = x\cos\theta + y\sin\theta$		$y' = y\cos\theta - x\sin\theta$
$= x\cos 60° + y\sin 60°$	$\theta = 60°$	$= y\cos 60° - x\sin 60°$
$= \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y$	$\sin 60° = \frac{1}{2}$ و $\cos 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$= \frac{1}{2}y - \frac{\sqrt{3}}{2}x$

عوّض في المعادلة الاساسية.

$\frac{(x')^2}{36} + \frac{(y')^2}{18} = 1$	المعادلة الاساسية
$(x')^2 + 2(y')^2 = 36$	اضرب الطرفين في 36
$\left(\frac{x+\sqrt{3}y}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{y-\sqrt{3}x}{2}\right)^2 = 36$	عوّض
$\frac{x^2 + 2\sqrt{3}xy + 3y^2}{4} + \frac{2y^2 - 4\sqrt{3}xy + 6x^2}{4} = 36$	بسّط
$\frac{7x^2 - 2\sqrt{3}xy + 5y^2}{4} = 36$	جمّع الحدود المتشابهة
$7x^2 - 2\sqrt{3}xy + 5y^2 = 144$	اضرب الطرفين في 4
$7x^2 - 2\sqrt{3}xy + 5y^2 - 144 = 0$	اطرح 144 من الطرفين

معادلة دوران القطع الناقص في المستوى xy هي $x^2 - 2\sqrt{3}xy + 5y^2 - 144 = 07$

تمرين موجّه

3. إذا كانت معادلة الترس بعد دورانه بدرجة $30°$ في المستوى $x'y'$ هي $(x')^2 + 4(y')^2 - 40 = 0$. فجد معادلة الترس في المستوى xy.



الربط بالحياة اليومية

في نظام التروس حيث تدور كل التروس، مثل الدراجات، ترتبط سرعة التروس في الترابطات بينها بحجمها. إذا كان قطر أحد التروس $\frac{1}{2}$ قطر الترس الآخر، فإن سرعة دوران الترس ستكون مِثلي سرعة الآخر.

المصدر: How Stuff Works

2 تمثيل دوران القطوع المخروطية بيانيًا

عند إعادة كتابة معادلة القطع المخروطي في المستوى $x'y'$ فيمكن تمثيلها بيانيًا من خلال إيجاد النقاط على التمثيل البياني للقطع المخروطي ثم تحويل هذه النقاط إلى المستوى xy

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

المثال 4 تمثيل القطع المخروطي باستخدام الدوران

مثّل بيانيًا $(x' - 2)^2 = 4(y' - 3)$ إذا استدار بدرجة $30°$ من موضعه في المستوى xy.

تمثل المعادلة قطعًا مكافئًا حيث إنها في شكل قياسي. استخدم الرأس $(3, 2)$ ومحاور التماثل $x' = 2$ في المستوى $x'y'$ لتحديد رأس ومحور التماثل للقطع المكافئ في المستوى xy.

جـد معادلات لـ x و y لـ $\theta = 30°$

$y = x' \sin \theta + y' \cos \theta$ — معادلات الدوران x و y

$= \frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y'$ — $\sin 30° = \frac{1}{2}$ و $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$x = x' \cos \theta - y' \sin \theta$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}x' - \frac{1}{2}y'$

استخدم المعادلات لتحويل إحداثيات $x'y'$ للرأس إلى إحداثيات xy.

$y = \frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y'$ — تحويل المعادلة

$= \frac{1}{2}(2) + \frac{\sqrt{3}}{2}(3)$ — $x' = 2$ و $y' = 3$

$= 1 + \frac{3\sqrt{3}}{2}$ أو حوالي 3.60 — اضرب

$x = \frac{\sqrt{3}}{2}x' - \frac{1}{2}y'$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}(2) - \frac{1}{2}(3)$

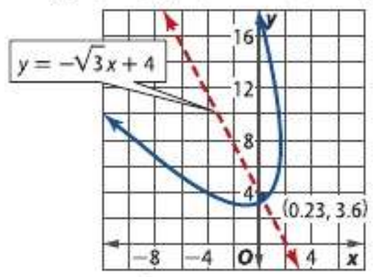
$= \sqrt{3} - \frac{3}{2}$ أو حوالي 0.23

جـد معادلة محور التماثل.

$x' = x \cos \theta + y \sin \theta$ — تحويل المعادلة

$2 = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y$ — $\sin 30° = \frac{1}{2}$ و $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$y = -\sqrt{3}x + 4$ — أكتب معادلة y



يمكن استخدام الرأس ومحور التماثل الجديد لرسم القطع المكافئ في المستوى xy.

تمرين موجّه

مثّل كل معادلة بيانيًا عند كل زاوية محددة.

4A. $\frac{(x')^2}{9} - \frac{(y')^2}{32} = 1; 60°$

4B. $\frac{(x')^2}{16} + \frac{(y')^2}{25} = 1; 30°$

نصيحة دراسية

التمثيل البياني حوّل النقاط الأخرى على المقطع المخروطي من الإحداثيات $x'y'$- إلى الإحداثيات xy-. ثم أنشئ جدولًا لهذه القيم لإكمال رسم المقطع المخروطي.

إحدى طرق تمثيل القطوع المخروطية بيانيًا باستخدام الحد xy لحل المعادلة y وتمثيلها بيانيًا باستخدام الآلة الحاسبة. اكتب المعادلة في شكل تربيعي ثم استخدم الصيغة التربيعية.

المثال 5 تمثيل القطع المخروطي بالصيغة القياسيّة

استخدم حاسبة التمثيل البياني لرسم القطع المخروطي المحدد في $4y^2 + 8xy - 60y + 2x^2 - 40x + 155 = 0$

$4y^2 + 8xy - 60y + 2x^2 - 40x + 155 = 0$ — المعادلة الأساسية

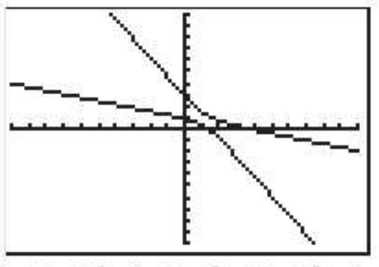
$4y^2 + (8x - 60)y + (2x^2 - 40x + 155) = 0$ — الشكل التربيعي

$y = \frac{-(8x - 60) \pm \sqrt{(8x - 60)^2 - 4(4)(2x^2 - 40x + 155)}}{2(4)}$ — $a = 4$ و $b = 8x - 60$ و $c = 2x^2 - 40x + 155$

$= \frac{-8x + 60 \pm \sqrt{32x^2 - 320x + 1120}}{8}$ — اضرب وجمّع الحدود المتشابهة

$= \frac{-8x + 60 \pm 4\sqrt{2x^2 - 20x + 70}}{8}$ — استبعد $\sqrt{16}$

$= \frac{-2x + 15 \pm \sqrt{2x^2 - 20x + 70}}{2}$ — اقسم كل حد على 4



[−40, 40] scl: 4 by [−40, 40] scl: 4

التمثيل البياني لهاتين المعادلتين على الشاشة نفسها يعطي القطع الزائد الموضح.

تمرين موجّه

5. استخدم حاسبة التمثيل البياني لرسم القطع المخروطي الناتج من $4x^2 - 6xy + 2y^2 - 60x - 20y + 275 = 0$

نصيحة دراسية

ترتيب الحدود رتّب الحدود بالقوى التنازلية لـ y لتحويل المعادلة إلى الشكل التربيعي.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

تمارين

اكتب المعادلة في المستوى $x'y'$ لقيمة المعطاة. ثم حدد القطع المخروطي. (المثال 1)

1. $x^2 - y^2 = 9, \theta = \frac{\pi}{3}$
2. $xy = -8, \theta = 45°$
3. $x^2 - 8y = 0, \theta = \frac{\pi}{2}$
4. $2x^2 + 2y^2 = 8, \theta = \frac{\pi}{6}$
5. $y^2 + 8x = 0, \theta = 30°$
6. $4x^2 + 9y^2 = 36, \theta = 30°$
7. $x^2 - 5x + y^2 = 3, \theta = 45°$
8. $49x^2 - 16y^2 = 784, \theta = \frac{\pi}{4}$
9. $4x^2 - 25y^2 = 64, \theta = 90°$
10. $6x^2 + 5y^2 = 30, \theta = 30°$

استخدم زاوية مناسبة لدوران القطع المخروطي مع كل معادلة معطاة واكتب معادلة بالشكل القياسي. (المثال 1)

11. $xy = -4$
12. $x^2 - xy + y^2 = 2$
13. $145x^2 + 120xy + 180y^2 = 900$
14. $16x^2 - 24xy + 9y^2 - 5x - 90y + 25 = 0$
15. $2x^2 - 72xy + 23y^2 + 100x - 50y = 0$
16. $x^2 - 3y^2 - 8x + 30y = 60$
17. $8x^2 + 12xy + 3y^2 + 4 = 6$
18. $73x^2 + 72xy + 52y^2 + 25x + 50y - 75 = 0$

اكتب معادلة لكل قطع مخروطي في المستوى xy للمعادلة المحددة في الشكل $x'y'$ والقيمة المعطاة لزاوية الدوران θ. (المثال 3)

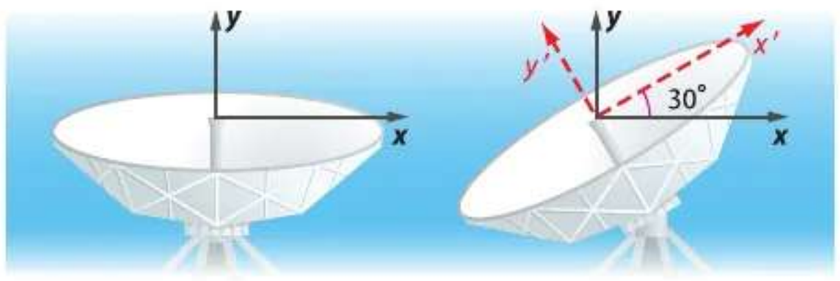
19. $(x')^2 + 3(y')^2 = 8, \theta = \frac{\pi}{4}$
20. $\frac{(x')^2}{25} - \frac{(y')^2}{225} = 1, \theta = \frac{\pi}{4}$
21. $\frac{(x')^2}{9} - \frac{(y')^2}{36} = 1, \theta = \frac{\pi}{3}$
22. $(x')^2 = 8y', \theta = 45°$
23. $\frac{(x')^2}{7} + \frac{(y')^2}{28} = 1, \theta = \frac{\pi}{6}$
24. $4x' = (y')^2, \theta = 30°$
25. $\frac{(x')^2}{64} - \frac{(y')^2}{16} = 1, \theta = 45°$
26. $(x')^2 = 5y', \theta = \frac{\pi}{3}$
27. $\frac{(x')^2}{4} - \frac{(y')^2}{9} = 1, \theta = 30°$
28. $\frac{(x')^2}{3} + \frac{(y')^2}{4} = 1, \theta = 60°$

29. **علم الفلك** **افترض أن $144(x')^2 + 64(y')^2 = 576$ يمثل الرسم في $x'y'$-المستوى لانعكاس المرآة في التلسكوب.** (المثال 4)
   a. في حال دوران المرآة بدرجة $30°$ فحدد معادلة المرآة في المستوى xy-.
   b. مثّل المعادلة بيانيًا.

ممارسة موجّهة مثّل كل معادلة بيانيًا عند كل زاوية محددة.

30. $\frac{(x')^2}{4} + \frac{(y')^2}{9} = 1; 60°$
31. $\frac{(x')^2}{25} - \frac{(y')^2}{36} = 1; 45°$
32. $(x')^2 + 6x' - y' = -9; 30°$
33. $8(x')^2 + 6(y')^2 = 24; 30°$
34. $\frac{(x')^2}{4} - \frac{(y')^2}{16} = 1; 45°$
35. $y' = 3(x')^2 - 2x' + 5; 60°$

36. **التواصل** طبق قمر صناعي يتتبع قمرًا صناعيًا فوقه مباشرة. افترض أن $y = \frac{1}{6}x^2$ تمثل شكل الطبق عندما يوجه في هذا الموقع. وفي وقت لاحق من اليوم نفسه، لوحظ أن الطبق استدار بنحو $30°$. (المثال 4)
   a. اكتب معادلة تمثل الاتجاه الجديد للطبق.
   b. استخدم حاسبة التمثيل البياني لرسم هاتين المعادلتين على الشاشة نفسها. ارسم هذا التمثيل البياني على ورقتك.



حاسبة التمثيل البياني ارسم القطع المخروطي المعطى بكل معادلة. (المثال 5)

37. $x^2 - 2xy + y^2 - 5x - 5y = 0$
38. $2x^2 + 9xy + 14y^2 = 5$
39. $8x^2 + 5xy - 4y^2 = -2$
40. $2x^2 + 4\sqrt{3}xy + 6y^2 + 3x = y$
41. $2x^2 + 4xy + 2y^2 + 2\sqrt{2}x - 2\sqrt{2}y = -12$
42. $9x^2 + 4xy + 6y^2 = 20$
43. $x^2 + 10\sqrt{3}xy + 11y^2 - 64 = 0$
44. $x^2 + y^2 - 4 = 0$
45. $x^2 - 2\sqrt{3}xy - y^2 + 18 = 0$
46. $2x^2 + 9xy + 14y^2 - 5 = 0$

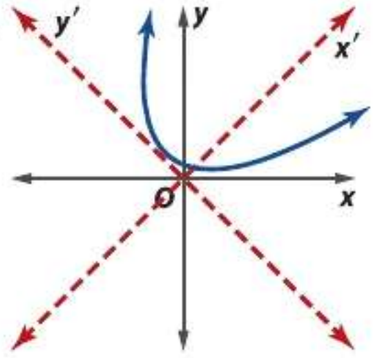
التمثيل البياني لكل معادلة هو حالة مُنحَلة. صِف التمثيل البياني.

47. $y^2 - 16x^2 = 0$
48. $(x + 4)^2 - (x - 1)^2 = y + 8$
49. $(x + 3)^2 + y^2 + 6y + 9 - 6(x + y) = 18$

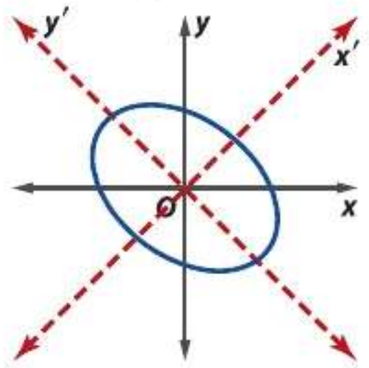
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

صِل التمثيل البياني لكل قطع مخروطي بمعادلته.

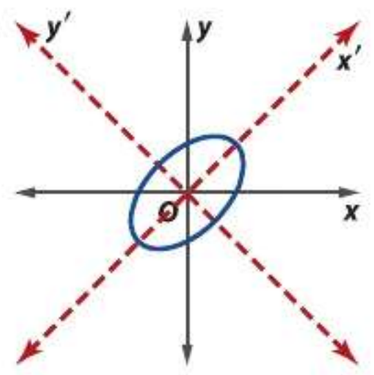
50.



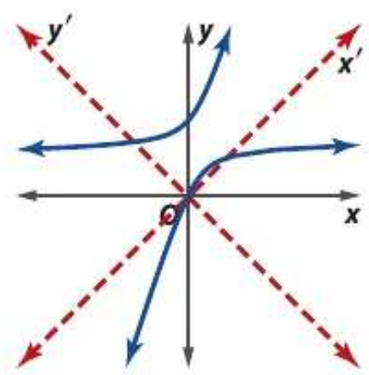
51.



52.



53.



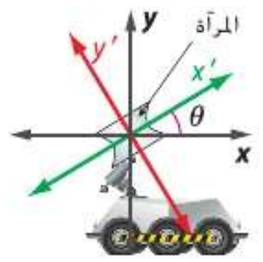
a. $x^2 - xy + y^2 = 2$

b. $145x^2 + 120xy + 180y^2 - 900 = 0$

c. $2x^2 - 72xy + 23y^2 + 100x - 50y = 0$

d. $16x^2 - 24xy + 9y^2 - 5x - 90y + 25 = 0$

54. **علم الفواعل الآليّة** استخدمت المرآة على شكل قطع زائد في أنظمة الفواعل الآليّة في الروبوت بحيث توجة نحو اليمين. بعد استدارتها. يُمثّل موقعها الجديد بالمعادلة $51.75x^2 + 184.5\sqrt{3}xy - 132.75y^2 = 32{,}400$



a. حل المعادلة لأجل لإيجاد قيمة الحد y.

b. استخدم حاسبة التمثيل البياني لرسم المعادلة.

c. حدد الزاوية θ التي من خلالها تستدار المرآة. قرّبها إلى أقرب درجة.

55. **الثوابت** عندما يحوّل دوران معادلة من المستوى xy إلى المستوى $-x'y'$، فإن المعادلة الجديدة تساوي المعادلة الأصلية. تظل بعض القيم ثابتة أثناء الدوران. وهذا يعني أن قيمها لا تتغير عند دوران المحاور. استخدم التعليل لشرح كيف يكون $A + C = A' + C'$ هو دوران ثابت.

حاسبة التمثيل البياني **مثّل بيانيًا كل معادلتين وجد نقاط التقاطع. إذا لم يكن في التمثيل البياني نقاط تقاطع، فاكتب لا يوجد حل.**

56. $x^2 + 2xy + y^2 - 8x - y = 0$
$8x^2 + 3xy - 5y^2 = 15$

57. $9x^2 + 4xy + 5y^2 - 40 = 0$
$x^2 - xy - 2y^2 - x - y + 2 = 0$

58. $x^2 + \sqrt{3}xy - 3 = 0$
$16x^2 - 20xy + 9y^2 = 40$

59. **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة، ستستنتج زوايا الدوران التي تعطي التمثيلات البيانية الاساسية.

a. **جدوليًا** في كل معادلة في الجدول، حدد القطع المخروطي ثم جد القيمة الصغرى لزاوية الدوران اللازمة لتحويل المعادلة بحيث يتطابق التمثيل البياني المستدار مع التمثيل البياني الأساسي.

المعادلة	القطع المخروطي	الحد الأدنى لزاوية الدوران
$x^2 - 5x + 3 - y = 0$		
$6x^2 + 10y^2 = 15$		
$2xy = 9$		

b. **لفظيًا** صف العلاقة بين خطوط التماثل للقطوع المخروطية والقيمة الصغرى لزوايا الدوران اللازمة لاستنتاج التمثيلات البيانية الاساسية.

c. **تحليليًا** استدار القطع الناقص غير الدائري $50°$ عن نقطة الأصل. واستدار مرة أخرى بعد ذلك حيث استنتج التمثيل البياني الاساسي. فما هي الزاوية الثانية للدوران؟

مهارات التفكير العليا مسائل استخدم مهارات التفكيرالعليا

60. **تحليل الخطأ** يصف محمود وأحمد الرسم البياني $x^2 + 4xy + 6y^2 + 3x - 4y = 75$ وقال محمود إنه القطع الناقص. ويعتقد أحمد أنه القطع المكافئ. أي منهما صحيح؟ وضح تبريرك المنطقي.

61. **تحدي** اثبت أن معادلة الدائرة $x^2 + y^2 = r^2$ تبقى ثابتة أثناء الدوران θ.

62. **التبرير** صواب أو خطأ: يمكن وصف كل زاوية دوران θ أنها زاوية حادة. اشرح ذلك.

63. **البرهان** برهن أن $x' = x\cos\theta + y\sin\theta$ و $y' = y\cos\theta - x\sin\theta$ (ارشاد: حل المنظومة $x = x'\cos\theta - y'\sin\theta$ و $y = x'\sin\theta + y'\cos\theta$ بضرب أحد المعادلتين في $\sin\theta$ والأخرى في $\cos\theta$).

64. **التعليل** يمكن تحديد زاوية الدوران θ بأنها $\tan 2\theta = \frac{B}{A - C}$، عندما $A \neq C$. أو $\theta = \frac{\pi}{4}$، عندما $A = C$ لماذا لا يتطلب تحديد زاوية الدوران بدلالة ظل التمام شرطًا إضافيًا وقيمة إضافية لـ θ؟

65. **الكتابة في الرياضيات** يمكن استخدام المميز لتصنيف القطع المخروطي $A'(x')^2 + C'(y')^2 + D'x' + E'y' + F' = 0$ في المستوى $-x'y'$. اشرح لماذا تحدد القيم A' و C' نوع القطع المخروطي. صف العوامل اللازمة للقطع الناقص والدائرة والقطع المكافئ والقطع الزائد.

66. **التعليل** صواب أو خطأ: كلما كان المميز للمعادلة في الشكل $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ مساويًا صفر، فيكون التمثيل البياني للمعادلة قطعًا مكافئًا. اشرح ذلك.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

مراجعة شاملة

ارسم القطع الزائد المعطى بكل معادلة.

67. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{64} = 1$

68. $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{49} = 1$

69. $\frac{(x-3)^2}{64} - \frac{(y-7)^2}{25} = 1$

حدد الاختلاف المركزي للقطع الناقص المعطى الذي معادلته:

70. $\frac{(x+17)^2}{39} + \frac{(y+7)^2}{30} = 1$

71. $\frac{(x-6)^2}{12} + \frac{(y+4)^2}{15} = 1$

72. $\frac{(x-10)^2}{29} + \frac{(y+2)^2}{24} = 1$

73. استثمار لدى منصور مبلغ إجمالي قدره AED 5000 في حساب الادخار وشهادة الإيداع. يربح حساب الادخار مرابحة بنسبة 3.5% سنويًا. تربح شهادة الإيداع مرابحة بنسبة 5% إذا استثمرت الأموال لمدة سنة واحدة. حسب منصور أن أرباح المرابحة التي يحصل عليها في العام تبلغ AED 227.50.

a. اكتب نظام المعادلات لمبلغ كل استثمار.

b. استخدم قاعدة كرامر لتحديد مقدار المال في حساب الادخار وشهادة الإيداع لدى منصور.

74. **البصريات** يطلق على كمية الضوء التي يوفرها المصدر إلى السطح بالاستنارة. الاستنارة E بالمتر- شمعة على أحد الأسطح حيث إن R البُعد بالمتر عن مصدر الضوء من مصدر الضوء بشدة I شمعة هي: $E = \frac{I \cos \theta}{R^2}$ حيث إن θ هي قياس الزاوية بين اتجاه الضوء و الخط المتعامد على السطح المضاء.
أثبت أن $E = \frac{I \cot \theta}{R^2 \csc \theta}$ هي صيغة مكافئة.

حل المعادلات.

75. $\log_4 8n + \log_4 (n-1) = 2$

76. $\log_9 9p + \log_9 (p+8) = 2$

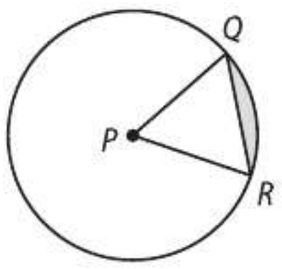
استخدم نظرية العوامل لتحديد إذا كانت المعادلات ذات الحدين هي عوامل $f(x)$. استخدم المعادلات ذات الحدين التي هي عوامل لكتابة التحليل الى عوامل للدالة $f(x)$.

77. $f(x) = x^4 - x^3 - 16x^2 + 4x + 48; (x-4), (x-2)$

78. $f(x) = 2x^4 + 9x^3 - 23x^2 - 81x + 45; (x+5), (x+3)$

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

79. SAT/ACT P هي مركز الدائرة و $PQ = QR$. إذا كانت مساحة $\triangle PQR$ تبلغ $9\sqrt{3}$ وحدة مربعة، فما هي المساحة المظللة بالوحدة المربعة؟



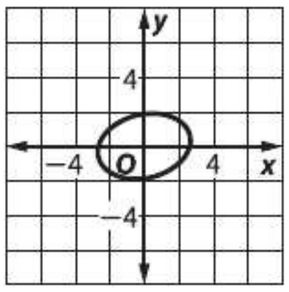
A $24\pi - 9\sqrt{3}$
B $9\pi - 9\sqrt{3}$
C $18\pi - 9\sqrt{3}$
D $6\pi - 9\sqrt{3}$
E $12\pi - 9\sqrt{3}$

80. مراجعة أي مما يأتي ليست معادلة لقطعٍ مكافئ؟

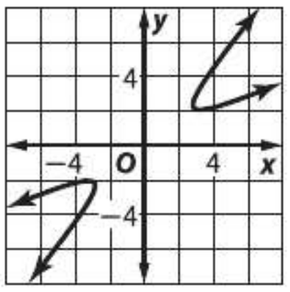
F $y = 2x^2 + 4x - 9$
G $3x + 2y^2 + y + 1 = 0$
H $x^2 + 2y^2 + 8y = 8$
J $x = \frac{1}{2}(y-1)^2 + 5$

81. ما هو التمثيل البياني للقطع المخروطي الناتج من المعادلة $4x^2 - 2xy + 8y^2 - 7 = 0$؟

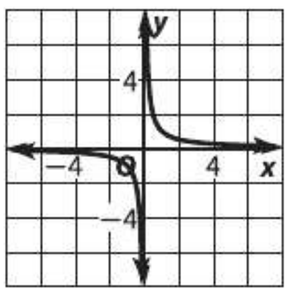
A



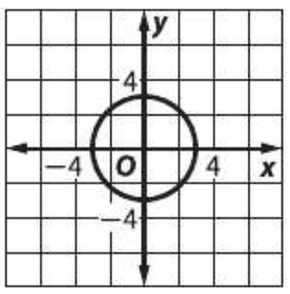
C



B



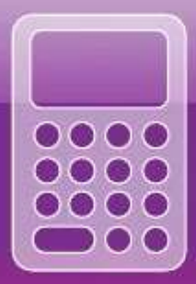
D



82. مراجعة ما عدد طرق حل هذا النظام $(x-3)^2 + y^2 = 9$ و $\frac{x^2}{5^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$ ؟

F 0
G 1
H 2
J 4

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة



مختبر تقنية التمثيل البياني
6-7 أنظمة المعادلات والمتباينات غير الخطية

الهدف

- استخدام حاسبة التمثيل البياني لتقريب حلول أنظمة معادلاتٍ ومتبايناتٍ لاخطية.

تمثل التمثيلات البيانية للقطوع المخروطية نظامًا لاخطيًا. ويمكن إيجاد حلول أنظمة المعادلات اللاخطية جبريًا. ولكن، يمكن إيجاد حلولٍ تقريبيةٍ باستخدام حاسبة التمثيل البياني خاصتك. يمكن لحاسبة التمثيل البياني تمثيل دوال فقط. وللتمثيل البياني لقطعٍ مخروطيٍ وهو ليس بدالّة، حلّ المعادلة لإيجاد قيمة y.

النشاط 1 النظام اللاخطي

جـــد حل نظام المتباينات بالتمثيل البياني.

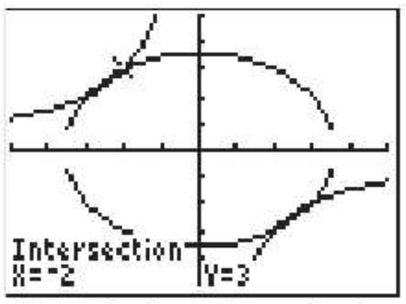
$$x^2 + y^2 = 13$$
$$xy + 6 = 0$$

الخطوة 2 حلّ كل معادلة مما يلي لإيجاد قيمة y.

$$y = -\frac{6}{x} \qquad y = -\sqrt{13 - x^2} \text{ و } y = \sqrt{13 - x^2}$$

الخطوة 3 مثّل المعادلات بيانيًا في النافذة الملائمة.

الخطوة 4 استخدم سمة التقاطع (intersect) من القائمة CALC لإيجاد أربع نقاط تقاطع.



[−5, 5] scl: 1 by [−5, 5] scl: 1

الحلول هي $(-3, 2)$ و $(-2, 3)$ و $(2, -3)$ و $(3, -2)$.

تمارين

حُـــلّ نظام المتباينات بالتمثيل البياني. وقرّب إلى أقرب جزء من عشرة.

1. $xy = 2$
$x^2 - y^2 = 3$

2. $49 = y^2 + x^2$
$x = 1$

3. $x = 2 + y$
$x^2 + y^2 = 100$

4. $25 - 4x^2 = y^2$
$2x + y + 1 = 0$

5. $y^2 = 9 - 3x^2$
$x^2 = 10 - 2y^2$

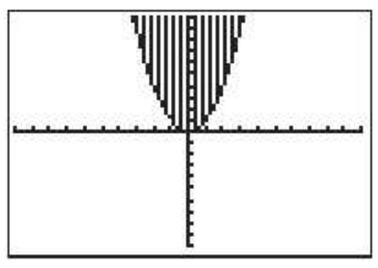
6. $y = -1 - x$
$4 + x = (y - 1)^2$

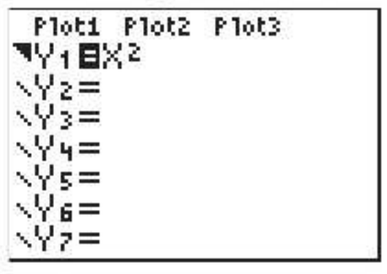
7. **تحدٍّ** يحتوي قصر غرفتين مربعتين اثنتين، وهما غرفة العائلة والمكتب. تبلغ المساحة الكلية للغرفتين $468\ m^2$ ، ومساحة المكتب أصغر بـــ $180\ m^2$ من غرفة العائلة.

a. اكتب نظام معادلات من الدرجة الثانية تمثّل هذه الحالة.

b. مثّل بيانيًا النظام الذي جـــدته في القسم **a**. وقدّر طول كل غرفة.

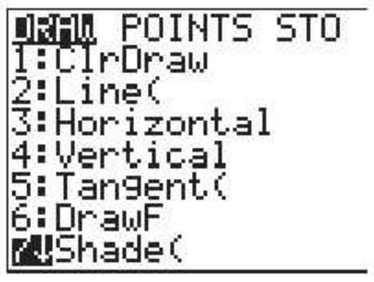
يمكن حلّ أنظمة المتباينات اللاخطية أيضًا باستخدام حاسبة تمثيل بياني. تذكّر من من الوحدة 1 أنه يمكن تمثيل المتباينات بيانيًا باستخدام تعليمتي أكبر من وأصغر من القائمة Y= . يمكن العثور على رمز المتباينة عبر التمرير إلى يسار إشارة المساواة وضغط ENTER إلى أن تومض المثلثات المظللة. يمثّل المثلث في الأعلى التعليمة أكبر من ويمثّل المثلث في الأعلى التعليمة أصغر من. التمثيل البياني للدالّة $y \geq x^2$ موضّح أدناه.


[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1



حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

يمكن تمثيل متباينات القطوع المخروطية التي ليست بدوال بيانيًا، كالقطوع الناقصة والدوائر وبعض القطوع الزائدة عبر استخدام تعليمة Shade من قائمة DRAW. المعلومات المفيدة المطلوبة هي Shade(*lowerfunc, upperfunc, Xleft, Xright, 3, 4*).



ترسم هذه التعليمة دالّة الحد الأدنى *lowerfunc* ودالّة الحد الأعلى *upperfunc* بدلالة *x*. ثمّ تظلل المنطقة الواقعة فوق *lowerfunc* وتحت *upperfunc* وبين الحدّين الأيسر والأيمن *Xleft* و *Xright*. يحدّد المدخلان الأخيران *3* و *4* نوع التظليل ويمكن أن يبقيا ثابتين.

النشاط 2 نظام البيانات اللاخطية

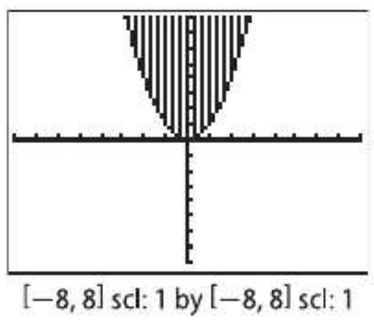
حُـلّ نظام المتباينات بالتمثيل البياني.

$$x^2 + y^2 \leq 36$$
$$y - x^2 > 0$$

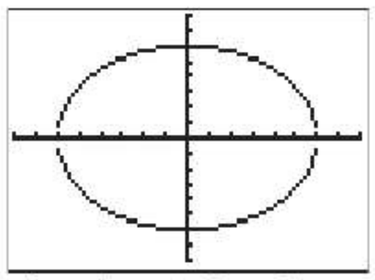
الخطوة 1 حلّ كل متباينة لإيجاد قيمة y.

$y > x^2$ $\qquad$ $y \geq -\sqrt{36 - x^2}$ و $y \leq \sqrt{36 - x^2}$

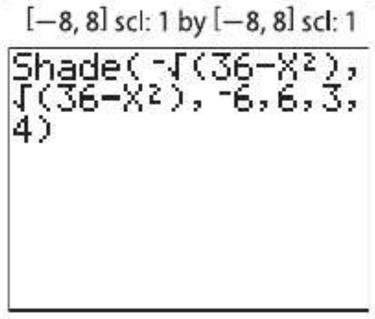
الخطوة 2 مثّل $y > x^2$ بيانيًا وظلل المنطقة الصحيحة.
شكّل رمز كل متباينة عبر التمرير إلى يسار إشارة المساواة واختيار ENTER إلى أن تومض المثلثات المظللة.


[−8, 8] scl: 1 by [−8, 8] scl: 1

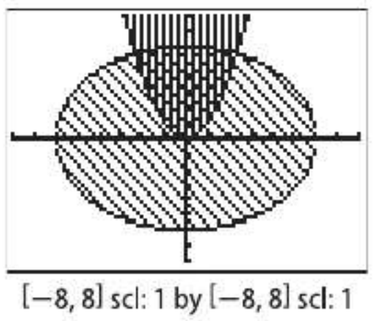
الخطوة 3 لتمثيل $x^2 + y^2 \leq 36$ بيانيًا، فإن الحدّ الأدنى هو $y = -\sqrt{36 - x^2}$ والحدّ الأقصى هو $y = \sqrt{36 - x^2}$ يلتقي نصفا الدائرة عند $x = -6$ و $x = 6$ كما هو موضّح.


[−8, 8] scl: 1 by [−8, 8] scl: 1

الخطوة 4 من القائمة DRAW . اختر 7: Shade. Enter



$\text{Shade}(-\sqrt{36 - x^2}, \sqrt{36 - x}, -6, 6, 3, 4)$


[−8, 8] scl: 1 by [−8, 8] scl: 1

خل النظام ممثل من خلال المنطقة مضاعفة التظليل.

نصيحة تقنية

مسح الشاشة لمسح أي رسومات من شاشة الحاسبة، اختر ClrDraw من القائمة DRAW.

نصيحة دراسية

الحدّان الأيمن والأيسر
إذا لم يكن الحدّان الأيمن والأيسر واضحين، أدخل قيمتين للنافذة يفوقان كلا الحدّين. على سبيل المثال، إذا كان الحدّان هما $x = -5$ و $x = 5$ فإن إدخال -10 و 10 سيبقى يعطي التمثيل البياني الصحيح.

تمارين

حُـلّ كل من أنظمة المتباينات الآتية بالتمثيل البياني.

8. $2y^2 \leq 32 - 2x^2$
$x + 4 \geq y^2$

9. $y + 5 \geq x^2$
$9y^2 \leq 36 + x^2$

10. $x^2 + 4y^2 \leq 32$
$4x^2 + y^2 \leq 32$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الدرس 8-6

المعادلات الوسيطية

السابق

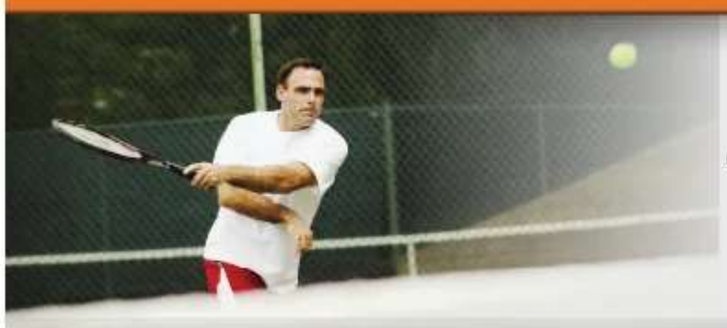
- لقد قمت بتمثيل الحركة باستخدام دوال تربيعية.

الآن

1. تمثيل المعادلات الوسيطية بيانيًا
2. حلّ المعادلات المتصلة بحركة المقذوفات.

لماذا؟

- لقد استخدمت معادلاتٍ تربيعيةً لتمثيل مسارات المقذوفات ككرة التنس. ويمكن استخدام المعادلات الوسيطية أيضًا لتمثيل مسار المقذوفات ومداها وتقديرهما.

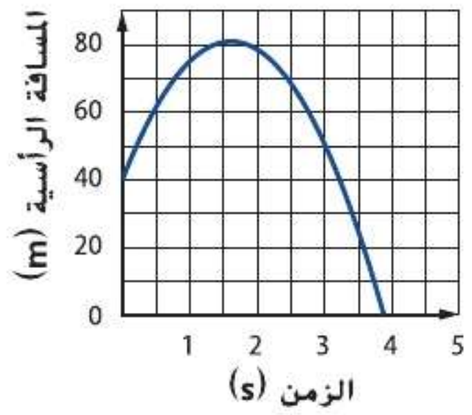


parametric equation
parameter
orientation
parametric curve

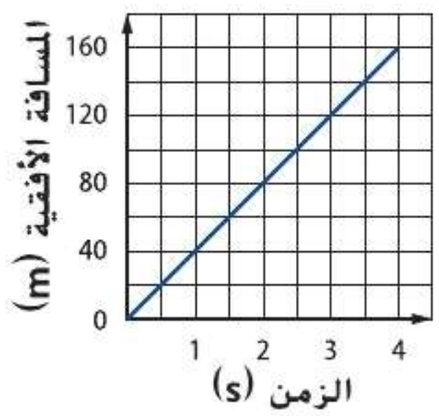
1 تمثيل المعادلات الوسيطية بيانيًا

لقد تناولنا في هذا الكتاب إلى حدّ الآن التمثيل البياني لمنحنًى في المستوى الإحداثي xy باستخدام معادلة واحدة تضم متغيرين هما x و y. في هذا الدرس ستقدّم بعضًا من هذه التمثيلات البيانية نفسها باستخدام معادلتين وعبر إدخال متغيرٍ ثالث.

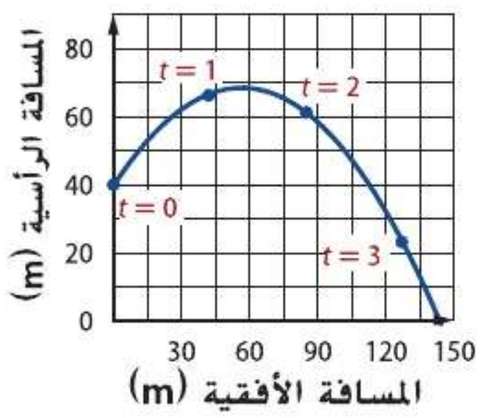
لنأخذ التمثيلين البيانيين المبينين أدناه، حيث يمثّل كلٌّ منهما نواحي مختلفةً حول ما يحدث عند رمي جسمٍ ما في الهواء. يبيّن الشكل 6.5.1 المسافة الرأسية التي يقطعها الجسم كتابعٍ للزمن، في حين يوضح الشكل 6.5.2 المسافة الأفقية التي يقطعها الجسم كتابعٍ للزمن. ويبيّن الشكل 6.5.3 المسافة الرأسية للجسم كتابعٍ لمسافته الأفقية.



الشكل 6.5.1



الشكل 6.5.2



الشكل 6.5.3

حيث يخبرنا كلٌّ من هذه التمثيلات البيانية ومعادلته عن جزءٍ مما يحدث في هذه الحالة، ولكنّه لا يمثّل الحالة بمجملها. للتعبير عن موضع الجسم أفقيًا ورأسيًا بدلالة الزمن، يمكننا استخدام **المعادلات الوسيطية**. تمثل كلتا المعادلتين المبينتين أدناه التمثيل البياني المبيّن في الشكل 6.5.3.

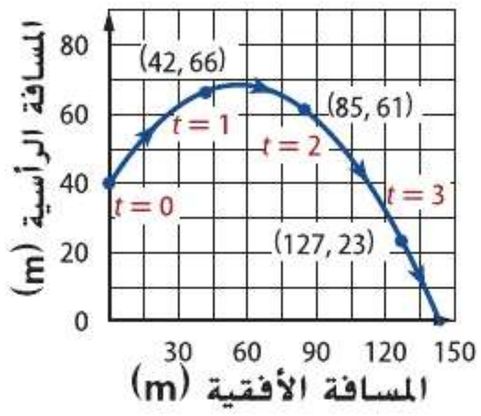
المعادلتان الوسيطيتان

$x = 30\sqrt{2}t$ المركّبة الأفقية

$y = -16t^2 + 30\sqrt{2}t + 40$ المركّبة الرأسية

المعادلة بالصورة الديكارتية في المستوى الاحداثي المتعامد

$y = -\frac{2}{225}x^2 + x + 40$



من خلال المعادلتين الوسيطيتين، يمكننا تحديد الموضع الذي كان فيه الجسم عند زمنٍ ما عبر تقدير المركبتين الأفقية والرأسية لـ t. فعلى سبيل المثال، عند $t = 0$، كان الجسم عند النقطة $(0, 40)$. يطلق على المتغير t اسم **وسيط**.

يرسم التمثيل البياني الموضح ضمن الفترة الزمنية $0 \geq 4 \leq t$
إن التمثيل البياني للنقاط وفق الترتيب المتزايد لقيم t يؤدي إلى رسم منحنًى يأخذ اتجاهًا محددًا يدعى **اتجاه** المنحنى.
ويشار إلى هذا الاتجاه بواسطةِ أسهمٍ على المنحنى كما هو موضح.

المفهوم الأساسي المعادلات الوسيطية

إذا كانت f و g دالّتين متصلتين لـ t في الفترة I، فإن مجموعة الأزواج المرتّبة $(f(t), g(t))$ تمثل **منحنًى وسيطيًا**.
والمعادلتان

$$x = f(t) \text{ و } y = g(t)$$

هما المعادلتان الوسيطيتان لهذا المنحنى. و t يرمز للوسيط، بينما I يرمز إلى فترة الوسيط.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

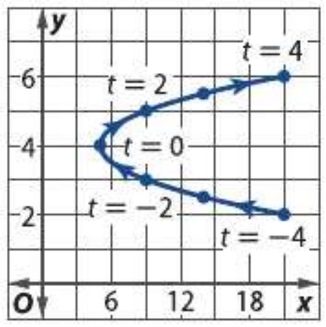
المثال 1 التمثيل البياني لمنحنيات المعادلات الوسيطية

مثّل بيانيًا المنحنى المقابل لكل زوجٍ من المعادلات الوسيطية في الفترة المعطاة.

بمكن استخدام المعادلات الوسيطية لتمثيل المنحنيات التي ليست بدوالّ، كما هو موضح في المثال 1.

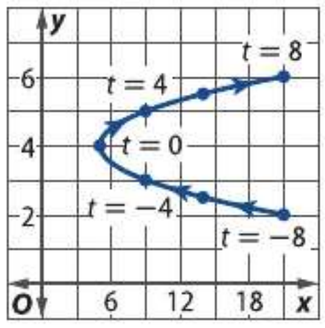
a. $x = t^2 + 5$ و $y = \frac{t}{2} + 4; -4 \le t \le 4$

اصنع جدولًا بقيم $-4 \ge t \le 4$ ثمّ مثّل الإحداثيات (x, y) المقابلة لكل قيمة من قيم t وصِل النقاط لتشكيل منحنًى منتظم. تشير الأسهم المرافقة للتمثيل البياني إلى توجيه المنحنى مع انتقال t من -4 إلى 4.



t	x	y	t	x	y
−4	21	2	1	6	4.5
−3	14	2.5	2	9	5
−2	9	3	3	14	5.5
−1	6	3.5	4	21	6
0	5	4			

b. $x = \frac{t^2}{4} + 5$ و $y = \frac{t}{4} + 4; -8 \le t \le 8$



t	x	y	t	x	y
−8	21	2	2	6	4.5
−6	14	2.5	4	9	5
−4	9	3	6	14	5.5
−2	6	3.5	8	21	6
0	5	4			

تمرين موجّه

1A. $x = 3t$ و $y = \sqrt{t} + 6; 0 \le t \le 8$

1B. $x = t^2$ و $y = 2t + 3; -10 \le t \le 10 \le 10$

لاحظ أن المجموعتين المختلفتين من المعادلات الوسيطية الموضحة في المثال 1 تنتجان المنحنى نفسه. يختلف التمثيلان البيانيان من حيث سرعتيهما أو بالأحرى من حيث سرعة رسم كلٍ منهما. إذا كانت t تمثّل الزمن بالثواني، يُرسم المنحنى في الجزء **b** خلال 16 ثانية، في حين يُرسم المنحنى في الجزء **a** خلال 8 ثوان.

وثمّة طريقةٌ أخرى لتحديد المنحنى الممثل بمجموعة من المعادلات الوسيطية، وهي كتابة مجموعة المعادلات بالصورة الديكارتية في المستوى الإحداثي المتعامد. ويمكن القيام بذلك بالتعويض لحذف الوسيط.

المثال 2 الكتابة بالصورة الديكارتية في المستوى الإحداثي المتعامد

اكتب $x = -3t$ و $y = t^2 + 2$ في المستوى الإحداثي المتعامد.

نصيحة دراسية

حذف الوسيط

لحذف الوسيط t، حل $x = -3t$ لإيجاد قيمة t. وهذا يعطي $t = -\frac{1}{3}x$ ثمّ عوّض هذه القيمة بدلًا من t في المعادلة الخاصة بـ y.

$y = t^2 + 2$ معادلة y

$= \left(-\frac{1}{3}x\right)^2 + 2$ بتعويض $-\frac{1}{3}x$ بدلًا من t

$= \frac{1}{9}x^2 + 2$ بسّط

تعطي هذه المجموعة من المعادلات الوسيطية معادلة القطع المكافئ $y = \frac{1}{9}x^2 + 2$

تمرين موجّه

2. اكتب $x = t^2 - 5$ و $y = 4t$ بالصورة الديكارتية في المستوى الإحداثي المتعامد.

في المثال 2، لاحظ أنّه لم يجرِ تحديد فترة الوسيط الخاص بـ t. وفي حال عدم التحديد، تحدّد فترة الوسيط على أنها جميع قيم t التي تعطي قيمًا حقيقيةً لـ x و y.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

وفي بعض الأحيان يجب أن يكون المجال مُقيَّدًا بعد التحويل من الشكل الوسيطي إلى المستوى الإحداثي المتعامد.

المثال 3 المستوى الإحداثي المتعامد مع قيود المجال

اكتب $x=\frac{1}{\sqrt{t}}$ و $y=\frac{t+1}{t}$ بالصورة الديكارتية في المستوى الإحداثي المتعامد. ثمّ مثّل المعادلة بيانيًا. واذكر أي قيودٍ خاصةٍ بالمجال.

لحذف t، ربّع كل طرف للمعادلة $x=\frac{1}{\sqrt{t}}$ وهذا يعطي $x^2=\frac{1}{t}$. إذًا $t=\frac{1}{x^2}$ عوّض بهذه القيمة بدلًا من t في المعادلة الوسيطية الخاصة بـ y.

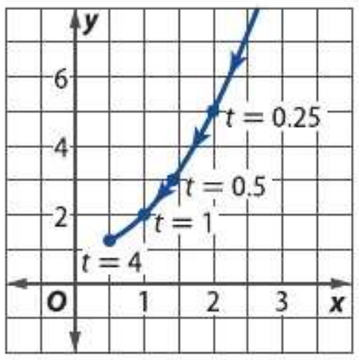
$y=\frac{t+1}{t}$ المعادلة الوسيطية الخاصة بـ y

$=\frac{\frac{1}{x^2}+1}{\frac{1}{x^2}}$ بتعويض $\frac{1}{x^2}$ بدلًا من t

$=\frac{\frac{x^2+1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}}$ بتحويل البسط إلى أبسط صيغة

$=x^2+1$ بسّط

في حين أن المعادلة بالصورة الديكارتية في المستوى الإحداثي المتعامد هي $y=x^2+1$، فإن المنحنى معرّف فقط عند قيم $t>0$ من المعادلة الوسيطية $x=\frac{1}{\sqrt{t}}$. القيم الممكنة فقط لـ x هي القيم الأكبر من الصفر. كما هو مبين في التمثيل البياني، فإن مجال المعادلة بالصورة الديكارتية في المستوى الإحداثي المتعامد مقيّد بالقيم $x>0$



تمرين موجّه

3. اكتب $x=\sqrt{t+4}$ و $y=\frac{1}{t}$ في المستوى الإحداثي المتعامد. ومثّل المعادلة بيانيًا. واذكر أيّ قيودٍ على المجال.

ويمكن أن يكون الوسيط في المعادلات الوسيطية زاوية مثل θ أيضًا.

المثال 4 المعادلات بالصورة الديكارتية في المستوى الإحداثي المتعامد باستخدام الوسيط θ

اكتب $x=2\cos\theta$ و $y=4\sin\theta$ في المستوى الإحداثي المتعامد. ثمّ مثّل المعادلة بيانيًا.

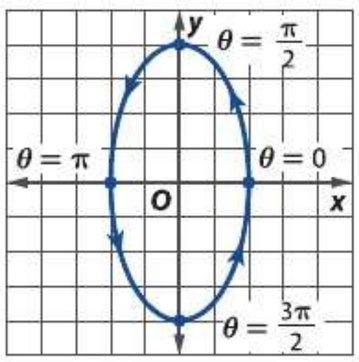
لحذف الوسيط θ، حلّ المعادلتين أولًا لإيجاد قيمة $\cos\theta$ و $\sin\theta$ كي تحصل على $\cos\theta=\frac{x}{2}$ و $\sin\theta=\frac{y}{4}$ ثم استخدم متطابقة فيثاغورس لحذف الوسيط θ.

$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ بتطبيق متطابقة فيثاغورس

$\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{y}{4}\right)^2=1$ $\cos\theta=\frac{x}{2}$ و $\sin\theta=\frac{y}{4}$

$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1$ بسّط

عليك تنظيم هذه المعادلة وفق صيغة معادلة قطعٍ ناقصٍ يقع مركزه في نقطة الأصل ويقع رأساه عند النقطتين $(0, -4)$ و $(0, 4)$ ويقع رأساه المرافقان عند النقطتين $(2, 0)$ و $(-2, 0)$ كما هو موضح. مع تغير قيمة θ من 0 إلى 2π. يُرسَم القطع الناقص باتجاه معاكس لعقارب الساعة.



نصيحة تقنية

وسيطات عند التمثيل البياني للمعادلات الوسيطية على الحاسبة، يستخدم الرمزان θ و t بصورةٍ متبادلة.

تمرين موجّه

4. اكتب $x=3\sin\theta$ و $y=8\cos\theta$ بالصورة الديكارتية في المستوى الإحداثي المتعامد. ثمّ ارسم التمثيل البياني.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

كما رأيت في المثال 1، فإن التمثيلات الوسيطية للتمثيلات البيانية بالصورة الديكارتية في المستوى الإحداثي المتعامد ليست مميزة. حيث إن التبديل في تعريف الوسيط يعطيك معادلات وسيطية تنتج تمثيلاتٍ بيانيةً تختلف فقط من حيث سرعتها و/أو توجيهها.

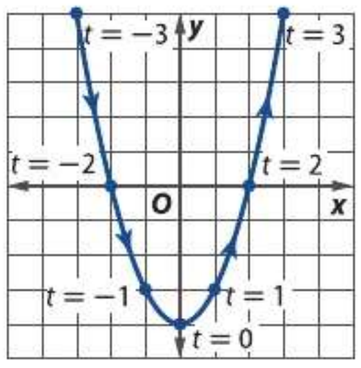
المثال 5 كتابة المعادلات الوسيطية من التمثيلات البيانية

استخدم كل وسيط لكتابة المعادلات الوسيطية التي يمكن أن تمثّل $y = x^2 - 4$ ثمّ مثّل المعادلة بيانيًا، مع الإشارة إلى سرعة التمثيل وتوجيهه.

a. $t = x$

$y = x^2 - 4$ المعادلة الأساسية

$= t^2 - 4$ من المعادلة الأساسية، x بتعويض قيمة



المعادلتان الوسيطيتان هما $x = t$ و $y = t^2 - 4$

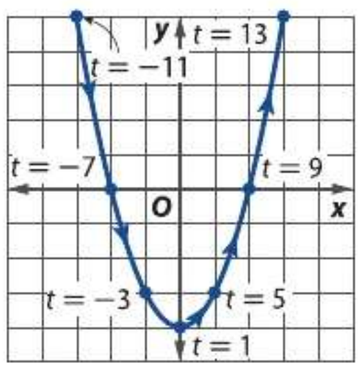
السرعة والتوجيه المرافقان للمنحنى مشارٌ إليهما على التمثيل البياني.

b. $t = 4x + 1$

$x = \frac{t-1}{4}$ قم بإيجاد قيمة x

$y = \left(\frac{t-1}{4}\right)^2 - 4$ بتعويض قيمة x في المعادلة الاساسية

$= \frac{t^2}{16} - \frac{t}{8} - \frac{63}{16}$ بسّط



$x = \frac{t-1}{4}$ و $y = \frac{t^2}{16} - \frac{t}{8} - \frac{63}{16}$ هما المعادلتان الوسيطيتان.

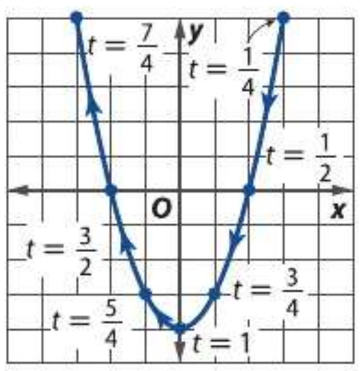
لاحظ أن السرعة أبطأ بكثير منها في القسم **a**.

c. $t = 1 - {}^{x}\!-_{4}$

$4 - 4t = x$ قم بإيجاد قيمة x

$y = (4 - 4t)^2 - 4$ بتعويض قيمة x من المعادلة الأساسية

$= 16t^2 - 32t + 12$ بسّط



المعادلتان الوسيطيتان هما $x = 4 - 4t$ و $y = 16t^2 - 32t + 12$ لاحظ أن السرعة أكبر بكثير منها في القسم **a**. كما أن التوجيه معكوسٌ أيضًا كما تشير الأسهم.

تمرين موجّه

استخدم كل وسيط لتحديد المعادلات الوسيطية التي يمكن أن تمثل $x = 6 - y^2$ ثم مثّل المعادلة بيانيًا، مع الإشارة إلى السرعة والتوجيه.

5A. $t = x + 1$

5B. $t = 3x$

5C. $t = 4 - 2x$

نصيحة دراسية

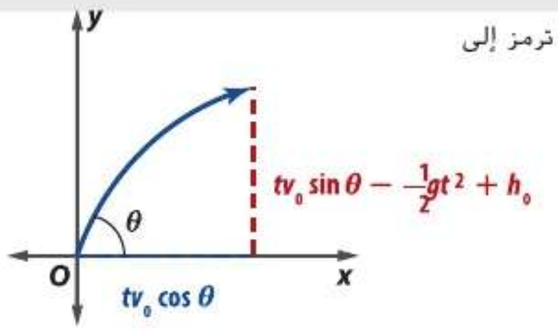
الصيغة الوسيطية للمعادلات إن الطريقة الأسهل لتحويل معادلةٍ من الصورة الديكارتية في المستوى الإحداثي المتعامد إلى الصيغة الوسيطية هي استخدام العلاقة $x = t$ وعند إتمام ذلك، تمثل المعادلة الوسيطية الأخرى المعادلة الاساسية مع إحلال t محل x.

2 حركة المقذوفات

تستخدم المعادلات الوسيطية في أغلب الأحيان لمحاكاة حركة المقذوفات. ويمكن تمثيل مسار مقذوفٍ أُطلق بزاوية مغايرة لـ $90°$ مع خط الأفق بمعادلتين وسيطيتين.

المفهوم الأساسي حركة المقذوف

أطلق جسم صانعًا زاوية θ مع خط الأفق وبسرعة متجهة ابتدئية v_0، حيث g ترمز إلى ثابت الجاذبية الأرضية، و tترمز إلى الزمن و h_0 ترمز إلى الارتفاع الابتدائي:



المسافة الأفقية $x = tv_0 \cos\theta$

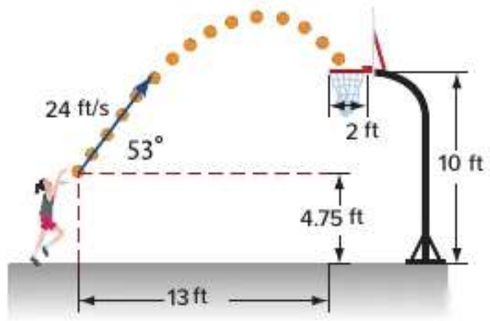
الموقع الرأسي $y = tv_0 \sin\theta - \frac{1}{2}gt^2 + h_0$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 6 من الحياة اليومية حركة المقذوفات

كرة السلة تتمرّن خديجة على الرميات الحرّة من أجل مباراة كرة السلة القادمة. حيث ترمي الكرة بسرعة متجهة ابتدائية تساوي 24 ft/s وبزاوية 53° بالنسبة خط الأفق. تساوي المسافة الأفقية من قوس الرميات الحرة إلى الحافة الأمامية من حلقة السلّة 13 ft. والمسافة الرأسية من الأرضية إلى حلقة السلة 10 ft . تبعد الحافّة الأمامية للحلقة مسافة 2 ft عن لوحة الهدف.
ترمي خديجة الكرة عن ارتفاع 4.75 ft. عن الأرض. فهل سوف تسجّل؟

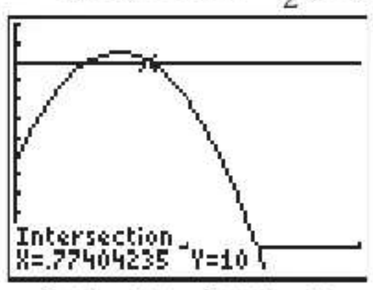
شكّل تمثيلًا بيانيًا للحالة.



لتحديد ما إن كانت خديجة سوف تسجّل الرمية، فإنك بحاجةٍ إلى المسافة الأفقية التي قطعتها الكرة حين كانت عند ارتفاع 10 m. أولًا، اكتب معادلةً وسيطيةً تمثل الموقع الرأسي للكرة.

$$y = tv_0 \sin\theta - \frac{1}{2}gt^2 + h_0$$ المعادلة الوسيطية للموقع الرأسي

$$= t(24)\sin 53 - \frac{1}{2}(32)t^2 + 4.75$$ $h_0 = 4.75$ و $g = 32$ و $\theta = 53°$ و $v_0 = 24$



[0, 2] scl: 1 by [0, 12] scl: 1

مثّل بيانيًا معادلة الموقع الرأسي والمستقيم $y = 10$.
يقطع المنحنى المستقيم في نقطتين. وتمثل نقطة التقاطع الأولى الكرة حين تتحرك هبوطًا باتجاه السلة. استخدم البند 5: التقاطع (Intersect) في القائمة CALC لإيجاد نقطة التقاطع مع $y = 10$. تساوي القيمة تقريبًا 0.77 s.

حدّد الموقع الأفقي للكرة عند الزمن 0.77 s

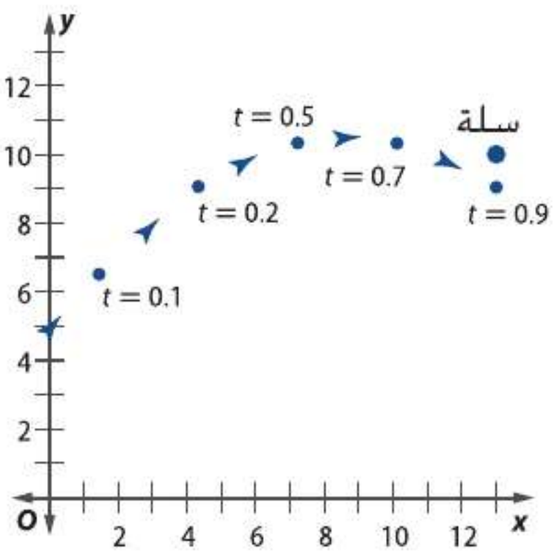
$$x = tv_0 \cos\theta$$ المعادلة الوسيطية للموقع الأفقي

$$= 0.77(24)\cos 53$$ $t \approx 0.77$ و $\theta = 53°$ و $v_0 = 24$

$$\approx 11.1$$ باستخدام الحاسبة

نظرًا إلى أن الموقع الأفقي الأصغر من 13 ft عند بلوغ الكرة ارتفاع 10 ft للمرة الثانية. فلن تبلغ الكرة السلة. ولن تسجّل خديجة الرمية.

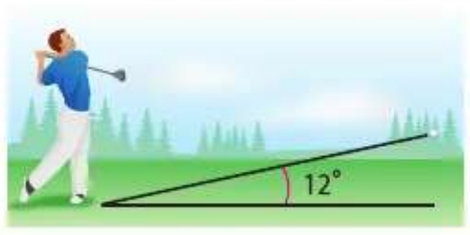
التحقق يمكنك التأكّد من حسابك عبر التمثيل البياني للمعادلات الوسيطية وتحديد مسار الكرة بالنسبة للسلة.



t	x	y	t	x	y
0	0	4.75	0.5	7.22	10.33
0.1	1.44	6.51	0.6	8.67	10.49
0.2	2.89	7.94	0.7	10.11	10.32
0.3	4.33	9.06	0.8	11.55	9.84
0.4	5.78	9.86	0.9	13.00	9.04

تمرين موجّه

6. لعبة الجولف يضرب سعيد كرة الجولف بسرعة ابتدائية تساوي 56 m/s وبزاوية مقدارها 12° فوق أرضٍ مستوية. عند أي مسافةٍ ستحطّ الكرة على الأرض؟



نصيحة دراسية

الجاذبية الأرضية عند سطح الأرض، يبلغ تسارع الجاذبية الأرضية 9.8 m/s^2 للتربيع أو 32 ft/s^2 . وعند حل المسائل، تحقق من استخدام القيمة الصحيحة لتسارع الجاذبية بناءً على الوحدات المستخدمة للسرعة والموقع.

الربط بالحياة اليومية

في شهر أبريل من عام 2007، أصبحت مورغان بريسل أصغر امرأةٍ على الإطلاق تفوز ببطولة اتحاد الجولف للسيدات المحترفات أو ما يعرف بـ LPGA.

المصدر: بطولة اتحاد الجولف للسيدات المحترفات

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تمارين

مثّل بيانيًا المنحنى المعطى لكل زوجٍ من المعادلات الوسيطية في الفترة المعطاة. (المثال 1)

1. $x = t^2 + 3$ و $y = \frac{t}{4} - 5; -5 \le t \le 5$
2. $x = \frac{t^2}{2}$ و $y = -4t; -4 \le t \le 4$
3. $x = -\frac{5t}{2} + 4$ و $y = t^2 - 8; -6 \le t \le 6$
4. $x = 3t + 6$ و $y = \sqrt{t} + 1; 0 \le t \le 9$
5. $x = 2t - 1$ و $y = -\frac{t^2}{2} + 7; -4 \le t \le 4$
6. $x = -2t^2$ و $y = \frac{t}{3} - 6; -6 \le t \le 6$
7. $x = \frac{t}{2}$ و $y = -\sqrt{t} + 5; 0 \le t \le 8$
8. $x = t^2 - 4$ و $y = 3t - 8; -5 \le t \le 5$

اكتب كل زوجٍ من المعادلات الوسيطية بالصورة الديكارتية في المستوى الإحداثي المتعامد. ثم مثل المعادلة بيانيًا واذكر أيّ قيودٍ على المجال. (المثالان 2 و 3)

9. $x = 2t - 5, y = t^2 + 4$
10. $x = 3t + 9, y = t^2 - 7$
11. $x = t^2 - 2, y = 5t$
12. $x = t^2 + 1, y = -4t + 3$
13. $x = -t - 4, y = 3t^2$
14. $x = 5t - 1, y = 2t^2 + 8$
15. $x = 4t^2, y = \frac{6t}{5} + 9$
16. $x = \frac{t}{3} + 2, y = \frac{t^2}{6} - 7$

17. **الممثلون البدلاء** خلال تصوير أحد الأفلام، يقفز أحد الممثلين البدلاء من حافة أحد المباني. وتؤدي البكرات المربوطة بالممثل البديل إلى سقوطه سقوطًا حرًا يمكن تمثيله بالمعادلة $y = -16t^2 + 15t + 100$ وبحركةٍ أفقيةٍ يمكن تمثيلها بالمعادلة $x = 4t$. وفيها x و y تقاسان بالمتر و t تقاس بالثواني. اكتب معادلةً بالصورة الديكارتية في المستوى الإحداثي المتعامد ومثّلها بيانيًا لتمثيل سقوط الممثل من أجل $0 \ge 3 \le t$ (المثال 3)

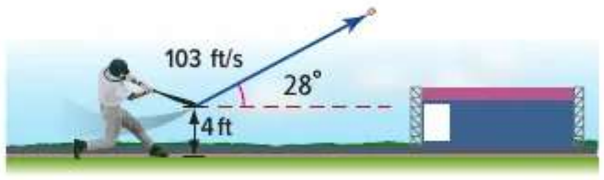
اكتب كل زوجٍ من المعادلات الوسيطية بالصورة الديكارتية في المستوى الإحداثي المتعامد. ثمّ مثّل المعادلة بيانيًا. (المثال 4)

18. $x = 3 \cos \theta$ و $y = 5 \sin \theta$
19. $x = 7 \sin \theta$ و $y = 2 \cos \theta$
20. $x = 6 \cos \theta$ و $y = 4 \sin \theta$
21. $x = 3 \cos \theta$ و $y = 3 \sin \theta$
22. $x = 8 \sin \theta$ و $y = \cos \theta$
23. $x = 5 \cos \theta$ و $y = 6 \sin \theta$
24. $x = 10 \sin \theta$ و $y = 9 \cos \theta$
25. $x = \sin \theta$ و $y = 7 \cos \theta$

استخدم كل وسيط لكتابة المعادلات الوسيطية التي يمكن أن تمثل كل معادلة. ثم مثّل المعادلات بيانيًا، مع الإشارة إلى سرعة الرسم البياني وتوجيهه. (المثال 5)

26. $t = 3x - 2; y = x^2 + 9$
27. $t = 8x; y^2 = 9 - x^2$
28. $t = 2 - \frac{x}{3}; y = \frac{x^2}{12}$
29. $t = \frac{x}{5} + 4; y = 10 - x^2$
30. $t = 4x + 7; y = \frac{x^2 - 1}{2}$
31. $t = \frac{1 - x}{2}; y = \frac{3 - x^2}{4}$

32. **البيسبول** يضرب لاعبٌ كرة البيسبول بزاوية $28°$ وبسرعةٍ ابتدائيةٍ تساوي 103 ft/s. يرتفع موقع ضرب الكرة مسافة 4 ft عن الأرض في لحظة اصطدام المضرب بالكرة. على فرض أن أحدًا من اللاعبين لم يمسك الكرة، حدّد المسافة التي تقطعها الكرة. (المثال 6)



33. **لعب الكرة** يحاول عبيد إصابة هدف يبعد 43 yd فيركل الكرة بزاوية $41°$ وبسرعة ابتدائية تساوي 70 ft/s. ارتفاع الهدف 15 ft فهل ركلته طويلةٌ بما يكفي لإصابة الهدف؟ (المثال 6)

اكتب كل زوجٍ من المعادلات الوسيطية بالصورة الديكارتية في المستوى الإحداثي المتعامد. ثم اذكر أي قيودٍ على المجال.

34. $x = \sqrt{t} + 4$
$y = 4t + 3$
35. $x = \log t$
$y = t + 3$
36. $x = \sqrt{t - 7}$
$y = -3t - 8$
37. $x = \log (t - 4)$
$y = t$
38. $x = \frac{1}{\sqrt{t + 3}}$
$y = t$
39. $x = \frac{1}{\log (t + 2)}$
$y = 2t - 4$

40. **التنس** يضرب مازن كرة مضربٍ عند ارتفاع 55 cm عن الأرض وبزاوية $15°$ مع خط الأفق. السرعة الابتدائية للكرة 18 m/s.
   a. استخدم حاسبة التمثيل البياني لتمثيل مسار كرة المضرب باستخدام المعادلات الوسيطية.
   b. كم تبقى الكرة في الهواء قبل أن تصل الأرض؟
   c. إذا كان مازن يبعد 10 m عن الشبكة، وكان ارتفاع الشبكة 1.5 m عن الأرض، فهل ستعبر الكرة فوق الشبكة؟ وإن كان ذلك، بكم مترٍ ستتخطى الكرة الشبكة؟ وإن لم يكن ذلك، فما مسافة اصطدام الكرة بالأرض قبل الشبكة؟

اكتب مجموعة معادلات وسيطية لكل مستقيم أو قطعة مستقيمة مما يلي وفق الخواص التالية.

41. مستقيم ميله 3 يمر بالنقطة $(4, 7)$
42. مستقيم ميله -0.5 يمر بالنقطة $(3, -2)$
43. قطعة مستقيمة طرفاها النقطتان $(-2, -6)$ و $(2, 10)$
44. قطعة مستقيمة طرفاها النقطتان $(7, 13)$ و $(13, 11)$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

صِل بين كل مجموعة من المعادلات الوسيطية وتمثيلها البياني المقابل.

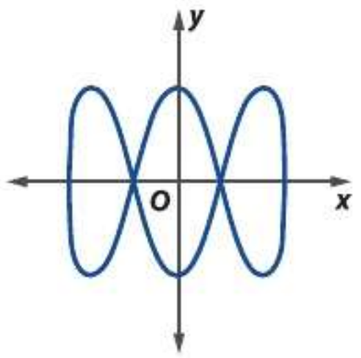
45. $x = \cos 2t, y = \sin 4t$

46. $x = \cos 3t, y = \sin t$

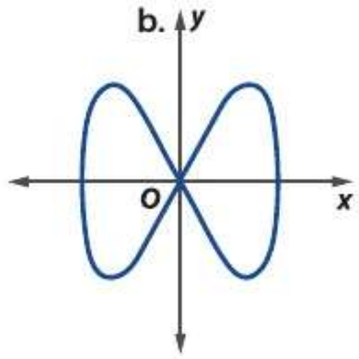
47. $x = \cos t, y = \sin 3t$

48. $x = \cos 4t, y = \sin 3t$

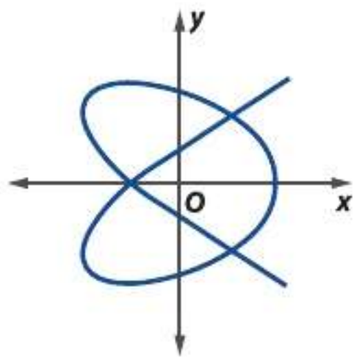
a.



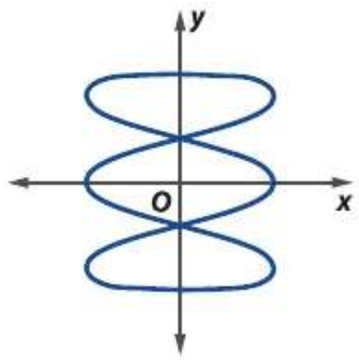
b.



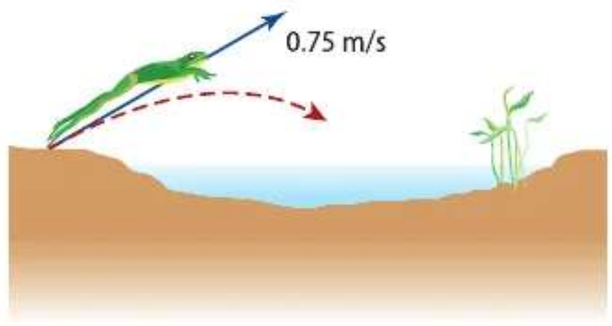
c.



d.



49. علم الأحياء يقفز ضفدع من ضفة جدولٍ بسرعةٍ ابتدائية تساوي 0.75 m/s وبزاوية قياسها 45° بالنسبة للاتجاه الأفقي. يقع سطح الجدول على بعد 0.3 m تحت حافة الضفة. إذا كانت g تساوي 9.8 m/s^2.



a. اكتب المعادلة الوسيطية التي تصف موقع الضفدع عند الزمن t. وافترض أن سطح الماء يقع على المستقيم $y = 0$.

b. إذا كان عرض الجدول 0.5 m، فهل سيبلغ الضفدع الضفة الثانية التي تقع على مستوى الجدول نفسه؟ وإن لم يكن ذلك، فكم تبعد نقطة اصطدام الضفدع بالماء عن الضفة الأخرى؟

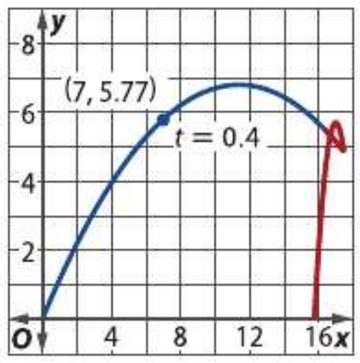
c. إذا استطاع الضفدع أن يقفز على ورقة زنبقٍ تطفو فوق سطح الجدول وتبعد مسافة 0.4 m عن موقع القفز، واستغرق كي يبلغها 0.38 s، فكم كانت السرعة الابتدائية للضفدع؟

50. السباق تتنافس هالة وهداية في سباق 100 m. وبعد إطلاق رصاصة الانطلاق، تنطلق هالة بسرعة 0.8 m/s^2 بعد تأخيرٍ لمدة 0.1 s من النقطة $(0, 2)$ وتنطلق هداية بسرعة 8.1 m/s^2 بعد تأخيرٍ لمدة 0.3 s من النقطة $(0, 5)$.

a. باستخدام المحور الرأسي y بمثابة خط البداية وعلى فرض أن الفتاتين تركضان بموازاة المحور الأفقي x، اكتب معادلتين وسيطيتين تمثلان موقع كلٍ منهما بعد t ثوان.

b. من ستفوز بالسباق؟ إذا ركضت الفتاتان مسافة 200 m بدلًا من 100 m، فمن ستفوز؟ اشرح إجابتك.

51. كرة القدم يمثّل التمثيل البياني المبيّن أدناه مسار كرةٍ ركلها أحد اللاعبين ومن ثمّ ضربها لاعبٌ آخر برأسه. مسار الكرة بعد ركلها من قِبَل اللاعب الأول موضح باللون الأزرق. ومسارها بعد ضربها بالرأس من قِبَل اللاعب الثاني موضح باللون الأحمر.



a. إذا ركل اللاعب الأول الكرة بزاوية 50°، جد سرعتها الابتدائية.

b. ما هو زمن وصول الكرة إلى اللاعب الثاني إذا كان يقف على بعد 17.5 ft؟

c. إذا ضرب اللاعب الثاني الكرة برأسه بزاوية قياسها 75° وبسرعةٍ ابتدائية تساوي 8 ft/s عند ارتفاع 4.75 ft، فكم تبقى الكرة في الهواء على وجه التقريب بدءًا من لحظة ركلها أول مرةٍ وحتى هبوطها إلى الأرض؟

52. التمثيلات المتعددة سوف تدرس في هذه المسألة الدويري، وهو المنحنى الذي يرسمه مسارٌ نقطةٍ على محيطِ دائرةٍ نصف قطرها وحدةٌ واحدةٌ أثناء دحرجتها على طول المحور الأفقي x.

a. بيانيًا استخدم حاسبةً بيانيةً لتمثيل المعادلتين الوسيطيتين $x = t - \sin t$ و $y = 1 - \cos t$، وفيهما t تقاس بالقياس الدائري (الراديان).

b. تحليليًا ما المسافة بين نقطتي التقاطع مع المحور الأفقي x؟ صِف ماذا تمثل نقطتا التقاطع مع المحور الأفقي x وماذا تمثل المسافة بينهما.

c. تحليليًا ما القيمة العظمى لـ y؟ صِف ما تمثله هذه القيمة وكيف تتغير بالنسبة لدوائر ذات أنصاف أقطارٍ مختلفة.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدم مهارات التفكير العليا

53. تحدٍّ خذ المستقيم ℓ ذا المعادلتين الوسيطيتين $x = 2 + 3t$ و $y = -t + 5$ اكتب مجموعة معادلات وسيطية للمستقيم m الموازي لـ ℓ والذي يضم النقطة $(4, 10)$.

54. الكتابة في الرياضيات اشرح السبب في وجود عددٍ لا نهائيٍ من مجموعات المعادلات الوسيطية لوصف مستقيمٍ في المستوى xy.

55. التبرير حدّد إن كانت المعادلات الوسيطية الخاصة بحركة المقذوفات يمكن أن تنطبق على أجسام ترمى بزاوية قياسها 90°. اشرح استنتاجك.

56. تحدٍّ لدينا مستقيمٌ في الفضاء ثلاثي الأبعاد يضم النقطتين $P(2, 3, -8)$ و $Q(-1, 5, -4)$. جد مجموعتي المعادلات الوسيطية للمستقيم.

57. الكتابة في الرياضيات اشرح أفضلية استخدام المعادلات الوسيطية على استخدام المعادلات بالصورة الديكارتية في المستوى الإحداثي عند تحليل المركبتين الأفقية/الرأسية لتمثيلٍ بياني.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

مراجعة شاملة

مثّل كلّ معادلةٍ عند الزاوية المشار إليها.

58. $\frac{(x')^2}{9} - \frac{(y')^2}{4} = 1$ عند الدوران بزاوية $60°$ من المحور xy

59. $(x')^2 - (y')^2 = 1$ عند الدوران بزاوية $45°$ من المحور xy

اكتب معادلةً تمثل القطع الزائد ضمن الخواص التالية.

60. رأساه $(5, -8)$، $(5, 4)$؛ وطول محوره المرافق 4

61. طول محوره القاطع 4؛ وبؤرتاه $(3, -1)$، $(3, 5)$

62. البيت الأبيض ثمّة مساحةٌ مفتوحةٌ يطلق عليها القطع الناقص. اكتب معادلة لتمثيل القطع الناقص. افترض أن نقطة الأصل هي مركز القطع الناقص.



حوّل كلًا من التعابير التالية إلى أبسط صورة.

63. $\frac{\sin x}{\csc x - 1} + \frac{\sin x}{\csc x + 1}$

64. $\frac{1}{1 - \cos x} + \frac{1}{1 + \cos x}$

استخدم خواص اللوغاريتمات لإعادة كتابة كل لوغاريتم من اللوغاريتمات المبينة أدناه وفق الصيغة $a \ln 2 + b \ln 3$، حيث a و b ثابتان. ثمّ قدّر قيمة كل لوغاريتم إذا علمت أن $\ln 2 \approx 0.69$ و $\ln 3 \approx 1.10$

65. $\ln 54$

66. $\ln 24$

67. $\ln \frac{8}{3}$

68. $\ln \frac{9}{16}$

لكل دالّة، حدّد أي خطوط تقاربي ونقاط تقاطع. ثمّ مثّل الدالّة واذكر مجالها.

69. $h(x) = \frac{x}{x + 6}$

70. $h(x) = \frac{x^2 + 6x + 8}{x^2 - 7x - 8}$

71. $f(x) = \frac{x^2 + 8x}{x + 5}$

72. $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 3}{x^3 + x^2 - 6x}$

حُـلّ كلٍ من المعادلات التالية.

73. $\sqrt{3z - 5} - 3 = 1$

74. $\sqrt{5n - 1} = 0$

75. $\sqrt{2c + 3} - 7 = 0$

76. $\sqrt{4a + 8} + 8 = 5$

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

77. SAT/ACT باستثناء المربعات المظللة، يحوي كل مربع في التمثيل البياني عددًا يساوي مجموع العدد الموجود في المربع الواقع فوقه والعدد الموجود في المربع الواقع إلى يساره. فعلى سبيل المثال، العدد 4 في المربع غير المظلل هو مجموع العدد 2 الموجود في المربع الواقع فوقه والعدد 2 في المربع الواقع إلى يساره مباشرةً. ما قيمة x؟

0	1	2	3	4	5
1	2	4			
2					
3			x		
4					
5					

A 7 **B** 8 **C** 15 **D** 23 **E** 30

78. يقوم صالح و سلطان بتجربةٍ في الفيزياء يطلقان خلالها نموذج صاروخ. من المفروض أن يحرّر الصاروخ مظلةً عند ارتفاع 91.5 m في الهواء، وبعد 7 s من الإقلاع. يطلق الطالبان الصاروخ عند زاوية قياسها $78°$ بالنسبة للاتجاه الأفقي. ولحماية الطلاب الآخرين من الصاروخ الساقط، يحتاج المعلّم إلى وضع شاراتٍ تحذيريةٍ على بعد 45.7 m من موضع تحرير المظلة. فكم ينبغي أن تبعد الإشارات التحذيرية عن نقطة إطلاق الصاروخ؟

F 111.6 m
G 116.2 m
H 121.6 m
J 126.2 m

79. إجابة حرّة يتحرّك جسمٌ على طول منحنًى معادلتاه الوسيطيتان $x = \sqrt{t}$، $y = \frac{10\sqrt{3t} \pm \sqrt{496 - 2304t}}{62}$

a. حوّل المعادلتين الوسيطيتين إلى معادلتين بالصورة الديكارتية في المستوى الإحداثي المتعامد.

b. حدّد القطع المخروطي الذي يمثّله المنحنى.

c. اكتب معادلةً تمثل المنحنى في المستوى $x\ y$، على فرض أنه تمّ دورانه بزاوية $30°$.

d. حدّد الاختلاف المركزي للقطع المخروطي.

e. حدّد موقع البؤرتين في المستوى $x\ y'$ إن وجدتا.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

6-8 مختبر تقنية التمثيل البياني
النمذجة باستخدام المعادلات الوسيطية

الهدف

استخدام حاسبة التمثيل البياني لتمثيل الدوال بارامتريًا.

كما هو مبيّن في الدرس 7-6، يمثل المتغير المستقل t في المعادلات الوسيطية الزمن. ويعكس هذا الوسيط سرعة رسم التمثيل البياني. إذا أتمّ تمثيلٌ بيانيٌ خلال زمن $0 \le t \le 10$. في حين استغرق إتمام تمثيلٍ بيانيٍ مطابقٍ له الزمن $0 \le t \le 10$. إذًا فإن التمثيل البياني الأول أسرع.

النشاط التمثيل البياني الوسيطي

لعب الكرة يقف عمر بجوار شقيقته نورا و يرميان كرةً في الزمن نفسه تمامًا. ترمي نورا الكرة عند سرعة ابتدائية تساوي 20 m/s وبزاوية قياسها 60°. وبرمي عمر الكرة عند سرعة ابتدائية تساوي 15 m/s وبزاوية قياسها 45°. على فرض أن الكرتين ترميان من الارتفاع الابتدائي نفسه، مثّل الرميتين على حاسبةٍ للتمثيل البياني.

الخطوة 1 المعادلات الوسيطية لكل رميةٍ هي كالتالي.

نورا: $x = 20t \cos 60$ $\quad y = 20t \sin 60 - 4.9t^2$

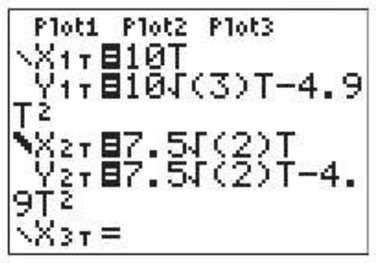
$= 10t$ $\quad = 10\sqrt{3}t - 4.9t^2$

عمر: $x = 15t \cos 45$ $\quad y = 15t \sin 45 - 4.9t^2$

$= 7.5\sqrt{2}t$ $\quad = 7.5\sqrt{2}t - 4.9t^2$

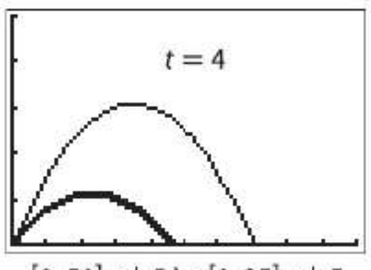
الخطوة 2 ضبط النمط. من القائمة MODE، اختر degree و par و simul. وهذا يتيح تمثيل المعادلات بيانيًا في الوقت نفسه. أدخل المعادلات الوسيطية. في الصيغة الوسيطية، تستخدم X,T,θ,n الرمز t بدلًا من x. اضبط إظهار المجموعة الثانية من المعادلات على الوضعية المظللة للتمييز بين الرميات.



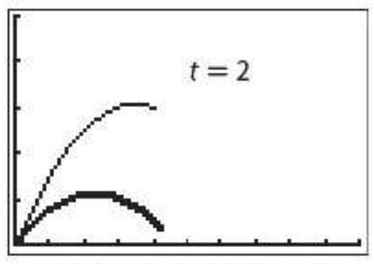


الخطوة 3 اضبط قيم t لتتراوح بين 0 و 8 بمثابة تقديرٍ لمدد الرمي. اضبط tstep على 0.1 لتشاهد الرميات على التمثيل البياني.

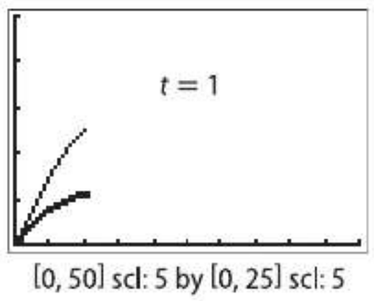
الخطوة 4 مثّل المعادلات بيانيًا.



[0, 50] scl: 5 by [0, 25] scl: 5



[0, 50] scl: 5 by [0, 25] scl: 5



[0, 50] scl: 5 by [0, 25] scl: 5

ترتفع رمية نورا أكثر تقطع مسافةً أكبر في حين تحطّ رمية عمرعلى الأرض أولًا.

نصيحة دراسية

ضبط الوسيطات استخدم الحالة الواردة في المعادلة بمثابة دليلٍ إرشادي لضبط مجال قيم x و y و t.

تمارين

1. **لعب الكرة** بلغت سرعة رمية عمر التالية 21 m/s عند زاوية قياسها 50°. وبعد مرور ثانية واحدة، رمت نورا كرتها بسرعة 24 m/s عند زاوية قياسها 35°. مثّل الرميتين على حاسبةٍ للتمثيل البياني وفسّر النتائج.
2. **البيسبول** رمت نورا كرة بيسبول بسرعة 27 m/s وبزاوية قياسها 82°. وبعد مرور ثانية واحدة، ضرب عمر كرةً بسرعة 45 m/s وبزاوية قياسها 20°. فعلى فرض أن الكرتين لا تزالان متجاورتين وأن الارتفاع الابتدائي لضربة عمر أخفض بمترٍ واحد. مثّل الموقف على حاسبةٍ للتمثيل البياني وفسّر النتائج.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

6 دليل الدراسة والمراجعة

دليل الدراسة

المفاهيم الأساسية

القطع المكافئ (الدرس 1-6)

- الصيغة القياسية: $y = a(x - h)^2 + k$
  $x = a(y - k)^2 + h$

الدوائر (الدرس 2-6)

- يمكن كتابة معادلة دائرة بمركز (h, k) ونصف قطر r في الصيغة

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

القطع الناقص (الدرس 3-6)

- الصيغة القياسية: أفقي $\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$

رأسي $\frac{(y - k)^2}{a^2} + \frac{(x - h)^2}{b^2} = 1$

القطع الزائد (الدرس 4-6)

- الصيغة القياسية: أفقي $\frac{(x - h)^2}{a^2} - \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$

رأسي $\frac{(y - k)^2}{a^2} - \frac{(x - h)^2}{b^2} = 1$

حل الأنظمة الخطية وغير الخطية (الدرس 6-6)

- يمكن حل نظام المعادلات التربيعية باستخدام التعويض والحذف.
- ويمكن أن يكون لنظام المعادلات التربيعة حلاً أو اثنين أو ثلاثة أو أربعة أو لا يكون لها حلاً على الإطلاق.

مطويات منظّم الدراسة

تأكد من إدراج المفاهيم الأساسية في المطوية.



الدوران المحوري للقطوع المخروطية (الدرس 7-6)

- يمكن تحويل معادلة في المستوى xy إلى معادلة في المستوى $x'y'$ باستخدام العلاقة $x = x' \cos \theta - y' \sin \theta$ و $y = x' \sin \theta + y' \cos \theta$
- يمكن تحويل معادلة في المستوى $x'y'$ إلى معادلة في المستوى xy باستخدام العلاقتين $x' = x \cos \theta + y \sin \theta$، و $y' = y \cos \theta - x \sin \theta$

المعادلات الوسيطية (الدرس 8-6)

- تستخدم المعادلات الوسيطية لوصف المركبتين الأفقية والرأسية لمعادلةٍ على نحوٍ منفصل، وذلك بدلالة المتغير tبصورةٍ عامة.
- بالنسبة لجسم قُذف بزاوية θ مع خط الأفق وبسرعة متجهة ابتدائية v_0، حيث أن g ثابت الجاذبية الأرضية و t الزمن و h_0 الارتفاع الابتدائي، فإن مسافته الرأسية تعطى بالعلاقة $x = tv_0 \cos \theta$، وتعطى مسافته الأفقية بالعلاقة $y = tv_0 \sin \theta - \frac{1}{2}gt^2 + h_0$

المفردات الأساسية

مركز الدائرة center of a circle	بؤرتا القطع الناقص foci of an ellipse
مركز القطع الناقص center of an ellipse	بؤرة focus
دائرة circle	قطع زائد hyperbola
محور مرافق conjugate axis	وتر بؤري عمودي latus rectum
فرق ثابت constant difference	محور أكبر major axis
مجموع ثابت constant sum	محور أصغر minor axis
رؤوس مرافقة للقطع الزائد co-vertices of a hyperbola	قطع مكافئ parabola
رؤوس مرافقة للقطع الناقص co-vertices of an ellipse	نصف القطر radius
دليل directrix	محور قاطع transverse axis
قطع ناقص ellipse	رؤوس القطع الزائد vertices of a hyperbola
بؤرتا القطع الزائد foci of a hyperbola	رؤوس القطع الناقص vertices of an ellipse
المركز Center	المنحنى الوسيطي Parametric curve
المركزي الاختلاف Eccentricity	معادلة وسيطية Parametric equation
محور التماثل Axis of symetry	محور التماثلAxis of symetry
المركز Center	المركزي الاختلاف Eccentricity
	المعادلة الوسيطية Parametric Equation
	المنحنى الوسيطي Parametric Cueve

مراجعة المفردات

حدد ما إذا كانت كل عبارة صحيحة أم *خاطئة*. إذا كانت *خاطئة*، فاستبدل المصطلح الموضوع تحته خط لتكوين عبارة صحيحة.

1. مجموعة جميع النقاط في المستوى التي تقع على بعد متساوٍ من نقطة محددة، تسمى البؤرة يُطلق عليها المركز.
2. القطع الناقص هو مجموعة جميع النقاط في مستوٍ والتي يكون مجموع بعدي كلٍ منها عن نقطتين ثابتتين ثابتًا.
3. النقاط الطرفية للمحور الأكبر لقطع ناقص هما بؤرتا القطع الناقص.
4. نصف القطر هو المسافة من مركز الدائرة لأي نقطة عليها.
5. يطلق على القطعة المستقيمة ذات النقاط الطرفية على قطع مكافئ المارة من بؤرة القطع المكافئ والعمودية على محور التماثل اسم وتر بؤري عمودي.
6. لكل قطع زائد محورا تماثل، محور قاطع ومحور أكبر.
7. الدليل هي مجموعة جميع النقاط في مستوى والتي تقع على مسافة واحدة من نقطة محددة في ذلك المستوى.
8. القطع الزائد هو مجموعة جميع النقاط في مستوٍ والتي تكون القيمة المطلقة لمجموع البعد من أي نقطة على القطع الزائد إلى نقطتين محددتين ثابتًا.
9. يمكن تعريف القطع المكافئ على أنه مجموعة جميع نقاط المستوى التي تبعد مسافةً واحدةً عن البؤرة ومستقيمٍ محدد يدعى الدليل.
10. المحور الأكبر هو المحور الأطول من محوري التناظر لقطع ناقص.
11. يمكن كتابة معادلة أي تمثيلٍ بيانيٍ بواسطة المتغيرين x و y أو باستخدام المعادلات الوسيطية مع استخدام الرمز t أو الزاوية θ.
12. التمثيل البياني للعلاقة $f(t) = (\sin t, \cos t)$ هو _____ على شكلٍ دائرةٍ ترسم باتجاه عقارب الساعة.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مراجعة درس بدرس

6-1 القطع المكافئ

مثّل كل معادلة بيانيًا.

13. $y = 3x^2 + 24x - 10$
14. $3y - x^2 = 8x - 11$
15. $x = \frac{1}{2}y^2 - 4y + 3$
16. $x = y^2 - 14y + 25$

اكتب كل معادلة بالصيغة القياسية. حدد رأس القطع المكافئ ومحور تماثله واتجاه فتحته.

17. $y = -\frac{1}{2}x^2$
18. $y = 4x^2 - 16x + 9$
19. $x - 6y = y^2 + 4$
20. $x = y^2 + 14y + 20$
21. **الرياضة** عندما تُركل كرة قدم، فإنها تتحرك في مسار له شكل قطع مكافئ. افترض أن كرة القدم رُكلت من مستوى الأرض ووصلت إلى أقصى ارتفاع وهو 50 ft، ثم هبطت على الأرض على بعد 200 ft. وبافتراض أنه تم ركل الكرة من نقطة الأصل، اكتب معادلة القطع المكافئ التي تمثل رحلة الكرة.

مثال 1

اكتب $3y - x^2 = 4x + 7$ في الصيغة القياسية. حدد رأس القطع المكافئ ومحور تماثله واتجاه فتحته.

اكتب المعالة في الصيغة $y = a(x - h)^2 + k$ بإكمال المربع.

اعزل الحد الذي يحوي x.
$3y = x^2 + 4x + 7$

أكمل المربع.
$3y = (x^2 + 4x + \blacksquare) + 7 - \blacksquare$

$\left(\frac{4}{2}\right)^2 = 4$
$3y = (x^2 + 4x + 4) + 7 - 4$

$(x^2 + 4x + 4) = (x + 2)$
$3y = (x + 2)^2 + 3$

اقسم كل طرف على 3.
$y = \frac{1}{3}(x + 2)^2 + 1$

الرأس: $(-2, 1)$؛ محور التماثل: $x = -2$؛ اتجاه الفتحة: لأعلى حيث إن $a > 0$.

6-2 الدوائر

اكتب معادلة للدائرة التي تحقق كل مجموعة من الشروط.

22. المركز $(-1, 6)$، نصف القطر 3 وحدات
23. النقطتان الطرفيتان للقطر $(2, 5)$ و $(0, 0)$
24. النقطتان الطرفيتان للقطر $(-2, 4)$ و $(-2, -6)$

جد مركز كل دائرة ونصف قطرها. ثم مثّل الدائرة بيانيًا.

25. $(x + 5)^2 + y^2 = 9$
26. $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 25$
27. $(x + 2)^2 + (y - 8)^2 = 1$
28. $x^2 + 4x + y^2 - 2y - 11 = 0$
29. **الصوت** تقع سماعة خارجية في مدرسة عند النقطة $(65, 40)$. ويمكن سماع السماعة في دائرة نصف قطرها 30.5 m. اكتب معادلة تمثل الحدود لمحتملة لصوت السماعة الخارجية.

مثال 2

جد مركز الدائرة ونصف قطرها عن طريق معادلة. $x^2 - 2x + y^2 + 6y + 6 = 0$. ثم مثل الدائرة بيانيًا.

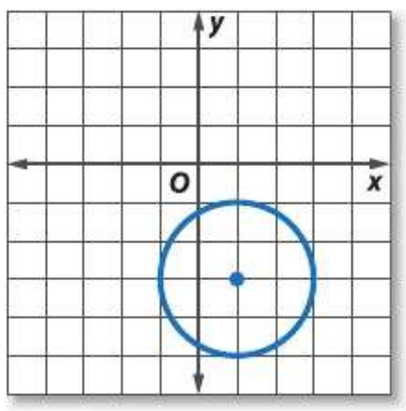
أكمل المربعات.

$x^2 - 2x + y^2 + 6y + 6 = 0$

$(x^2 - 2x + \blacksquare) + (y^2 + 6y + \blacksquare) = -6 + \blacksquare + \blacksquare$

$(x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 6y + 9) = -6 + 1 + 9$

$(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 4$



مركز الدائرة عند $(1, -3)$. ونصف القطر هو 2.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

6-3 القطع الناقص

جـد إحداثيات المركز والبؤرتين وطولي المحورين الأكبر والأصغر لقطع ناقص بالمعادلة المعطاة. ثم مثل القطع الناقص بيانيًا.

30. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{36} = 1$

31. $\frac{y^2}{10} + \frac{x^2}{5} = 1$

32. $\frac{x^2}{36} + \frac{(y-4)^2}{4} = 1$

33. $27x^2 + 9y^2 = 81$

34. $\frac{(x+1)^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{16} = 1$

35. $9x^2 + 4y^2 + 54x - 8y + 49 = 0$

36. $9x^2 + 25y^2 - 18x + 50y - 191 = 0$

37. $7x^2 + 3y^2 - 28x - 12y = -19$

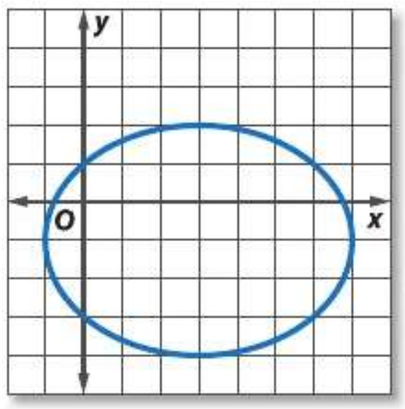
38. تصميم الحدائق تمتلك عائلة جاسم حديقة في الساحة الأمامية لمنزلهم تشبه القطع الناقص. ويبلغ المحور الأكبر 10 m والمحور الأصغر 10 m. اكتب معادلةً لتمثيل الحديقة. افترض أن نقطة الأصل تقع في مركز الحديقة وأن المحور الأكبر أفقي.

مثال 3

جـد إحداثيات المركز والبؤرتين وطولي المحورين الأكبر والأصغر لقطع ناقص بالمعادلة.
$9x^2 + 16y^2 - 54x + 32y - 47 = 0$. ثم مثّل القطع الناقص بيانيًا.

أولاً، حوّل إلى الصيغة القياسية.

$$9x^2 + 16y^2 - 54x + 32y - 47 = 0$$
$$9(x^2 - 6x + \blacksquare) + 16(y^2 + 2y + \blacksquare) = 47 + 9(\blacksquare) + 16(\blacksquare)$$
$$9(x^2 - 6x + \mathbf{9}) + 16(y^2 + 2y + \mathbf{1}) = 47 + 9(\mathbf{9}) + 16(\mathbf{1})$$
$$9(x-3)^2 + 16(y+1)^2 = 144$$
$$\frac{(x-3)^2}{16} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1$$



يقع مركز القطع الناقص عند $(3, -1)$. القطع الناقص أفقي. $a^2 = 16$، إذًا $a = 4$. $b^2 = 9$، إذًا $b = 3$.

طول المحور الأكبر يساوي 4×2 أو 8. طول المحور الأصغر يساوي 3×2 أو 6. لإيجاد البؤرتين: $c^2 = 16 - 9$ أو 7. إذًا $c = \sqrt{7}$. البؤرتان هي $(3 - \sqrt{7}, -1)$ و $(3 + \sqrt{7}, -1)$

6-4 القطع الزائد

مثّل كل قطع زائد بيانيًا. حدّد الرأسين والبؤرتين وخطي التقارب.

39. $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{4} = 1$

40. $\frac{(x-3)^2}{1} - \frac{(y+2)^2}{4} = 1$

41. $\frac{(y+1)^2}{16} - \frac{(x-4)^2}{9} = 1$

42. $4x^2 - 9y^2 = 36$

43. $9y^2 - x^2 - 4x + 18y + 4 = 0$

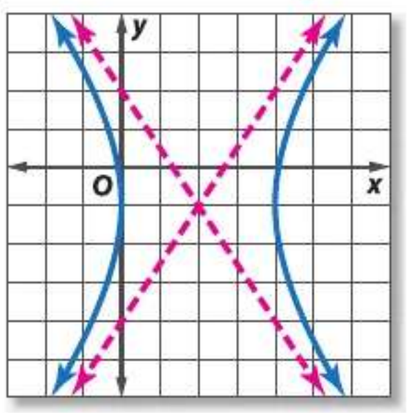
44. المرايا تتخذ مرآة زائدية شكل جزء من قطع زائد. وتعكس أشعة الضوء المتوجهة نحو إحدى البؤر إلى البؤرة الثانية. افترض أن المرآة الزائدية تمثل بالجزء العلوي من القطع الزائد $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$. يقع مصدر الضوء عند $(0, -10)$. أين سيقع الضوء على المرآة بحيث ينعكس على النقطة $(0, -5)$؟

مثال 4

مثّل $9x^2 - 4y^2 - 36x - 8y - 4 = 0$ بيانيًا. حدّد الرأسين والبؤرتين وخطي التقارب.

أكمل المربعات.

$$9x^2 - 4y^2 - 36x - 8y - 4 = 0$$
$$9(x^2 - 4x + \blacksquare) - 4(y^2 + 2y + \blacksquare) = 4 + 9(\blacksquare) - 4(\blacksquare)$$
$$9(x^2 - 4x + \mathbf{4}) - 4(y^2 + 2y + \mathbf{1}) = 4 + 9(\mathbf{4}) - 4(\mathbf{1})$$
$$9(x-2)^2 - 4(y+1)^2 = 36$$
$$\frac{(x-2)^2}{4} - \frac{(y+1)^2}{9} = 1$$



يقع المركز عند $(2, -1)$. يقع الرأسان عند $(0, -1)$ و$(4, -1)$. تقع البؤرتان على $(2 + \sqrt{13}, -1)$ و $(2 - \sqrt{13}, -1)$ معادلة خطوط التقارب هي $y + 1 = \pm\frac{3}{2}(x - 2)$

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

6-5 تحديد القطوع المخروطية

اكتب كل معادلة بالصيغة القياسية. اذكر إن كان التمثيل البياني للمعادلة *قطعًا مكافئًا أم دائرة أم قطعًا ناقصًا أم قطعًا زائدًا*. ثم مثّل بيانيًا.

45. $3x^2 + 12x - y + 8 = 0$

46. $9x^2 + 16y^2 = 144$

47. $x^2 + y^2 - 8x - 2y + 8 = 0$

48. $-9x^2 + y^2 + 36x - 45 = 0$

بدون كتابة المعادلة بالصيغة القياسية، اذكر إن كان التمثيل البياني لها *قطعًا مكافئًا أم دائرةً أم قطعًا ناقصًا أم قطعًا زائدًا*.

49. $7x^2 + 9y^2 = 63$

50. $5y^2 + 2y + 4x - 13x^2 = 81$

51. $x^2 - 8x + 16 = 6y$

52. $x^2 + 4x + y^2 - 285 = 0$

53. الضوء افترض أن حافة ظل يمكن تمثيلها من خلال المعادلة $16x^2 + 25y^2 - 32x - 100y - 284 = 0$

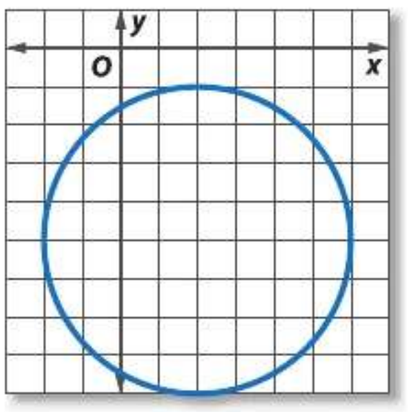
a. ما شكل الظل؟

b. مثّل المعادلة بيانيًا.

مثال 5

اكتب $3x^2 + 3y^2 - 12x + 30y + 39 = 0$ في الصيغة القياسية. اذكر إن كان التمثيل البياني للمعادلة *قطعًا مكافئًا أم دائرة أم قطعًا ناقصًا أم قطعًا زائدًا*. ثم مثل المعادلة بيانيًا.

$$3x^2 + 3y^2 - 12x + 30y + 39 = 0$$
$$3(x^2 - 4x + \blacksquare) + 3(y^2 + 10y + \blacksquare) = -39 + 3(\blacksquare) + 3(\blacksquare)$$
$$3(x^2 - 4x + 4) + 3(y^2 + 10y + 25) = -39 + 3(4) + 3(25)$$
$$3(x - 2)^2 + 3(y + 5)^2 = 48$$
$$(x - 2)^2 + (y + 5)^2 = 16$$



في هذه المعادلة $A = 3$ و $C = 3$. حيث إن A و C كلاهما موجبان $A = C$. فإن التمثيل البياني لدائرة. يقع المركز عند $(2, -5)$. ونصف القطر 4.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

6-6 حل الأنظمة الخطية واللاخطية

حُـلّ كل من أنظمة المعادلات التالية.

55. $x - 2y = 2$
$y^2 - x^2 = 2x + 4$

54. $x^2 + y^2 = 8$
$x + y = 0$

57. $3x^2 - y^2 = 11$
$x^2 + 4y^2 = 8$

56. $y + x^2 = 4x$
$y + 4x = 16$

59. $\frac{x^2}{30} + \frac{y^2}{6} = 1$
$x = y$

58. $5x^2 + y^2 = 30$
$9x^2 - y^2 = -16$

60. العلوم الفيزيائية دُفعت كرتين في الهواء في نفس الوقت. وكان الارتفاع الذي دفعت منه الكرتين مختلفًا. ويمثل أحد الارتفاعين y بالأقدام من خلال $y = -16t^2 + 80t + 25$ حيث إن t هو الزمن بالثواني. ويمثل ارتفاع الكرة الأخرى من خلال $y = -16t^2 + 30t + 100$.

a. كم ثانية ستمر حتى تكون الكرتان على نفس الارتفاع؟

b. ما الارتفاع؟

61. الهندسة المعمارية يبني مهندس معماري المدخل الأمامي لمبنى على شكل قطع مكافئ بالمعادلة $y = -\frac{1}{10}(x - 10)^2 + 20$. وبينما يتم بناء المدخل، يضع فريق الإنشاء دعاميتن بالمعادلات $y = -x + 10$ و $y = x - 10$. أين تلتقي الدعامتين مع القطع المكافئ؟

حُـلّ أنظمة المتباينات باستخدام التمثيل البياني.

62. $x^2 + y^2 < 64$
$x^2 + 16(y - 3)^2 < 16$

63. $x^2 + y^2 < 49$
$16x^2 - 9y^2 \geq 144$

64. $x + y < 4$
$9x^2 - 4y^2 \geq 36$

65. $x^2 + y^2 < 25$
$4x^2 - 9y^2 < 36$

66. $x^2 + y^2 < 36$
$4x^2 + 9y^2 > 36$

67. $y^2 < x$
$x^2 - 4y^2 < 16$

مثال 6

جـد حلاً لنظام المعادلات.

$x^2 + y^2 = 100$
$3x - y = 10$

استخدم التعويض لحل النظام.

أولاً. أعد كتابة $3x - y = 10$ في الصورة $y = 3x - 10$.

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 100 \\ x^2 + (3x - 10)^2 &= 100 \\ x^2 + 9x^2 - 60x + 100 &= 100 \\ 10x^2 - 60x + 100 &= 100 \\ 10x^2 - 60x &= 0 \\ 10x(x - 6) &= 0 \end{aligned}$$

$10x = 0$ أو $x - 6 = 0$
$x = 0$ $x = 6$

والآن جـد الحل بإيجاد قيمة y.

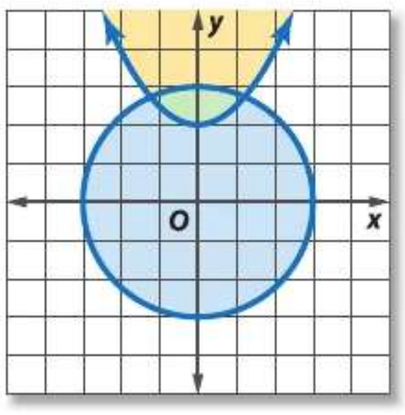
$y = 3x - 10$ $y = 3x - 10$
$= 3(0) - 10$ $= 3(6) - 10$
$= -10$ $= 8$

حلا النظام هما $(0, -10)$ و $(6, 8)$

مثال 7

حُـلّ أنظمة المتباينات باستخدام التمثيل البياني.

$x^2 + y^2 \leq 9$
$2y \geq x^2 + 4$



يقع الحل في المنطقة المظللة بالأخضر.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

6-7 الدوران المحوري للقطوع المخروطية

استخدم حاسبة التمثيل البياني لتمثيل القطع المخروطي المعطى من خلال كل معادلة مما يلي بيانيًا.

68. $x^2 - 4xy + y^2 - 2y - 2x = 0$

69. $x^2 - 3xy + y^2 - 3y - 6x + 5 = 0$

70. $2x^2 + 2y^2 - 8xy + 4 = 0$

71. $3x^2 + 9xy + y^2 = 0$

72. $4x2 - {}^2xy + 8y0 = 7 - {}^2$

اكتب كل معادلة مما يلي في المستوى $x'y'$ لكل قيمة معطاة لـ θ. ثمّ حدّد القطع المخروطي.

73. $x^2 + y^2 = 4; \theta = \frac{\pi}{4}$

74. $x^2 - 2x + y = 5; \theta = \frac{\pi}{3}$

75. $x^2 - 4y^2 = 4; \theta = \frac{\pi}{2}$

76. $9x4 + {}^2y36 = {}^2; \theta = °90$

المثال 8

استخدم حاسبة التمثيل البياني لتمثيل المعادلة التالية بيانيًا
$x^2 + 2xy + y^2 + 4x - 2y = 0$

المعادلة الاساسية $x^2 + 2xy + y^2 + 4x - 2y = 0$

الكتابة بالصيغة التربيعية $1y^2 + (2x - 2)y + (x^2 + 4x) = 0$

استخدم الصيغة التربيعية.

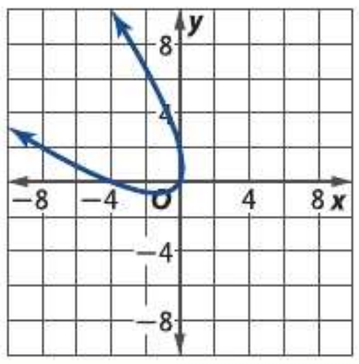
$$y = \frac{-(2x-2) \pm \sqrt{(2x-2)^2 - 4(1)(x^2+4x)}}{2(1)}$$

$$= \frac{-2x + 2 \pm \sqrt{4x^2 - 8x + 4 - 4x^2 - 16x}}{2}$$

$$= \frac{-2x + 2 \pm 2\sqrt{1-6x}}{2}$$

$$= -x + 1 \pm \sqrt{1-6x}$$

مثّل بيانيًا العلاقتين $y_1 = -x + 1 + \sqrt{1-6x}$ و $y_2 = -x + 1 - \sqrt{1-6x}$.



6-8 المعادلات الوسيطية

مثّل المنحنى المعطى بدلالة كل زوجٍ مما يلي من المعادلات الوسيطية في الفترة المعطاة.

77. $x = \sqrt{t}, y = 1 - t; 0 \le t \le 9$

78. $x = t + 2, y = t4 -; 4 - {}^2 \le t \le 4$

اكتب كل زوج من المعادلات الوسيطية بالصورة الديكارتية في مستوى إحداثي متعامد. ثم مثّل المعادلة بيانيًا.

79. $x = t + 5$ و $y = 2t - 6$

80. $x = 2t$ و $y = t^2 - 2$

81. $x = t^2 + 3$ و $y = t^2 - 4$

82. $x = t^2 - 1$ و $y = 2t + 1$

المثال 9

اكتب $x = 5 \cos t$ و $y = 9 \sin t$ بالصيغة الديكارتية في مستوى إحداثي متعامد. ثم مثّل المعادلة بيانيًا.

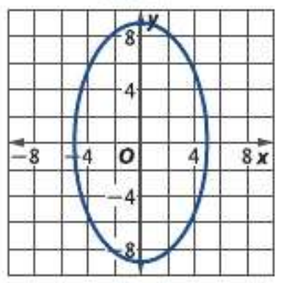
$x = 5 \cos t$ $\quad y = 9 \sin t$

قم بإيجاد $\cos t$ و $\sin t$ $\quad \cos t = \frac{x}{5}$ $\quad \sin t = \frac{y}{9}$

$\sin^2 t + \cos^2 t = 1$

$\left(\frac{x}{5}\right)^2 + \left(\frac{y}{9}\right)^2 = 1$

$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{81} = 1$



تمثل المعادلتان الوسيطيتان التمثيل البياني لقطعٍ ناقص.

McGraw-Hill Education مؤسسة لصالح محفوظة © والتأليف الطبع حقوق

6 تدريب على الاختبار المعيارى

جـد نقطة المنتصف للقطعة المستقيمة ذات النقطتين الطرفيتين عند الإحداثيات المعطاة.

1. $(8, 3), (-4, 9)$
2. $\left(\frac{3}{4}, 0\right), \left(\frac{1}{2}, -1\right)$
3. $(-10, 0), (-2, 6)$

جـد المسافة بين كل زوج من النقاط المعطاة إحداثياتها.

4. $(-5, 8), (4, 3)$
5. $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \left(-\frac{5}{6}, -\frac{11}{6}\right)$
6. $(4, -5), (4, 9)$

اذكر إن كان التمثيل البياني لكل معادلة *قطعًا مكافئًا أو دائرةً* أو قطعًا ناقصًا أو *قطعًا زائدًا*. ثم مثل المعادلة بيانيًا.

7. $y^2 = 64 - x^2$
8. $4x^2 + y^2 = 16$
9. $4x^2 - 9y^2 + 8x + 36y = 68$
10. $\frac{1}{2}x^2 - 3 = y$
11. $y = -2x^2 - 5$
12. $16x^2 + 25y^2 = 400$
13. $x^2 + 6x + y^2 = 16$
14. $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{16} = 1$
15. $(x + 2)^2 = 3(y - 1)$
16. $4x^2 + 16y^2 + 32x + 63 = 0$

الاختيار من متعدد أي المعادلات تمثل قطعًا زائدًا تقع رأسيه عند $(-3, -3)$ و $(-3, 5)$ ومحور مرافق طوله 6 وحدات؟

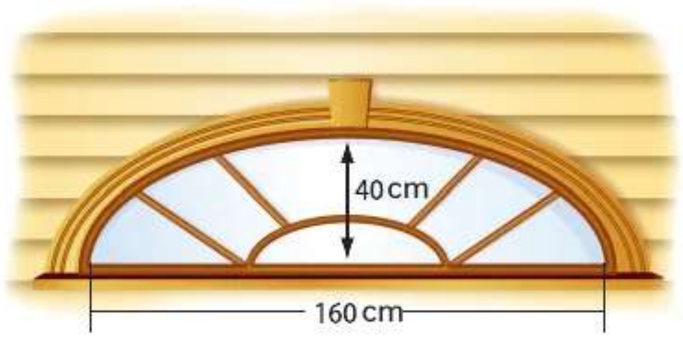
A $\frac{(y-1)^2}{16} - \frac{(x+3)^2}{9} = 1$

B $\frac{(x-1)^2}{16} - \frac{(y+3)^2}{9} = 1$

C $\frac{(y+1)^2}{16} - \frac{(x-3)^2}{9} = 1$

D $\frac{(x+1)^2}{16} - \frac{(y-3)^2}{9} = 1$

18. **النجارة** بنى فهد إطار نافذة صغيرة على شكل النصف الأعلى من قطع ناقص. ويبلغ طول النافذة عند أعلى نقطة فيها 40 cm وعرضها 160 cm عن أسفلها. فما طول النافذة على بعد 20 cm من مركز قاعدتها؟



حُـلّ كل من أنظمة المعادلات التالية.

19. $x^2 + y^2 = 100$
$y = -x - 2$
20. $x^2 + 2y^2 = 11$
$x + y = 2$
21. $x^2 + y^2 = 34$
$y^2 - x^2 = 9$

حُـلّ كل من أنظمة المتباينات التالية.

22. $x^2 + y^2 \leq 9$
$y > -x^2 + 2$

23. $\frac{(x-2)^2}{4} - \frac{(y-4)^2}{9} \geq 1$
$x - 4y < 8$

24. **الاختيار من متعدد** أي مما يلي ليس بمعادلة لقطع مكافئ؟

F $y = 3x^2 + 5x - 3$

G $2y + 3x^2 + x - 9 = 0$

H $x = 3(y + 1)^2$

J $x^2 + 2y^2 + 6x = 10$

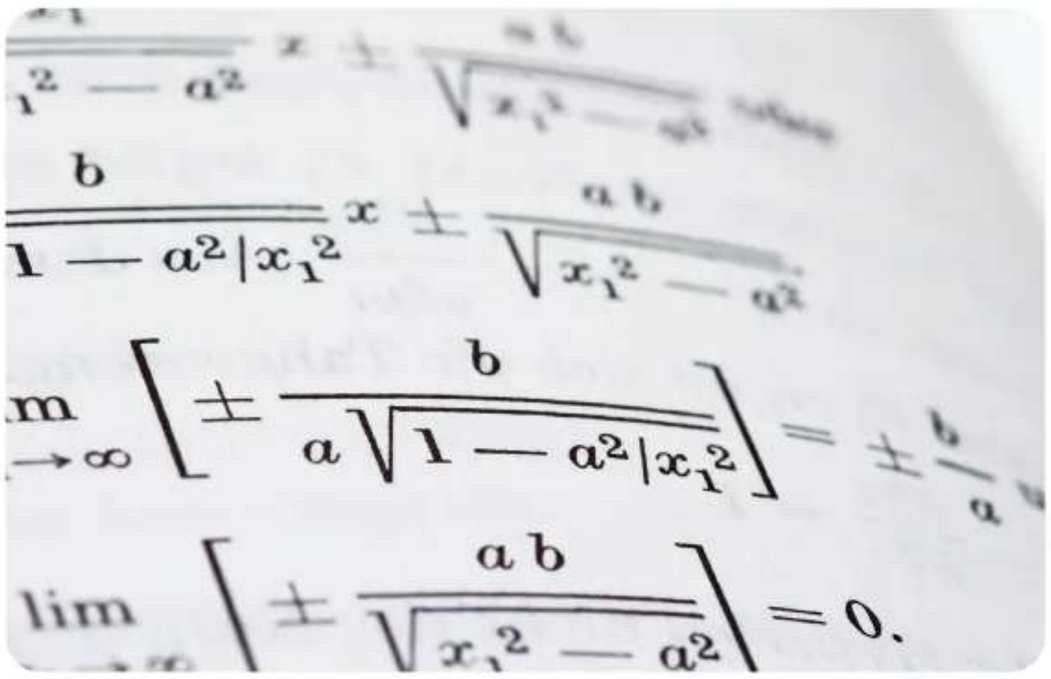
25. **إدارة الغابات** سمع كل من حارس متنزه الشارقة الوطني الموجود في موقع خارجي والحارس الآخر في المحطة الأساسية انفجارًا. ويبعد الموقع الخارجي عن المحطة الأساسية 6 km.

a. إذا سمع أحد الحراس صوت الانفجار قبل الثاني بـ 6 s، فاكتب معادلة تذكر جميع المواقع المحتملة للانفجار. ضع كل من الحارسين على المحور x على أن تكون نقطة المنتصف بين المحطات هي نقطة الأصل. ويكون المحور القاطع أفقيًا. (*إرشاد*: تبلغ سرعة الصوت نحو 0.35 km/s.)

b. ارسم المواقع المحتملة للانفجار. واجعل الرسم يحتوي على محطات الحراسة.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

6 التحضير للاختبارات المعيارية



استخدام قانون

في بعض الأحيان، يكون استخدام القوانين لحل المسائل أمرًا ضروريًا في الاختبارات المعيارية. وفي بعض الحالات، قد يقدم لك ورقة بها القوانين التي يسمح لك بمراجعتها أثناء حل الاختبار.

إستراتيجيات استخدام القوانين.

الخطوة 1

اقرأ المسألة بعناية.

اسأل نفسك:

- ما المطلوب مني حله؟
- ما معطيات المسألة؟
- هل هناك أي قوانين يمكنني استخدامها لتساعدني في حل المسألة؟

الخطوة 2

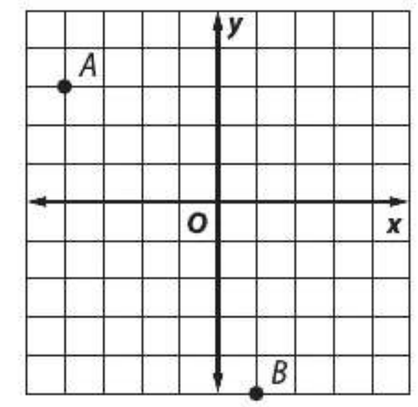
حل المسألة وتحقق من حلولك.

- عوّض الكميات المعروفة والمذكورة في نص المسألة في القانون.
- حوّل لأبسط صورة للحل بإيجاد القيم المجهولة في القانون.
- تحقق لتتأكد من أن الإجابة صحيحة. إذا سمح الوقت، تحقق من الإجابة.

مثال على الاختبار المعياري

اقرأ المسألة. حدد ما تحتاج إلى معرفته. ثم استخدم معطيات المسألة لحلها. اكتب الحل هنا.

ما المسافة بين النقطة A والنقطة B على المستوى الإحداثي؟ قرّب إجابتك إلى أقرب جزء من عشرة، إذا لزم الأمر.



معايير رصد الدرجات	
المعايير	**النتيجة**
الدرجة الكاملة: الإجابة صحيحة وتم تقديم تفسير كامل يوضح كل خطوة.	2
الدرجة الجزئية: • الإجابة صحيحة ولكن التفسير غير كامل. • الإجابة غير صحيحة ولكن التفسير صحيح.	1
ولا درجة: إما أن الإجابة غير مذكورة أو غير صحيحة.	0

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

اقرأ المسألة بعناية. قدمت إليك إحداثيات نقطتين على المستوى الإحداثي وطلب منك إيجاد المسافة بينهما. لحل المسألة، يجب عليك استخدام **قانون المسافة**.

مثال على إجابة من نقطتين:

استخدم قانون المسافة لإيجاد المسافة بين النقطتين $A(-4, 3)$ و$B(1, -5)$.

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$= \sqrt{[1 - (-4)]^2 + [(-5) - 3]^2}$$
$$= \sqrt{5^2 + (-8)^2}$$
$$= \sqrt{25 + 64}$$
$$= \sqrt{89} = 9.4 \text{ حوالي}$$

تبلغ المسافة بين النقطتين A وB d نحو 9.4 وحدات.

الخطوات والحسابات والاستنتاج مذكورون بوضوح. يصل الطالب أيضًا إلى الإجابة الصحيحة. إذًا، تستحق هذه الإجابة النقطتين بالكامل.

تمارين

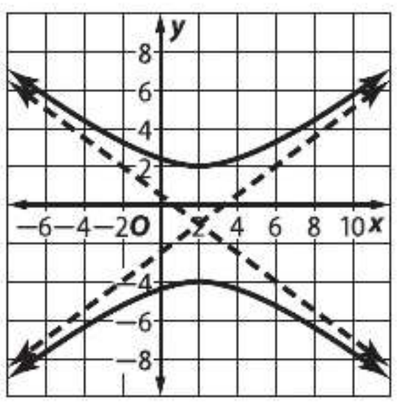
اقرأ كل مسألة. حدد ما تحتاج إلى معرفته. ثم استخدم معطيات المسألة لحلها. اكتب الحل هنا.

1. ما نقطة المنتصف لقطعة مستقيمة CD والتي تكون نقطتاها الطرفيتان $C(5, -12)$ و$D(-9, 4)$؟

2. تضع هدى خريطة لبيتها على المستوى الإحداثي. فتضع المدرسة عند النقطة $S(7, 3)$ والحديقة عند النقطة $P(-4, 12)$. فإذا كان مقياس الرسم للخريطة 1 وحدة واحدة = 250 m. فما المسافة الفعلية بين المدرسة والحديقة؟ قرّب إلى أقرب جزء من الياردة.

3. يصنع يوسف طاولة خرسانية لساحة منزله الخلفية. وسيكون سطح الطاولة مستديرًا بقطر 6 ft وسمك 6 in. فما مقدار الخرسانة التي سيحتاجها يوسف ليصنع سطح الطاولة؟ قرّب إلى أقرب جزء من القدم المكعبة.

4. ما معادلة القطع الزائد الممثل بيانيًا أدناه مكتوبة في الصيغة القياسية؟



5. إذا زادت مساحة السطح لمكعب بمقدار 9 أمثال مساحته الأصلية، فما التغير في الطول في أضلاع المكعب؟

A يبلغ الطول مِثلي الطول الفعلي.

B يبلغ الطول 3 أمثال الطول الفعلي.

C يبلغ الطول 6 أمثال الطول الفعلي.

D يبلغ الطول 9 أمثال الطول الفعلي.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

6 تدريب على الاختبار المعياري
تراكمي

الاختيار من متعدّد

اقرأ كُل سؤال. ثم اكتب الإجابة الصحيحة في ورقة الإجابة التي قدمها المعلم أو ورقة أخرى.

1. ما الخطوة الأولى غير الصحيحة في التحويل لأبسط صورة $\log_3 \frac{3}{48}$؟

$\log_3 \frac{3}{48} = \log_3 3 - \log_3 48$:1 الخطوة

الخطوة 2: 1-16=

الخطوة 3: = −

A الخطوة 1 **C** الخطوة 3

B الخطوة 2 **D** كل الخطوات صحيحة.

2. أي مما يلي معادلة القطع المكافئ بالرأس $(-3, -23)$ ويمر بالنقطة $(1, 9)$؟

F $y = x^2 + 10x + 7$

G $y = x^2 - 6x + 19$

H $y = 2x^2 + 12x - 5$

J $y = 2x^2 - 3x + 10$

3. ما رؤوس القطع الناقص بالمعادلة $\frac{(x-3)^2}{36} + \frac{(y-2)^2}{144} = 1$

A $(-3, 2)$ و $(9, 2)$

B $(-2, 3)$ و $(10, 3)$

C $(3, -10)$ و $(3, 14)$

D $(2, -11)$ و $(4, 13)$

4. ينص قانون هوك على أن القوة المبذولة للحفاظ على شد زنبرك x وحدة تتناسب طرديًا مع x. فإذا كان لا بد من قوة قدرها 40 N لتحافظ على زنبرك مشدودًا بمقدار 5 cm، فما القوة اللازمة لتحافظ على الزنبرك مشدودًا بمقدار 14 cm؟

F 8 N **H** 112 N

G 19 N **J** 1600 N

5. تضع علياء خريطة لساحة منزلها الخلفية على المستوى الإحداثي. وقد حددت النقطة $G(-4, -6)$ لتمثل حديقة والدتها والنقطة $S(3, 7)$ لتمثل الأرجوحة المعلقة على شجرة البلوط. فإذا كان مقياس الرسم للخريطة 1 وحدة واحدة = 5 أقدام. فما المسافة الفعلية بين الحديقة والأرجوحة؟

A 74 متراً **C** 82 متراً

B 79 متراً **D** 90 متراً

6. إذا كان $\sqrt{x+5} + 1 = 4$. فما قيمة x؟

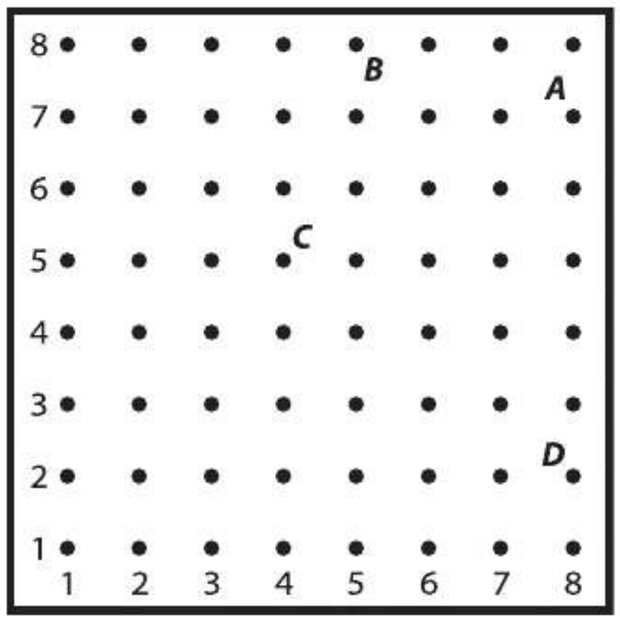
F 4 **G** 10 **H** 11 **J** 20

7. تبلغ مساحة قاعدة حقيبة سفر مستطيلة $3x^2 + 5x - 4$ وحدات مربعة. ويبلغ ارتفاع الحقيبة $2x$ وحدة. ما التعبير كثير الحدود الذي يمثل حجم الحقيبة؟

A $3x^3 + 5x^2 - 4x$ **C** $6x^3 + 10x^2 - 8x$

B $6x^2 + 10x - 8$ **D** $3x^3 + 10x^2 - 4$

8. قُدّم لريهام هذا اللوح الهندسي لتمثيل الميل $-\frac{3}{4}$



فإذا كانت العلامة الموجود أعلى الجزء الأيمن تمثل نقطة الأصل على المستوى الإحداثي، فأين يمكن لريهام وضع حزام مطاطي لتمثيل الميل المقدم؟

F من العلامة A للعلامة B

G من العلامة A للعلامة C

H من العلامة B للعلامة D

G من العلامة C للعلامة D

نصيحة عند حل الاختبار

السؤال 2 يمكن التحقق من الإجابة بالتعويض عن x بـ 1 والتأكد من أن قيمة y تساوي 9.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الإجابة القصيرة/الإجابة الشبكية

اكتب الإجابات في ورقة الإجابة التي قدمها المعلم أو ورقة أخرى.

9. ركل لاعب كرة قدم كرة للأعلى بسرعة 32 ft/s. فكم ستستغرق الكرة بعد ركلها لترتطم بالأرض؟ استخدم القانون $h(t) = v_0t - 16t^2$ ، حيث إن $h(t)$ هو ارتفاع جسم بالأقدام و v_0 هي السرعة الابتدائية للجسم بالقدم في الثانية و t هو الزمن بالثانية.

10. **إجابة شبكية** ما أقصى عدد ممكن من الحلول لنظام من المعادلات التي تتكون من دائرة قطع زائد؟

11. تُعدّ ليلى صناديق من الشوكولاتة المنوعة. ويكلف الفول السوداني المغلف بالشوكولاتة 7 AED للجرام. ويكلف الكراميل المغلف بالشوكولاتة 6.50 AED للجرام. ويحتوي صندوق الحلوى المنوعة على مقدار حلوى فول السوداني أكبر من مقدار حلوى الكراميل بخمسة جرام. فإذا كان إجمالي المبلغ 575 AED. فكم عدد الجرامات لكل نوع من الحلوى لازمة لصنع الصندوق؟

12. **الإجابة الشبكية** ما الإحداثي y لنقطة المنتصف للقطعة المستقيمة AB ذات النقطتين الطرفيتين $A(0.8, 5.32)$ و $B(0.44, 2.2)$؟

13. ذهب صالح للتسوق واشترى قميصين، وثلاثة سراويل، وحزام وزوجين من الأحذية. وتوضح المصفوفة التالية الأسعار لكل منتج بالتوالي.

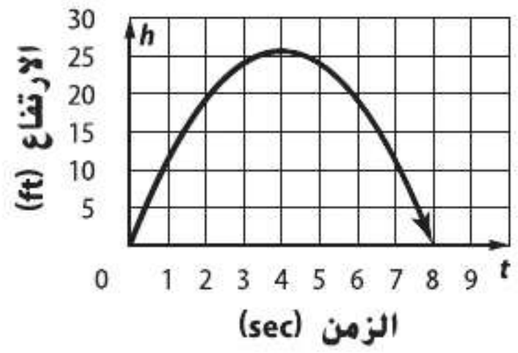
$$\begin{bmatrix} \text{AED } 25.99 & \text{AED } 15 & \text{AED } 32 & \text{AED } 20.15 \end{bmatrix}$$

استخدم ضرب المصفوفات لإيجاد المبلغ الإجمالي الذي أنفقه صالح أثناء التسوق.

الإجابة الموسعة

اكتب إجاباتك على ورقة. اكتب الحل هنا.

14. مثّل سلطان المعادلات التربيعية $h(t) = -16t^2 + 128t$ بيانيًا لتمثيل طيران أحد الألعاب النارية. يوضح القطع المكافئ الارتفاع، بالقدم، للألعاب النارية بعد t ثانية من إطلاقها.



a. ما رأس القطع المكافئ؟

b. ما الذي يمثله رأس القطع المكافئ؟

c. كم تظل الألعاب النارية في الهواء قبل هبوطها؟

15. يبيع موظفو الكتاب السنوي لمدرسة الشارقة الثانوية الكتب السنوية وإطارات الصور المطلية بالكروم المنقوش عليها العام الدراسي. ويوضح عدد الكتب السنوية والإطارات التي تم بيعها للأعضاء لكل صف في الجدول.

مبيعات كل صف		
الصف	الكتب السنوية	الإطارات
التاسع	423	256
العاشر	464	278
الحادي عشر	546	344
الثاني عشر	575	497

a. جد الفارق في المبيعات للكتب السنوية والإطارات التي تم صنعها في الصف العاشر والحادي عشر.

b. جد إجمالي عدد الكتب السنوية والإطارات التي تم بيعها.

c. يكلف الكتاب السنوي 48 AED ويكلف الإطار 18 AED. جد مبيعات الكتب السنوية والإطارات لكل صف.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الوحدة

7 المتجهات



Chapter sourced from Vectors, from Precalculus Chapter 8 © 2014 McGraw-Hill Education

السابق

في **الوحدات السابقة**، استخدمتَ حساب المثلثات لحل المثلثات.

الحالي

بعد دراستك لهذه الوحدة ستكون قادرًا على:

- تمثيل المتجهات واستخدامها جبريًا في الأنظمة الإحداثية ثنائية وثلاثية الأبعاد.
- إيجاد مسقط متجه على آخر.
- إيجاد نواتج الضرب المتجهي للمتجهات في الفضاء وإيجاد أحجام متوازيات المستطيلات.
- إيجاد نواتج الضرب النقطي للمتجهات والزوايا بينها.

لماذا؟ ▲

التجديف كثيرًا ما يتم استخدام المتجهات لتمثيل التغيرات في الاتجاه بفعل التيارات المائية والهوائية. على سبيل المثال، يمكن استخدام متجه لتحديد السرعة والاتجاه الناتجين لزورق يتحرك بسرعة 12.9 km/h في عكس اتجاه تيار النهر الذي تبلغ سرعته 4.8 km/h.

القراءة المسبقة اقرأ سريعًا عناوين الدروس ومربعات المفاهيم الأساسية في الوحدة 7. واستخدم هذه المعلومات لتوقع ما ستتعلمه في هذه الوحدة.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الاستعداد للوحدة

أجب عن أسئلة التدريب السريع أدناه.

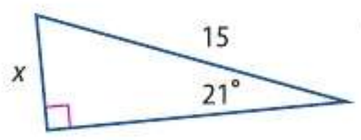
تدريب سريع

جـد المسافة بين كل زوج من النقاط ونقطة منتصف القطعة المستقيمة التي تربط النقطتين المذكورتين. (المهارات المطلوبة)

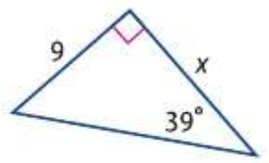
1. $(1, 4), (-2, 4)$
2. $(-5, 3), (-5, 8)$
3. $(2, -9), (-3, -7)$
4. $(-4, -1), (-6, -8)$

جـد قيمة x. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة، إذا لزم الأمر. (الدرس 1-7)

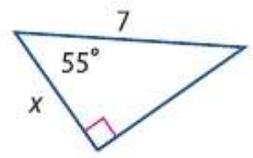
5.



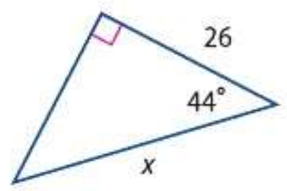
6.



7.



8.



9. **المنطاد** يتم تثبيت منطاد يعمل بالهواء الساخن في مكانه بواسطة شخصين يمسكان بحبلين ويقفان على مسافة 35 ft من بعضهما. تبلغ الزاوية بين الأرض والحبل الذي يمسكه كل شخص 40°. حدد طول كل حبل بالقدم مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة.

جـد جميع الحلول للمثلث المعطى إن أمكن. إن لم يكن له حل، فاكتب **لا يوجد حل**. حوّل طول الضلع لأقرب جزء من عشرة، وحوّل قياس الزاوية إلى أقرب درجة.

10. $a = 10, b = 7, A = 128°$
11. $a = 15, b = 16, A = 127°$
12. $a = 15, b = 18, A = 52°$
13. $a = 30, b = 19, A = 91°$

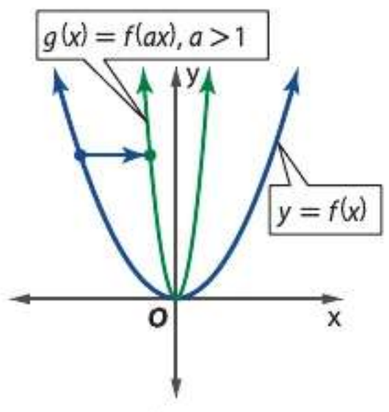
المفردات الجديدة

متجه	vector
نقطة البداية	initial point
نقطة النهاية	terminal point
الوضع القياسي	standard position
اتجاه	direction
مقدار	magnitude
اتجاه ربعي	quadrant bearing
اتجاه حقيقي	true bearing
متجهات موازية	parallel vectors
متجهات متكافئة	equivalent vectors
متجهات متعاكسة	opposite vectors
ناتج	resultant
متجه صفري	zero vector
صيغة مركبة	component form
متجه وحدة	unit vector
ناتج الضرب النقطي	dot product
متعامد	orthogonal
محور z	z-axis
أثمان	octants
ثلاثي مُرتب	ordered triple
الضرب المتجهي	cross product
ناتج ضرب قياسي لثلاثة متجهات	triple scalar product

مراجعة المفردات

كمية عددية كمية ذات مقدار فقط

التمدد تحول يتم فيه انضغاط أو توسع التمثيل البياني للدالة رأسيًا أو أفقيًا.



التمدد الأفقي

McGraw-Hill Education مؤسسة لصالح الطبع والتأليف © محفوظة لصالح حقوق الطبع

7-1 مقدمة في المتجهات

السابق

- استخدام حساب المثلثات لحل المثلثات.

الحالي

1. تمثيل المتجهات واستخدامها هندسيًا.
2. حل مسائل المتجهات، وتحليل المتجهات إلى مركباتها المتعامدة.

لماذا؟

- يعتمد إحراز هدف في كرة القدم على عدة عوامل. بينما سرعة الكرة بعد ركلها هامة بالتأكيد، لكن اتجاه الكرة هام كذلك. يمكننا وصف هذين العاملين باستخدام كمية واحدة تُسمى *المتجه*.



1 المتجهات يمكن وصف العديد من الكميات الفيزيائية، مثل السرعة، بشكل كامل بواسطة عدد حقيقي واحد يُسمى كمية عددية. ويشير هذا العدد إلى مقدار أو حجم الكمية. **المتجهات** هي كمية لها مقدار واتجاه. سرعة الكرة متجه يصف سرعة الكرة واتجاهها.

مثال 1 تحديد كميات المتجهات

اذكر ما إذا كانت كل كمية موصوفة هي متجه أو كمية عددية.

a. يسير قارب بسرعة 15 km/h.

لهذه الكمية مقدار، ولكن لم يتم ذكر الاتجاه. السرعة كمية عددية.

b. متجول يسير 25 خطوة باتجاه الغرب

لهذه الكمية مقدار هو 25 خطوة، واتجاهها نحو الغرب. هذه المسافة الموجهة هي متجه.

c. وزن شخص على ميزان الحمّام

الوزن متجه يتم حسابه باستخدام كتلة الشخص والسحب لأسفل بفعل الجاذبية. (التسارع بفعل الجاذبية متجه.)

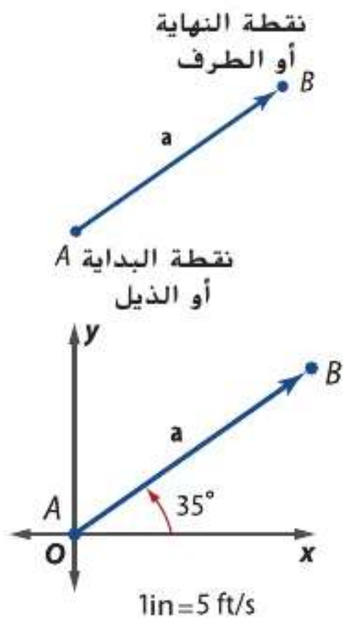
تمرين موجّه

1A. تسير سيارة بسرعة **60 km/h** بزاوية 15° جنوب شرق

1B. يهبط قافز بالمظلات لأسفل مباشرة بسرعة **20.2 km/h**

1C. يسحب طفل زلّاجة بقوة تبلغ 40 N

يمكن تمثيل متجه هندسيًا بواسطة قطعة مستقيمة موجهة أو رسم تخطيطي سهمي، يوضح المقدار والاتجاه. فكر في القطعة المستقيمة الموجهة الموضحة حيث **نقطة البداية** A (تُسمى أيضًا الذيل) و**نقطة النهاية** B (تُسمى أيضًا الرأس أو الطرف). يتم التعبير عن المتجه بواسطة $\vec{a}$ أو $\overrightarrow{AB}$، أو **a**.



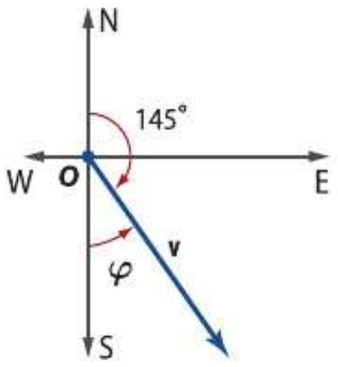
إذا كانت نقطة بداية المتجه عند نقطة الأصل، فالمتجه في **الوضع القياسي**. **اتجاه** المتجه هو الزاوية الموجهة بين المتجه والمستقيم الأفقي الذي يمكن استخدامه لتمثيل محور x الموجب. اتجاه **a** هو 35°.

طول القطعة المستقيمة يمثل ويتناسب مع **مقدار** المتجه. إذا كان مقياس الرسم التخطيطي السهمي لـ **a** هو 1 in = 5 ft/s. إذًا مقدار **a**، المُعبر عنه بواسطة **|a|**، هو 5 × 2.6 أو 13 ft/s.

المفردات الجديدة

- متجه vector
- نقطة البداية nitial point
- نقطة النهاية terminal point
- الوضع القياسي standard position
- اتجاه direction
- مقدار magnitude
- اتجاه ربعي quadrant bearing
- اتجاه حقيقي true bearing
- متجهات موازية parallel vectors
- متجهات متكافئة equivalent vectors
- متجهات متعاكسة opposite vectors
- ناتج resultant
- طريقة المثلث triangle method
- طريقة متوازي الأضلاع parallelogram method
- متجه صفري zero vector
- مركبات components
- مركبات متعامدة rectangular components

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education



يمكن كذلك ذكر اتجاه المتجه في صورة اتجاه.
الاتجاه الربعي φ، أو phi، هو قياس اتجاه بين الزاويتين 0° و 90° شرق أو غرب المستقيم شمال–جنوب.
الاتجاه الربعي للمتجه **v** الموضح هو 35° شرق اتجاه الجنوب أو جنوب شرق، ويُكتب بالصورة S35°E.

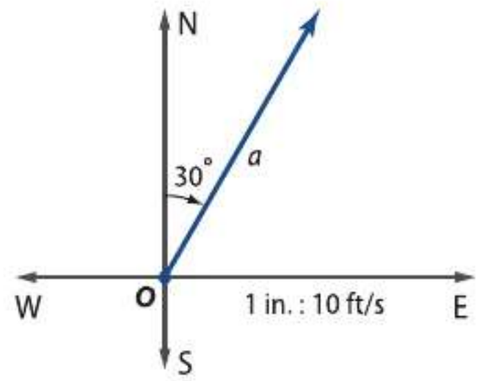
الاتجاه الحقيقي هو قياس اتجاه يتم فيه قياس الزاوية حسب اتجاه عقارب الساعة من الشمال. ويتم ذكر الاتجاهات الحقيقية دائمًا في صورة ثلاثة أرقام. إذًا، اتجاه قياسه 25° باتجاه عقارب الساعة من الشمال تتم كتابته كاتجاه حقيقي بالصورة 025°.

نصيحة دراسية

الاتجاه الحقيقي عند ذكر قياس درجة بدون أي مركبات اتجاه، يُفترض أنه اتجاه حقيقي. اتجاه **v** الحقيقي هو 145°.

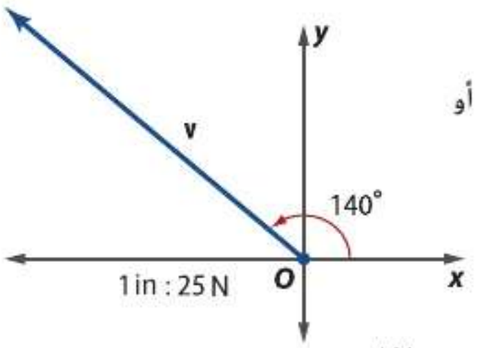
مثال 2 تمثيل المتجهات هندسيًا

استخدم مسطرة ومنقلة لعمل رسم تخطيطي سهمي لكل كمية موصوفة. أرفق مقياسًا مع كل رسم تخطيطي.



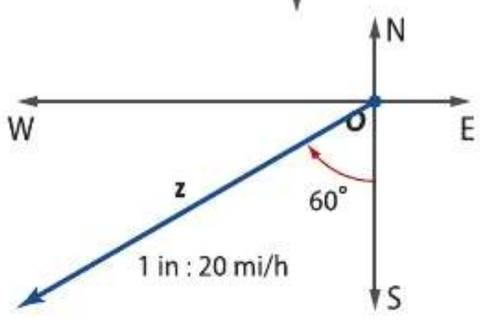
a. $\mathbf{a} = 20$ ft/s باتجاه 030°

باستخدام مقياس 1 in: 10 ft/s.
ارسم وميّز سهمًا بطول 20 ÷ 10 = 2 in
بزاوية 30° في اتجاه عقارب الساعة من الشمال.



b. $\mathbf{v} = 75$ N من القوة بزاوية 140° مع المركّبة الأفقية

باستخدام مقياس 1 in: 25 N. ارسم وميّز سهمًا بطول 75 ÷ 25 أو 3 in في الوضع القياسي بزاوية 140° مع المحور x.



c. $\mathbf{z} = 30$ mi/h باتجاه S60°W

باستخدام مقياس 1 in: 20 mi/h. ارسم وميّز سهمًا بطول 20 ÷ 30 أو 1.5 in بزاوية 60° جنوب غرب.

تمرين موجّه

2A. $\mathbf{t} = 20$ m/s باتجاه 065°

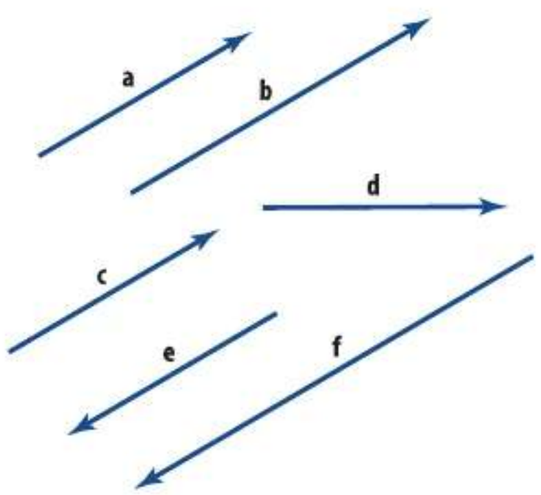
2B. $\mathbf{u} = 15$ km/h باتجاه S25°E

2C. $\mathbf{m} = 60$ N من القوة بزاوية 80° مع المركّبة الأفقية

في العمليات باستخدام المتجهات، يجب أن تكون على دراية بأنواع المتجهات التالية.

انتبه!

المقدار مقدار المتجه يمكن أن يمثل المسافة أو السرعة أو القوة. عندما يمثل متجه السرعة، لا يشير طول المتجه إلى المسافة المقطوعة.



- **المتجهات الموازية** يكون لها الاتجاه ذاته أو اتجاه معاكس، ولكن ليس بالضرورة المقدار ذاته. في الشكل، $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b} \parallel \mathbf{c} \parallel \mathbf{e} \parallel \mathbf{f}$.
- **المتجهات المتكافئة** لها نفس المقدار والاتجاه. في الشكل، $\mathbf{a} = \mathbf{c}$ لأن لهما نفس المقدار والاتجاه. لاحظ أن $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$ حيث $|\mathbf{a}| \neq |\mathbf{b}|$، و $\mathbf{a} \neq \mathbf{d}$، حيث **a** و **d** ليس لهما الاتجاه ذاته.
- **المتجهات المتعاكسة** لها المقدار ذاته ولكن في اتجاهين متعاكسين. المتجه المقابل للمتجه **a** يُكتب بالصورة $-\mathbf{a}$. في الشكل، $-\mathbf{a} = \mathbf{e}$.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

عند إضافة متجهين أو أكثر، يكون مجموعها متجهًا واحدًا يُسمى **الناتج**.
المتجه الناتج له تأثير يماثل تطبيق كل متجه على حدة. هندسيًا، يمكن إيجاد الناتج باستخدام إما **طريقة المثلّث** أو **طريقة متوازي الأضلاع**.

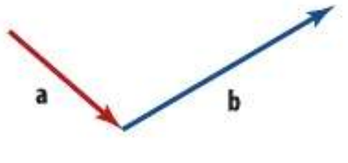
المفهوم الأساسي إيجاد النواتج

طريقة المثلث (الطرف إلى الذيل)

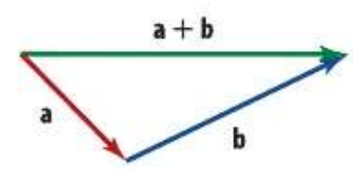
لإيجاد ناتج **a** و **b**.
اتبع هذه الخطوات.



الخطوة 1 قم بإزاحة **b** بحيث يلامس ذيل **b** طرف **a**.

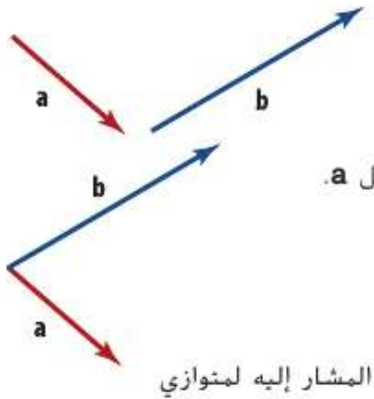


الخطوة 2 الناتج هو المتجه من ذيل **a** إلى طرف **b**.



طريقة متوازي الأضلاع (الذيل إلى الذيل)

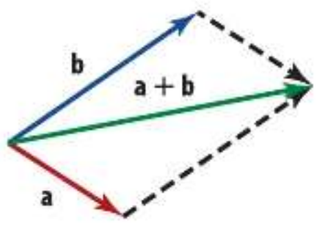
لإيجاد ناتج **a** و **b**.
اتبع هذه الخطوات.



الخطوة 1 قم بإزاحة **b** بحيث يلامس ذيل **b** ذيل **a**.

الخطوة 2 أكمل متوازي الأضلاع الذي يحتوي على **a** و **b** كضلعين من أضلاعه.

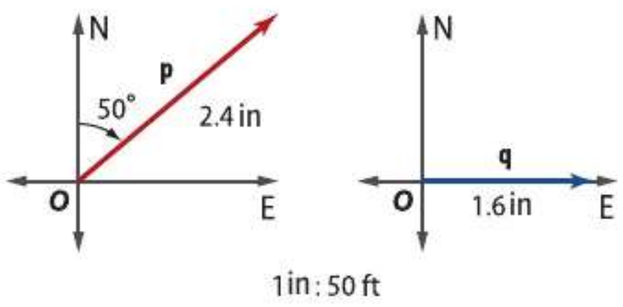
الخطوة 3 الناتج هو المتجه الذي يشكل القطر المشار إليه لمتوازي الأضلاع.



مثال 3 من الحياة اليومية إيجاد ناتج متجهين

تحديد الاتجاه في إحدى منافسات تحديد الاتجاه، سارت أماني باتجاه N50°E لمسافة **ft** 120 ثم سارت لمسافة **ft** 80 باتجاه الشرق. كم تبعد أماني عن وضع البدء وفي أي اتجاه ربعي هي؟

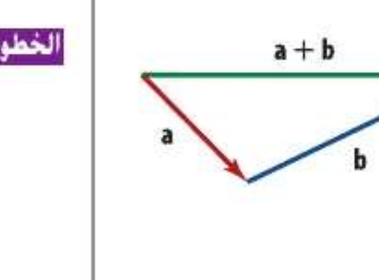
افترض أن **p** = السير لمسافة **ft** 120 باتجاه N50°E و **q** = السير لمسافة **ft** 80 باتجاه الشرق.
قم بعمل رسم تخطيطي لتمثيل **p** و **q** باستخدام مقياس 1 in: 50 ft.



استخدم مسطرة لرسم سهم بطول 50 ÷ 120 أو 2.4 in باتجاه 50° شمال شرق لتمثيل **p** وسهم بطول 50 ÷ 80 أو 1.6 in باتجاه الشرق لتمثيل **q**.

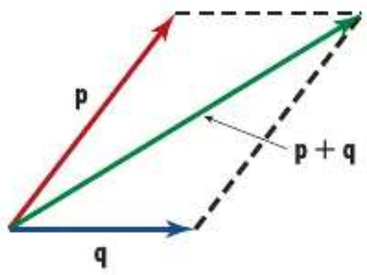
الطريقة 1 طريقة المثلث

قم بإزاحة **q** بحيث يلمس ذيله طرف **p**. ثم ارسم المتجه الناتج **p** + **q** كما هو موضح.

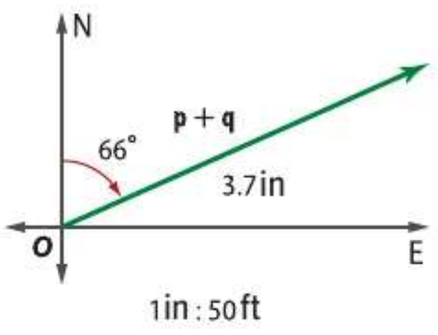


الطريقة 2 طريقة متوازي الأضلاع

قم بإزاحة **q** بحيث يلمس ذيله ذيل **p**. ثم أكمل متوازي الأضلاع وارسم القطر. الناتج **p** + **q**، كما هو موضح.



نحصل من الطريقتين على المتجه الناتج ذاته **p** + **q**. قم بقياس طول **p** + **q** ثم قياس زاوية هذا المتجه مع مستقيم شمال–جنوب كما هو موضح. طول المتجه 3.7 in تقريبًا يمثل 50 × 3.7 أو 185 ft. إذًا، تبعد عائشة 185 ft تقريبًا باتجاه 66° شمال شرق أو N66°E عن موضع البدء.



نصيحة دراسية

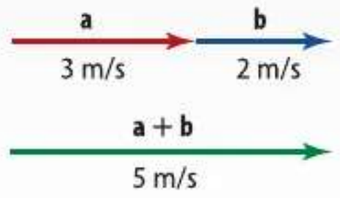
النواتج يجب تكرار طريقة متوازي الأضلاع لإيجاد ناتج أكثر من متجهين. لكن طريقة المثلث أسهل استخدامًا عند إيجاد ناتج ثلاثة متجهات أو أكثر. واصل وضع نقطة بداية المتجه التالي عند نقطة نهاية المتجه السابق.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

نصيحة دراسية

المتجهات الموازية في الاتجاه

ذاته لجمع متجهين موازيين في *الاتجاه ذاته*. اجمع مقداريهما. يكون للناتج نفس اتجاه المتجهات الأصلية.



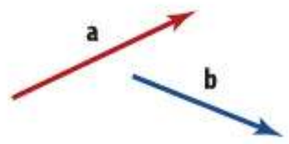
تمرين موجّه

جـــد ناتج كل زوج من المتّجهات باستخدام إما طريقة المثلّث أو متوازي الأضلاع. اذكر مقدار الناتج مع التقريب لأقرب سنتيمتر واتجاهه بالنسبة إلى المركّبة الأفقية.

3A.

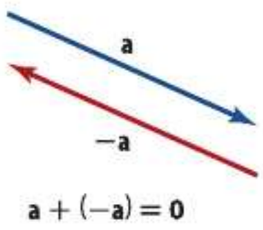


3B.



3C. لعبة الكرة والدبابيس تم دفع الكرة بواسطة الناقر بزاوية 310° وسرعة 7 in/s. ثم ارتدت الكرة عن المصدّ وانطلقت بزاوية 055° وسرعة 4 in/s. جـــد الاتجاه الناتج للكرة وسرعتها.

عند إضافة متجهين متقابلين، يكون الناتج هو **متجه صفري** أو متجه صفر، ويُعبر عنه بواسطة $\vec{0}$ أو **0**. ويكون مقداره 0 وبدون اتجاه محدد. طرح المتجهات مشابه لطرح الأعداد الصحيحة. لإيجاد $\mathbf{p} - \mathbf{q}$، اجمع مقابل **q** مع **p**. بمعنى، $\mathbf{p} - \mathbf{q} = \mathbf{p} + (-\mathbf{q})$.



يمكن كذلك ضرب متجه في كمية عددية.

المفهوم الأساسي ضرب المتجهات في كمية عددية

إذا تم ضرب المتجه **v** في الكمية العددية الحقيقية k، فيكون للكمية العددية $k\mathbf{v}$ المقدار $|k|\,|\mathbf{v}|$. ويتم تحديد اتجاهها حسب علامة k.

- إذا كان $k > 0$، فإن $k\mathbf{v}$ لها نفس اتجاه **v**.
- إذا كان $k < 0$، فإن $k\mathbf{v}$ في اتجاه معاكس لـــ **v**.

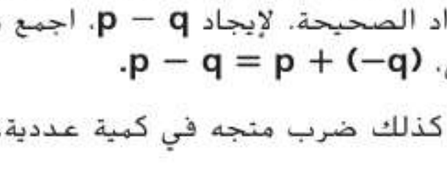
مثال 4 العمليات على المتجهات

قم بتصميم رسم تخطيطي لـــ $3x - \frac{3}{4}\mathbf{y}$.

أعد كتابة التعبير في صورة جمع متجهين. $3x - \frac{3}{4}\mathbf{y} = 3x + \left(-\frac{3}{4}\mathbf{y}\right)$



$3x$، لتمثيل $3x$، ارسم متجهًا يبلغ طوله ثلاثة أمثال طول x في نفس اتجاه x (الشكل 7.1.1). لتمثيل $-\frac{3}{4}\mathbf{y}$، ارسم متجهًا يبلغ طوله $\frac{3}{4}$ طول **y** في الاتجاه المعاكس لـــ **y** (الشكل 7.1.2). ثم استخدم طريقة المثلث لرسم المتجه الناتج (الشكل 7.1.3).



الشكل 7.1.1

الشكل 7.1.2

الشكل 7.1.3

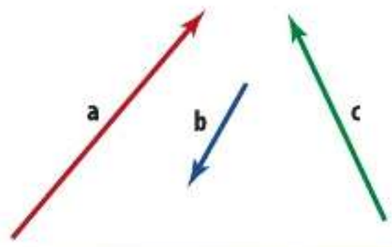
نصيحة دراسية

المتجهات الموازية في اتجاهين متعاكسين لجمع متجهين موازيين في *اتجاهين متعاكسين*، جـــد القيمة المطلقة للفرق بين المقدارين. يكون للناتج نفس اتجاه المتجه الأكبر مقدارًا.

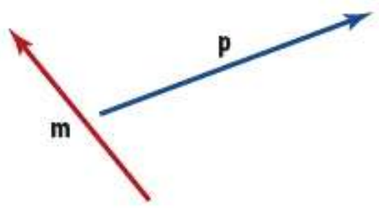
تمرين موجّه

قم بتصميم رسم تخطيطي لمتجه لكل تعبير.

4A. $\mathbf{a} - \mathbf{c} + 2\mathbf{b}$



4B. $\mathbf{m} - \frac{1}{4}\mathbf{p}$



McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

2 استخدامات المتجهات

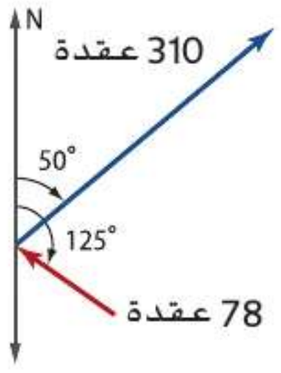
يمكن استخدام جمع وحساب مثلثات المتجهات لحل مسائل المتجهات التي تتضمن المثلثات التي كثيرًا ما تكون مائلة.

في الملاحة، الاتجاه هو اتجاه توجيه مركبة، مثل طائرة أو سفينة، للتغلب على القوى الأخرى، مثل الرياح أو التيار. السرعة النسبية للمركبة هي الناتج عند دمج سرعة الاتجاه والقوى الأخرى.

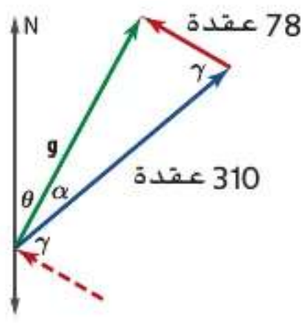
مثال 5 من الحياة اليومية استخدام المتجهات لحل مسائل الملاحة

الملاحة الجوية تطير طائرة بسرعة مقدارها 310 عقدة باتجاه °050. إذا كانت الرياح تهب بسرعة 78 عقدة من الاتجاه الحقيقي °125، فحدّد سرعة الطائرة واتجاهها بالنسبة إلى الأرض.

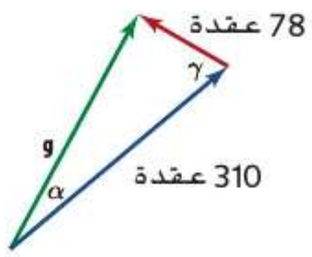
الخطوة 1 قم بتصميم رسم تخطيطي لتمثيل سرعتي الاتجاه والرياح (الشكل 7.1.4). قم بإزاحة متجه الرياح كما هو موضح في الشكل 7.1.5، واستخدام طريقة المثلث للحصول على المتجه الناتج الذي يمثل سرعة الطائرة بالنسبة للأرض **g**. في المثلث المتشكل بواسطة هذه المتجهات (الشكل 7.1.6)، $\gamma = 125° - 50° = 75°$ أو °75.



الشكل 7.1.4



الشكل 7.1.5



الشكل 7.1.6

الخطوة 2 استخدم قانون الـ cosine لإيجاد |g|، سرعة الطائرة بالنسبة للأرض.

قانون الـ cosine $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$

$c = |g|,\ a = 78,\ b = 310,\ \gamma = 75°$ $|g|^2 = 78^2 + 310^2 - 2(78)(310) \cos 75°$

جـد الجذر التربيعي الموجب لكل طرف. $|g| = \sqrt{78^2 + 310^2 - 2(78)(310) \cos 75°}$

بسّط. ≈ 299.4

سرعة الطائرة بالنسبة للأرض هي 299.4 عقدة تقريبًا.

الخطوة 3 اتجاه الناتج g تمثله الزاوية θ، كما هو موضح بالشكل 7.1.5. لإيجاد θ، احسب أولاً α باستخدام قانون الـ sin.

قانون الـ sin $\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \gamma}{c}$

$c = |g|$ أو $299.4,\ a = 78,\ \gamma = 75°$ $\frac{\sin \alpha}{78} = \frac{\sin 75°}{299.4}$

جـد $\sin \alpha$. $\sin \alpha = \frac{78 \sin 75°}{299.4}$

طبق دالة معكوس الـ $\sin^{-1}$. $\alpha = \sin^{-1} \frac{78 \sin 75°}{299.4}$

بسّط. $\approx 14.6°$

قياس θ هو $\alpha - 50°$، أي $14.6° - 50°$ أو °35.4.

فإن، سرعة الطائرة بالنسبة إلى الأرض هي 299.4 عقدة تقريبًا بزاوية °035 تقريبًا.

تمرين موجّه

5. **السباحة** يسبح علي باتجاه الشرق بسرعة 3.5 ft/s عبر نهر باتجاه الضفة المتعاكسة مباشرة. في الوقت ذاته، يحمله تيار النهر باتجاه الجنوب بمعدل 2 ft/s . جـد سرعة علي واتجاهه بالنسبة إلى الشاطئ.

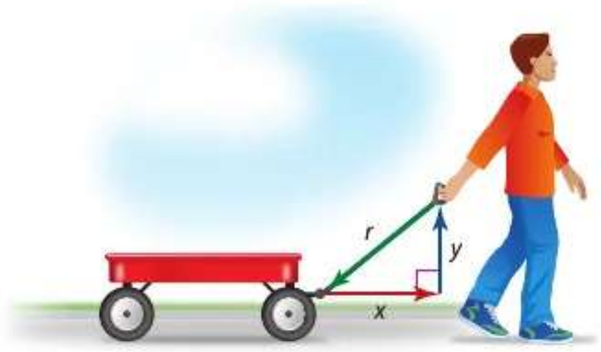
نصيحة دراسية

الزوايا الداخلية البديلة إزاحة ذيل متجه الرياح إلى طرف المتجه الممثل لاتجاه الطائرة ينتج عنها متجهين موازيين يقطعهما قاطع. حيث إن الزوايا الداخلية البديلة لمستقيمين متوازيين يقطعهما قاطع تكون متطابقة. فالزوايا الناشئة عن هذه المتجهين في كلا المكانين في الشكل 7.1.5 لهما نفس القياس.

انتبه!

اتجاه الرياح في المثال 5، لاحظ أن الرياح تهب من اتجاه °125 وأن المتجه مرسوم بحيث يتجه طرفه نحو مستقيم الشمال–الجنوب. لو كانت الرياح تهب من اتجاه °125، كان المتجه سيبتعد عن هذا الخط.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education



عندما يوجد متجهين أو أكثر مجموعها المتجه **r**، يُطلق عليها **مركبات r**. بينما يمكن أن تكون المركبات بأي اتجاه، كثيرًا ما يكون من المفيد تحليل المتجه أو التعبير عنه بمركبتين متعامدتين. تكون **المركبات المتعامدة** لمتجه أفقية أو رأسية.

في الرسم التخطيطي، يمكن النظر إلى القوة **r** المبذولة لسحب عربة باعتبارها مجموع قوة المركبة الأفقية x التي تحرك العربة للأمام وقوة المركبة الرأسية **y** التي تسحب العربة لأعلى.

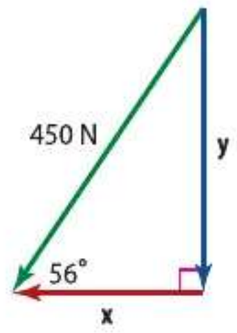
مثال 6 من الحياة اليومية تحليل قوة إلى مركبات متعامدة



العناية بالحديقة تدفع هالة مقبض آلة جز العشب بقوة مقدارها **450 N** بزاوية **56°** مع الأرض.

a. قم بتصميم رسم تخطيطي يوضح تحليل القوة التي تبذلها هالة إلى مركبات متعامدة.

يمكن تحليل قوة الدفع التي تبذلها هالة إلى دفع أفقي **x** للأمام ودفع رأسي **y** لأسفل كما هو موضح.



b. جـد مقداري المركبتين الأفقية والرأسية للقوة.

تشكل المركبتان الأفقية والرأسية للقوة مثلثًا قائم الزاوية. استخدم نسبة الـ sin و الـ cosine لإيجاد مقدار كل قوة.

$\cos 56° = \frac{|x|}{450}$ تعريفا المثلث قائم الزاوية الـ sin و الـ cosine

$|x| = 450 \cos 56°$ جـد x و y.

$|x| \approx 252$ استخدم الحاسبة.

$\sin 56° = \frac{|y|}{450}$

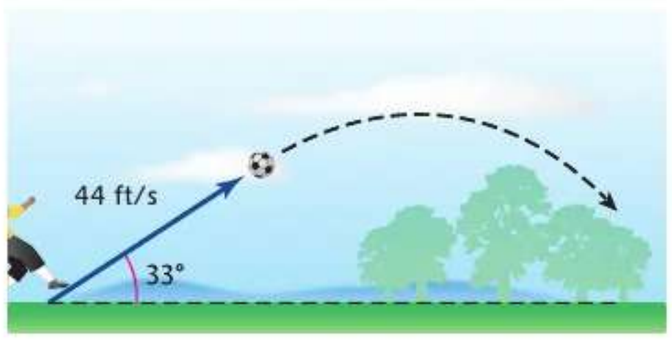
$|y| = 450 \sin 56°$

$|y| \approx 373$

مقدار المركبة الأفقية **252 N** تقريبًا. ومقدار المركبة الرأسية **373 N** تقريبًا.

تمرين موجّه

6. كرة القدم ركل اللاعب كرة القدم بحيث انطلقت من الأرض بسرعة **44 ft/s** بزاوية **33°** مع الأرض.



A. قم بتصميم رسم تخطيطي يوضح تحليل هذه القوة إلى مركبات متعامدة.

B. جـد مقداري المركبتين الأفقية والرأسية للسرعة.



الربط بالحياة اليومية

يتطلب تشغيل مفتاح الإضاءة قوة مقدارها **3 N** تقريبًا. القوة المبذولة على شخص بفعل الجاذبية هي **600 N** تقريبًا. القوة التي يبذلها رافع الأثقال **2000 N** تقريبًا.

المصدر: كونتيمبوراري كوليدج فيزكس

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

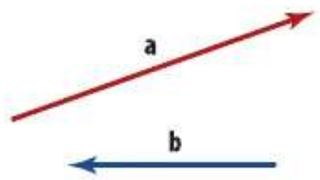
التمارين

اذكر ما إذا كانت كل كمية موصوفة هي متجه أو كمية عددية. (مثال 1)

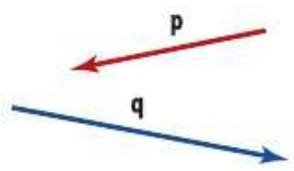
1. صندوق يتم دفعه بقوة مقدارها 125 N
2. الرياح تهب بسرعة 20 عقدة
3. غزال يركض بسرعة 15 m/s باتجاه الغرب
4. كرة قاعدة تم قذفها بسرعة 85 km/h
5. إطار بزن 3.75 kg يتدلى من حبل
6. حجر تم قذفه في مسار مستقيم لأعلى بسرعة 50 ft/s استخدم مسطرة ومنقلة لعمل رسم تخطيطي سهمي لكل كمية موصوفة. أرفق مقياسًا مع كل رسم تخطيطي. (مثال 2)
7. $\mathbf{h} = 13$ cm/s باتجاه 205°
8. $\mathbf{g} = 6$ km/h باتجاه N70°W
9. $\mathbf{j} = 5$ m/min بزاوية 300° مع المركبة الأفقية
10. $\mathbf{k} = 28$ km بزاوية 35° مع المركبة الأفقية
11. $\mathbf{m} = 40$ m باتجاه S55°E
12. $\mathbf{n} = 32$ m/s باتجاه 030°

جـد ناتج كل زوج من المتّجهات باستخدام إما طريقة المثلّث أو متوازي الأضلاع. اذكر مقدار الناتج مع التقريب لأقرب جزء من عشرة من السنتيمتر واتجاهه بالنسبة إلى المركّبة الأفقية. (مثال 3)

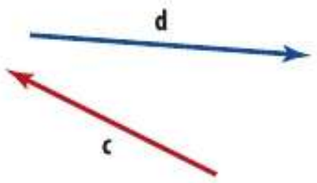
13.



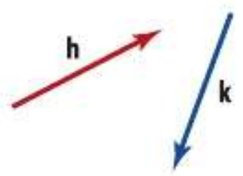
14.



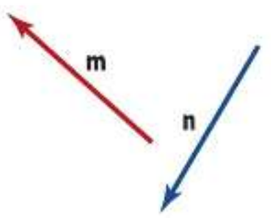
15.



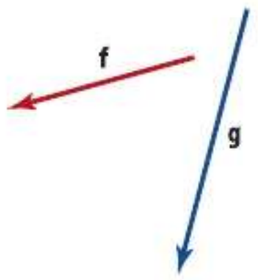
16.



17.



18.



19. **الجولف** أثناء لعب لعبة فيديو عن الجولف، ضرب عمر الكرة بزاوية 35° فوق المركبة الأفقية بسرعة 44 mph مع هبوب الرياح بسرعة 8 mph، كما هو موضح. جـد الاتجاه الناتج للكرة وسرعتها. (مثال 3)



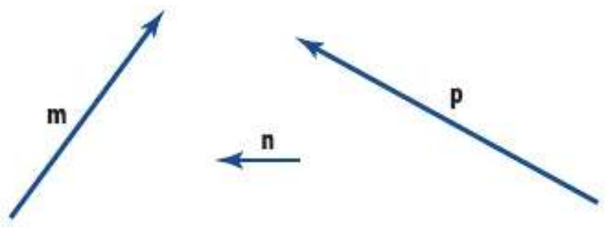
20. **القوارب** غادر قارب مستأجر الميناء باتجاه N60°W لمسافة 12 ميلاً بحريًا. غيّر القبطان المسار إلى اتجاه N25°E لمسافة 15 ميلاً بحريًا إضافية. حدد مسافة واتجاه السفينة من الميناء إلى موقعها الحالي. (مثال 3)

21. **السير على الأقدام** سار مازن وأيوب لمسافة 3.75 km إلى بحيرة بزاوية 55° جنوب شرق موقع التخييم. ثم سارا مسافة 3.75 km إلى بحيرة بزاوية 33° شمال غرب إلى مركز الحياة الطبيعية الذي يبعد مسافة 5.6 km عن البحيرة. فأين مركز الحياة الطبيعية من موقع التخييم؟ (مثال 3)

حدد مقدار واتجاه ناتج مجموع كل متجه. (مثال 3)

22. 18 N للأمام مباشرة ثم 20 N للخلف مباشرة
23. 100 m باتجاه الشمال ثم 350 m باتجاه الجنوب
24. 10 kg من القوة باتجاه 025° ثم 15 kg من القوة باتجاه 045°
25. 17 km **شرقًا ثم** 16 km **جنوبًا**
26. 15 m/s^2 بزاوية 60° مع المركبة الأفقية ثم 9.8 m/s^2 لأسفل

استخدم مجموعة المتجهات لتصميم رسم تخطيطي للمتجهات لكل تعبير. (مثال 4)



27. $m - 2n$
28. $n - \frac{3}{4}m$
29. $\frac{1}{2}p + 3n$
30. $4n + \frac{4}{5}p$
31. $p + 2n - m$
32. $-\frac{1}{3}m + p - 2n$
33. $3n - \frac{1}{2}p + m$
34. $m - 3n + \frac{1}{4}p$

35. **العدو** السرعةالناتجة لعداء هي 8 mi//h باتجاه الغرب مع هبوب الرياح بسرعة 3 mi//h باتجاه N28°W. فما سرعة العداء، مع التقريب لأقرب كيلومتر في الساعة، بدون تأثير الرياح؟ (المثال 5)

36. **الطيران الشراعي** تطير طائرة شراعية بسرعة 15 km/h باتجاه الغرب. إذا كانت الرياح تهب بسرعة 5 km/h باتجاه N60°E، فما سرعة الطائرة بالنسبة إلى الأرض؟ (المثال 5)

37. **التيار** تسبح سالي باتجاه الغرب بمعدل 1.5 m/s. يتدفق تيار قوي باتجاه S20°E بمعدل 1 km/h جـد السرعة والاتجاه الناتجين لسالي. (المثال 5)

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

قم بتصميم رسم تخطيطي يوضح تحليل كل متجه إلى مركبات متعامدة. ثم جـد مقادير المركبات الأفقية والرأسية للمتجه. (المثال 6)

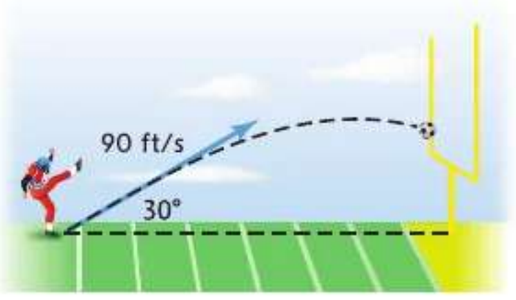
38. $2\frac{1}{8}$ cm بزاوية 310° مع المركبة الأفقية

39. 1.5 cm **باتجاه** N49°E

40. 3.2 cm/h **باتجاه** S78°W

41. $\frac{3}{4}$ cm/min باتجاه 255°

42. كرة القدم في محاولة تهديف، تم ركل الكرة بالسرعة الموضحة بالرسم التخطيطي أدناه.



a. قم بتصميم رسم تخطيطي يوضح تحليل هذه القوة إلى مركبات متعامدة.

b. جـد مقادير المركبات الأفقية والرأسية. (مثال 6)

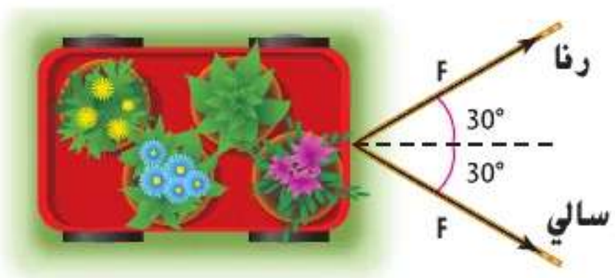
43. التنظيف تم دفع مكنسة بقوة مقدارها 190N (نيوتن) وزاوية مقدارها 33° مع الأرض. (المثال 6)



a. قم بتصميم رسم تخطيطي يوضح تحليل هذه القوة إلى مركبات متعامدة.

b. جـد مقادير المركبات الأفقية والرأسية.

44. العناية بالحدائق تسحب رنا وسالي عربة مليئة بالنباتات. تسحب كل منهما العربة بقوة متساوية وزاوية 30° مع محور العربة. القوة الناتجة هي 120 N.



a. ما مقدار القوة التي تبذلها كل منهما؟

b. إذا بذلت كل منهما قوة مقدارها 75 N فما مقدار القوة الناتجة؟

c. ما تأثير اقتراب رنا وسالي من بعضهما على القوة الناتجة؟

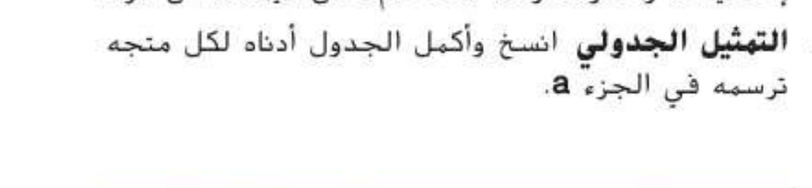
تم ذكر المقدار والاتجاهات الحقيقية للقوى الثلاث المؤثرة على جسم. جـد مقدار القوة الناتجة عن هذه القوى واتجاهها.

45. 50 N بزاوية 30°، و 80 N بزاوية 125°، و 100 N بزاوية 220°

46. 8 N بزاوية 300°، و 12 N بزاوية 45°، و 6 N بزاوية 120°.

47. 18 N **بزاوية** 190°، **و** 3 N **بزاوية** 20°، **و** 7 N **بزاوية** 320°

48. القيادة تبعد مدرسة ياسمين عن منزلها بمقدار 3 km في مسار مستقيم. تقود السيارة في شارعين مختلفين في طريقها إلى المدرسة. تتحرك بزاوية 20.9° مع المسار في الشارع الأول ثم تلتف بزاوية 45.4° في الشارع الثاني.



a. ما المسافة التي تقطعها ياسمين في الشارع الأول؟

b. ما المسافة التي تقطعها ياسمين في الشارع الثاني؟

c. إذا استغرق منها الوصول إلى المدرسة 10 دقائق وكان متوسط سرعتها في الشارع الأول 25 km/h، فما متوسط سرعتها في الشارع الثاني؟

49. التزلّج يسحب حماد أخته على زلاجة. اتجاه هذه القوة الناتجة هو 31° والمركبة الأفقية لهذه القوة هي 86 N

a. ما المركبة الرأسية للقوة؟

b. ما مقدار القوة الناتجة؟

50. التمثيلات المتعددة في هذه المسألة، ستستكشف ضرب متجه في كمية عددية.

a. **التمثيل البياني** على مستوى إحداثي، ارسم المتجه **a** بحيث يقع الذيل عند نقطة الأصل. اختر قيمة للكمية العددية k. ثم ارسم المتجه الناتج في حالة ضرب المتجه الأصلي في k على المستوى الإحداثي ذاته. كرر العملية لأربع متجهات إضافية **b** و **c** و **d** و **e**. استخدم نفس قيمة k كل مرة.

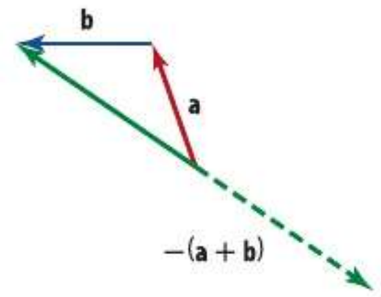
b. **التمثيل الجدولي** انسخ وأكمل الجدول أدناه لكل متجه ترسمه في الجزء **a**.

متجه	نقطة نهاية متجه	نقطة نهاية المتجه $\times k$
a		
b		
c		
d		
e		

c. **التمثيل التحليلي** إذا كانت نقطة نهاية المتجه **a** تقع عند النقطة (a, b)، فما موقع نقطة نهاية المتجه **ka**؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

المتجه *الموازن* عكس المتجه الناتج.
فهو يوازن توفيق المتجهات بحيث يكون مجموع المتجهات والموازن هو المتجه الصفري. المتجه الموازن لـ a + b هو −(a + b).



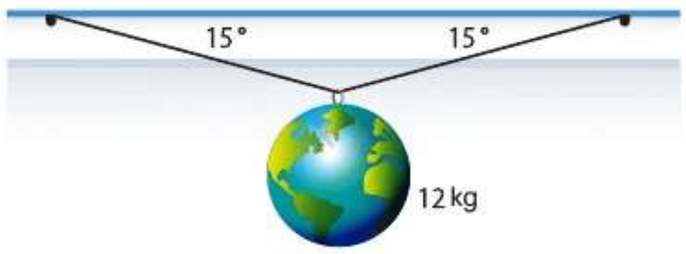
جـد مقدار واتجاه المتجه الموازن لكل مجموعة من المتجهات.

51. $\mathbf{a} = 15\ \text{km/h}$ باتجاه 125° $\mathbf{b} = 12\ \text{km/h}$ باتجاه 045°

52. $\mathbf{a} = 4\ \text{m}$ باتجاه N30W° $\mathbf{b} = 6\text{m}$ باتجاه N20E°

53. $\mathbf{a} = 23\ \text{ft/s}$ باتجاه 205° $\mathbf{b} = 16\ \text{ft/s}$ باتجاه 345°

54. المقدار تم تعليق جسم مستدير من السقف بواسطة سلكين متساويين في الطول كما هو موضح.

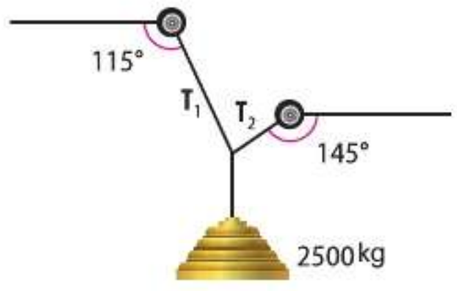


a. قم بتصميم رسم تخطيطي للمتجهات في الموقف للإشارة إلى أن متجهي التوتر $\mathbf{T_1}$ و $\mathbf{T_2}$ متساويان في المقدار ويحافظان على الجسم في حالة ثبات أو توازن.

b. قم بإعادة تصميم الرسم التخطيطي باستخدام طريقة المثلث لإيجاد $\mathbf{T_1} + \mathbf{T_2}$.

c. استخدم الرسم التخطيطي من الجزء b وحقيقة أن موازن الناتج $\mathbf{T_1} + \mathbf{T_2}$ والمتجه الممثل لوزن الجسم هما متجهان متكافئان لحساب مقداري $\mathbf{T_1}$ و $\mathbf{T_2}$.

55. دعم الكابلات تم ربط كابلين بالتوترين $\mathbf{T_1}$ و $\mathbf{T_2}$ معًا لدعم حمولة تزن 2500 kg في حالة توازن.



a. اكتب تعبيرين لتمثيل المركبتين الأفقية والرأسية $\mathbf{T_1}$ و $\mathbf{T_2}$.

b. إذا علمتَ أن موازن الناتج $\mathbf{T_1} + \mathbf{T_2}$ والمتجه الممثل لوزن الحمولة متجهان متكافئان. فاحسب مقداري $\mathbf{T_1}$ و $\mathbf{T_2}$ لأقرب جزء من عشرة من الكيلوجرام.

c. استخدم إجاباتك من الجزأين **a** و **b** لإيجاد مقداري المركبتين الأفقية والرأسية $\mathbf{T_1}$ و $\mathbf{T_2}$ لأقرب جزء من عشرة من الكيلوجرام.

جـد مقدار واتجاه كل متجه إذا علمتَ مركبتيه الرأسية والأفقية ومدى قيم زاوية الاتجاه θ مع المركبة الأفقية.

56. الأفقية: 0.32 cm، الرأسية: 2.28 cm، $90° < \theta < 180°$

57. الأفقية: 3.1 m، الرأسية: 4.2 m، $0° < \theta < 90°$

58. الأفقية: 2.6 cm، الرأسية: 7.9 cm، $270° < \theta < 360°$

59. الأفقية: 2.9 m، الرأسية: 1.8 m، $180° < \theta < 270°$

ارسم أي ثلاثة متجهات a و b و c. وضح هندسيًا تحقق كل من خواص المتجهات التالية باستخدام هذه المتجهات.

60. خاصية التبديل: $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$

61. خاصية التجميع: $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$

62. خاصية التوزيع: $k(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = k\mathbf{a} + k\mathbf{b}$، حيث $k = 2, 0.5, -2$

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

63. مسألة غير محددة الإجابة فكر في متجه من 5 وحدات موجّه على امتداد المحور *x* الموجب. حلل المتجه إلى مركبتين متعامدتين لا تتضمنان مركبة أفقية أو رأسية.

64. التبرير هل من الممكن أحيانًا أو دائمًا أو مطلقًا إيجاد مجموع متجهين موازيين باستخدام طريقة متوازي الأضلاع؟ وضّح استنتاجك.

65. التبرير ما أهمية وضع مرجع مشترك لقياس اتجاه متجه. على سبيل المثال. من المحور *x* الموجب؟

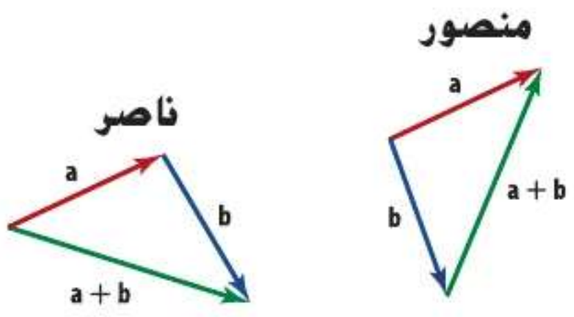
66. التحدي ناتج $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ يساوي ناتج $\mathbf{a} - \mathbf{b}$. إذا كان مقدار a هو $4x$، فما مقدار **b**؟

67. التبرير فكر في العبارة $|\mathbf{a}| + |\mathbf{b}| \geq |\mathbf{a} + \mathbf{b}|$.

a. عبّر عن هذه العبارة باستخدام الشرح.

b. هل هذه العبارة صحيحة أم خاطئة؟ علل إجابتك.

68. تحليل الخطأ يعمل منصور وناصر على إيجاد ناتج المتجهين **a** و **b**. هل أي منهما على صواب؟ وضّح استنتاجك.



69. التبرير هل من الممكن أن يساوي مجموع متجهين أحدهما؟ اشرح.

70. الكتابة في الرياضيات قارن وبيّن الفرق بين طريقتي متوازي الأضلاع والمثلث لإيجاد ناتج متجهين أو أكثر.

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

مراجعة شاملة

71. كرة الركل افترض أن أحد لاعبي كرة الركل قام بركل الكرة بزاوية 32° مع المركبة الأفقية بسرعة ابتدائية مقدارها 20 m/s. فعلى أي مسافة ستهبط الكرة؟

72. مثّل بيانيًا $(x')^2 + y' - 5 = 1$ إذا تم تدويره بزاوية 45° من موقعه الأصلي في المستوى xy.

اكتب معادلة للدائرة التي تحقق كل مجموعة من الشروط. ثم **مثّل** الدائرة بيانيًا.

73. يقع المركز عند (4, 5)، نصف القطر 4

74. يقع المركز عند (−4, 1)، القطر 7

حدد المعادلة **ومثّل** بيانيًا القطع المكافئ بالبؤرة F والرأس V.

75. F(2, 4), V(2, 3)

76. F(1, 5), V(−7, 5)

77. الصناعات اليدوية يبيع ماجد المنحوتات الخشبية. يبيع التماثيل الكبيرة مقابل 60 AED والساعات مقابل 40 AED والأثاث المُصغَّر مقابل 25 AED وقطع الشطرنج مقابل 5 AED. اصطحب معه الأغراض التالية إلى المعرض: 12 تمثالاً كبيرًا و 25 ساعة و 45 قطعة أثاث مُصغَّر و 50 قطعة شطرنج.

a. اكتب مصفوفة مخزون للعدد المتاح من كل عنصر ومصفوفة تكلفة لسعر كل عنصر.

b. جـد الدخل الإجمالي لماجد إذا باع جميع العناصر.

حُـلّ كل معادلة لجميع قيم x.

78. $4 \sin x \cos x - 2 \sin x = 0$

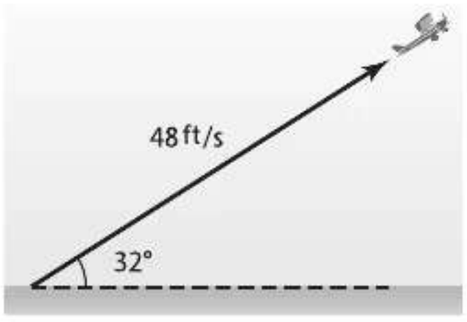
79. $\sin x - 2 \cos^2 x = -1$

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

80. SAT/ACT إذا كانت المدينة A تبعد مسافة 12 km عن المدينة B والمدينة C تبعد مسافة 18 km عن المدينة A، فأي مما يلي لا يمكن أن تكون المسافة من المدينة B إلى المدينة C؟

A 5 km
B 7 km
C 10 km
D 12 km
E 18 km

81. حلقت طائرة بالتحكم عن بُعد على طول مسار مبدئي بزاوية 32° مع المركبة الأفقية بسرعة 48 ft/s كما هو موضح. أي مما يلي يمثل مقداري المركبتين الأفقية والرأسية للسرعة؟



F 25.4 ft/s, 40.7 ft/s
G 40.7 ft/s, 25.4 ft/s
H 56.6 ft/s, 90.6 ft/s
J 90.6 ft/s, 56.6 ft/s

82. مراجعة المثلث ABC له الرؤوس $A(-4, 2)$ و $B(-4, -3)$ و $C(3, -3)$. بعد التمدد، أصبح للمثلث $A'B'C'$ الرؤوس $A'(-12, 6)$ و $B'(-12, -9)$ و $C'(9, -9)$. كم ضعفًا تبلغ مساحة $\triangle A'B'C'$ بالنسبة لمساحة $\triangle ABC$؟

A $\frac{1}{9}$
B $\frac{1}{3}$
C 3
D 9

83. مراجعة ترسم حليمة خريطة للحي الذي تعيش به. تم تمثيل منزلها بواسطة شبه منحرف $ABCD$ رؤوسه $A(2, 2)$ و $B(6, 2)$ و $C(6, 6)$ و $D(2, 6)$. تريد استخدام النظام الإحداثي ذاته لرسم خريطة أخرى بنصف حجم الخريطة الأصلية. فما الرؤوس الجديدة المحتملة لمنزل حليمة؟

F $A'(0, 0)$, $B'(2, 1)$, $C'(3, 3)$, $D'(0, 3)$
G $A'(0, 0)$, $B'(3, 1)$, $C'(2, 3)$, $D'(0, 2)$
H $A'(1, 1)$, $B'(3, 1)$, $C'(3, 3)$, $D'(1, 3)$
J $A'(1, 2)$, $B'(3, 0)$, $C'(2, 2)$, $D'(2, 3)$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

7-2 المتجهات في المستوى الإحداثي

السابق
- قمتَ بإجراء العمليات على المتجهات باستخدام الرسومات ذات المقاييس.

الحالي
1. **تمثيل** المتجهات وإجراء العمليات عليها في المستوى الإحداثي.
2. كتابة متجه كتوفيق خطي لمتجهات الوحدة.

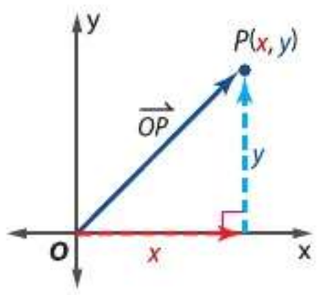
لماذا؟
- يمكن أن تؤثر الرياح على اتجاه الطائرة وسرعتها بالنسبة إلى الأرض. يستطيع الطيارون استخدام الرسومات ذات المقاييس لتحديد الاتجاه المطلوب للطائرة لتعويض الانحراف الناتج عن الرياح. ويتم إجراء هذه الحسابات في الغالب باستخدام المتجهات في المستوى الإحداثي.



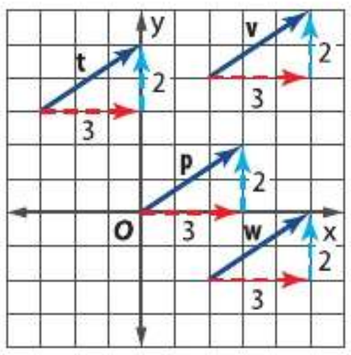
المفردات الجديدة
- صورة مركبة component form
- متجه وحدة unit vector
- توفيق خطي linear combination

1 المتجهات في المستوى الإحداثي في الدرس 1-7، قمت بإيجاد مقدار واتجاه ناتج قوتين أو أكثر هندسيًا باستخدام الرسومات ذات المقاييس. نظرًا لأن الرسومات يمكن أن تكون غير دقيقة، هناك حاجة إلى أسلوب جبري باستخدام نظام إحداثي متعامد للمواقف التي تتطلب المزيد من الدقة أو في أنظمة المتجهات المعقدة.

يمكن وصف متجه $\overrightarrow{OP}$ في الوضع القياسي في نظام إحداثي متعامد (كما في الشكل 7.2.1) بشكل فريد بواسطة إحداثيات نقطة انتهائه $P(x, y)$. نقوم بالإشارة إلى $\overrightarrow{OP}$ على مستوى إحداثي بواسطة $\langle x, y \rangle$. لاحظ أن x و y مركبتين متعامدتين لـ $\overrightarrow{OP}$. لهذا السبب، $\langle x, y \rangle$ تُسمى **صورة مُركّبة** للمتجه.



الشكل 7.2.1



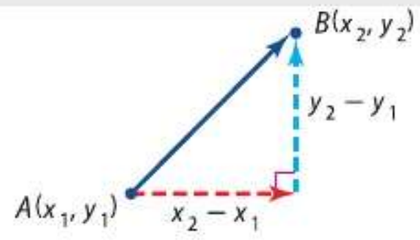
الشكل 7.2.2

نظرًا لأن المتجهات التي لها نفس المقدار والاتجاه متكافئة، فيمكن تمثيل العديد من المتجهات بواسطة الإحداثيات ذاتها. على سبيل المثال، المتجهات **p** و **t** و **v** و **w** في الشكل 7.2.2 متكافئة لأنه يمكن الإشارة إلى كل منها بواسطة $\langle 3, 2 \rangle$. لإيجاد صورة مركبة لمتجه ليس في الوضع القياسي، يمكنك استخدام إحداثيات نقطتي البداية والنهاية.

المفهوم الأساسي الصورة المُركّبة للمتجه

الصورة المركّبة للمتّجه $\overrightarrow{AB}$ نقطة بدايته $A(x_1, y_1)$ ونقطة نهايته $B(x_2, y_2)$ معطاة بواسطة

$$\langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle.$$



مثال 1 التعبير عن متجه بصورة مركبة

جـد الصورة المُركّبة للمتّجه $\overrightarrow{AB}$ نقطة بدايته $A(-4, 2)$ ونقطة نهايته $B(3, -5)$.

$\overrightarrow{AB} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle$ الصورة المركبة

$= \langle 3 - (-4), -5 - 2 \rangle$ $(x_1, y_1) = (-4, 2)$ و $(x_2, y_2) = (3, -5)$

$= \langle 7, -7 \rangle$ اطرح.

تمرين موجّه

جـد الصورة المُركّبة للمتّجه $\overrightarrow{AB}$ بنقطتي البداية والنهاية المذكورتين.

1A. $A(-2, -7), B(6, 1)$

1B. $A(0, 8), B(-9, -3)$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

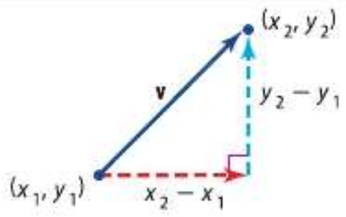
يتم إيجاد مقدار متجه في المستوى الإحداثي باستخدام صيغة المسافة.

المفهوم الأساسي مقدار متجه في المستوى الإحداثي

إذا كان v متجهًا نقطة بدايته (x_1, y_1) ونقطة نهايته (x_2, y_2)، فيتم تقديم مقدار v بواسطة

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

إذا كان v صورة مركبته $\langle a, b \rangle$، إذًا $|\mathbf{v}| = \sqrt{a^2 + b^2}$.



قراءة في الرياضيات

المعيار مقدار المتجه يسمى أحيانا معيار المتجه.

مثال 2 إيجاد مقدار متجه

جـد مقدار $\overrightarrow{AB}$ بنقطة البداية A(−4, 2) ونقطة النهاية B(3, −5).

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ صيغة المسافة

$= \sqrt{[3 - (-4)]^2 + (-5 - 2)^2}$ $(x_1, y_1) = (-4, 2)$ و $(x_2, y_2) = (3, -5)$

$= \sqrt{98}$ تقريبًا $= 9.9$ بسّط.

التحقق من المثال 1. تعلم أن $\overrightarrow{AB} = \langle 7, -7 \rangle$. $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{7^2 + (-7)^2}$ أو $\sqrt{98}$ ✔

تمرين موجّه

جـد مقدار $\overrightarrow{AB}$ بنقطتي البداية والنهاية المذكورتين.

2A. $A(-2, -7), B(6, 1)$ **2B.** $A(0, 8), B(-9, -3)$

جمع المتجهات في المستوى الإحداثي وطرحها وضربها في كمية عددية مشابه لتلك العمليات مع المصفوفات.

المفهوم الأساسي العمليات على المتجهات

إذا كان $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$ و $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2 \rangle$ متجهان و k كمية عددية. فإن ما يلي صحيح.

جمع المتجهات $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2 \rangle$

طرح المتجهات $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2 \rangle$

الضرب في كمية عددية $k\mathbf{a} = \langle ka_1, ka_2 \rangle$

مثال 3 العمليات على المتجهات

جـد كل مما يلي إذا كان $\mathbf{w} = \langle -4, 1 \rangle$, $\mathbf{y} = \langle 2, 5 \rangle$. و $\mathbf{z} = \langle -3, 0 \rangle$.

a. $\mathbf{w} + \mathbf{y}$

$\mathbf{w} + \mathbf{y} = \langle -4, 1 \rangle + \langle 2, 5 \rangle$ عوّض.

$= \langle -4 + 2, 1 + 5 \rangle = \langle -2, 6 \rangle$ جمع المتجهات

b. $\mathbf{z} - 2\mathbf{y}$

$\mathbf{z} - 2\mathbf{y} = \mathbf{z} + (-2)\mathbf{y}$ أعد كتابة الطرح في صورة جمع.

$= \langle -3, 0 \rangle + (-2)\langle 2, 5 \rangle$ عوّض.

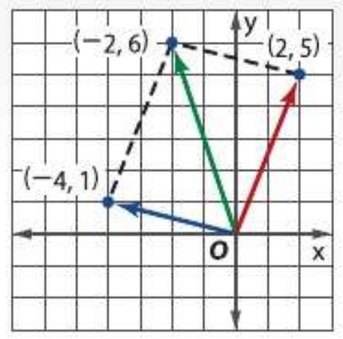
$= \langle -3, 0 \rangle + \langle -4, -10 \rangle = \langle -7, -10 \rangle$ الضرب في كمية عددية وجمع المتجهات

تمرين موجّه

3A. $4\mathbf{w} + \mathbf{z}$ **3B.** $-3\mathbf{w}$ **3C.** $2\mathbf{w} + 4\mathbf{y} - \mathbf{z}$

نصيحة دراسية

التحقق البياني كما هو موضح أدناه، تم التحقق من المثال 3a باستخدام طريقة متوازي الأضلاع.



حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

2 متجه الوحدة

المتجه الذي يكون مقداره وحدة واحدة يُسمى **متجه وحدة**. من المفيد أحيانًا وصف متجه غير صفري $\mathbf{v}$ في صورة مضاعف كمية عددية لمتجه وحدة $\mathbf{u}$ له نفس اتجاه $\mathbf{v}$. لإيجاد $\mathbf{u}$، اقسم $\mathbf{v}$ على مقداره $|\mathbf{v}|$.

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{1}{|\mathbf{v}|}\mathbf{v}$$

مثال 4 إيجاد متّجه وحدة له نفس اتجاه متجه معلوم

جـــد متّجه الوحدة $\mathbf{u}$ الذي له نفس اتّجاه $\mathbf{v} = \langle -2, 3 \rangle$.

$$\mathbf{u} = \frac{1}{|\mathbf{v}|}\mathbf{v}$$ متجه وحدة له نفس اتجاه $\mathbf{v}$

$$= \frac{1}{|\langle -2, 3 \rangle|}\langle -2, 3 \rangle$$ عوّض.

$$= \frac{1}{\sqrt{(-2)^2 + 3^2}}\langle -2, 3 \rangle$$ $|\langle a, b \rangle| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$$= \frac{1}{\sqrt{13}}\langle -2, 3 \rangle$$ بسّط.

$$= \left\langle -\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}} \right\rangle$$ الضرب في كمية عددية

$$= \left\langle -\frac{2\sqrt{13}}{13}, \frac{3\sqrt{13}}{13} \right\rangle$$ إنطاق المقامات.

التحقق نظرًا لأن $\mathbf{u}$ مضاعف كمية عددية لـــ $\mathbf{v}$، فإن له نفس اتجاه $\mathbf{v}$. تحقق من أن مقدار $\mathbf{u}$ هو 1.

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{\left(-\frac{2\sqrt{13}}{13}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{13}}{13}\right)^2}$$ صيغة المسافة

$$= \sqrt{\frac{52}{169} + \frac{117}{169}}$$ بسّط.

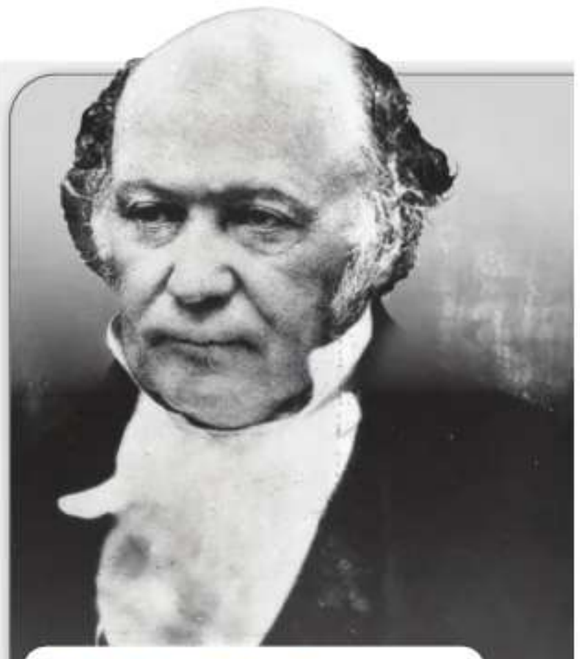
$$= \sqrt{1} = 1 \checkmark$$ بسّط.

تمرين موجّه

جـــد متّجه وحدة له نفس اتجاه المتجه المعلوم.

4A. $\mathbf{w} = \langle 6, -2 \rangle$

4B. $\mathbf{x} = \langle -4, -8 \rangle$



الربط بتاريخ الرياضيات

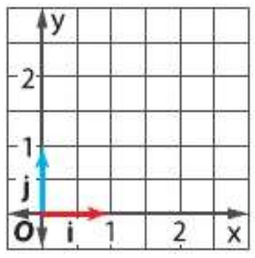
ويليام روان هاملتون
(1805-1865)

عالم رياضيات أيرلندي، طور هاملتون نظرية المرباعيات ونشر *محاضرات عن المرباعيات*. تتضمن هذه النظرية أسس العديد من المفاهيم الأساسية لتحليل المتجهات.

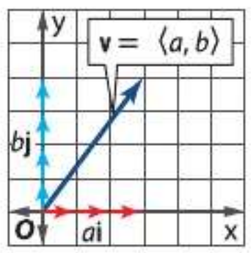
تتم الإشارة إلى متجهات الوحدة في اتجاه محور x الموجب ومحور y الموجب بواسطة $\mathbf{i} = \langle 1, 0 \rangle$ و $\mathbf{j} = \langle 0, 1 \rangle$، على التوالي (الشكل 7.2.3). المتجهان $\mathbf{i}$ و $\mathbf{j}$ يُطلق عليهما متجهي الوحدة القياسيين.

انتبه!

متجه الوحدة i لا تخلط بين متجه الوحدة i والعدد التخيلي i. تتم الإشارة إلى المتجه بالحرف الغامق غير المائل i. تتم الإشارة إلى العدد التخيلي بالحرف الغامق المائل i.



الشكل 7.2.3



الشكل 7.2.4

يمكن استخدام هذين المتجهين للتعبير عن أي متجه $\mathbf{v} = \langle a, b \rangle$ في صورة $a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ كما هو موضح بالشكل 7.2.4.

$$\mathbf{v} = \langle a, b \rangle$$ صورة مركبة لـــ $\mathbf{v}$

$$= \langle a, 0 \rangle + \langle 0, b \rangle$$ أعد الكتابة في صورة مجموع متجهين.

$$= a\langle 1, 0 \rangle + b\langle 0, 1 \rangle$$ الضرب في كمية عددية

$$= a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$$ $\mathbf{i} = \langle 1, 0 \rangle$ و $\mathbf{j} = \langle 0, 1 \rangle$

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

مجموع المتجهين $a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ يُسمى **التوفيق الخطي** للمتجهين **i** و **j**.

مثال 5 كتابة متجه كتوفيق خطي لمتجهات الوحدة

افترض أن $\overrightarrow{DE}$ متجه نقطة بدايته $D(-2, 3)$ ونقطة نهايته $E(4, 5)$. اكتب $\overrightarrow{DE}$ في صورة توفيق خطي للمتّجهين i و j.

أولاً، جـد الصورة المركبة للمتجه $\overrightarrow{DE}$.

$\overrightarrow{DE} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle$ صورة مركبة

$= \langle 4 - (-2), 5 - 3 \rangle$ $(x_1, y_1) = (-2, 3)$ و $(x_2, y_2) = (4, 5)$

$= \langle 6, 2 \rangle$ بسّط.

ثم أعد كتابة المتجه في صورة توفيق خطي لمتجهات وحدة قياسية.

$\overrightarrow{DE} = \langle 6, 2 \rangle$ صورة مركبة

$= 6\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ $\langle a, b \rangle = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$

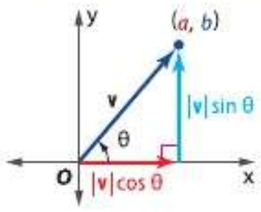
تمرين موجّه

افترض أن $\overrightarrow{DE}$ هو المتجه بنقطتي البداية والنهاية المذكورتين. اكتب $\overrightarrow{DE}$ في صورة توفيق خطي للمتّجهين **i** و **j**.

5A. $D(-6, 0), E(2, 5)$

5B. $D(-3, -8), E(-7, 1)$

إحدى طرق تحديد اتجاه متجه $\mathbf{v} = \langle a, b \rangle$ هي ذكر زاوية الاتجاه θ التي يصنعها **v** مع محور **x** الموجب. من الشكل 7.2.5، يترتب على ذلك أن **v** يمكن كتابته في صورة مركبة أو توفيق خطي لـ **i** و **j** باستخدام مقدار وزاوية اتجاه المتجه.



$\mathbf{v} = \langle a, b \rangle$ صورة مركبة

$= \langle |\mathbf{v}| \cos \theta, |\mathbf{v}| \sin \theta \rangle$ تعويض

$= |\mathbf{v}| (\cos \theta)\mathbf{i} + |\mathbf{v}| (\sin \theta)\mathbf{j}$ توفيق خطي لـ i و j

نصيحة دراسية

متجه الوحدة من العبارة $\mathbf{v} = \langle |\mathbf{v}| \cos \theta, |\mathbf{v}| \sin \theta \rangle$. يترتب أن متجه الوحدة في اتجاه **v** له الصورة

$\mathbf{v} = |1 \cos \theta, 1 \sin \theta|$

$= \langle \cos \theta, \sin \theta \rangle$.

مثال 6 إيجاد صورة مُركّبة

جـد الصورة المُركّبة لمتجه v مقداره 10 وزاوية اتجاهه 120°.

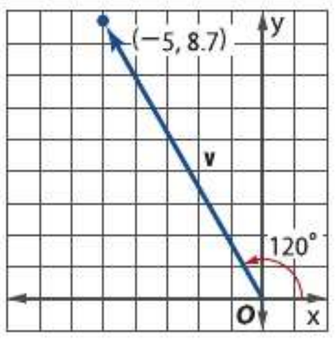
$\mathbf{v} = \langle |\mathbf{v}| \cos \theta, |\mathbf{v}| \sin \theta \rangle$ الصورة المركبة لـ v بدلالة $|\mathbf{v}|$ و θ

$= \langle 10 \cos 120^\circ, 10 \sin 120^\circ \rangle$ $|\mathbf{v}| = 10$ و $\theta = 120^\circ$

$= \left\langle 10\left(-\frac{1}{2}\right), 10\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \right\rangle$ $\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$ و $\sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$= \langle -5, 5\sqrt{3} \rangle$ بسّط.

التحقق مثّل بيانيًا $\langle -5, 8.7 \rangle \approx \langle -5, 5\sqrt{3} \rangle = \mathbf{v}$. قياس الزاوية التي يصنعها **v** مع محور x الموجب هي تقريبًا 120° كما هو موضح و $|\mathbf{v}| = \sqrt{(-5)^2 + (5\sqrt{3})^2}$ أو 10. ✔



تمرين موجّه

جـد الصورة المركبة للمتجه **v** بالمقدار وزاوية الاتجاه المذكورتين.

6A. $|\mathbf{v}| = 8, \theta = 45^\circ$

6B. $|\mathbf{v}| = 24, \theta = 210^\circ$

McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف

يترتب كذلك على معطيات الشكل 7.2.5 في الصفحة السابقة أنه يمكن إيجاد زاوية الاتجاه θ للمتجه $\mathbf{v} = \langle a, b \rangle$ من خلال حل المعادلة المثلثية $\tan \theta = \frac{|\mathbf{v}| \sin \theta}{|\mathbf{v}| \cos \theta}$ أو $\tan \theta = \frac{b}{a}$

مثال 7 زوايا اتجاه المتجهات

حدّد زاوية اتّجاه كل متجه مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة من الدرجة.

a. $\mathbf{p} = 3\mathbf{i} + 7\mathbf{j}$

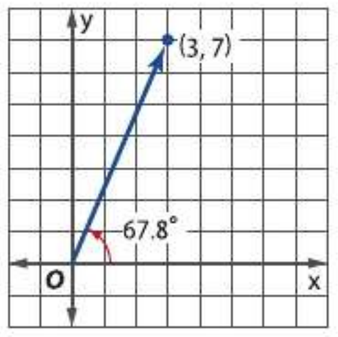
$\tan \theta = \frac{b}{a}$	معادلة زاوية الاتجاه
$\tan \theta = \frac{7}{3}$	$a = 3$ و $b = 7$
$\theta = \tan^{-1} \frac{7}{3}$	جـد θ.
$\theta \approx 66.8^\circ$	استخدم حاسبة.

إذًا، زاوية اتجاه المتجه p هي تقريبًا 67.8° كما موضح بالشكل 7.2.6.

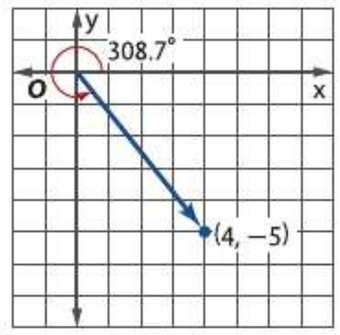
b. $\mathbf{r} = \langle 4, -5 \rangle$

$\tan \theta = \frac{b}{a}$	معادلة زاوية الاتجاه
$\tan \theta = \frac{-5}{4}$	$a = 4$ و $b = -5$
$\theta = \tan^{-1} \left(-\frac{5}{4}\right)$	جـد θ.
$\theta \approx -51.3^\circ$	استخدم حاسبة.

نظرًا لأن r تقع في الربع الرابع كما هو موضح بالشكل 7.2.7. فإن $\theta = 360 + (-51.3)$ أو 308.7°.



الشكل 7.2.6



الشكل 7.2.7

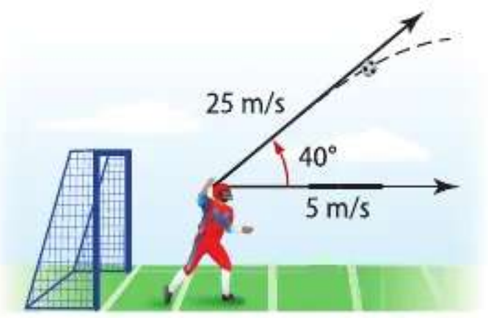
تمرين موجّه

7A. $-6\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$

7B. $\langle -3, -8 \rangle$

مثال 8 من الحياة اليومية تطبيق العمليات على المتجهات

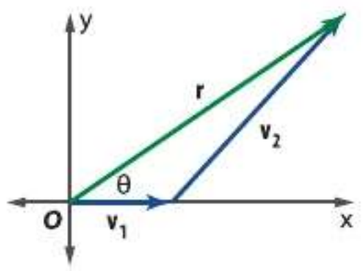
كرة القدم يركض حارس المرمى للأمام بسرعة 5 m/s ويرمي الكرة بسرعة 25 m/s وزاوية 40° مع المركبة الأفقية. ما مقدار السرعة الناتجة للكرة واتّجاهها؟



نظرًا لأن الحارس يتحرك للأمام مباشرة، فصورة مركبة سرعته $\mathbf{v}_1$ هي $\langle 5, 0 \rangle$. استخدم مقدار واتجاه سرعة الكرة $\mathbf{v}_2$ لكتابة هذا المتجه في صورة مركبة.

$\mathbf{v}_2 = \langle \lvert\mathbf{v}_2\rvert \cos \theta, \lvert\mathbf{v}_2\rvert \sin \theta \rangle$	الصورة المركبة لـ $\mathbf{v}_2$
$= \langle 25 \cos 40^\circ, 25 \sin 40^\circ \rangle$	$\lvert\mathbf{v}_2\rvert = 25$ و $\theta = 40^\circ$
$\approx \langle 19.2, 16.1 \rangle$	بسّط.

اجمع المتجهين الجبريين الممثلين لـ $\mathbf{v}_1$ و $\mathbf{v}_2$ لإيجاد السرعة الناتجة، المتجه r.



ملاحظة: الشكل غير مرسوم للقياس.

$\mathbf{r} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$	متجه ناتج
$= \langle 5, 0 \rangle + \langle 19.2, 16.1 \rangle$	تعويض
$= \langle 24.2, 16.1 \rangle$	جمع متجهات

مقدار هذا الناتج هو $|\mathbf{r}| = \sqrt{24.2^2 + 16.1^2}$ أو تقريبًا 29.1. بعد ذلك، جـد زاوية اتجاه الناتج θ.

$\tan \theta = \frac{16.1}{24.2}$	$\tan \theta = \frac{b}{a}$ حيث $\langle a, b \rangle = \langle 24.2, 16.1 \rangle$
$\theta = \tan^{-1} \frac{16.1}{24.2}$ تقريبًا $= 33.6^\circ$	جـد θ.

إذًا، السرعة الناتج للكرة هي تقريبًا 29.1 m/s بزاوية 33.6° تقريبًا مع المركبة الأفقية.

تمرين موجّه

8. كرة القدم ماذا ستكون السرعة الناتجة للكرة إذا ألقى حارس المرمى الرمية ذاتها وهو يركض للخلف بسرعة 5 m/s ؟

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

تمارين

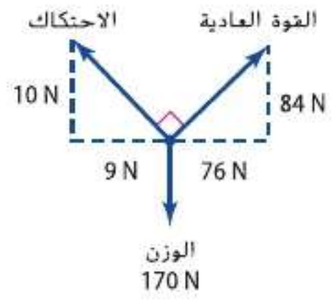
جـد الصورة المُركّبة والمقدار للمتجه $\overrightarrow{AB}$ بنقطتي البداية والنهاية المذكورتين. (المثالان 1 و 2)

1. $A(-3, 1), B(4, 5)$
2. $A(2, -7), B(-6, 9)$
3. $A(10, -2), B(3, -5)$
4. $A(-2, 7), B(-9, -1)$
5. $A(-5, -4), B(8, -2)$
6. $A(-2, 6), B(1, 10)$
7. $A(2.5, -3), B(-4, 1.5)$
8. $A(-4.3, 1.8), B(9.4, -6.2)$
9. $A\left(\frac{1}{2}, -9\right), B\left(6, \frac{5}{2}\right)$
10. $A\left(\frac{3}{5}, -\frac{2}{5}\right), B(-1, 7)$

جـد كل مما يلي حيث $\mathbf{f} = \langle 8, 0 \rangle$ و $\mathbf{g} = \langle -3, -5 \rangle$ و $\mathbf{h} = \langle -6, 2 \rangle$. (مثال 3)

11. $4\mathbf{h} - \mathbf{g}$
12. $\mathbf{f} + 2\mathbf{h}$
13. $3\mathbf{g} - 5\mathbf{f} + \mathbf{h}$
14. $2\mathbf{f} + \mathbf{g} - 3\mathbf{h}$
15. $\mathbf{f} - 2\mathbf{g} - 2\mathbf{h}$
16. $\mathbf{h} - 4\mathbf{f} + 5\mathbf{g}$
17. $4\mathbf{g} - 3\mathbf{f} + \mathbf{h}$
18. $6\mathbf{h} + 5\mathbf{f} - 10\mathbf{g}$

19. **الفيزياء** في الفيزياء، يتم استخدام الرسوم التخطيطية للقوى لعرض تأثيرات القوى المختلفة المؤثرة على جسم. يمكن للرسم التخطيطي التالي للقوى تمثيل القوى المؤثرة على طفل ينزلق لأسفل على زحلوقة. (مثال 3)



a. باستخدام النقطة الزرقاء الممثلة للطفل كنقطة أصل، عبر عن كل قوة كمتجه في صورة مركبة.

b. جـد صورة مركبة المتجه الناتج الممثل للقوة المتسببة في حركة الطفل لأسفل على الزحلوقة.

جـد متّجه الوحدة u الذي له نفس اتّجاه v. (مثال 4)

20. $\mathbf{v} = \langle -2, 7 \rangle$
21. $\mathbf{v} = \langle 9, -3 \rangle$
22. $\mathbf{v} = \langle -8, -5 \rangle$
23. $\mathbf{v} = \langle 6, 3 \rangle$
24. $\mathbf{v} = \langle -2, 9 \rangle$
25. $\mathbf{v} = \langle -1, -5 \rangle$
26. $\mathbf{v} = \langle 1, 7 \rangle$
27. $\mathbf{v} = \langle 3, -4 \rangle$

افترض أن $\overrightarrow{DE}$ هو المتجه بنقطتي البداية والنهاية المذكورتين. اكتب $\overrightarrow{DE}$ في صورة توفيق خطي للمتّجهين i و j. (المثال 5)

28. $D(4, -1), E(5, -7)$
29. $D(9, -6), E(-7, 2)$
30. $D(3, 11), E(-2, -8)$
31. $D(9.5, 1), E(0, -7.3)$
32. $D(-3, -5.7), E(6, -8.1)$
33. $D(-4, -6), E(9, 5)$
34. $D\left(\frac{1}{8}, 3\right), E\left(-4, \frac{2}{7}\right)$
35. $D(-3, 1.5), E(-3, 1.5)$

36. **طريق المدرسة** من أجل أن تذهب لميس إلى المدرسة، تغادر منزلها وتقود السيارة شمالاً في شارع النصر لمسافة 2.4 km. ثم تنعطف يسارًا إلى شارع الحرية وتقطع مسافة 3.1 km ثم تنعطف يمينًا إلى شارع الأمل وتقطع مسافة 5.8 km. عبّر عن طريق لميس في صورة توفيق خطي لمتّجهي الوحدة i و j. (المثال 5)

37. **التجديف** تجدف نجاة عبر النهر بسرعة 5 km/h بشكل متعامد على الشاطئ. يبلغ تيار النهر 3 km/h باتجاه التيار. (المثال 5)

a. ما سرعة حركتها؟

b. بأي زاوية مع الشاطئ تتحرك؟

جـد صورة مُركّبة المتّجه $\mathbf{v}$ بالمقدار وزاوية الاتجاه المذكورتين. (المثال 6)

38. $|\mathbf{v}| = 12, \theta = 60^\circ$
39. $|\mathbf{v}| = 4, \theta = 135^\circ$
40. $|\mathbf{v}| = 6, \theta = 240^\circ$
41. $|\mathbf{v}| = 16, \theta = 330^\circ$
42. $|\mathbf{v}| = 28, \theta = 273^\circ$
43. $|\mathbf{v}| = 15, \theta = 125^\circ$

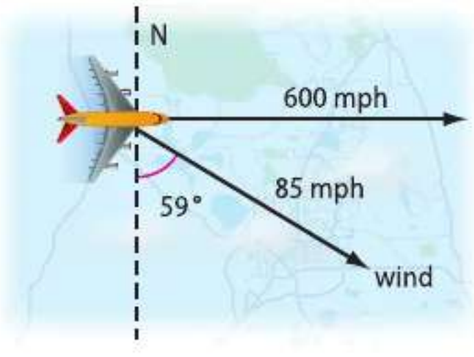
حدّد زاوية اتّجاه كل متجه مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة من الدرجة. (المثال 7)

44. $3\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$
45. $-2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$
46. $8\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$
47. $-4\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$
48. $\langle -5, 9 \rangle$
49. $\langle 7, 7 \rangle$
50. $\langle -6, -4 \rangle$
51. $\langle 3, -8 \rangle$

52. **التزلج** تسحب هيام زلاجة بقوة 275 N من خلال إمساك حبلها بزاوية 58°. سوف يساعدها أخاها من خلال دفع الزلاجة بقوة 320 N. حدد مقدار واتجاه القوة الإجمالية الناتجة المؤثرة على الزلاجة. (المثال 8)



53. **الملاحة** تطير طائرة باتّجاه الشرق بسرعة 600 mph. وتهب الرياح بسرعة 85 mph بزاوية S59°E. (المثال 8)



a. حدّد سرعة طيران الطائرة.

b. حدّد زاوية طيران الطائرة.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

54. **الاتجاه** يحتاج طيار إلى تعيين مسار يؤدي إلى سرعة 500 mph باتجاه الغرب. إذا كانت الرياح تهب بسرعة 100 mph من زاوية 192°، فجد الاتجاه والسرعة التي يجب على الطيار اتخاذهما لتحقيق هذا الناتج.

حدد ما إذا كان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ بنقاط البداية والنهاية المذكورة متكافئين. وإذا كانا كذلك، فأثبت أن $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. وإن لم يكونا كذلك، فاشرح السبب.

55. $A(3, 5)$, $B(6, 9)$, $C(-4, -4)$, $D(-2, 0)$

56. $A(-4, -5)$, $B(-8, 1)$, $C(3, -3)$, $D(1, 0)$

57. $A(1, -3)$, $B(0, -10)$, $C(11, 8)$, $D(10, 1)$

58. **القوارب** تتحرك عائلة هناء في قارب عبر نهر. افترض أنهم في منطقة من النهر عرضها 150 m تتدفق باتجاه الجنوب بمعدل متر في الثانية. في المياه الراكدة، يتحرك القارب بسرعة 0.5 m/s.

a. ما سرعة القارب؟

b. بعد أي مسافة سيجنح القارب إلى الشاطئ؟

c. كم يستغرق عبور النهر في مسار مباشر من ضفة لأخرى؟

59. **الملاحة** تطير طائرة نفاثة بسرعة 480 mi/h باتجاه N82°E. بسبب الرياح، تبلغ سرعة الطائرة بالنسبة إلى الأرض 518 mi/h باتجاه N79°E.

a. قم بتصميم رسم تخطيطي يمثل هذه الحالة.

b. ما سرعة الرياح واتّجاهها؟

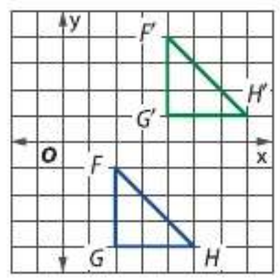
c. إذا زاد الطيار سرعة الطائرة في الهواء إلى 500 mi/h، فكم ستكون السرعة الناتجة للطائرة بالنسبة إلى الأرض؟

60. **الإزاحات** يمكنك إزاحة شكل على طول متجه إزاحة $\langle a, b \rangle$ من خلال جمع a مع كل إحداثي x وجمع b مع كل إحداثي y. فكر في المثلثات الموضحة أدناه.

a. صف الإزاحة من $\triangle FGH$ إلى $\triangle F'G'H'$ باستخدام متجه إزاحة.

b. مثّل بيانيًا $\triangle F'G'H'$ وصورته المزاحة $\triangle F''G''H''$ على طول $\langle -3, -6 \rangle$.

c. صف الإزاحة من $\triangle FGH$ إلى $\triangle F''G''H''$ باستخدام متجه إزاحة.

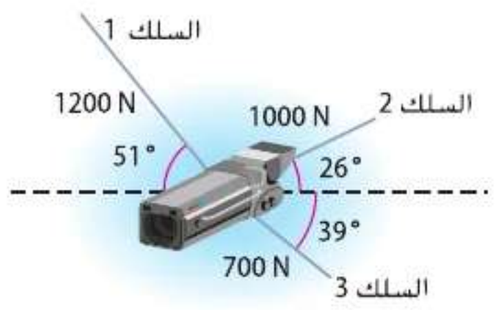


إذا علمتَ مقدار ونقطة بداية كل متجه، فحدد نقطة نهايته المحتملة.

61. $(-1, 4)$; $\sqrt{37}$

62. $(-3, -7)$; 10

63. **الكاميرا** يتم دعم كاميرا فيديو ترصد الأحداث المثيرة في فعالية رياضية بواسطة ثلاثة أسلاك. يمكن تمثيل التوتر في كل سلك بواسطة متجه.

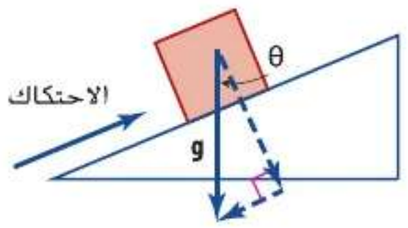


a. جد الصورة المركبة لكل متجه.

b. جد الصورة المركبة للمتجه الناتج المؤثر على الكاميرا.

c. جد مقدار القوة الناتجة واتّجاهها.

64. **القوة** يوجد صندوق ثابت على منحدر. تؤثر الجاذبية g والاحتكاك على الصندوق. مركبات الجاذبية موضحة في الرسم التخطيطي. ما الذي يجب أن يكون صحيحًا بشأن قوة الاحتكاك حتى يكون هذا السيناريو ممكنًا؟



مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

65. **الاستنتاج** إذا كان المتجهان **a** و **b** متوازيين، فاكتب معادلة متجهات تربط **a** و **b**.

66. **التحدي** لسحب الأمتعة، يبذل أحمد قوة تبلغ 150 N بزاوية 58° مع المركّبة الأفقية. إذا كانت القوة الناتجة المؤثرة على الأمتعة هي 67 N بزاوية 56.7° مع المركبة الأفقية، فما مقدار ناتج $F_{\text{الاحتكاك}}$ و $F_{\text{الوزن}}$؟



67. **التبرير** إذا علمتَ نقطة بداية متجه ومقداره، فصف المحل الهندسي للنقاط التي تمثل المواقع المحتملة لنقطة النهاية.

68. **الكتابة في الرياضيات** اشرح كيفية إيجاد زاوية اتجاه متجه في الربع الرابع.

69. **التحدي** زاوية اتجاه $\langle x, y \rangle$ هي $(4y)°$. جد x بدلالة y.

الإثبات أثبت كل خاصية متجهات. افترض أن $\mathbf{a} = \langle x_1, y_1 \rangle$، $\mathbf{b} = \langle x_2, y_2 \rangle$ و $\mathbf{c} = \langle x_3, y_3 \rangle$.

70. $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$

71. $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$

72. $k(\mathrm{a} + \mathrm{b}) = k\mathrm{a} + k\mathrm{b}$، حيث k كمية عددية

73. $|k\mathrm{a}| = |k|\,|\mathrm{a}|$، حيث k كمية عددية

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مراجعة شاملة

74. الألعاب يسحب فهد لعبة من خلال بذل قوة مقدارها 1.5 N على خيط مربوط باللعبة.

a. يصنع الخيط زاوية 52° مع الأرض. جـــد المركبتين الأفقية والرأسية للقوة.

b. إذا رفع فهد الخيط بحيث يصنع زاوية 78° مع الأرض. فما مقداري المركبتين الأفقية والرأسية للقوة؟

اكتب كل زوج من المعادلات الوسيطية في صورة متعامدة.

75. $y = t^2 + 2, x = 3t - 6$

76. $y = t^2 - 5, x = 2t + 8$

77. $y = 7t, x = t^2 - 1$

78. المظلات مظلة شاطئ لها قوس على شكل قطع مكافئ.
اكتب معادلة لتمثيل القوس. مع افتراض أن نقطة الأصل والرأس عند نقطة التقاء عمود وقماش المظلة. عبّر عن y بدلالة x.



حلل كل تعبير إلى كسور جزئية.

79. $\frac{5z - 11}{2z^2 + z - 6}$

80. $\frac{7x^2 + 18x - 1}{(x^2 - 1)(x + 2)}$

81. $\frac{9 - 9x}{x^2 - 9}$

أثبت صحة كل متطابقة.

82. $\sin(\theta + 180^\circ) = -\sin\theta$

83. $\sin(60^\circ + \theta) + \sin(60^\circ - \theta) = \sqrt{3}\cos\theta$

عبّر عن كل لوغاريتم بدلالة $\ln 3$ و$\ln 7$.

84. $\ln 189$

85. $\ln 5.\overline{4}$

86. $\ln 441$

87. $\ln \frac{9}{343}$

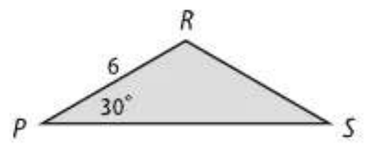
جـــد $f(c)$ باستخدام التعويض.

88. $f(x) = 6x^6 - 9x^4 + 12x^3 - 16x^2 + 8x + 24;\ c = 6$

89. $f(x) = 8x^5 - 12x^4 + 18x^3 - 24x^2 + 36x - 48,\ c = 4$

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

90. SAT/ACT إذا كان $PR = RS$. فما مساحة المثلث PRS؟



91. مراجعة صنع فالح لعبة احتفالاً بتخرج أخته الصغيرة. لوحة اللعب عبارة عن دائرة مقسمة بالتساوي إلى **8** قطاعات. إذا كان نصف قطر الدائرة **18 cm** . فما المساحة التقديرية للقطاع؟

$4\ cm^2$	$127\ cm^2$
$32\ cm^2$	$254\ cm^2$

92. المسعفون ينقل إبراهيم وإسماعيل أحد الأشخاص على نقالة. يدفع إبراهيم النقالة من الخلف بقوة 135 N بزاوية 58° مع المركبة الأفقية. بينما يسحب إسماعيل النقالة من الأمام بقوة 214 N بزاوية 43° مع المركبة الأفقية. ما مقدار القوة الأفقية المبذولة على النقالة؟

A 228 N **C** 299 N

B 260 N **D** 346 N

93. مراجعة جـــد مركز ونصف قطر دائرة معادلتها $(x - 4)^2 + y^2 - 16 = 0$.

F C(−4, 0)؛ $r =$ 4 وحدات

G C(−4, 0)؛ $r =$ 16 وحدة

H C(4, 0)؛ $r =$ 4 وحدات

J C(4, 0)؛ $r =$ 16 وحدة

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

7-3 الضرب النقطي ومساقط المتجهات

السابق:
- قمتَ بإيجاد مقادير المتجهات الجبرية وإجراء العمليات عليها.

الحالي:
1. إيجاد ناتج الضرب النقطي لمتجهين، واستخدام ناتج الضرب النقطي لإيجاد الزاوية بينهما.
2. إيجاد مسقط متجه على آخر.

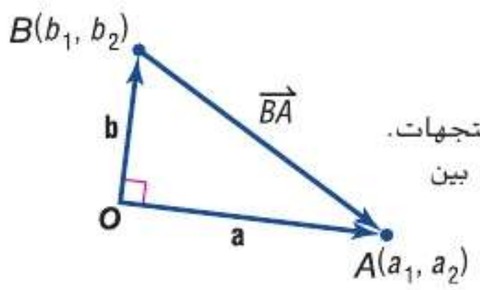
لماذا؟
- كلمة الشغل يمكن أن يكون لها معانٍ مختلفة في الحياة اليومية، ولكن في الفيزياء، تعريفها محدد للغاية. الشغل هو مقدار القوة المبذولة على جسم مضروبة في المسافة التي يتحرك الجسم خلالها بالتوازي مع هذه القوة. يمكن كذلك حساب الشغل، مثل ذلك المبذول لدفع سيارة لمسافة محددة، باستخدام عملية على متجه تُسمى ناتج الضرب النقطي.



المفردات الجديدة
- الضرب النقطي dot product
- متعامد orthogonal
- مسقط المتجه vector projection
- الشغل work

1 الضرب النقطي

في الدرس 2-7، درستَ عمليتي جمع المتجهات وضربها في كمية عددية. في هذا الدرس، سوف تستخدم عملية ثالثة على المتجهات. فكر في متجهين متعامدين في الوضع القياسي **a** و **b**. افترض أن $\overrightarrow{BA}$ هو المتجه بين نقطتي نهايتهما كما هو موضح بالشكل. من خلال نظرية فيثاغورس، نعلم أن



$|\overrightarrow{BA}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2$.

باستخدام تعريف مقدار متجه، يمكننا إيجاد $|\overrightarrow{BA}|^2$.

$|\overrightarrow{BA}| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$ — تعريف مقدار متجه

$|\overrightarrow{BA}|^2 = (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2$ — قم بتربيع كل طرف.

$|\overrightarrow{BA}|^2 = a_1^2 - 2a_1b_1 + b_1^2 + a_2^2 - 2a_2b_2 + b_2^2$ — اكتب الصيغة الموسعة لكل مربع ذي حدين.

$|\overrightarrow{BA}|^2 = (a_1^2 + a_2^2) + (b_1^2 + b_2^2) - 2(a_1b_1 + a_2b_2)$ — جمّع الحدود التربيعية.

$|\overrightarrow{BA}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2(a_1b_1 + a_2b_2)$

$|\mathbf{a}|^2 = a_1^2 + a_2^2$ إذًا $|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$
و $|\mathbf{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$، إذًا $|\mathbf{b}|^2 = b_1^2 + b_2^2$.

لاحظ أن التعبيرين $|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2(a_1b_1 + a_2b_2)$ و $|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2$ متكافئان فقط في حالة $a_1b_1 + a_2b_2 = 0$. التعبير $a_1b_1 + a_2b_2$ يُسمى **ناتج الضرب النقطي** لـ **a** و **b**. يُشار إليهما بالصورة **a** . **b** ويكتبان بالصورة a نقطة b.

المفهوم الأساسي الضرب النقطي للمتجهات في مستوى

ناتج الضرب النقطي لـ $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2 \rangle$ و $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$ يعرف على أنه $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2$.

لاحظ أنه بخلاف جمع المتجهات وضربها في كمية عددية، ناتج الضرب النقطي لمتجهين يُنتج كمية عددية، وليس متجهًا. كما هو موضح أعلاه، يكون المتجهان غير الصفريين متعامدين فقط إذا كان ناتج الضرب النقطي لهما يساوي 0. إذا كان ناتج الضرب النقطي لمتجهين يساوي 0، فيُقال أنهما **متعامدان**.

المفهوم الأساسي المتجهات المتعامدة

يكونان المتجهان **a** و **b** متعامدين فقط إذا كان $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$.

المصطلحان *متعامد* وعمودي لهما المعنى ذاته بشكل أساسي إلا إذا كان **a** أو **b** هو المتجه الصفري. المتجه الصفري متعامد على أي متجه **a**، حيث $\langle a_1, a_2 \rangle = 0a_1 + 0a_2$. $\langle 0, 0 \rangle$ أو 0. على الرغم من ذلك، حيث إن المتجه الصفري ليس له مقدار أو اتجاه، فلا يمكن أن يكون متعامدًا على **a**.

McGraw-Hill Education©

مثال 1 إيجاد ناتج الضرب النقطي لتحديد المتجهات المتعامدة

جـد ناتج الضرب النقطي لـ u و v. ثمّ حدّد ما إذا كان u و v متعامدين.

a. $\mathbf{u} = \langle 3, 6\rangle, \mathbf{v} = \langle -4, 2\rangle$

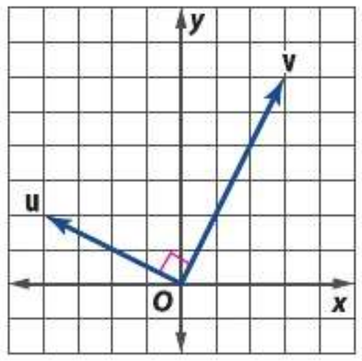
$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 3(-4) + 6(2)$$
$$= 0$$

حيث إن $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$. فإن **u** و **v** متعامدان كما هو موضح بالشكل 7.3.1.

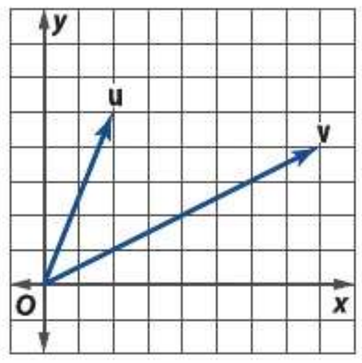
b. $\mathbf{u} = \langle 2, 5\rangle, \mathbf{v} = \langle 8, 4\rangle$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 2(8) + 5(4)$$
$$= 36$$

حيث إن $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \neq 0$. فإن **u** و **v** غير متعامدين كما هو موضح بالشكل 7.3.2.



الشكل 7.3.1



الشكل 7.3.2

تمرين موجّه

1A. $\mathbf{u} = \langle 3, -2\rangle, \mathbf{v} = \langle -5, 1\rangle$

1B. $\mathbf{u} = \langle -2, -3\rangle, \mathbf{v} = \langle 9, -6\rangle$

نواتج الضرب النقطي لها الخواص التالية.

المفهوم الأساسي خواص الضرب النقطي

إذا كان **u** و **v** و **w** متجهات و k كمية عددية، فإن الخواص التالية متحققة.

خاصية التبديل	$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$
خاصية التوزيع	$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$
خاصية الضرب في كمية عددية	$k(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = k\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot k\mathbf{v}$
خاصية ناتج الضرب النقطي للمتجهات الصفرية	$\mathbf{0} \cdot \mathbf{u} = 0$
العلاقة بين ناتج الضرب النقطي ومقدار المتجه	$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \lvert\mathbf{u}\rvert^2$

البرهان

البرهان $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = |\mathbf{u}|^2$

افترض أن $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2\rangle$.

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = u_1^2 + u_2^2$$
$$= \left(\sqrt{(u_1^2 + u_2^2)}\right)^2$$
$$= |\mathbf{u}|^2$$

ناتج الضرب النقطي

اكتب في صورة مربع الجذر التربيعي لـ $u_1^2 + u_2^2$.

$\sqrt{u_1^2 + u_2^2} = |\mathbf{u}|$

قراءة في الرياضيات

نواتج الضرب الداخلية ونواتج ضرب كمية عددية ناتج الضرب النقطي يُسمى أيضًا ناتج *الضرب الداخلي* أو ناتج ضرب كمية عددية.

سنُثبت أولاً الخواص الثلاث في التمارين 72-70.

مثال 2 استخدام الضرب النقطي لإيجاد المقدار

استخدم ناتج الضرب النقطي لإيجاد مقدار $\mathbf{a} = \langle -12, 5\rangle$.

حيث إن $|\mathbf{a}|^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$. فإن $|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}$.

$$|\langle -12, 5\rangle| = \sqrt{\langle -12, 5\rangle \cdot \langle -12, 5\rangle} \quad \mathbf{a} = \langle -12, 5\rangle$$
$$= \sqrt{(-12)^2 + 5^2} \text{ or } 13 \quad \text{بسّط.}$$

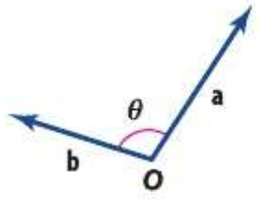
تمرين موجّه

استخدم ناتج الضرب النقطي لإيجاد مقدار المتجه المذكور.

2A. $\mathbf{b} = \langle 12, 16\rangle$

2B. $\mathbf{c} = \langle -1, -7\rangle$

الزاوية θ بين المتجهين غير الصفريين **a** و **b** هي الزاوية المناظرة بين هذين المتجهين عند وضعهما في الوضع القياسي، كما هو موضح. يتم قياس هذه الزاوية دائمًا بحيث $0° \leq \theta \leq 180°$ أو $0 \leq \theta \leq \pi$. يمكن استخدام ناتج الضرب النقطي لإيجاد الزاوية بين متجهين غير صفريين.

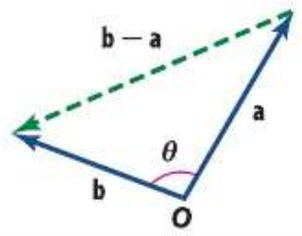


حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

المفهوم الأساسي الزاوية بين متجهين

إذا كانت θ هي الزاوية بين المتجهين غير الصفريين a و b، إذًا

$$\cos \theta = \frac{a \cdot b}{|a|\,|b|}$$



نصيحة دراسية

المتجهات الموازية والمتعامدة يكون المتجهان متعامدين إذا كانت الزاوية بينهما 90°. يكون المتجهان متوازيين إذا كانت الزاوية بينهما 0° أو 180°.

البرهان

فكر في المثلث المحدد بواسطة **a** و **b** و **b − a** في الشكل أعلاه.

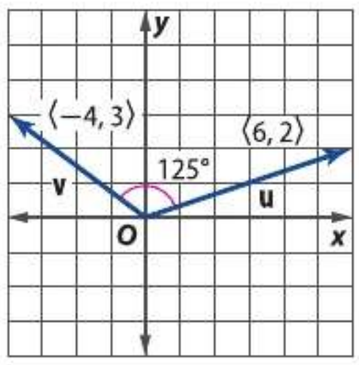
$\|a\|^2 + \|b\|^2 - 2\|a\|\|b\|\cos\theta = \|b - a\|^2$	قانون الـ cosine
$\|a\|^2 + \|b\|^2 - 2\|a\|\|b\|\cos\theta = (b - a) \cdot (b - a)$	$\|u\|^2 = u \cdot u$
$\|a\|^2 + \|b\|^2 - 2\|a\|\|b\|\cos\theta = b \cdot b - b \cdot a - a \cdot b + a \cdot a$	خاصية التوزيع لنواتج الضرب النقطي
$\|a\|^2 + \|b\|^2 - 2\|a\|\|b\|\cos\theta = \|b\|^2 - 2a \cdot b + \|a\|^2$	$u \cdot u = \|u\|^2$
$-2\|a\|\|b\|\cos\theta = -2a \cdot b$	اطرح $\|a\|^2 + \|b\|^2$ من كل طرف.
$\cos\theta = \frac{a \cdot b}{\|a\|\|b\|}$	اقسم كل طرف على $-2\|a\|\|b\|$.

مثال 3 إيجاد الزاوية بين متجهين

جـد الزاوية θ بين المتجهين u و v مع التقريب لأقرب جزء من عشرة من الدرجة.

a. $u = \langle 6, 2\rangle$ و $v = \langle -4, 3\rangle$

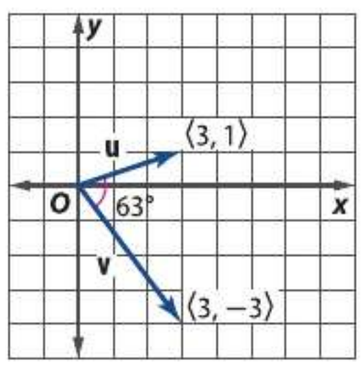
$\cos\theta = \frac{u \cdot v}{\|u\|\,\|v\|}$	الزاوية بين متجهين
$\cos\theta = \frac{\langle 6, 2\rangle \cdot \langle -4, 3\rangle}{\|\langle 6, 2\rangle\|\,\|\langle -4, 3\rangle\|}$	$u = \langle 6, 2\rangle$ و $v = \langle -4, 3\rangle$
$\cos\theta = \frac{-24 + 6}{\sqrt{40}\,\sqrt{25}}$	جـد القيمة.
$\cos\theta = \frac{-9}{5\sqrt{10}}$	بسّط.
$\theta = \cos^{-1}\frac{-9}{5\sqrt{10}} = 124.7°$ تقريبًا	جـد θ.



قياس الزاوية بين **u** و **v** يساوي حوالي 124.7°.

b. $u = \langle 3, 1\rangle$ و $v = \langle 3, -3\rangle$

$\cos\theta = \frac{u \cdot v}{\|u\|\,\|v\|}$	الزاوية بين متجهين
$\cos\theta = \frac{\langle 3, 1\rangle \cdot \langle 3, -3\rangle}{\|\langle 3, 1\rangle\|\,\|\langle 3, -3\rangle\|}$	$u = \langle 3, 1\rangle$ و $v = \langle 3, -3\rangle$
$\cos\theta = \frac{9 + (-3)}{\sqrt{10}\,\sqrt{18}}$	جـد القيمة.
$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$	بسّط.
$\theta = \cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}} = 63°.4$ تقريبًا	جـد θ.



قياس الزاوية بين **u** و **v** يساوي حوالي 63.4°.

تمرين موجّه

3A. $u = \langle -5, -2\rangle$ و $v = \langle 4, 4\rangle$

3B. $u = \langle 9, 5\rangle$ و $v = \langle -6, 7\rangle$

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

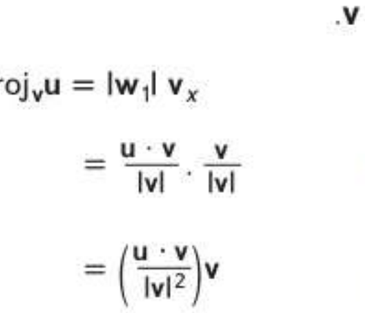
2 مسقط المتجه

في الدرس 1-7، تعلمتَ أنه يمكن تحليل متجه إلى مركبتين متعامدتين. بينما تكون هذه المركبتين أفقية ورأسية في كثير من الأحيان، لكن من المفيد أحيانًا أن تكون إحداهما موازية للأخرى.

المفهوم الأساسي مسقط u على v

افترض أن **u** و **v** متجهان غير صفريين. وافترض أن $\mathbf{w}_1$ و $\mathbf{w}_2$ مركبتي المتجه **u** بحيث $\mathbf{w}_1$ توازي **v** كما هو موضح. إذًا، المتجه $\mathbf{w}_1$ يُسمى **مسقط المتجه u على v**. المشار إليه بالعبارة $\text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$. و

$$\text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = \left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\right)\mathbf{v}.$$



نصيحة دراسية

المركبة المتعامدة المتجه $\mathbf{w}_2$ يُسمى مركبة **u** *المتعامدة على* **v**.

البرهان

حيث إن $\text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$ يوازي **v**، فيمكن كتابته في صورة مضاعف كمية عددية لـ **v**. كمضاعف كمية عددية لمتجه الوحدة $\mathbf{v}_x$ **v** بنفس اتجاه **v**. $\text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = |\mathbf{w}_1|\mathbf{v}_x$. استخدم المثلث القائم الزاوية المكون بواسطة $\mathbf{w}_1$ و $\mathbf{w}_2$ و **u** ونسبة جيب التمام لإيجاد تعبير لـ $|\mathbf{w}_1|$.

$\cos\theta = \frac{|\mathbf{w}_1|}{|\mathbf{u}|}$ نسبة الـ cosine

$|\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos\theta = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|\frac{|\mathbf{w}_1|}{|\mathbf{u}|}$ اضرب كل طرف في الكمية العددية $|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|$.

$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = |\mathbf{v}|\,|\mathbf{w}_1|$ $|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|\cos\theta = \mathbf{u}\mathbf{X}\mathbf{v}$ إذًا $\cos\theta = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|}$.

$|\mathbf{w}_1| = \frac{\mathbf{u}\mathbf{X}\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$ جد $|\mathbf{w}_1|$.

الآن استخدم $\text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = |\mathbf{w}_1|\,\mathbf{v}_x$ لإيجاد $\text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$ في صورة مضاعف كمية عددية لـ **v**.

$$\text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = |\mathbf{w}_1|\,\mathbf{v}_x$$
$$= \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}\cdot\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \qquad |\mathbf{w}_1| = \frac{\mathbf{u}\mathbf{X}\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \text{ و } \mathbf{v}_x = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$$
$$= \left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\right)\mathbf{v} \qquad \text{اضرب المقادير.}$$

مثال 4 إيجاد مسقط u على v

جد مسقط $\mathbf{u} = \langle 3, 2\rangle$ على $\mathbf{v} = \langle 5, -5\rangle$. ثمّ اكتب u باعتباره مجموع متّجهين متعامدين، أحدهما هو مسقط المتّجه u على v.

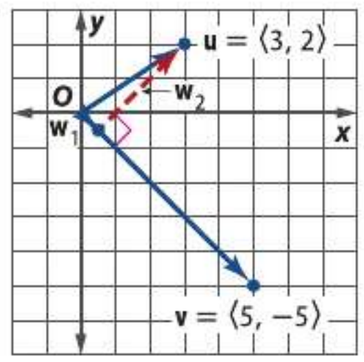
الخطوة 1 جد مسقط **u** على **v**.

$$\text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = \left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\right)\mathbf{v}$$
$$= \frac{\langle 3, 2\rangle\cdot\langle 5, -5\rangle}{|\langle 5, -5\rangle|^2}\langle 5, -5\rangle$$
$$= \frac{5}{50}\langle 5, -5\rangle$$
$$= \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle$$

الخطوة 2 جد $\mathbf{w}_2$.

حيث $\mathbf{u} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$، **فإن** $\mathbf{w}_2 = \mathbf{u} - \mathbf{w}_1$.

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{u} - \mathbf{w}_1$$
$$= \mathbf{u} - \text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$$
$$= \langle 3, 2\rangle - \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle$$
$$= \left\langle \frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right\rangle$$



الشكل 7.3.5

إذًا، $\text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$ هو $\mathbf{w}_1 = \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle$ كما هو موضح بالشكل 7.3.5، و $\mathbf{u} = \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle + \left\langle \frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right\rangle$

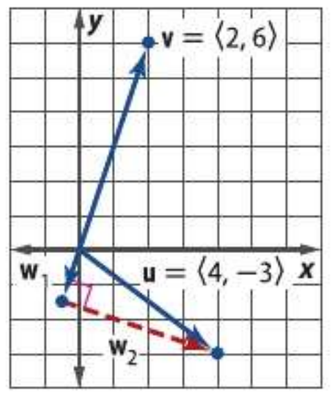
تمرين موجّه

4. جد مسقط $\mathbf{u} = \langle 1, 2\rangle$ على $\mathbf{v} = \langle 8, 5\rangle$. ثمّ اكتب **u** باعتباره مجموع متّجهين متعامدين، أحدهما هو مسقط المتّجه **u** على **v**.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

بينما مسقط **u** على **v** متجه يوازي **v**. لا يكون لهذا المتجه بالضرورة نفس اتجاه **v**. كما هو موضح في المثال التالي.

مثال 5 المسقط في عكس اتجاه v



الشكل 7.3.6

جـد مسقط $\mathbf{u} = \langle 4, -3 \rangle$ على $\mathbf{v} = \langle 2, 6 \rangle$. ثمّ اكتب u باعتباره مجموع متّجهين متعامدين، أحدهما هو مسقط المتّجه u على v.

لاحظ أن الزاوية بين **u** و **v** منفرجة. إذًا مسقط **u** على **v** يقع على المتجه المعاكس لـ **v** أو **v**−. كما هو موضح بالشكل 7.3.6.

الخطوة 1 جـد مسقط **u** على **v**.

$$\text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\right)\mathbf{v}$$

$$= \frac{\langle 4, -3 \rangle \cdot \langle 2, 6 \rangle}{|\langle 2, 6 \rangle|^2} \langle 2, 6 \rangle$$

$$= \frac{-10}{40} \langle 2, 6 \rangle = \left\langle -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2} \right\rangle$$

الخطوة 2 جـد $\mathbf{w_2}$.

حيث $\mathbf{w_2} = \mathbf{u} - \mathbf{w_1}$ أو $\mathbf{u} = \mathbf{w_1} + \mathbf{w_2}$.

$$\mathbf{u} - \text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = \langle 4, -3 \rangle - \left\langle -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2} \right\rangle$$

$$= \left\langle \frac{9}{2}, -\frac{3}{2} \right\rangle$$

إذًا، $\text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}, \mathbf{w}_1 = \left\langle -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2} \right\rangle$ و $\mathbf{u} = \left\langle -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2} \right\rangle + \left\langle \frac{9}{2}, -\frac{3}{2} \right\rangle$.

تمرين موجّه

5. جـد مسقط $\mathbf{u} = \langle -3, 4 \rangle$ على $\mathbf{v} = \langle 6, 1 \rangle$. ثمّ اكتب **u** باعتباره مجموع متّجهين متعامدين، أحدهما هو مسقط المتّجه **u** على **v**.

إذا كان المتجه **u** يمثل قوة، فإن $\text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$ يمثل تأثير تلك القوة في اتجاه **v**. على سبيل المثال، إذا قمت بدفع صندوق لأعلى التل (في اتجاه **v**) بالقوة **u** (الشكل 7.3.7). القوة المؤثرة هي دفع المركبة في اتجاه **v**، $\text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$.

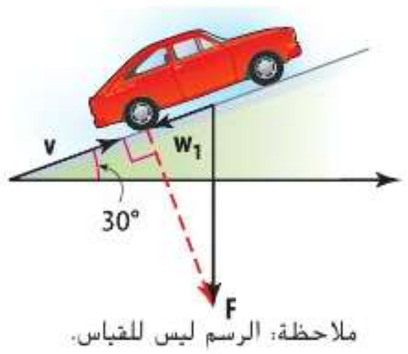


الشكل 7.3.7

مثال 6 من الحياة اليومية استخدام مسقط متجه لإيجاد قوة

السيارات تقف سيارة تزن 3000 N على تل مائل بزاوية °30 كما هو موضح. إذا تم تجاهل قوة الاحتكاك، فما القوة اللازمة لمنع تدحرج السيارة لأسفل التل؟

وزن السيارة هو القوة المبذولة بفعل الجاذبية، $\mathbf{F} = \langle 0, -3000 \rangle$. لإيجاد القوة $\mathbf{w}_1$− اللازمة لمنع تدحرج السيارة لأسفل التل، أسقط **F** على متجه الوحدة **v** في اتجاه جانب التل.



ملاحظة: الرسم ليس للقياس.

الخطوة 1 جـد متجه الوحدة **v** في اتجاه التل.

الصورة المركبة لـ v بدلالة |v| و θ

$$\mathbf{v} = \langle |\mathbf{v}| (\cos \theta), |\mathbf{v}| (\sin \theta) \rangle$$

|v| = 1 و $\theta = 30°$

$$= \langle 1(\cos 30°), 1(\sin 30°) \rangle = \left\langle \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle$$

الخطوة 2 جـد $\mathbf{w}_1$، مسقط **F** على متجه الوحدة **v**، $\text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{F}$.

مسقط F على v

$$\text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{F} = \left(\frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\right)\mathbf{v}$$

حيث v هو متجه وحدة، $|\mathbf{v}| = 1$. بسّط.

$$= (\mathbf{F} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v}$$

$\mathbf{v} = \left\langle \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle$ و $\mathbf{F} = \langle 0, -3000 \rangle$

$$= \left(\langle 0, -3000 \rangle \cdot \left\langle \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle\right)\mathbf{v}$$

جـد ناتج الضرب النقطي.

$$= -1500\mathbf{v}$$

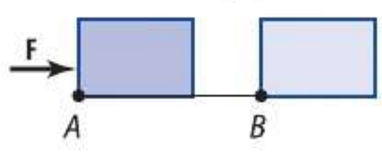
القوة اللازمة هي $-\mathbf{w}_1 = -(-1500\ \mathbf{v})$ أو $1500\mathbf{v}$. حيث **v** هو متجه وحدة، يعني هذا أن هذه القوة مقدارها 6500 N وفي اتجاه جانب التل.

تمرين موجّه

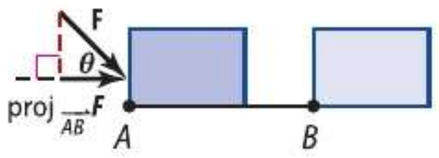
6. التزلج تجلس نسرين على زلاجة على جانب تل مائل بزاوية °60. ما القوة اللازمة لمنع انزلاق الزلاجة لأسفل التل إذا علمتَ أن وزن نسرين والزلاجة 125 lb ؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

من التطبيقات الأخرى لمسقط المتجه حساب الشغل المبذول بواسطة قوة. فكر في قوة ثابتة **F** تؤثر على جسم لتحريكه من النقطة A إلى النقطة B كما هو موضح بالشكل 7.3.8. إذا كان **F** يوازي $\overrightarrow{AB}$، فإن **الشغل** W المبذول بواسطة **F** هو مقدار القوة في المسافة من A إلى B أو $W = |\mathbf{F}||\overrightarrow{AB}|$.



الشكل 7.3.8



الشكل 7.3.9

لحساب الشغل المبذول بواسطة قوة ثابتة **F** في *أي* اتجاه لتحريك جسم من النقطة A إلى B، كما هو موضح بالشكل 7.3.9 يمكنك استخدام مسقط المتجه **F** على $\overrightarrow{AB}$.

$W = |\text{proj}_{\overrightarrow{AB}}\,\mathbf{F}|\,|\overrightarrow{AB}|$ صيغة المسقط للشغل

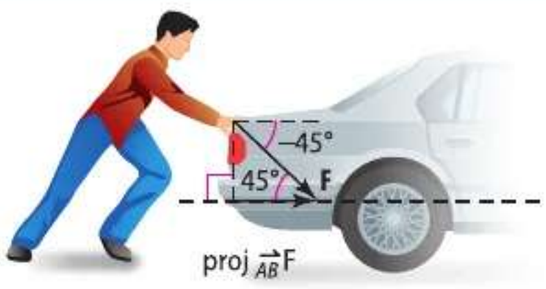
$= |\mathbf{F}|\,(\cos\theta)\,|\overrightarrow{AB}|$ $|\text{proj}_{\overrightarrow{AB}}\,\mathbf{F}| = |\mathbf{F}|\cos\theta$ إذًا، $\cos\theta = \dfrac{|\text{proj}_{\overrightarrow{AB}}\,\mathbf{F}|}{|\mathbf{F}|}$.

$= \mathbf{F} \cdot \overrightarrow{AB}$ $|\mathbf{F}|\,|\overrightarrow{AB}|\cos\theta = \mathbf{F} \cdot \overrightarrow{AB}$ إذًا، $\cos\theta = \dfrac{\mathbf{F} \cdot \overrightarrow{AB}}{|\mathbf{F}|\,|\overrightarrow{AB}|}$.

إذًا، يمكن حساب هذا الشغل من خلال إيجاد ناتج الضرب النقطي للقوة الثابتة **F** والمسافة الموجهة $\overrightarrow{AB}$.

مثال 7 من الحياة اليومية حساب الشغل

المساعدة على جانب الطريق يدفع شخص سيارة بقوة ثابتة **120 N** بزاوية ثابتة 45° كما هو موضح. جد مقدار الشغل المبذول بالجول لتحريك السيارة مسافة **10 m**.



الخطوة 1 استخدم صيغة المسقط للشغل.

مقدار مسقط **F** على $\overrightarrow{AB}$ هو $|\mathbf{F}|\cos\theta = 120\cos 45°$. مقدار المسافة الموجهة $\overrightarrow{AB}$ هو 10.

$W = |\text{proj}_{\overrightarrow{AB}}\,\mathbf{F}||\overrightarrow{AB}|$ صيغة المسقط للشغل

$= (120\cos 45°)(10) = 848.5$ تقريبًا التعويض

الخطوة 2 استخدم صيغة ناتج الضرب النقطي للشغل.

الصورة المركبة لمتجه القوة **F** بدلالة المقدار وزاوية الاتجاه المعلومتين هي $\langle 120\cos(-45°), 120\sin(-45°)\rangle$. الصورة المركبة للمسافة الموجهة لحركة السيارة هي $\langle 10, 0\rangle$.

$W = \mathbf{F} \times \overrightarrow{AB}$ صيغة ناتج الضرب النقطي للشغل

$= \langle 120\cos(-45°), 120\sin(-45°)\rangle \times \langle 10, 0\rangle$ التعويض

$= [120\cos(-45°)](10) = 848.5$ • تقريبًا ناتج الضرب النقطي

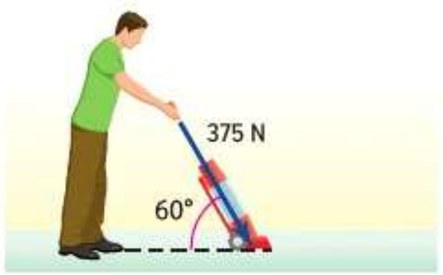
إذًا، يبذل الشخص شغلاً مقداره 848.5 جول تقريبًا لدفع السيارة.

نصيحة دراسية

وحدات الشغل يتم قياس الشغل بالقدم-رطل في النظام العرفي للقياس وبالنيوتن-متر (N·m) أو الجول (J) في النظام المتري.

تمرين موجّه

7. التنظيف يدفع فارس مكنسة كهربائية بقوة 375 N. مقبض المكنسة يصنع زاوية 60° مع الأرضية. ما مقدار الشغل، بالنيوتن·متر، الذي يبذله عند دفع المكنسة لمسافة 2 m؟



حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تمارين

جـد ناتج الضرب النقطي لـ u و v. ثمّ حدّد ما إذا كان u و v متعامدين. (مثال 1)

1. $\mathbf{u} = \langle 3, -5 \rangle, \mathbf{v} = \langle 6, 2 \rangle$
2. $\mathbf{u} = \langle -10, -16 \rangle, \mathbf{v} = \langle -8, 5 \rangle$
3. $\mathbf{u} = \langle 9, -3 \rangle, \mathbf{v} = \langle 1, 3 \rangle$
4. $\mathbf{u} = \langle 4, -4 \rangle, \mathbf{v} = \langle 7, 5 \rangle$
5. $\mathbf{u} = \langle 1, -3 \rangle, \mathbf{v} = \langle 2, 8 \rangle$
6. $\mathbf{u} = 11\mathbf{i} + 7\mathbf{j}; \mathbf{v} = -7\mathbf{i} + 11\mathbf{j}$
7. $\mathbf{u} = \langle -4, 6 \rangle, \mathbf{v} = \langle -5, -2 \rangle$
8. $\mathbf{u} = 8\mathbf{i} + 6\mathbf{j}; \mathbf{v} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$

9. **المستلزمات الرياضية** يوضح المتجه $\mathbf{u} = \langle 406, 297 \rangle$ أعداد كرات السلة للرجال والنساء على التوالي في مخزون متجر مستلزمات رياضية. يوضح المتجه $\mathbf{v} = \langle 27.5, 15 \rangle$ أسعار نوعي الكرات بالدرهم على التوالي. (مثال 1)
   a. جـد ناتج الضرب النقطي $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}$.
   b. فسر الناتج في سياق المسألة.

استخدم ناتج الضرب النقطي لإيجاد مقدار المتجه المذكور. (مثال 2)

10. $\mathbf{m} = \langle -3, 11 \rangle$
11. $\mathbf{r} = \langle -9, -4 \rangle$
12. $\mathbf{n} = \langle 6, 12 \rangle$
13. $\mathbf{v} = \langle 1, -18 \rangle$
14. $\mathbf{p} = \langle -7, -2 \rangle$
15. $\mathbf{t} = \langle 23, -16 \rangle$

جـد الزاوية θ بين u و v لأقرب جزء من عشرة من الدرجة. (مثال 3)

16. $\mathbf{u} = \langle 0, -5 \rangle, \mathbf{v} = \langle 1, -4 \rangle$
17. $\mathbf{u} = \langle 7, 10 \rangle, \mathbf{v} = \langle 4, -4 \rangle$
18. $\mathbf{u} = \langle -2, 4 \rangle, \mathbf{v} = \langle 2, -10 \rangle$
19. $\mathbf{u} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}, \mathbf{v} = -4\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$
20. $\mathbf{u} = \langle -9, 0 \rangle, \mathbf{v} = \langle -1, -1 \rangle$
21. $\mathbf{u} = -\mathbf{i} - 3\mathbf{j}, \mathbf{v} = -7\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$
22. $\mathbf{u} = \langle 6, 0 \rangle, \mathbf{v} = \langle -10, 8 \rangle$
23. $\mathbf{u} = -10\mathbf{i} + \mathbf{j}, \mathbf{v} = 10\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$

24. **التخييم** انطلق عمر وعلي من موقع التخييم للبحث عن حطب. يمكن تمثيل المسار الذي اتخذه عمر بواسطة $\mathbf{u} = \langle 3, -5 \rangle$. يمكن تمثيل المسار الذي اتخذه علي بواسطة $\mathbf{v} = \langle -7, 6 \rangle$. جـد الزاوية بين زوج المتجهات. (مثال 3)

جـد مسقط u على v. ثمّ اكتب u باعتباره مجموع متّجهين متعامدين، أحدهما هو مسقط المتّجه u على v. (المثالان 4 و 5)

25. $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} + 6\mathbf{j}, \mathbf{v} = -5\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$
26. $\mathbf{u} = \langle 5, 7 \rangle, \mathbf{v} = \langle -4, 4 \rangle$
27. $\mathbf{u} = \langle 8, 2 \rangle, \mathbf{v} = \langle -4, 1 \rangle$
28. $\mathbf{u} = 6\mathbf{i} + \mathbf{j}, \mathbf{v} = -3\mathbf{i} + 9\mathbf{j}$
29. $\mathbf{u} = \langle 2, 4 \rangle, \mathbf{v} = \langle -3, 8 \rangle$
30. $\mathbf{u} = \langle -5, 9 \rangle, \mathbf{v} = \langle 6, 4 \rangle$
31. $\mathbf{u} = 5\mathbf{i} - 8\mathbf{j}, \mathbf{v} = 6\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$
32. $\mathbf{u} = -2\mathbf{i} - 5\mathbf{j}, \mathbf{v} = 9\mathbf{i} + 7\mathbf{j}$

33. **العربة** يسحب عيسى أخته في عربة لأعلى منحدر صغير بميل 15°. إذا كان مجموع وزني أخت عيسى والعربة 78 lb. فما القوة اللازمة لمنع تدحرجها لأسفل المنحدر؟ (مثال 6)

34. **الزحلوقة** تنزلق نجلاء لأسفل على زحلوقة ولكن توقفت عندما لاحظت طالبًا آخر يرقد مصابًا في أسفل الزحلوقة. ما القوة اللازمة لمنعها من الانزلاق لأسفل الزحلوقة إذا كانت زاوية الميل 53° ووزنها 62 lb؟ (المثال 6)

35. **الفيزياء** يدفع علي برميل إنشاءات لأعلى منحدر طوله 1.5 m لإدخاله في صندوق شاحنة. يستخدم قوة 534 N وزاوية المنحدر 25° مع المركبة الأفقية. ما مقدار الشغل بالجول الذي يبذله علي؟ (المثال 7)

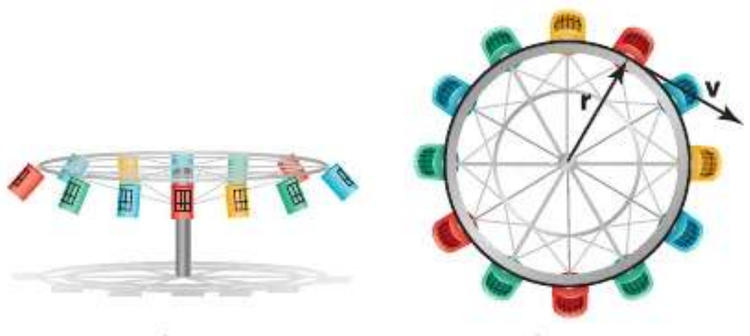


36. **التسوق** تدفع سها عربة تسوق بقوة 125 N وزاوية انخفاض 52°. ما مقدار الشغل بالجول الذي ستبذله سها لو دفعت عربة التسوق لمسافة 200 m؟ (المثال 7)

جـد متجهًا متعامدًا لكل متجه.

37. $\langle -2, -8 \rangle$
38. $\langle 3, 5 \rangle$
39. $\langle 7, -4 \rangle$
40. $\langle -1, 6 \rangle$

41. **الأراجيح** لأرجوحة متنزه ترفيهي دائرية، متجه الوضع r متعامد على متجه السرعة المماس v عند أي نقطة على الدائرة، كما هو موضح أدناه.



a. إذا كان نصف قطر الأرجوحة 20 ft وسرعتها ثابتة عند 40 ft/s. فاكتب صور مركبات متجه الوضع r ومتجه السرعة المماس v عندما تكون r بزاوية موجهة 35°.

b. ما الطريقة التي يمكن استخدامها لإثبات أن متجه الوضع ومتجه السرعة من الجزء a متعامدان؟ وضّح أن المتجهين متعامدان.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

إذا علمتَ v و u • v، فجـــد u.

42. $\mathbf{v} = \langle 3, -6 \rangle$, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 33$

43. $\mathbf{v} = \langle 4, 6 \rangle$, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 38$

44. $\mathbf{v} = \langle -5, -1 \rangle$, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = -8$

45. $\mathbf{v} = \langle -2, 7 \rangle$, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = -43$

46. **المدرسة** تسحب طالبة حقيبتها من صف الكيمياء إلى صف اللغة الإنجليزية بقوة 175 N.



a. إذا بذلت 3060 جول لسحب حقيبتها لمسافة 31 m. فما زاوية القوة؟

b. إذا بذلت 1315 جول بزاوية 60°. فما مسافة سحب الحقيبة؟

حدد ما إذا كان كل زوج من المتجهات *موازيًا* أو *متعامدًا* أو *ليس أيًا منهما*. وضّح استنتاجك.

47. $\mathbf{u} = \left\langle -\frac{2}{3}, \frac{3}{4} \right\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 9, 8 \rangle$

48. $\mathbf{u} = \langle -1, -4 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 3, 6 \rangle$

49. $\mathbf{u} = \langle 5, 7 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle -15, -21 \rangle$

50. $\mathbf{u} = \langle \sec \theta, \csc \theta \rangle$, $\mathbf{v} = \langle \csc \theta, -\sec \theta \rangle$

جـــد الزاوية بين المتجهين بالراديان.

51. $\mathbf{u} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\mathbf{i} + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\mathbf{j}$, $\mathbf{v} = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)\mathbf{i} + \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\mathbf{j}$

52. $\mathbf{u} = \cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)\mathbf{i} + \sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)\mathbf{j}$, $\mathbf{v} = \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)\mathbf{i} + \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\mathbf{j}$

53. $\mathbf{u} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\mathbf{i} + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\mathbf{j}$, $\mathbf{v} = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)\mathbf{i} + \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\mathbf{j}$

54. $\mathbf{u} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\mathbf{i} + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\mathbf{j}$, $\mathbf{v} = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)\mathbf{i} + \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\mathbf{j}$

55. **الشغل** يرفع عدنان ابن أخيه الذي يزن 16 kg لمسافة 0.9 m. يمكن حساب قوة الوزن بالنيوتن باستخدام $F = mg$. حيث يمثل m الكتلة بالكيلوجرام و g هي $9.8\ \text{m/s}^2$. ما مقدار الشغل الذي بذله عدنان لرفع ابن أخيه؟

تم تحديد رؤوس مثلث على المستوى الإحداثي. جـــد مقاييس زوايا كل مثلث باستخدام المتجهات. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة من الدرجة.

56. (2, 3), (4, 7), (8, 1)

57. (−3, −2), (−3, −7), (3, −7)

58. (−4, −3), (−8, −2), (2, 1)

59. (1, 5), (4, −3), (−4, 0)

إذا علمتَ u و|v| وθ، الزاوية بين u و v، فجـــد القيم المحتملة لـــ v. قرّب إلى أقرب جزء من مئة.

60. $\mathbf{u} = \langle 4, -2 \rangle$, $|\mathbf{v}| = 10$, 45°

61. $\mathbf{u} = \langle 3, 4 \rangle$, $|\mathbf{v}| = \sqrt{29}$, 121°

62. $\mathbf{u} = \langle -1, -6 \rangle$, $|\mathbf{v}| = 7$, 96°

63. $\mathbf{u} = \langle -2, 5 \rangle$, $|\mathbf{v}| = 12$, 27°

64. **السيارات** تقف سيارة على سطح مائل بزاوية 9°. بافتراض أن القوتين الوحيدتين المؤثرتين على السيارة هما الجاذبية وقوة الضغط على المكابح ومقدارها 275 N. فكم تزن السيارة تقريبًا؟



مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

65. **التبرير** حدّد إذا ما كانت العبارة التالية صحيحة أم *خاطئة*. اشرح.

إذا كانت |d| و|e| و|f| تشكل ثلاثية فيثاغورس، والزاويتان بين **d** و **e** وبين **e** و **f** حادتان، إذًا يجب أن تكون الزاوية بين **d** و **f** قائمة. اشرح استنتاجك.

66. **تحليل الخطأ** يدرس محمود ومحمد خواص ناتج الضرب النقطي. يستنتج محمود أن ناتج الضرب النقطي يتسم بخاصية التجميع لأنه تبديلي، بمعنى أن $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})$. يختلف محمد معه. فهل أيٌّ منهما على صواب؟ وضّح استنتاجك.

67. **التبرير** حدّد إذا ما كانت العبارة التالية صحيحة أم *خاطئة*.

إذا كان **a** و **b** متعامدين على **v** في المستوى، إذًا **a** و **b** متوازيان. اشرح استنتاجك.

68. **التحدي** إذا كان **u** و **v** متعامدين، فما مسقط **u** على **v**؟

69. **البرهان** برهن على أنه إذا كانت الزاوية بين **u** و **v** هي 90°، فإن $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ باستخدام صيغة الزاوية بين المتجهات غير الصفرية.

البرهان أثبت كل خاصية لناتج الضرب النقطي. افترض أن $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2 \rangle$، $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$، $\mathbf{w} = \langle w_1, w_2 \rangle$.

70. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$

71. $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$

72. $k(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = k\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot k\mathbf{v}$

73. **الكتابة في الرياضيات** اشرح كيفية إيجاد ناتج الضرب النقطي لمتجهين غير صفريين.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مراجعة شاملة

جـد كل مما يلي لـ $\mathbf{a} = \langle 10, 1 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle -5, 2.8 \rangle$, $\mathbf{c} = \left\langle \frac{3}{4}, -9 \right\rangle$.

74. $\mathbf{b} - \mathbf{a} + 4\mathbf{c}$

75. $\mathbf{c} - 3\mathbf{a} + \mathbf{b}$

76. $2\mathbf{a} - 4\mathbf{b} + \mathbf{c}$

77. الجولف يدفع يوسف كرة جولف بسرعة 62.5 m/s بزاوية 32° مع الأرض. في نفس الحفرة، يدفع سعيد كرة جولف بسرعة 57.9 m/s بزاوية 41° مع الأرض. جـد مقداري المركبتين الأفقية والرأسية لكل قوة.

مثّل بيانيًا القطع الزائد الممثل بكل معادلة.

78. $\frac{(x-5)^2}{48} - \frac{y^2}{5} = 1$

79. $\frac{x^2}{81} - \frac{y^2}{49} = 1$

80. $\frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{4} = 1$

جـد القيمة الدقيقة لكل تعبير. إن وُجِدت.

81. $\arcsin\left(\sin \frac{\pi}{6}\right)$

82. $\arctan\left(\tan \frac{1}{2}\right)$

83. $\sin\left(\cos^{-1} \frac{3}{4}\right)$

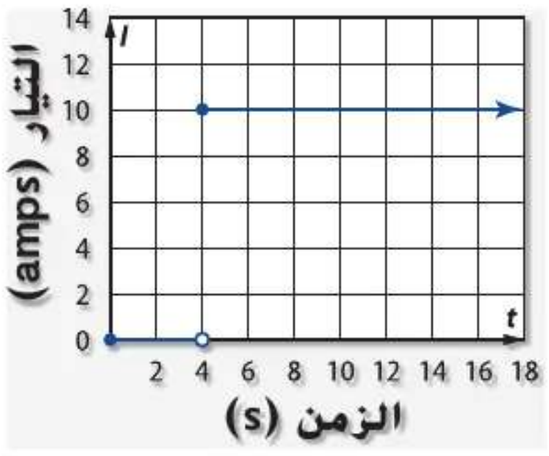
جـد حل كل من المعادلات التالية.

84. $\log_{12}(x^3 + 2) = \log_{12} 127$

85. $\log_2 x = \log_2 6 + \log_2 (x - 5)$

86. $e^{5x-4} = 70$

87. الكهرباء تحتوي الدائرة الكهربائية البسيطة على مصدر طاقة ومقاومة فقط. عند إيقاف تشغيل مصدر الطاقة، لا يوجد تيار في الدائرة. عند تشغيل مصدر الطاقة، يصبح التيار قيمة ثابتة على الفور تقريبًا. يمكن تمثيل هذه الحالة بتمثيل بياني كالموضح. I يمثل التيار بالأمبير، و t يمثل الزمن بالثانية.



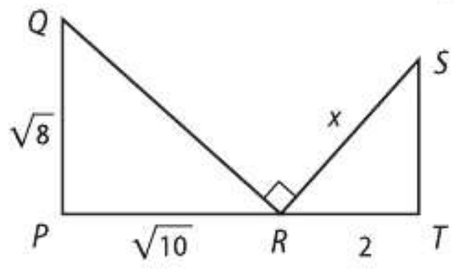
a. عند أي من قيم t تكون الدالة غير متصلة؟

b. متى تم تشغيل مصدر الطاقة؟

c. إذا غادر من قام بتشغيل مصدر الطاقة وعاد بعد ساعات، فكم سيكون قياس التيار في الدائرة؟

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

88. SAT/ACT في الشكل أدناه، $\triangle TRS \sim \triangle PQR$. ما قيمة x؟

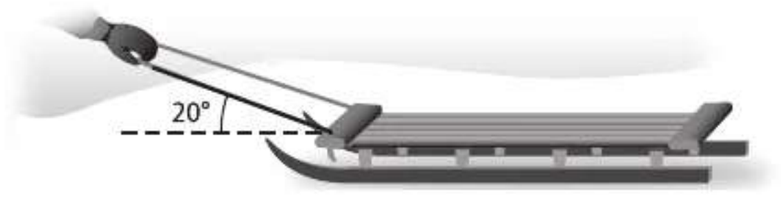


A $\sqrt{2}$
B $\sqrt{5}$
C 3
D $3\sqrt{2}$
E 6

89. مراجعة فكر في $D(-4, -3)$ و $C(-9, 2)$. أي مما يلي صورة مركبة ومقدار $\overrightarrow{CD}$؟

F $\langle 5, -5 \rangle, 5\sqrt{2}$
G $\langle 5, -5 \rangle, 6\sqrt{2}$
H $\langle 6, -5 \rangle, 5\sqrt{2}$
J $\langle 6, -6 \rangle, 6\sqrt{2}$

90. يتم سحب زلاجة ثلوج من خلال بذل قوة 25 N على حبل يصنع زاوية 20° مع المركبة الأفقية، كما هو موضح بالشكل. ما المقدار التقريبي للشغل المبذول لسحب الزلاجة لمسافة 50 m؟



A 428 N-m
B 1093 N-m
C 1175 N-m
D 1250 N-m

91. مراجعة إذا كانت $\mathbf{t} = \langle -6, 2 \rangle$ $\mathbf{s} = \langle 4, -3 \rangle$، فأي مما يلي يمثل $\mathbf{t} - 2\mathbf{s}$؟

F $\langle 14, 8 \rangle$
G $\langle 14, 6 \rangle$
H $\langle -14, 8 \rangle$
J $\langle -14, -8 \rangle$

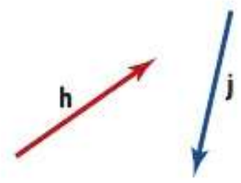
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

اختبار منتصف الوحدة

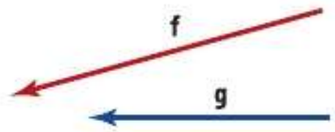
الدروس من 1–7 إلى 3–7

جـد ناتج كل زوج من المتّجهات باستخدام إما طريقة المثلّث أو متوازي الأضلاع. اذكر مقدار الناتج بالسنتيمتر واتجاهه بالنسبة إلى المركّبة الأفقية. (الدرس 1-7)

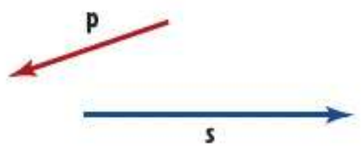
1.



2.



3.



4.



5. **التزلّج** يسحب علي زلّاجة عبر الثلوج بقوة تبلغ 50 N بزاوية 35° مع المركّبة الأفقية. جـد مقداري المركبتين الأفقية والرأسية للقوة. (الدرس 1-7)

6. قم بتصميم رسم تخطيطي للمتجهات لما يلي $\frac{1}{2}\mathbf{c} - 3\mathbf{d}$. (الدرس 1-7)



افترض أن $\overrightarrow{BC}$ هو المتجه بنقطتي البداية والنهاية المذكورتين. اكتب $\overrightarrow{BC}$ في صورة توفيق خطي للمتّجهين i و j. (الدرس 2-7)

7. $B(3, -1)$, $C(4, -7)$
8. $B(10, -6)$, $C(-8, 2)$
9. $B(1, 12)$, $C(-2, -9)$
10. $B(4, -10)$, $C(4, -10)$

11. **الاختيار من متعدد** أي مما يلي صورة مركبة للمتجه $\overrightarrow{AB}$ بنقطة البداية $A(-5, 3)$ ونقطة النهاية $B(2, -1)$؟ (الدرس 2-7)

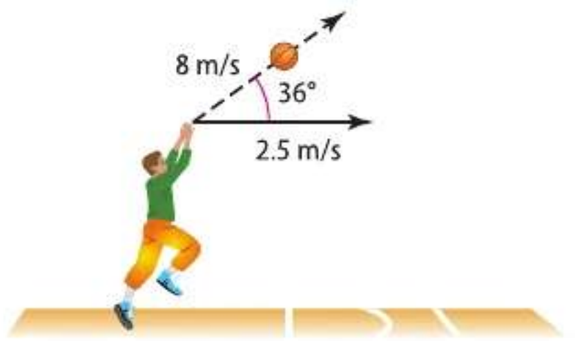
A $\langle 4, -1 \rangle$

B $\langle 7, -4 \rangle$

C $\langle 7, 4 \rangle$

D $\langle -6, 4 \rangle$

12. **كرة السلة** بينما يقترب الوقت من الانتهاء في إحدى المباريات، يركض فارس نحو السلة بسرعة 2.5 m/s ويرمي الكرة من منتصف الملعب بسرعة 8 m/s بزاوية 36° مع المركّبة الأفقية. (الدرس 2-7)



a. اكتب صورة مركبة للمتجهات التي تمثل سرعة فارس ومسار الكرة.

b. ما مقدار السرعة الناتجة للكرة واتّجاهها؟

جـد الصورة المُركّبة ومقدار المتجه لكل نقطة بداية ونهاية. (الدرس 2-7)

13. $A(-4, 2)$, $B(3, 6)$
14. $Q(1, -5)$, $R(-7, 8)$
15. $X(-3, -5)$, $Y(2, 5)$
16. $P(9, -2)$, $S(2, -5)$

جـد الزاوية θ بين u و v لأقرب جزء من عشرة من الدرجة. (الدرس 3-7)

17. $\mathbf{u} = \langle 9, -4 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle -1, -2 \rangle$
18. $\mathbf{u} = \langle 5, 2 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle -4, 10 \rangle$
19. $\mathbf{u} = \langle 8, 4 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle -2, 4 \rangle$
20. $\mathbf{u} = \langle 2, -2 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 3, 8 \rangle$

21. **الاختيار من متعدد** إذا كان $\mathbf{u} = \langle 2, 3 \rangle$ و $\mathbf{v} = \langle -1, 4 \rangle$ و $\mathbf{w} = \langle 8, -5 \rangle$. فجـد $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) + (\mathbf{w} \times \mathbf{v})$. (الدرس 3-7)

F −18

G −2

H 15

J 38

جـد ناتج الضرب النقطي لـ u و v. ثمّ حدّد ما إذا كانت النقطتان u و v متعامدتين. (الدرس 3-7)

22. $\langle 2, -5 \rangle \cdot \langle 4, 2 \rangle$
23. $\langle 4, -3 \rangle \cdot \langle 7, 4 \rangle$
24. $\langle 1, -6 \rangle \cdot \langle 5, 8 \rangle$
25. $\langle 3, -6 \rangle \cdot \langle 10, 5 \rangle$

26. **العربة** يستخدم حمد عربة لحمل الصحف لتوزيعها. ويسحب العربة بقوة تبلغ 25 N بزاوية 30° مع المركّبة الأفقية. (الدرس 3-7)



a. ما مقدار الشغل الذي يبذله حمد بالجول عند سحب العربة لمسافة 150 m؟

b. إذا كان مقبض العربة يميل بزاوية 40° مع الأرض ويسحب سمير العربة لنفس المسافة وبنفس القوة، فهل يبذل شغلاً أكثر أم أقل؟ اشرح إجابتك.

جـد مسقط u على v. ثمّ اكتب u باعتباره مجموع متّجهين متعامدين، أحدهما هو مسقط المتّجه u على v. (الدرس 3-7)

27. $\mathbf{u} = \langle 2, -3 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 2, 5 \rangle$
28. $\mathbf{u} = \langle 2, 4 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 1, 3 \rangle$
29. $\mathbf{u} = \langle 3, 4 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle -9, 2 \rangle$
30. $\mathbf{u} = \langle -1, 4 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle -6, 1 \rangle$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

7-4 المتجهات في الفضاء ثلاثي الأبعاد

السابق
- مثلت المتجهات هندسيًا وجبريًا في الأبعاد الثنائية.

الحالي
1. رسم النقاط والمتجهات في نظام إحداثي ثلاثي الأبعاد.
2. التعبير الجبري عن المتجهات والتعامل مع المتجهات في الفضاء.

لماذا؟
- يعرف اتجاه الصاروخ بعد انطلاقه بدلالة اتجاه ثنائي الأبعاد وزاوية ثلاثية الأبعاد بالنسبة للمحور الأفقي. حيث إن المسافة والسرعات والقوى الموجهة لا تتقيد بالمستوى. فلا بد أن يتوسع مفهوم المتجهات من الفضاء ثنائي الأبعاد إلى ثلاثي الأبعاد.



المفردات الجديدة

نظام إحداثي ثلاثي الأبعاد three-dimensional coordinate system

محور z z-axis

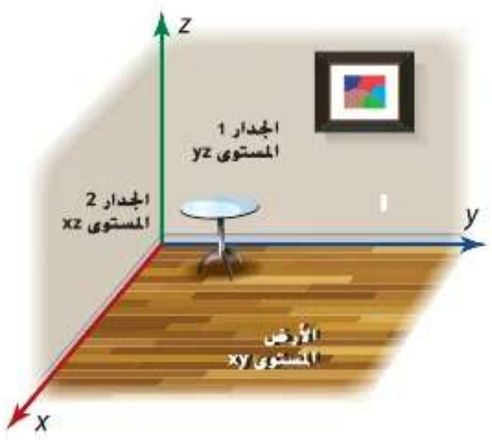
ثمن octant

ثُلاثي مُرتب ordered triple

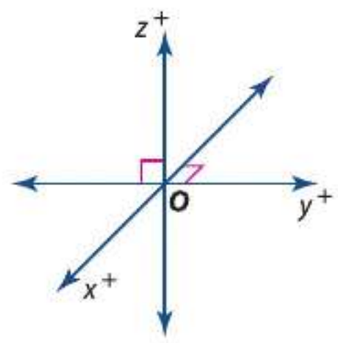
1 الإحداثيات في الأبعاد الثلاثية

يعد المستوى الديكارتي نظام إحداثي ثنائي الأبعاد يتكون من المحورين x و y مما يسمح لك بتحديد وتعيين النقاط في مستوى. ونحتاج إلى **نظام إحداثي ثلاثي الأبعاد** لتمثيل نقطة في الفضاء.

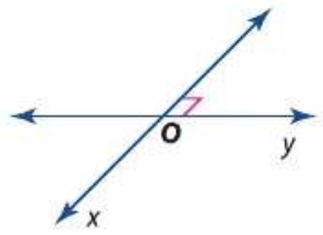
ابدأ بالمستوى xy وضعه بحيث يقدم مظهر عمق (الشكل 7.4.1). ثم أضف محورًا ثالثًا باسم المحور **z** يمر عبر نقطة الأصل ويكون متعامدًا على كل من المحورين x و y (الشكل 7.4.2). ويقسّم المحور الإضافي الفضاء إلى ثمانية أقسام تدعى **الأثمان**. وللمساعدة في تخيل الثمن الأول، انظر إلى ركن غرفة (الشكل 7.4.3). تمثل الأرض المستوى xy وتمثل الجدران المستويين xz و yz.



الشكل 7.4.3



الشكل 7.4.2



الشكل 7.4.1

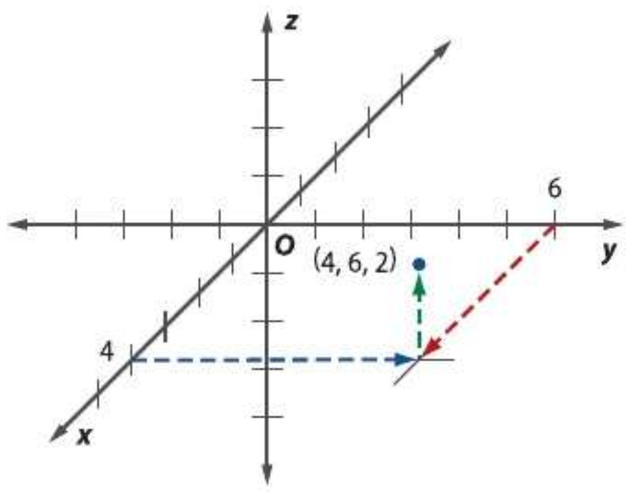
وتمثل النقطة في الفضاء **ثلاثي مُرتب** من الأعداد الحقيقية (x, y, z). ولتعيين هذه النقطة، عليك أولاً تحديد موقع النقطة (x, y) في المستوى xy والتحرك لأعلى أو أسفل موازيًا المحور z وفقًا للمسافة المتجهة التي توضحها z.

مثال 1 تحديد موقع نقطة في الفضاء

عيّن كل نقطة في نظام إحداثي ثلاثي الأبعاد.

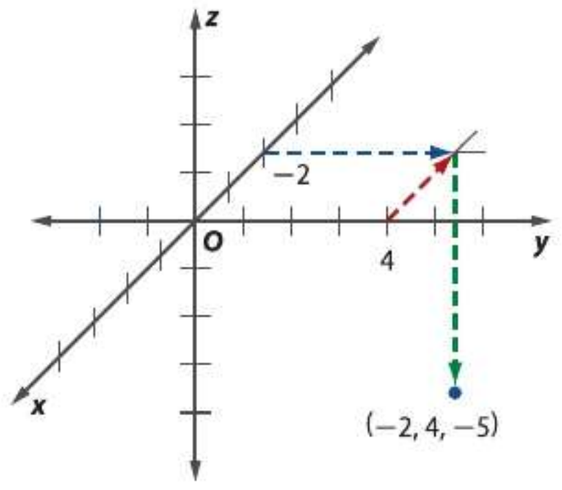
a. (4, 6, 2)

حدد موقع $(4, 6)$ في المستوى xy وضع عليها علامة X. ثم عيّن نقطة على بعد وحدتين أعلى هذا الموقع وموازية للمحور z.



b. (-2, 4, -5)

حدد موقع $(4, -2)$ في المستوى xy وضع عليها علامة X. ثم عيّن نقطة على بعد 5 وحدات أسفل هذا الموقع وموازية للمحور z.



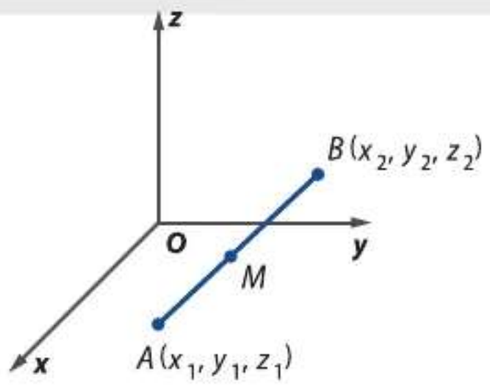
تمرين موجّه

1A. $(-3, -4, 2)$ **1B.** $(3, 2, -3)$ **1C.** $(5, -4, -1)$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

يعد إيجاد المسافة بين نقطتين ونقطة منتصف قطعة مستقيمة في الفضاء مماثلاً لإيجاد المسافة ونقطة المنتصف في المستوى الإحداثي.

المفهوم الأساسي قوانين المسافة ونقطة المنتصف في الفضاء



يتم الحصول على المسافة بين النقطتين $A(x_1, y_1, z_1)$ و$B(x_2, y_2, z_2)$ من خلال

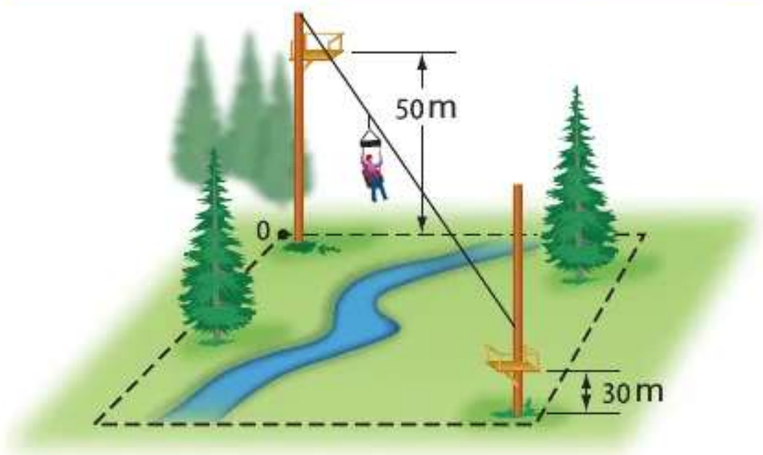
$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

ويتم الحصول على نقطة المنتصف M للنقطتين $\overline{AB}$ من خلال

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right).$$

ستثبت هذه القوانين في التمرين 66.

مثال 2 من الحياة اليومية المسافة ونقطة المنتصف للنقاط في الفضاء



حبل انزلاق تسمح جولة بجبال سيررا مادري للنزلاء بالاستمتاع بالطبيعة من خلال النزول بحبل انزلاق من منصة إلى أخرى أعلى مشاهد الطبيعة الخلابة المحيطة. ويربط حبل انزلاق بين منصتين تمثلان بالإحداثيات (10, 12, 50) و(70, 92, 30) حيث تكون الإحداثيات بالمتر.

a. جد طول حبل الانزلاق اللازم لربط المنصتين.

استخدم قانون المسافة للنقاط في الفضاء.

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$ قانون المسافة

$(x_1, y_1, z_1) = (10, 12, 50)$ و$(x_2, y_2, z_2) = (70, 92, 30)$

$$= \sqrt{(70 - 10)^2 + (92 - 12)^2 + (30 - 50)^2}$$ بسّط

$$\approx 101.98$$

لا بد أن يكون طول حبل الانزلاق نحو 102 m ليربط بين المنصتين.

b. تم بناء منصة إضافية بحيث تكون في منتصف المسافة بين المنصتين الموجودتين. جد إحداثيات المنصة الجديدة.

استخدم قانون نقطة المنتصف للنقاط في الفضاء.

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$ قانون نقطة المنتصف

$(x_1, y_1, z_1) = (10, 12, 50)$ و$(x_2, y_2, z_2) = (70, 92, 30)$

$$= \left(\frac{10 + 70}{2}, \frac{12 + 92}{2}, \frac{50 + 30}{2}\right) = (40, 52, 40)$$

ستكون إحداثيات المنصة الجديدة (40, 52, 40).



الربط بالحياة اليومية

تسمح جولة في مونتي فيردي في كوستا ريكا للزوار برؤية الطبيعة باستخدام نظام دروب وجسور معلقة وحبال انزلاق. وتسمح حبال الانزلاق للضيوف برؤية المناظر الطبيعية المحيطة من ارتفاع يصل إلى 456 قدمًا فوق مستوى الأرض.

المصدر: *Monteverde Info*

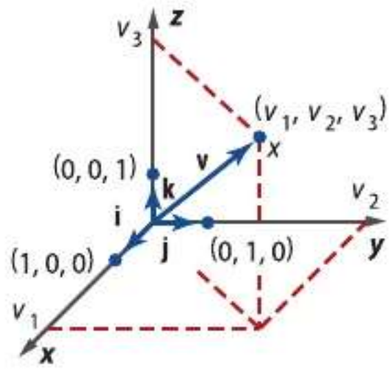
تمرين موجّه

2. الطائرات تشترط لوائح السلامة على الطائرات أن يكون بينها مسافة 0.5 km على الأقل عندما تكون محلقة في الهواء. تحلق طائرتان أعلى سماء دبي بالإحداثيات (300, 150, 30000) و(450, −250, 28000). حيث توضح الإحداثيات بالمتر.

A. هل الطائرتان تنتهكان لوائح السلامة؟ اشرح.

B. إذا تم إطلاق ألعاب نارية وانفجرت بين الطائرتين مباشرة، فما إحداثيات نقطة انفجار الألعاب النارية؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education



الشكل 7.4.4

2 المتجهات في الفضاء

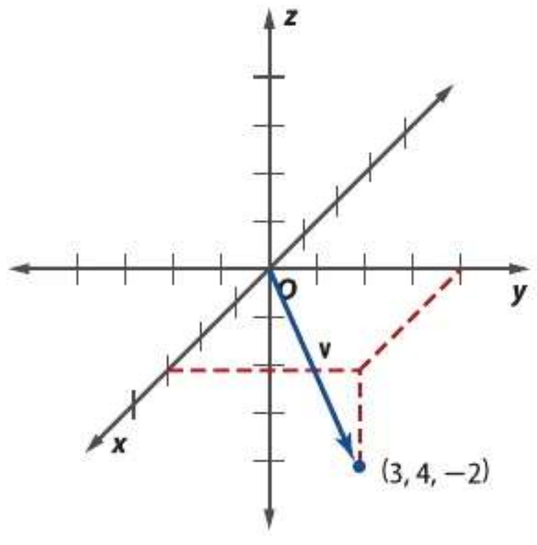
في الفضاء، يعبر عن متجه **v** في الوضع القياسي بنقطة نهاية تقع عند (v_1, v_2, v_3) من خلال $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$. ويكون المتجه الصفري $\mathbf{0} = \langle 0, 0, 0 \rangle$. وتكون متجهات الوحدة القياسية هي $\mathbf{k} = \langle 0, 0, 1 \rangle$, $\mathbf{j} = \langle 0, 1, 0 \rangle$, $\mathbf{i} = \langle 1, 0, 0 \rangle$ كما هو موضح في الشكل 7.4.4. ويمكن التعبير عن الصورة المركبة لـ **v** كتوفيق خطي لمتجهات الوحدة $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$.

مثال 3 تحديد موقع متجه في الفضاء

حدد موقع $\mathbf{v} = \langle 3, 4, -2 \rangle$ ومثله بيانيًا.

عيّن النقطة $(3, 4, -2)$.

ارسم المتجه **v** بنقطة نهاية عند $(3, 4, -2)$.

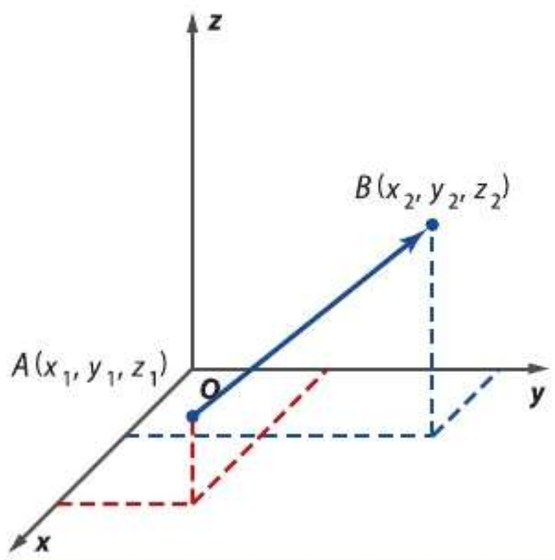


تمرين موجّه

حدد موقع كل متجه في الفضاء ثم مثله بيانيًا.

3A. $\mathbf{u} = \langle -4, 2, -3 \rangle$

3B. $\mathbf{w} = -\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$



وكما هو الحال مع المتجهات ثنائية الأبعاد، لإيجاد الصورة المركبة للقطعة المستقيمة الموجهة من $A(x_1, y_1, z_1)$ إلى $B(x_2, y_2, z_2)$، فسيتعين عليك طرح إحداثيات نقطة بدايتها من نقطة نهايتها.

$$\overrightarrow{AB} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 \rangle$$

إذًا، $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

أو إذا كان $\overrightarrow{AB} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ إذًا $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.

بذلك فإن متجه الوحدة **u** في الاتجاه $\overrightarrow{AB}$ لا يزال يساوي $\mathbf{u} = \dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$.

مثال 4 التعبير عن المتجهات في الفضاء جبريًا

جـد الصورة المركّبة والمقدار للمتّجه $\overrightarrow{AB}$ الذي تكون نقطة بدايته $A(-4, -2, 1)$ ونقطة نهايته $B(3, 6, -6)$. ثم جـد متجه الوحدة في الاتجاه $\overrightarrow{AB}$.

الصورة المركبة للمتجه

$$\overrightarrow{AB} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 \rangle$$
$$= \langle 3 - (-4), 6 - (-2), -6 - 1 \rangle = \langle 7, 8, -7 \rangle$$

$(x_1, y_1, z_1) = (-4, -2, 1)$ و $(x_2, y_2, z_2) = (3, 6, -6)$

باستخدام الصورة المركبة، فإن مقدار المتجه $\overrightarrow{AB}$ يساوي

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{7^2 + 8^2 + (-7)^2} = 9\sqrt{2}.$$

$\overrightarrow{AB} = \langle 7, 8, -7 \rangle$

باستخدام هذا المقدار والصورة المركبة، جـد متجه الوحدة **u** في اتجاه $\overrightarrow{AB}$.

متجه وحدة في اتجاه $\overrightarrow{BA}$

$$\mathbf{u} = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$$
$$= \frac{\langle 7, 8, -7 \rangle}{9\sqrt{2}} 7 = \left\langle \frac{\sqrt{2}}{18}, \frac{4\sqrt{2}}{9}, -\frac{7\sqrt{2}}{18} \right\rangle$$

$\overrightarrow{AB} = \langle 7, 8, -7 \rangle$ و $|\overrightarrow{AB}| = 9\sqrt{2}$

تمرين موجّه

جـد الصورة المركبة ومقدار المتّجه $\overrightarrow{AB}$ بنقطتي البداية والنهاية المذكورتين. ثم جـد متجه الوحدة في الاتجاه $\overrightarrow{AB}$.

4A. $A(-2, -5, -5)$, $B(-1, 4, -2)$ **4B.** $A(-1, 4, 6)$, $B(3, 3, 8)$

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

كما هو حال المتجهات في المستوى، عندما تكون المتجهات في الفضاء في صورة مركبة أو معبر عنها في صورة توفيق خطي لمتجهات الوحدة، يمكنك حينها جمعها أو طرحها أو ضربها في كمية غير متجهة.

المفهوم الأساسي عمليات المتجهات في الفضاء

إذا كان $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$، $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$. وأي كمية غير متجه k، فإن

جمع المتجه	$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3 \rangle$
طرح المتجه	$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}) = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3 \rangle$
ضرب كمية عددية	$k\mathbf{a} = \langle ka_1, ka_2, ka_3 \rangle$

نصيحة دراسية

عمليات المتجهات تكون خصائص عمليات المتجهات في الفضاء نفس الخصائص للعمليات في المستوى.

مثال 5 عمليات المتجهات في الفضاء

جـــد قيمة كل مما يلي لكل من $\mathbf{y} = \langle 3, -6, 2 \rangle$ و $\mathbf{w} = \langle -1, 4, -4 \rangle$ و $\mathbf{z} = \langle -2, 0, 5 \rangle$.

a. $4\mathbf{y} + 2\mathbf{z}$

$4\mathbf{y} + 2\mathbf{z} = 4\langle 3, -6, 2 \rangle + 2\langle -2, 0, 5 \rangle$ عوّض

$= \langle 12, -24, 8 \rangle + \langle -4, 0, 10 \rangle = \langle 8, -24, 18 \rangle$ ضرب كمية عددية وجمع المتجهات

b. $2\mathbf{w} - \mathbf{z} + 3\mathbf{y}$

$2\mathbf{w} - \mathbf{z} + 3\mathbf{y} = 2\langle -1, 4, -4 \rangle - \langle -2, 0, 5 \rangle + 3\langle 3, -6, 2 \rangle$ عوّض

$= \langle -2, 8, -8 \rangle + \langle 2, 0, -5 \rangle + \langle 9, -18, 6 \rangle$ ضرب كمية عددية

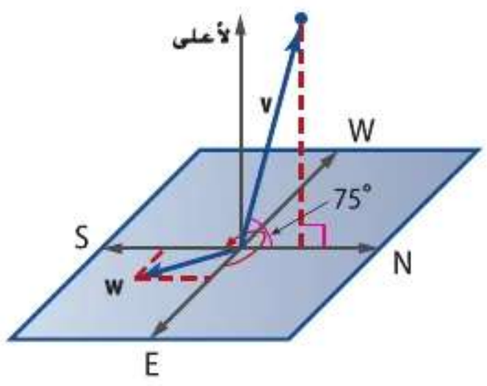
$= \langle 9, -10, -7 \rangle$ جمع المتجهات

تمرين موجّه

5A. $4\mathbf{w} - 8\mathbf{z}$ **5B.** $3\mathbf{y} + 3\mathbf{z} - 6\mathbf{w}$

مثال 6 من الحياة اليومية استخدام المتجهات في الفضاء

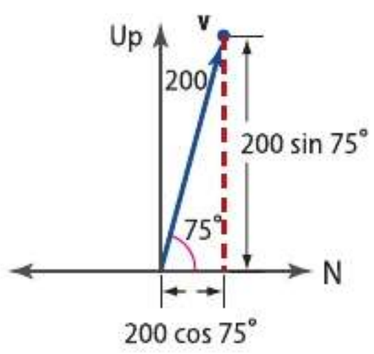
الصواريخ بعد الانطلاق، يتجه صاروخ نموذجي نحو الشمال ويرتفع بزاوية 75° بالنسبة للمحور الأفقي بسرعة 200 **km/h**. فإذا هبت الرياح من الشمال الغربي بسرعة 5 **كيلومتر** في الساعة، فجـــد متجه السرعة الناتجة للصاروخ بالنسبة لنقطة الانطلاق.



افترض أن النقطة **i** في الغرب، والنقطة **j** في الشمال والنقطة **k** لأعلى. ويوضح المتجه **v** الذي يمثل سرعة الصاروخ والمتجه **w** الذي يمثل سرعة الرياح. لاحظ اتجاه **w** نحو الجنوب الشرقي، حيث إن الرياح تهب من الشمال الغربي.

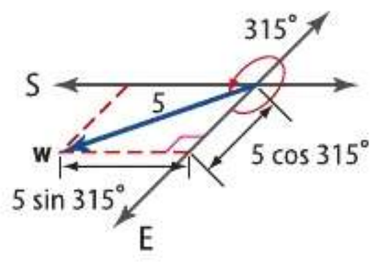
حيث إن المتجه **v** له مقدار 200 وزاوية اتجاه 75°. يمكننا إيجاد الصورة المركبة من المتجه **v**. كما هو موضح في الشكل 7.4.5.

$\mathbf{v} = \langle 0, 200 \cos 75°, 200 \sin 75° \rangle$ أو حوالي $\langle 0, 51.8, 193.2 \rangle$



الشكل 7.4.5

نظرًا لأن الشرق هو محور x الموجب، تكون زاوية اتجاه **w** تساوي 315°. حيث إن $|\mathbf{w}| = 5$، فإن الصورة المركبة لهذا المتجه هي $\mathbf{w} = \langle 5 \cos 315°, 5 \sin 315°, 0 \rangle$ أو حوالي $\langle 3.5, -3.5, 0 \rangle$، على النحو الموضح في الشكل 7.4.6.



الشكل 7.4.6

السرعة الناتجة للصاروخ عبارة عن $\mathbf{v} + \mathbf{w}$.

$\mathbf{v} + \mathbf{w} = \langle 0, 51.8, 193.2 \rangle + \langle 3.5, -3.5, 0 \rangle$

$= \langle 3.5, 48.3, 193.2 \rangle = 3.5\mathbf{i} + 48.3\mathbf{j} + 193.2\mathbf{k}$

تمرين موجّه

6. الملاحة الجوية بعد إقلاع طائرة، اتجهت شرقًا واستمرت في الارتفاع بزاوية 18° بالنسبة للمحور الأفقي. وكانت سرعتها في الهواء 250 km/h. فإذا هبت الرياح من الشمال الشرقي بسرعة 10 km/h. فجـــد المتجه الذي يمثل السرعة الناتجة للطائرة بالنسبة لنقطة الإقلاع. افترض أن النقطة **i** في الغرب، والنقطة **j** في الشمال والنقطة **k** لأعلى.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

تمارين

عيّن كل نقطة في نظام إحداثي ثلاثي الأبعاد. (مثال 1)

1. $(1, -2, -4)$
2. $(3, 2, 1)$
3. $(-5, -4, -2)$
4. $(-2, -5, 3)$
5. $(-5, 3, 1)$
6. $(2, -2, 3)$
7. $(4, -10, -2)$
8. $(-16, 12, -13)$

جـد طول القطعة المستقيمة ونقطة المنتصف لها باستخدام نقطتي طرفيها المبينتين. (المثال 2)

9. $(-4, 10, 4), (1, 0, 9)$
10. $(-6, 6, 3), (-9, -2, -2)$
11. $(6, 1, 10), (-9, -10, -4)$
12. $(8, 3, 4), (-4, -7, 5)$
13. $(-3, 2, 8), (9, 6, 0)$
14. $(-7, 2, -5), (-2, -5, -8)$

15. **العطلات** تستخدم أسرة من ولاية كنساس جهاز نظام تحديد المواقع العالمي (GPS) للتخطيط لعطلة ف يمدينة كولورادو. ووفقًا للجهاز، فإن إحداثيات منزل الأسرة هي $(37.7°, 97.2°, 433\text{ m})$ وإحداثيات يمدينة كولوراد هي $(39.4°, 104.8°, 1981\text{ m})$. حدد خطي الطول والعرض والارتفاع لنقطة المنتصف بين كنساس والعين. (المثال 2)

16. **الطيارون الحربيون** أثناء جلسة تدريب، يُمثل موقع الطائرتين الحربيتين F-18 من خلال الإحداثيات $(675, -121, 19{,}300)$ و$(-289, 715, 16{,}100)$. حيث تكون الإحداثيات بوحدة القدم. (مثال 2)
   a. حدد المسافة بين الطائرتين.
   b. لأي موقع يحتاج أحد الطائرين الطيران بالطائرة F-18 ليقلل المسافة بين الطائرتين إلى النصف؟

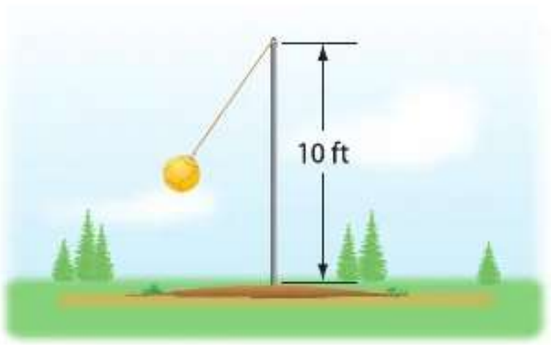
حدد موقع كل متجه في الفضاء ثم مثله بيانيًا. (مثال 3)

17. $\mathbf{a} = \langle 0, -4, 4 \rangle$
18. $\mathbf{b} = \langle -3, -3, -2 \rangle$
19. $\mathbf{c} = \langle -1, 3, -4 \rangle$
20. $\mathbf{d} = \langle 4, -2, -3 \rangle$
21. $\mathbf{v} = 6\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$
22. $\mathbf{w} = -10\mathbf{i} + 5\mathbf{k}$
23. $\mathbf{m} = 7\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$
24. $\mathbf{n} = \mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 8\mathbf{k}$

جـد الصورة المُركّبة ومقدار المتّجه $\overrightarrow{AB}$ بنقطتي *البداية والنهاية المذكورتين*. ثم جـد متجه الوحدة في الاتجاه $\overrightarrow{AB}$ (مثال 4)

25. $A(-5, -5, -9)$, $B(11, -3, -1)$
26. $A(-4, 0, -3)$, $B(-4, -8, 9)$
27. $A(3, 5, 1)$, $B(0, 0, -9)$
28. $A(-3, -7, -12)$, $B(-7, 1, 8)$
29. $A(2, -5, 4)$, $B(1, 3, -6)$
30. $A(8, 12, 7)$, $B(2, -3, 11)$
31. $A(3, 14, -5)$, $B(7, -1, 0)$
32. $A(1, -18, -13)$, $B(21, 14, 29)$
33. $A(-5, 12, 17)$, $B(6, -11, 4)$
34. $A(9, 3, 7)$, $B(-5, -7, 2)$

35. **كرة السرعة** في مباراة كرة سرعة، تثبت الكرة في عمود طوله 10 ft بطول حبل. ويضرب لاعبان الكرة في اتجاهين متعاكسين في محاولة للف الطول الكامل للحبل حول العمود. وللعب يمسك أحد اللاعبين الكرة بحيث تكون إحداثياتها $(5, 3.6, 4.7)$ وتكون إحداثيات طرف الحبل المربوط بالعمود $(0, 0, 9.8)$. حيث تكون الإحداثيات بوحدة القدم. حدد مقدار المتجه الذي يمثل طول الحبل. (مثال 4)



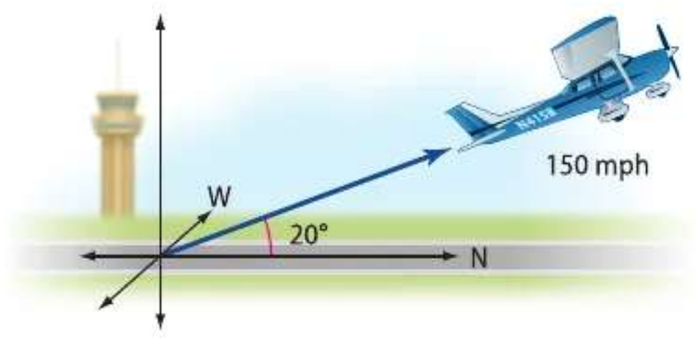
جـد كل مما يلي لكل من $\mathbf{a} = \langle -5, -4, 3 \rangle$ و$\mathbf{b} = \langle 6, -2, -7 \rangle$ و$\mathbf{c} = \langle -2, 2, 4 \rangle$. (المثال 5)

36. $6\mathbf{a} - 7\mathbf{b} + 8\mathbf{c}$
37. $7\mathbf{a} - 5\mathbf{b}$
38. $2\mathbf{a} + 5\mathbf{b} - 9\mathbf{c}$
39. $6\mathbf{b} + 4\mathbf{c} - 4\mathbf{a}$
40. $8\mathbf{a} - 5\mathbf{b} - \mathbf{c}$
41. $-6\mathbf{a} + \mathbf{b} + 7\mathbf{c}$

جـد كل مما يلي لكل من $\mathbf{x} = -9\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ و$\mathbf{y} = 6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$ و$\mathbf{z} = -2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$. (المثال 5)

42. $7\mathbf{x} + 6\mathbf{y}$
43. $3\mathbf{x} - 5\mathbf{y} + 3\mathbf{z}$
44. $4\mathbf{x} + 3\mathbf{y} + 2\mathbf{z}$
45. $-8\mathbf{x} - 2\mathbf{y} + 5\mathbf{z}$
46. $-6\mathbf{y} - 9\mathbf{z}$
47. $-\mathbf{x} - 4\mathbf{y} - \mathbf{z}$

48. **الطائرات** تقلع طائرة متجهة ناحية الشمال بسرعة في الهواء 150 mph بزاوية 20° بالنسبة إلى المحور الأفقي. وتهب الرياح بسرعة 8 mph من اتجاه الجنوب الغربي. جـد المتجه الذي يمثل السرعة الناتجة للطائرة بالنسبة إلى نقطة الإقلاع. افترض أن النقطة **i** في الغرب، والنقطة **j** في الشمال والنقطة **k** لأعلى. (مثال 6)



49. **ألعاب القوى** ترمي مايسة رمحًا في اتجاه الجنوب بسرعة 18 km/h وبزاوية 48° بالنسبة إلى المحور الأفقي. إذا كانت الرياح تهب بسرعة 19.3 km/h بزاوية S15°E، فجـد المتجه الذي يمثل السرعة الناتجة للرمح. افترض أن النقطة **i** في الغرب، والنقطة **j** في الشمال والنقطة **k** لأعلى. (مثال 6)

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

50. الغواصات تغوص غواصة منطلقة في اتجاه الغرب بسرعة 25 عقدة بحرية وبزاوية ميلان °55. ويتحرك التيار بسرعة 4 عقدات بحرية بزاوية S20°W. جـد المتجه الذي يمثل السرعة الناتجة للغواصة بالنسبة لنقطة بداية الغوص. افترض أن النقطة **i** في الغرب، والنقطة **j** في الشمال والنقطة **k** لأعلى. (مثال 6)

إذا كانت N هي نقطة منتصف $\overline{MP}$، فجـد P.

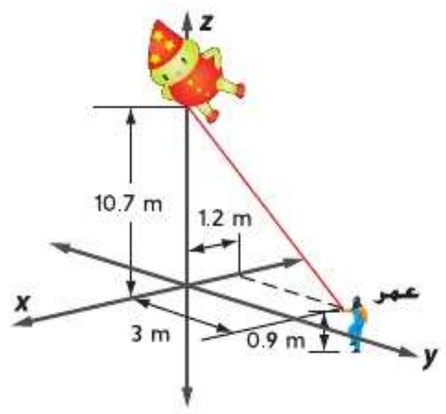
51. $M(3, 4, 5)$; $N\left(\frac{7}{2}, 1, 2\right)$

52. $M(-1, -4, -9)$; $N(-2, 1, -5)$

53. $M(7, 1, 5)$; $N\left(5, -\frac{1}{2}, 6\right)$

54. $M\left(\frac{3}{2}, -5, 9\right)$; $N\left(-2, -\frac{13}{2}, \frac{11}{2}\right)$

55. التطوع يتطوع عمر للمساعدة في توجيه بالون في استعراض. فإذا كان البالون على ارتفاع 10.7 m ويمسك عمر بشريط ربطه على ارتفاع 0.9 m أعلى مستوى الأرض كما هو موضح. فكم طول شريط الربط لأقرب متر؟



حدد إن كان المثلث بالرؤوس المذكورة متساوي *الساقين* أم *مختلف الأضلاع*.

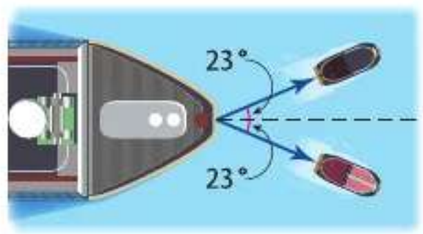
56. $A(3, 1, 2)$, $B(5, -1, 1)$, $C(1, 3, 1)$

57. $A(4, 3, 4)$, $B(4, 6, 4)$, $C(4, 3, 6)$

58. $A(-1, 4, 3)$, $B(2, 5, 1)$, $C(0, -6, 6)$

59. $A(-2.2, 4.3, 5.6)$, $B(0.7, 9.3, 15.6)$, $C(3.6, 14.3, 5.6)$

60. مراكب قطر السفن يسحب مركبي قطر سفن ناقلة عملاقة معطلة. ويشكل أحد حبلي القطر زاوية °23 غرب الشمال بينما يشكل الآخر زاوية °23 شرق الشمال. وتبذل كل عملية جر قوة ثابتة مقدارها 2.5×10^6 N بزاوية انخفاض °15 أسفل النقطة التي ترتبط فيها الحبال بالناقلة العملاقة. وقد جروا الناقلة ميلين باتجاه الشمال.



a. اكتب متجه ثلاثي الأبعاد يصف القوة المبذولة من كل مركب قطر سفن.

b. جـد المتجه الذي يصف إجمالي القوة المبذولة على الناقلة العملاقة.

c. إذا بلغ طول كل حبل قطر 300 ft. فكم يبعد كل من المركبين عن الآخر تقريبًا؟

61. الأشكال الكروية استخدم قانون المسافة لنقطتين لإثبات أن الصيغة القياسية لمعادلة شكل كروي مركزه (h, k, ℓ) ونصف قطره r يساوي $r^2 = (x - h)^2 + (y - k)^2 + (z - \ell)^2$.

استخدم القانون من التمرين 61 لكتابة معادلة للشكل الكروي باستخدام المركز ونصف القطر المذكورين.

62. المركز $= (-4, -2, 3)$؛ نصف القطر $= 4$

63. المركز $= (6, 0, -1)$؛ نصف القطر $= \frac{1}{2}$

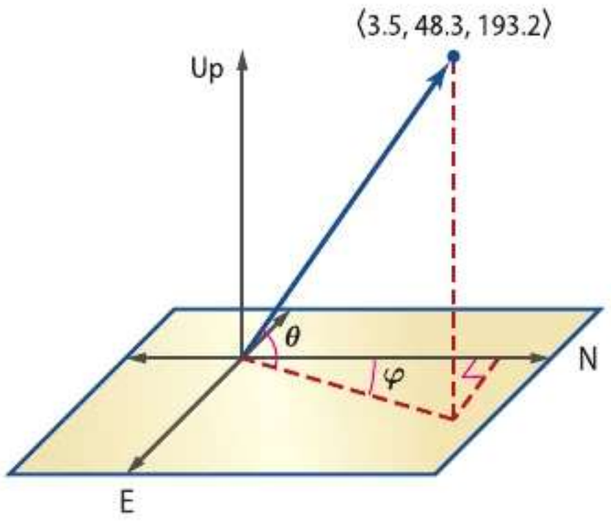
64. المركز $= (5, -3, 4)$؛ نصف القطر $= \sqrt{3}$

65. المركز $= (0, 7, -1)$؛ نصف القطر $= 12$

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

66. الاستنتاج أثبت قانون المسافة في الفضاء. (إرشاد: استخدم نظرية فيثاغورس مرتين.)

67. التحدي راجع المثال 6.

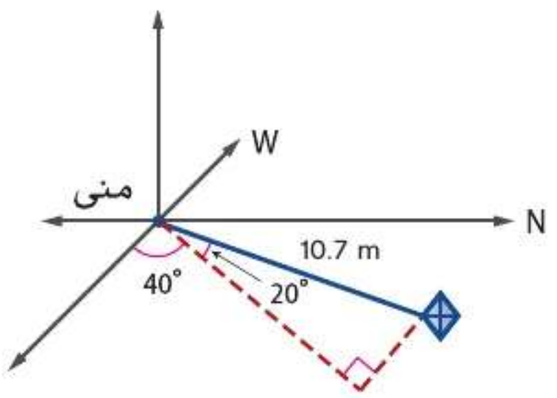


a. احسب السرعة الناتجة للصاروخ.

b. جـد الاتجاه الربعي φ للصاروخ.

c. احسب زاوية الميل θ الناتجة للصاروخ بالنسبة للمحور الأفقي.

68. التحدي تقف منى في حقل مفتوح متجهة بوجهها نحو N50°E. وتمسك بطائرة ورقية من خلال حبله طوله 10.7 m يطير مكونًا زاوية °20مع الحقل. جـد مركبات المتجه من منى إلى الطائرة الورقية. (إرشاد: استخدم النسب المثلثية ومثلثين قائمي الزاوية لإيجاد **x** و**y** و**z**.)



69. الكتابة في الرياضيات اذكر موقفًا يكون فيه من المنطقي استخدام نظام إحداثي ثنائي الأبعاد وموقفًا آخر يكون فيه من المنطقي استخدام نظام إحداثي ثلاثي الأبعاد.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مراجعة شاملة

جـــد مسقط **u** على **v**. ثم اكتب **u** باعتباره مجموع متّجهين متعامدين. أحدهما هو مسقط المتّجه **u** على **v**.

70. $\mathbf{u} = \langle 6, 8 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 2, -1 \rangle$

71. $\mathbf{u} = \langle -1, 4 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 5, 1 \rangle$

72. $\mathbf{u} = \langle 5, 4 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 4, -2 \rangle$

جـــد الصورة المُركّبة ومقدار المتّجه $\overrightarrow{AB}$ ***بنقطتي البداية والنهاية المذكورتين.***

73. $A(6, -4)$, $B(-7, -7)$

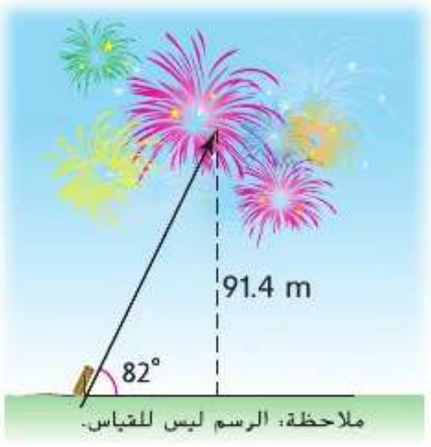
74. $A(-4, -8)$, $B(1, 6)$

75. $A(-5, -12)$, $B(1, 6)$

76. الترفيه أطلقت الألعاب النارية لليوم الوطني لدولة الإمارات من برج خليفة بزاوية 82° بالنسبة للمحور الأفقي. وقد توقع الفني الذي أطلق قذيفة الألعاب النارية أن تنفجر على بعد حوالي 91.4 m في الهواء بعد 4.8 ثوانٍ من إطلاقها.

a. جـــد السرعة الابتدائية لقذيفة تم إطلاقها من مستوى الأرض.

b. سيتم وضع حواجز سلامة حول منطقة إطلاق الألعاب النارية لحماية المشاهدين. إذا تم وضع الحواجز على بعد 91.4 m من نقطة التي تقع أسفل انفجار القذائف مباشرة. فكم ستبعد الحواجز عن النقطة التي تم إطلاق الألعاب النارية منها؟



77. الإنشاء مدفأة حجرية صممت كقوس على شكل نصف قطع ناقص سيكون لها فتحة بارتفاع 3 m في المنتصف وعرض 8 m عند القاعدة. ولرسم مخطط للمدفأة، يستخدم المقاول حبلاً مربوطًا بدبوسين.

a. ما الموقعين الذي يجب وضع الدبوسين بهما؟

b. ما الطول اللازم للحبل الذي سيستخدم؟ وضّح استنتاجك.

حُـلّ كل معادلة لجميع قيم θ.

78. $\csc \theta + 2 \cot \theta = 0$

79. $\sec^2 \theta - 9 = 0$

80. $2 \csc \theta - 3 = 5 \sin \theta$

مثّل كل دالة بيانيًا.

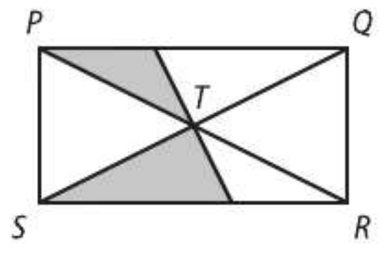
81. $y = \cos^{-1}(x - 2)$

82. $y = 3 + x$ قوس جيب الزاوية

83. $y = \sin^{-1} 3x$

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

84. SAT/ACT ما النسبة المئوية للجزء المظلل من مساحة المستطيل $PQRS$؟



A 22%
B 25%
C 30%
D $33\frac{1}{3}\%$
E 35%

85. مراجعة تغادر سفينة الميناء مبحرة مسافة 75 km في اتجاه 35° الشمال الشرقي. عند هذه النقطة، كم تبعد السفينة في اتجاه الشمال عن نقطة بدايتها؟

F 43 km
G 55 km
H 61 km
J 72 km

86. أثناء هبوب عاصفة، يمكن التعبير عن القوة التي تبذلها الرياح العاتية على ناطحة سحاب بالمتجه $\langle 132, 3454, -76 \rangle$. حيث تقاس قوة الرياح بالنيوتن. ما المقدار التقريبي لهذه القوة؟

A 3457 N
B 3568 N
C 3692 N
D 3717 N

87. مراجعة تحلق طائرة في اتجاه الغرب بسرعة 100 m في الثانية. وتهب الرياح من اتجاه الجنوب بسرعة 30 m/s. ما المقدار التقريبي لسرعة الطائرة الناتجة؟

F 4 m/s
G 95.4 m/s
H 100 m/s
J 104.4 m/s

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

الدرس 7-4

مختبر تقنية التمثيل البياني
تحويلات المتجهات باستخدام المصفوفات

الهدف

- استخدم حاسبة التمثيل البياني لتحويل المتجهات باستخدام المصفوفات.

في الدرس 7-4، تعلمت أنه يمكن تحويل المتجه في الفضاء بكتابته في الصورة المركبة أو عند التعبير عنه في صورة توفيق خطي. ويمكن تحويل المتجه في الفضاء كذلك عند كتابته في صورة مصفوفة 1 × 3 أو مصفوفة 3 × 1.

$$x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = [x \ y \ z]$$

وما أن يكتب في صيغة مصفوفة، يمكن تحويل المتجه باستخدام ضرب المصفوفات-المتجهات.

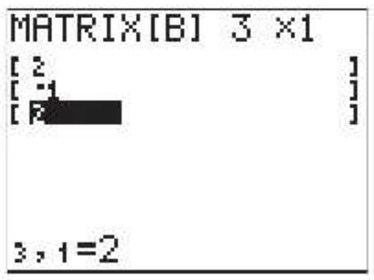
نشاط ضرب المصفوفات-المتجهات

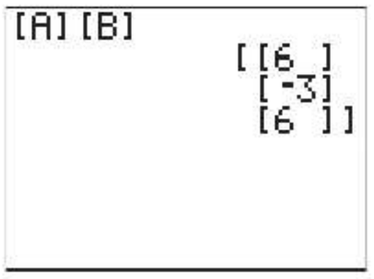
اضرب المتجه $\mathbf{B} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ في مصفوفة التحويل $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ ثم مثل كلا المتجهين بيانيًا.

الخطوة 1 اكتب B في صورة مصفوفة.

$$\mathbf{B} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

الخطوة 2 أدخل **B** و *A* في حاسبة التمثيل البياني وجـد **AB**. حوّل إلى صيغة المتجه.

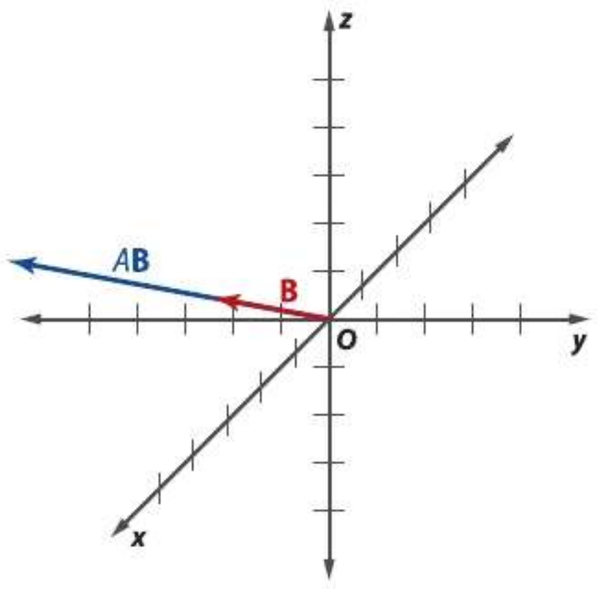




$$A\mathbf{B} = 6\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$$

الخطوة 3 مثّل B و AB بيانيًا على المستوى الإحداثي.

AB هي تمدد لـ B بعامل 3.



تمارين

اضرب كل متجه في مصفوفة التحويل. مثّل كلا المتجهين بيانيًا.

1. $\mathbf{h} = 4\mathbf{i} + \mathbf{j} + 8\mathbf{k}$ $B = \begin{bmatrix} 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0.25 \end{bmatrix}$

2. $\mathbf{e} = 5\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 9\mathbf{k}$ $V = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

3. $\mathbf{f} = \mathbf{i} + 7\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ $W = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

4. **الاستنتاج** اضرب $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ في مصفوفة التحويل $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ثم مثّل كلا المتجهين بيانيًا. وضّح نوع التحويل الذي تم.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

7-5 الضرب النقطي والضرب المتجهي للمتجهات في الفضاء

السابق
- وجدت قيمة ناتج الضرب النقطي لمتجهين في المستوى

الحالي
1. إيجاد قيمة ناتج الضرب النقطي والزوايا بين المتجهات في الفضاء.
2. إيجاد قيمة ناتج الضرب المتجهي للمتجهات في الفضاء واستخدام ناتج الضرب المتجهي في إيجاد المساحة والحجم.

لماذا؟
- يتأثر ميل باب مزود بمفصلة للدوران بالمسافة بين موقع الدفع والمفصلة؛ ومقدار الدفع؛ واتجاه الدفع.

وتقيس الكمية التي يطلق عليها *العزم* مدى فاعلية القوة المبذولة على رافعة في التسبب في دوران الشيء حول محوره.



المفردات الجديدة

ناتج الضرب المتجهي cross product

العزم torque

متوازي المستطيلات parallelepiped

الضرب القياسي لثلاثة متجهات triple scalar product

1 الضرب النقطي في الفضاء

حساب نواتج الضرب النقطي لمتجهين في الفضاء يشبه حساب نواتج الضرب النقطي لمتجهين في مستوى. وكما هو الحال مع المتجهات في المستوى، تكون المتجهات غير الصفرية في الفضاء متعامدة فقط إن كان ناتج ضربهم النقطي يساوي صفرًا.

المفهوم الأساسي ناتج الضرب النقطي والمتجهات المتعامدة في الفضاء

ناتج الضرب النقطي لـ $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ و $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ تعرف على أنها $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$. يكون المتجهان **a** و **b** متعامدين إذا وفقط إذا كان $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$.

مثال 1 إيجاد ناتج الضرب النقطي لتحديد المتجهات المتعامدة في الفضاء

جـد ناتج الضرب النقطي لـ u و v. ثمّ حدّد ما إذا كانت النقطتان u و v متعامدتين.

a. $\mathbf{u} = \langle -7, 3, -3 \rangle, \mathbf{v} = \langle 5, 17, 5 \rangle$

$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = -7(5) + 3(17) + (-3)(5)$

$= -35 + 51 + (-15) = 1$

حيث إن $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \neq 0$. فإن **u** و **v** ليسا متعامدين.

b. $\mathbf{u} = \langle 3, -3, 3 \rangle, \mathbf{v} = \langle 4, 7, 3 \rangle$

$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 3(4) + (-3)(7) + 3(3)$

$= 12 + (-21) + 9 = 0$

حيث إن $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$. فإن **u** و **v** متعامدان.

تمرين موجّه

1A. $\mathbf{u} = \langle 3, -5, 4 \rangle, \mathbf{v} = \langle 5, 7, 5 \rangle$

1B. $\mathbf{u} = \langle 4, -2, -3 \rangle, \mathbf{v} = \langle 1, 3, -2 \rangle$

كما هو الحال مع المتجهات في المستوى. إذا كانت θ هي الزاوية بين المتجهات غير الصفرية **a** و **b**. فإن $\cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|}$

مثال 2 الزاوية بين متجهين في الفضاء

جـد الزاوية θ المحصورة بين u و v مقربة إلى أقرب جزء من عشرة من الدرجة إذا كان $\mathbf{u} = \langle 3, 2, -1 \rangle$ و $\mathbf{v} = \langle -4, 3, -2 \rangle$.

الزاوية بين متجهين

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|}$$

$\mathbf{u} = \langle 3, 2, -1 \rangle$ و $\mathbf{v} = \langle -4, 3, -2 \rangle$

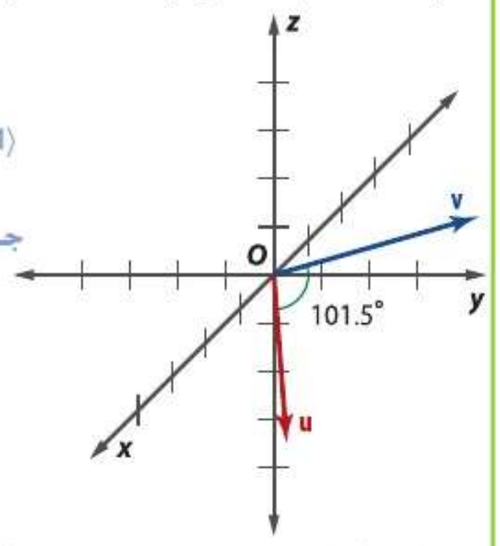
$$\cos \theta = \frac{\langle 3, 2, -1 \rangle \cdot \langle -4, 3, -2 \rangle}{|\langle 3, 2, -1 \rangle|\,|\langle -4, 3, -2 \rangle|}$$

جـد قيمة ناتج الضرب النقطي والمقدار.

$$\cos \theta = \frac{-4}{\sqrt{14}\sqrt{29}}$$

بسّط وجـد حل θ.

$$\theta = \cos^{-1} \frac{-4}{\sqrt{406}} \text{ حوالي } = 101.5^\circ$$



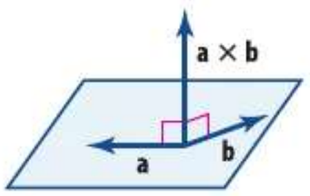
قياس الزاوية بين **u** و **v** يساوي حوالي 101.5°.

تمرين موجّه

2. جـد قياس الزاوية المحصورة بين $\mathbf{u} = -4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ و $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{k}$ مقرّبًا إلى أقرب جزء من عشرة من الدرجة.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

2 الضرب المتجهي



من نواتج الضرب الأخرى الهامة المرتبطة بالمتجهات في الفضاء هو الضرب المتجهي. وبخلاف الضرب النقطي، فإن **الضرب المتجهي** للمتجهين **a** و **b** في الفضاء، والمشار إليه في الصورة **a** × **b** ويقرأ a ضرب b. هو متجه وليس كمية عددية. ويكون المتجه **a** × **b** متعامدًا على المستوى الذي يحتوي على المتجهين **a** و **b**.

المفهوم الأساسي الضرب المتجهي للمتجهات في الفضاء

إذا كان $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ و $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$. فإن ناتج الضرب المتجهي لـ **a** و **b** هو المتجه

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\mathbf{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{k}$$

مراجعة المفردات

محدد 2 × 2 محدد المصفوفة 2 × 2

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ is } \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$$

إذا طبقنا قانون حساب محدد مصفوفة 3 × 3 على صيغة المحدد التالية والتي تتضمن **i**, **j**, **k** ومركبات **a** و **b**. فسنتوصل إلى نفس قانون **a** × **b**.

ضع متجهات الوحدة i و j و k في الصف 1. ←
ضع مركبات a في الصف 2. ←
ضع مركبات b في الصف 3. ←

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

طبق القانون لمحدد 3 × 3. ←

$$= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\mathbf{k}$$

احسب كل محدد 2 × 2. ←

$$= (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\mathbf{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{k}$$

انتبه!

الضرب المتجهي ينطبق تعريف الضرب المتجهي فقط على المتجهات في فضاء ثلاثي الأبعاد. ولا يعرّف الضرب المتجهي المتجهات في النظام الإحداثي ثنائي الأبعاد.

مثال 3 إيجاد ناتج الضرب المتجهي لمتجهين

جـد ناتج الضرب المتجهي لكلٍ من $\mathbf{u} = \langle 3, -2, 1\rangle$ و $\mathbf{v} = \langle -3, 3, 1\rangle$. ثم برهن أن $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ متعامد على كل من u و v.

$\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ و $\mathbf{v} = -3\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & -2 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

محدد مصفوفة 3 × 3 ←

$$= \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 3 \end{vmatrix}\mathbf{k}$$

محددا المصفوفتين 2 × 2 ←

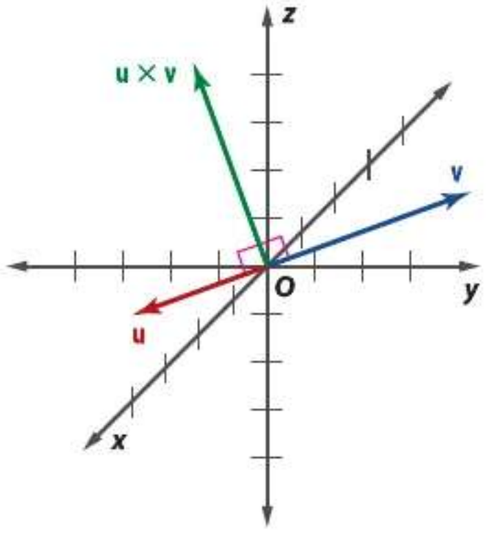
$$= (-2 - 3)\mathbf{i} - [3 - (-3)]\mathbf{j} + (9 - 6)\mathbf{k}$$

بسّط. ←

$$= -5\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$$

الصورة المُركّبة ←

$$= \langle -5, -6, 3\rangle$$



في التمثيل البياني **u** و **v** و **u** × **v**. **u** × **v** متعامد على **u** و **u** × **v** متعامد على **v**.

لإثبات أن **u** × **v** متعامد على كل من **u** و **v**، جـد ناتج الضرب النقطي لـ **u** × **v** مع **u** و **u** × **v** مع **v**.

$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}$
$= \langle -5, -6, 3\rangle \cdot \langle -3, 3, 1\rangle$
$= -5(-3) + (-6)(3) + 3(1)$
$= 15 + (-18) + 3 = 0$ ✔

$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u}$
$= \langle -5, -6, 3\rangle \cdot \langle 3, -2, 1\rangle$
$= -5(3) + (-6)(-2) + 3(1)$
$= -15 + 12 + 3 = 0$ ✔

حيث إن كل من ناتجي الضرب النقطي مساويين للصفر، إذًا المتجهات متعامدة.

تمرين موجّه

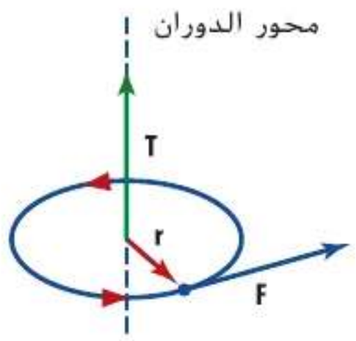
جـد ناتج الضرب المتجهي لـ **u** و **v**. ثم برهن أن **u** × **v** متعامد على كل من **u** و **v**.

3A. $\mathbf{u} = \langle 4, 2, -1\rangle, \mathbf{v} = \langle 5, 1, 4\rangle$

3B. $\mathbf{u} = \langle -2, -1, -3\rangle, \mathbf{v} = \langle 5, 1, 4\rangle$

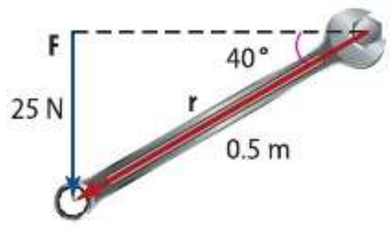
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

يمكنك استخدام ناتج الضرب المتجهي لإيجاد كمية المتجه المسمى **العزم**. ويقيس العزم مدى فاعلية القوة المبذولة على رافعة في التسبب في دوران الشيء حول محوره. يكون متجه العزم **T** عموديًا على المستوى الذي يحتوي على المسافة الموجّهة **r** من محور الدوران إلى نقطة القوة المبذولة والقوة المبذولة **F** كما هو موضح. وبالتالي متجه يساوي العزم $\mathbf{T} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ ويقاس بالنيوتن متر $(\mathrm{N \cdot m})$.



مثال 4 من الحياة اليومية العزم باستخدام ناتج الضرب المتجهي

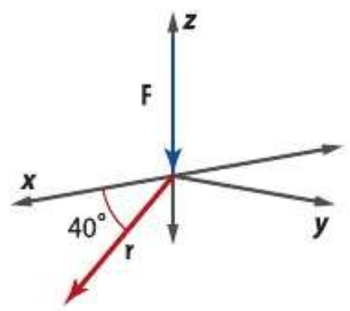
إصلاح السيارات يستخدم عبد الكريم مفتاح ربط الصواميل لإحكام صامولة العروة. ويبلغ طول مفتاح الربط الذي يستخدمه **50 cm** أو **0.5 m**. جـــد مقدار واتجاه العزم على صامولة العروة إذا بذل قوة قدرها **25 N** لأسفل لنهاية ذراع التوجيه عندما تكون °40 أسفل محور **x** الموجب كما هو موضح.



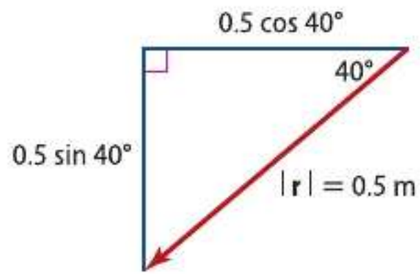
الخطوة 1 مثّل كل متجه في الموقع القياسي بيانيًا (الشكل 7.5.1).

الخطوة 2 حدد الصورة المُركّبة لكل متجه.

يمكن إيجاد الصورة المُركّبة للمتجه التي تمثل المسافة المتجهة من محور الدوران إلى نهاية ذراع التوجيه مباشرة باستخدام المثلث في الشكل 7.5.2 وحساب المثلثات. يكون المتجه **r** بالتالي $\langle 0.5 \cos 40°, 0, -0.5 \sin 40° \rangle$ أو حوالي $\langle 0.38, 0, -0.32 \rangle$. والمتجه الذي يمثل القوة المبذولة على نهاية ذراع التوجيه يساوي 25 نيوتن مباشرة لأسفل، إذًا $\mathbf{F} = \langle 0, 0, -25 \rangle$.



الشكل 7.5.1



الشكل 7.5.2

الخطوة 3 استخدم ناتج الضرب المتجهي لهذه المتجهات لإيجاد المتجه الذي يمثل العزم على صامولة العروة.

قانون ناتج الضرب المتجهي للعزم $\mathbf{T} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$

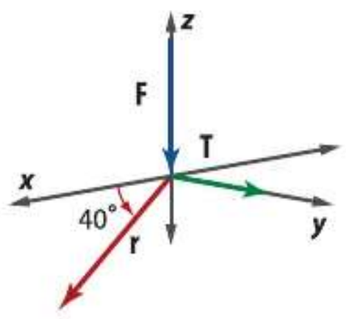
ناتج الضرب المتجهي لـ r و F $= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0.38 & 0 & -0.32 \\ 0 & 0 & -25 \end{vmatrix}$

محدد مصفوفة 3 × 3 $= \begin{vmatrix} 0 & -0.32 \\ 0 & -25 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} 0.38 & -0.32 \\ 0 & -25 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} 0.38 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \mathbf{k}$

محددا مصفوفتين 2 × 2 $= 0\mathbf{i} - (-9.5)\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$

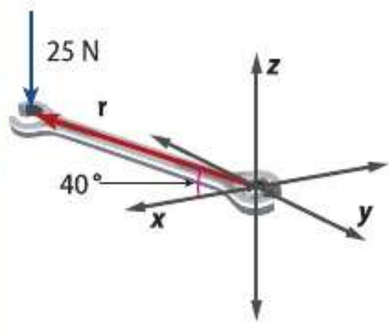
الصورة المُركّبة $= \langle 0, 9.5, 0 \rangle$

الخطوة 4 جـــد مقدار متجه العزم واتّجاهه. الصورة المُركّبة لمتجه العزم $\langle 0, 9.5, 0 \rangle$ تخبرنا بأن مقدار المتجه يساوي حوالي 9.5 N-m ويوازي محور y الموجب كما هو موضح.



تمرين موجّه

4. **إصلاح السيارات** جـــد مقدار العزم إذا بذل عبد الكريم نفس مقدار القوة على نهاية ذراع التوجيه لأسفل مباشرةً عندما يكوّن ذراع التوجيه زاوية °40 أعلى محور x الموجب كما هو موضح في الشكل 7.5.3.



الشكل 7.5.3



مهنة من الحياة اليومية

ميكانيكي السيارات يقوم ميكانيكي السيارات بأعمال الإصلاح التي تتنوع بين المشاكل الميكانيكية البسيطة وحتى عمليات الإصلاح عالية المستوى المتعلقة بالتكنولوجيا. ولا بد أن يتمتع بمهارات جيدة لحل المشكلات والموهبة الميكانيكية والمعرفة بالإلكترونيات والرياضيات. ويكمل الكثير من الميكانيكيين برنامج تدريب مهني في تكنولوجيا خدمات السيارات.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

يُستخدم ناتج الضرب المتجهي لمتجهين في تطبيقات هندسية كثيرة. وأحد هذه التطبيقات أن مقدار $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ يمثل مساحة متوازي الأضلاع الذي يحتوى على الضلعان المتجاوران $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ (الشكل 7.5.4).

مثال 5 مساحة متوازي أضلاع في الفضاء

جـد مساحة متوازي الأضلاع الذي يحتوي على الضلعين المتجاورين $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ و $\mathbf{v} = \mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$.

الخطوة 1 جـد $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$.

$\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}, \mathbf{v} = \mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 4 & -3 \\ 1 & -5 & 3 \end{vmatrix}$$

محدد مصفوفة 3×3

$$= \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 3 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -5 \end{vmatrix}\mathbf{k}$$

محددا المصفوفتين 2×2

$$= -3\mathbf{i} - 9\mathbf{j} - 14\mathbf{k}$$

الخطوة 2 جـد مقدار $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$.

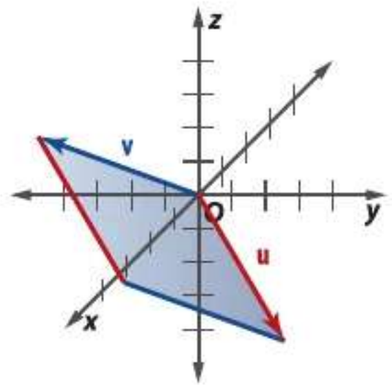
مقدار متجه في الفضاء

$$|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = \sqrt{(-3)^2 + (-9)^2 + (-14)^2}$$

بسّط.

$$= \sqrt{286} \text{ تقريبًا } = 16.9$$

تساوي مساحة متوازي الأضلاع في الشكل 7.5.4 حوالي 16.9 وحدة مربعة.



الشكل 7.5.4

تمرين موجّه

5. جـد مساحة متوازي الأضلاع الذي يحتوي على الضلعين المتجاورين $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ و $\mathbf{u} = -6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$

تحدد ثلاثة متجهات تقع في مستويات مختلفة ولكن تتشارك في نفس نقطة بداية الأضلاع المتجاورة **لمتوازي المستطيلات**. متعدد الوجوه بوجوه جميعها متوازيات المستطيلات (الشكل 7.5.5).
وتمثل القيمة المطلقة **لناتج الضرب القياسي لثلاثة متجهات** لهذه المتجهات حجم متوازي مستطيلات.

المفهوم الأساسي الضرب القياسي لثلاثة متجهات

إذا كان $\mathbf{t} = t_1\mathbf{i} + t_2\mathbf{j} + t_3\mathbf{k}, \mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}, \mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$. فيتم الحصول على ناتج الضرب القياسي لثلاثة متجهات من خلال

$$\mathbf{t} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \begin{vmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

نصيحة دراسية

الضرب القياسي لثلاثة متجهات لاحظ أنه لإيجاد ناتج الضرب القياسي لثلاثة متجهات $\mathbf{t}$ و $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ ستحتاج إلى كتابة المحدد الذي يمثل $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ واستبدال الصف الأعلى بالقيم للمتجه $\mathbf{t}$.

مثال 6 حجم متوازي المستطيلات

جـد حجم متوازي المستطيلات الذي يحتوي على الأضلاع المتجاورة $\mathbf{t} = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ و $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ و $\mathbf{v} = \mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$.

$\mathbf{t} = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$
$\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$
$\mathbf{v} = \mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$

$$\mathbf{t} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \begin{vmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 1 & -5 & 3 \end{vmatrix}$$

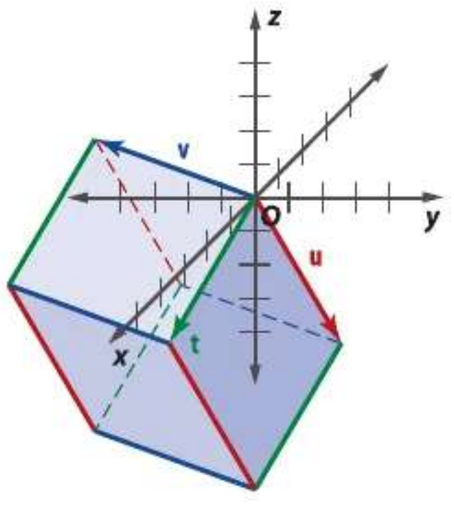
محدد مصفوفة 3×3

$$= \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 3 \end{vmatrix}(4) - \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}(-2) + \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -5 \end{vmatrix}(-2)$$

بسّط.

$$= -12 + 18 + 28 = 34$$

حجم متوازي المستطيلات الموضح في الشكل 7.5.5 يساوي $|\mathbf{t} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})|$ أو 34 وحدة مكعبة.



الشكل 7.5.5

تمرين موجّه

6. جـد حجم متوازي المستطيلات الذي يحتوي على الأضلاع المتجاورة $\mathbf{t} = 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$ و $\mathbf{u} = -6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ و $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف

تمارين

جـــد ناتج الضرب النقطي لـــ u و v. ثمّ حدّد ما إذا كان u و v متعامدين. (مثال 1)

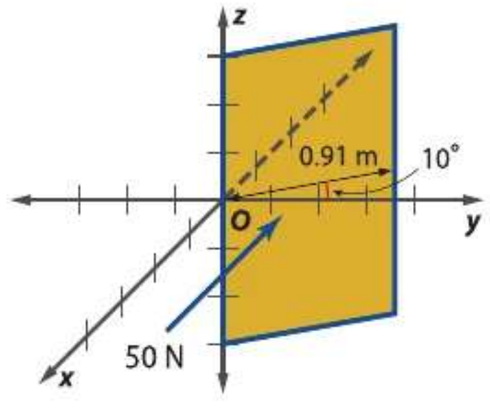
1. $\mathbf{u} = \langle 3, -9, 6 \rangle, \mathbf{v} = \langle -8, 2, 7 \rangle$
2. $\mathbf{u} = \langle 5, 0, -4 \rangle, \mathbf{v} = \langle 6, -1, 4 \rangle$
3. $\mathbf{u} = \langle 2, -8, -7 \rangle, \mathbf{v} = \langle 5, 9, -7 \rangle$
4. $\mathbf{u} = \langle -7, -3, 1 \rangle, \mathbf{v} = \langle -4, 5, -13 \rangle$
5. $\mathbf{u} = \langle 11, 4, -2 \rangle, \mathbf{v} = \langle -1, 3, 8 \rangle$
6. $\mathbf{u} = 6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}, \mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$
7. $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - 10\mathbf{j} + \mathbf{k}, \mathbf{v} = 7\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$
8. $\mathbf{u} = 9\mathbf{i} - 9\mathbf{j} + 6\mathbf{k}, \mathbf{v} = 6\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$
9. **الكيمياء** يحتوي أحد جزيئات المياه، التي تكون فيها ذرة الأكسجين عند نقطة الأصل، على ذرة هيدروجين عند $\langle 55.5, 55.5, -55.5 \rangle$ بينما تقع ذرة الهيدروجين الثانية عند $\langle -55.5, -55.5, -55.5 \rangle$. حدد زاوية الربط بين المتجهات المتكونة من روابط الأكسجين والهيدروجين. (مثال 2)

جـــد الزاوية θ بين المتجهين u و v مع التقريب لأقرب جزء من عشرة من الدرجة. (مثال 2)

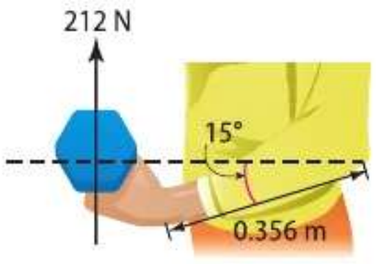
10. $\mathbf{u} = \langle 3, -2, 2 \rangle, \mathbf{v} = \langle 1, 4, -7 \rangle$
11. $\mathbf{u} = \langle 6, -5, 1 \rangle, \mathbf{v} = \langle -8, -9, 5 \rangle$
12. $\mathbf{u} = \langle -8, 1, 12 \rangle, \mathbf{v} = \langle -6, 4, 2 \rangle$
13. $\mathbf{u} = \langle 10, 0, -8 \rangle, \mathbf{v} = \langle 3, -1, -12 \rangle$
14. $\mathbf{u} = -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 9\mathbf{k}, \mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 10\mathbf{k}$
15. $\mathbf{u} = -6\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}, \mathbf{v} = -4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$

جـــد ناتج الضرب المتجهي لـــ u و v. ثم برهن أن $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ متعامد على كل من u و v. (مثال 3)

16. $\mathbf{u} = \langle -1, 3, 5 \rangle, \mathbf{v} = \langle 2, -6, -3 \rangle$
17. $\mathbf{u} = \langle 4, 7, -2 \rangle, \mathbf{v} = \langle -5, 9, 1 \rangle$
18. $\mathbf{u} = \langle 3, -6, 2 \rangle, \mathbf{v} = \langle 1, 5, -8 \rangle$
19. $\mathbf{u} = \langle 5, -8, 0 \rangle, \mathbf{v} = \langle -4, -2, 7 \rangle$
20. $\mathbf{u} = -2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}, \mathbf{v} = 7\mathbf{i} + \mathbf{j} - 6\mathbf{k}$
21. $\mathbf{u} = -4\mathbf{i} + \mathbf{j} + 8\mathbf{k}, \mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$
22. **المطاعم** يبذل أحد عمال المطعم قوة قدرها 50 N لفتح باب. جـــد مقدار العزم المبذول على مفصلة الباب واتجاهه. (مثال 4)



23. **رفع الأثقال** تبذل إحدى لاعبات رفع الأثقال تقوم بتمارين لعضلة الذراع الأمامية ذات الرأسين قوة قدرها 212 N لرفع ثقل رياضي. ويبلغ طول ساعد لاعبة رفع الأثقال 0.356 m وقد بدأ تمرين الذراع وكوعها منحنٍ بزاوية 15° أسفل المحور الأفقي في اتجاه محور x الموجب. (مثال 4)



a. جـــد المتجه الذي يمثل العزم المبذول على كوع لاعبة رفع الأثقال في الصورة المُركّبة.

b. جـــد مقدار العزم واتّجاهه.

جـــد مساحة متوازي المستطيلات الذي يحتوي على الضلعين المتجاورين u و v. (مثال 5)

24. $\mathbf{u} = \langle 2, -5, 3 \rangle, \mathbf{v} = \langle 4, 6, -1 \rangle$
25. $\mathbf{u} = \langle -9, 1, 2 \rangle, \mathbf{v} = \langle 6, -5, 3 \rangle$
26. $\mathbf{u} = \langle 4, 3, -1 \rangle, \mathbf{v} = \langle 7, 2, -2 \rangle$
27. $\mathbf{u} = 6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}, \mathbf{v} = 5\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 8\mathbf{k}$
28. $\mathbf{u} = \mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 8\mathbf{k}, \mathbf{v} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$
29. $\mathbf{u} = -3\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k}, \mathbf{v} = 4\mathbf{i} - \mathbf{j} + 6\mathbf{k}$

جـــد حجم متوازي المستطيلات الذي يحتوي على الأضلاع المتجاورة t و u و v. (مثال 6)

30. $\mathbf{t} = \langle -1, -9, 2 \rangle, \mathbf{u} = \langle 4, -7, -5 \rangle, \mathbf{v} = \langle 3, -2, 6 \rangle$
31. $\mathbf{t} = \langle -6, 4, -8 \rangle, \mathbf{u} = \langle -3, -1, 6 \rangle, \mathbf{v} = \langle 2, 5, -7 \rangle$
32. $\mathbf{t} = \langle 2, -3, -1 \rangle, \mathbf{u} = \langle 4, -6, 3 \rangle, \mathbf{v} = \langle -9, 5, -4 \rangle$
33. $\mathbf{t} = -4\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k}, \mathbf{u} = 5\mathbf{i} + 7\mathbf{j} - 6\mathbf{k}, \mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 5$
34. $\mathbf{t} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - 4\mathbf{k}, \mathbf{u} = -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 7\mathbf{k}, \mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$
35. $\mathbf{t} = 5\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}, \mathbf{u} = 3\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 7\mathbf{k}, \mathbf{v} = 8\mathbf{i} - \mathbf{j} + 4\mathbf{k}$

جـــد متجهًا متعامدًا على كل متجه.

36. $\langle 3, -8, 4 \rangle$
37. $\langle -1, -2, 5 \rangle$
38. $\left\langle 6, -\frac{1}{3}, -3 \right\rangle$
39. $\langle 7, 0, 8 \rangle$

إذا علمتَ v و $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$، فجـــد u.

40. $\mathbf{v} = \langle 2, -4, -6 \rangle, \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = -22$
41. $\mathbf{v} = \left\langle \frac{1}{2}, 0, 4 \right\rangle, \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \frac{31}{2}$
42. $\mathbf{v} = \langle -2, -6, -5 \rangle, \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 35$

حدد ما إذا كانت النقاط تقع على مستقيم واحد.

43. $(-1, 7, 7), (-3, 9, 11), (-5, 11, 13)$
44. $(11, 8, -1), (17, 5, -7), (8, 11, 5)$

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

حدد ما إذا كان كل زوجين من المتجهات متوازيين.

45. $\mathbf{m} = \langle 2, -10, 6 \rangle$, $\mathbf{n} = \langle 3, -15, 9 \rangle$

46. $\mathbf{a} = \langle 6, 3, -7 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle -4, -2, 3 \rangle$

47. $\mathbf{w} = \left\langle -\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, -\frac{9}{8} \right\rangle$, $\mathbf{z} = \langle -4, 2, -3 \rangle$

اكتب الصورة المُركّبة لكل متجه.

48. يقع **u** في المستوى yz ومقداره 8، ويكوّن زاوية °60 أعلى محور y الموجب.

49. يقع **v** في المستوى xy ومقداره 11، ويكوّن زاوية أعلى °30 إلى يسار محور x السالب.

إذا علمتَ المتجهات الأربعة، فحدّد ما إذا كان الشكل الرباعي *ABCD* متوازي المستطيلات أم لا. وإذا كانت الإجابة نعم، فحدد ما إذا كان مستطيل الشكل أم لا.

50. $A(3, 0, -2)$, $B(0, 4, -1)$, $C(0, 2, 5)$, $D(3, 2, 4)$

51. $A(7, 5, 5)$, $B(4, 4, 4)$, $C(4, 6, 2)$, $D(7, 7, 3)$

52. **استعراضات الطائرات** بأحد استعراضات الطائرات، انطلقت طائرتان في نفس الوقت. وقد بدأت الطائرة الأولى من الموقع $(0, -2, 0)$ ووصلت للموقع $(6, -10, 15)$ بعد ثلاث ثوان. وبدأت الطائرة الثانية من الموقع $(0, 2, 0)$ ووصلت للموقع $(6, 10, 15)$ بعد ثلاث ثوان. فهل مسار كلتا الطائرتين متوازيان؟ اشرح.

لكل من $\mathbf{u} = \langle 3, 2, -2 \rangle$ و $\mathbf{v} = \langle -4, 4, 5 \rangle$، جـد كلاً مما يلي إن أمكن.

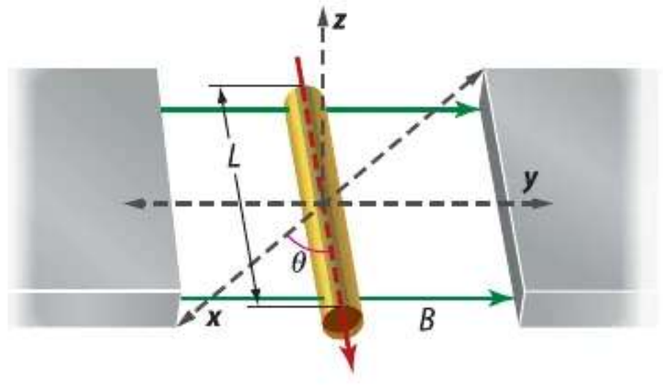
53. $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})$

54. $\mathbf{v} \times (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$

55. $\mathbf{u} \times \mathbf{u} \times \mathbf{v}$

56. $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$

57. **الكهرباء** عند وضع سلك ينقل تيارًا كهربيًا في مجال مغناطيسي، فإن القوة المبذولة على السلك بوحدات النيوتن موضحة بـ $\vec{F} = I\vec{L} \times \vec{B}$، حيث I تمثل التيار الذي يسري عبر السلك بوحدات الأمبير. و $\vec{L}$ تمثل طول المتجه على السلك الذي يشير إلى اتجاه التيار بالأمتار. و $\vec{B}$ هو القوة المبذولة على المجال المغناطيسي بوحدات التسلا. وفي الشكل أدناه، تم تدوير السلك بزاوية θ في المستوى xy.

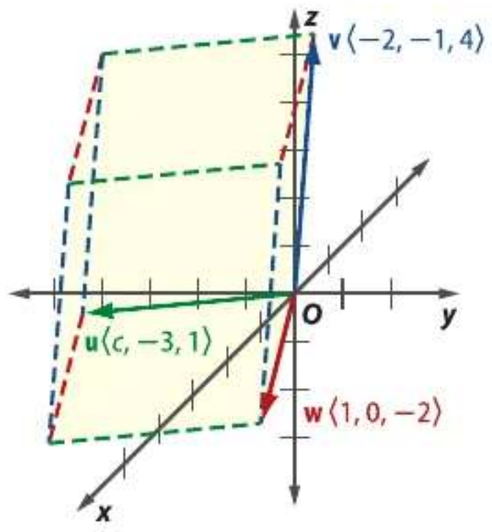


a. إذا كانت قوة المجال المغناطيسي 1.1 تسلا، فجـد مقدار القوة المبذولة على سلك في المستوى xy يبلغ طوله بالمتر 1.5 ويحمل تيارًا بشدة 25 أمبير ويكون زاوية °60.

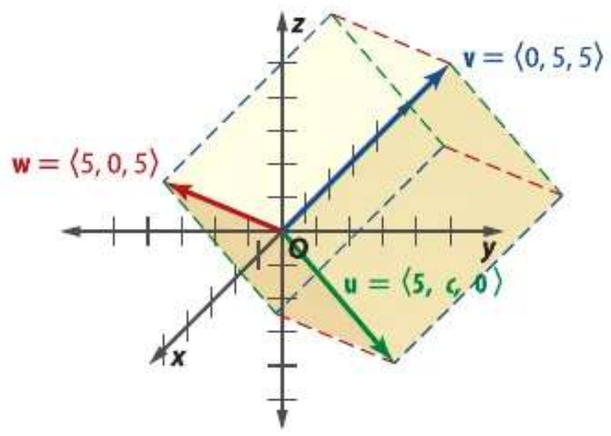
b. إذا كانت القوة المبذولة على السلك $\vec{F} = \langle 0, 0, -0.63 \rangle$، فما زاوية السلك؟

إذا علمتَ v و w وحجم متوازي المستطيلات الذي يحتوي على الأضلاع المتجاورة u و v و w، فجـد *c*.

58. $\mathbf{u} = \langle c, -3, 1 \rangle$ و $\mathbf{w} = \langle 1, 0, -2 \rangle$ و $\mathbf{v} = \langle -2, -1, 4 \rangle$
ووحدات مربعة $V = 7$

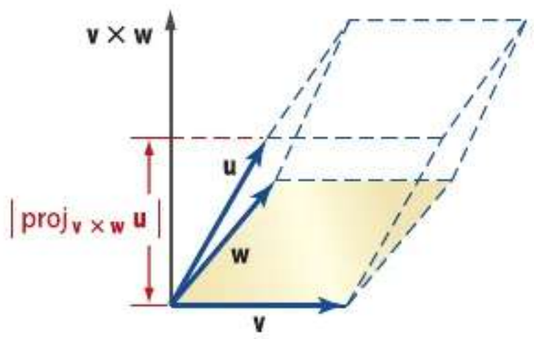


59. $\mathbf{u} = \langle 5, c, 0 \rangle$ و $\mathbf{w} = \langle 5, 0, 5 \rangle$ و $\mathbf{v} = \langle 0, 5, 5 \rangle$
و $V = 250$ وحدة مربعة



مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

60. **البرهان** تحقق من صحة قانون حجم متوازي المستطيلات. (*إرشاد*: استخدم مسقط **u** على **w** × **v**.)



61. **التبرير** حدّد ما إذا كانت العبارة التالية صحيحةً *أحيانًا* أم *دائمًا* ليست صحيحة على أم *الإطلاق*. اشرح.
لأي متجهين غير صفريين غير متوازيين في الفضاء، يوجد متجه عموديًا على كلاهما.

62. **التبرير** إذا كان **u** و **v** متوازيين في الفضاء، فكم عدد المتجهات المتعامدة على كليهما؟ اشرح.

63. **التحدي** بافتراض أن $\mathbf{u} = \langle 4, 6, c \rangle$ و $\mathbf{v} = \langle -3, -2, 5 \rangle$، جـد قيمة c التي تجعل $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = 34\mathbf{i} - 26\mathbf{j} + 10\mathbf{k}$.

64. **التبرير** اشرح السبب الذي يجعل ناتج الضرب المتجهي لا يعرّف المتجهات في النظام الإحداثي ثنائي الأبعاد.

65. **الكتابة في الرياضيات** قارن وبيّن الفرق بين طرق تحديد ما إذا كانت المتجهات في الفضاء متوازية أم متعامدة.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مراجعة شاملة

جـــد طول القطعة المستقيمة ونقطة المنتصف لها باستخدام نقطتي طرفيها المبينتين.

66. $(1, 10, 13), (-2, 22, -6)$ **67.** $(12, -1, -14), (21, 19, -23)$ **68.** $(-22, 24, -9), (10, 10, 2)$

جـــد ناتج الضرب النقطي لـــ $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$. ثمّ حدّد ما إذا كانت النقطتان $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ متعامدتين.

69. $\langle -8, -7\rangle \cdot \langle 1, 2\rangle$ **70.** $\langle -4, -6\rangle \cdot \langle 7, 5\rangle$ **71.** $\langle 6, -3\rangle \cdot \langle -3, 5\rangle$

72. مخبز يحتوي مخبز عبد العزيز على أرفف يمكنها استيعاب حتى 900 رغيف من الخبز الفرنسي والمافن. ونظرًا للتكاليف، يجب أن يكون عدد أرغفة الخبز الفرنسي المنتجة أقل من أو يساوي 300 زائد مِثلي عدد المافن المنتج. ويشار إلى أن الطلب على أرغفة الخبز الفرنسي يعادل على الأقل ضعفي الطلب على المافن. ويجني عبد العزيز ربحًا قيمته AED 3 لكل قطعة مافن مبيعة و AED 1.25 لكل رغيف خبز فرنسي. كم عدد المنتجات التي ينبغي عليه إنتاجها من كل نوع لتحقيق أقصى أرباح؟

73. فكك $\dfrac{2m + 16}{m^2 - 16}$ إلى كسور جزئية.

أثبت صحة كل متطابقة.

74. $\tan^2\theta + \cos^2\theta + \sin^2\theta = \sec^2\theta$ **75.** $\sec^2\theta \cot^2\theta - \cot^2\theta = 1$ **76.** $\tan^2\theta - \sin^2\theta = \tan^2\theta \sin^2\theta$

حُـــلّ كل مثلث. حوّل طول الضلع لأقرب جزء من عشرة، وحوّل قياس الزاوية إلى أقرب درجة.

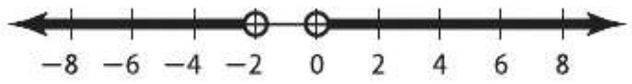
77. $a = 20, c = 24, B = 47^\circ$ **78.** $A = 25^\circ, B = 78^\circ, a = 13.7$ **79.** $a = 21.5, b = 16.7, c = 10.3$

اكتب كل مقياس درجة عشرية في صيغة DMS (درجة، دقيقة وثانية) وكل مقياس DMS في صيغة درجة عشرية لأقرب جزء من مئة.

80. -72.775° **81.** $29^\circ\ 6'\ 6''$ **82.** $132^\circ\ 18'\ 31''$

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

83. SAT/ACT يعبّر هذا التمثيل البياني عن مجموعة كافة الحلول المحتملة لأي من العبارات التالية؟

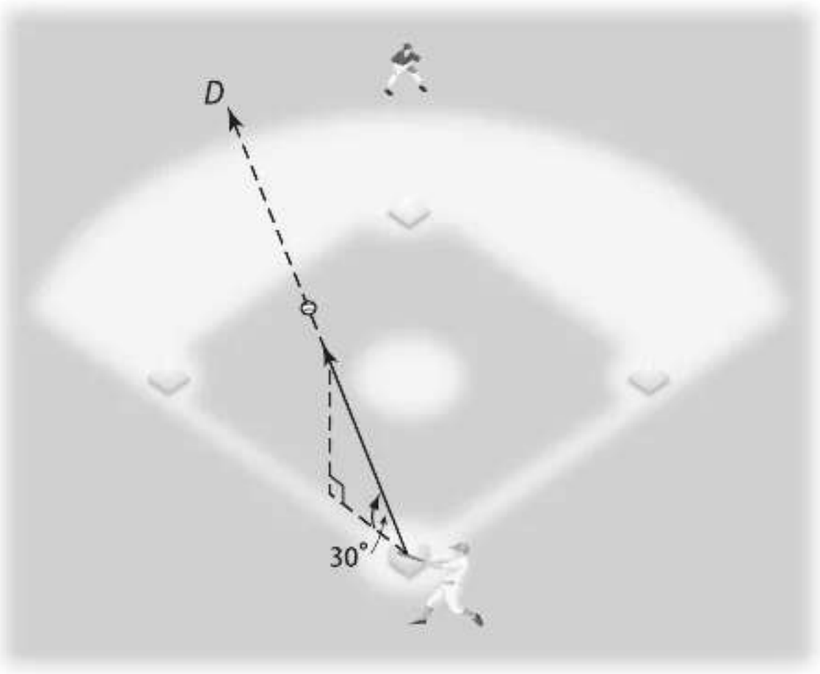


A $|x - 1| > 1$
B $|x - 1| < 1$
C $|x + 1| < 1$
D $|x + 1| > 1$

84. ما ناتج الضرب المتجهي لكلٍ من $\mathbf{u} = \langle 3, 8, 0\rangle$ و $\mathbf{v} = \langle -4, 2, 6\rangle$؟

F $48\mathbf{i} - 18\mathbf{j} + 38\mathbf{k}$
G $48\mathbf{i} - 22\mathbf{j} + 38\mathbf{k}$
H $46\mathbf{i} - 22\mathbf{j} + 38\mathbf{k}$
J $46\mathbf{i} - 18\mathbf{j} + 38\mathbf{k}$

85. إجابة حرة يضرب لاعب الكرة بزاوية 30° بالنسبة لمستوى الأرض وبسرعة ابتدائية قدرها 90 ft/s.



a. جـــد مقداري المركبتين الأفقية والرأسية للسرعة.

b. هل القيم الناتجة في الجزء **a** متجهات أو كميات عددية؟

c. افترض أنه لم يتم إمساك الكرة وأن اللاعب قذفها مبتعدة باردة عن الأرض. فما المسافة التي ستقطعها بالإجمال في الهواء؟

d. افترض أن القاعدة الرئيسة تقع في نقطة الأصل وتقع القاعدة الثانية في اتجاه الشمال. وإذا ضربت الكرة في اتجاه N20°W ثم سقطت عند النقطة D فجـــد الصورة المُركّبة لـــ $\overrightarrow{CD}$.

e. حدد متجه الوحدة لـــ $\overrightarrow{CD}$.

f. يقف لاعب الوسط عند (0, 150) عند ضربه الكرة. فلأي اتجاه ربعي يجب أن يجري لاعب الوسط ليلاقي الكرة في النقطة التي ستسقط فيها على الأرض؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

7-6 بعض خصائص الضرب النقطي والضرب المتجهي

السابق
- تعرفت إلى الضرب النقطي والضرب المتجهي.

الحالي
1. التعرف على بعض خصائص الضرب النقطي.
2. التعرف على بعض خصائص الضرب المتجهي.

لماذا؟
- نقارن قياس متجهات في الفضاء والعلاقة بين متجهين وخاصة إمكانية كونهما متوازيين أو متعامدين.



في الدرسين 7–1 و7–2، عرّفنا المتجهات في $\mathbb{R}^2$ و $\mathbb{R}^3$ ودرسنا العديد من خصائص المتجهات، بما في ذلك كيفية جمع أو طرح متجهين. وقد تبيّن أنّ نوعين من نواتج الضرب التي تتضمّن المتجهات أثبتت فائدتها: الضرب النقطي (أو ناتج الضرب القياسي) وناتج الضرب المتجهي (أو ناتج الضرب المتجهي). سنوضّح ناتجي الضرب هذين في هذا الدرس.

التعريف 7-1

يعرّف ناتج الضرب القياسي لمتّجهين $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ و $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ في V_3 بواسطة

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle \cdot \langle b_1, b_2, b_3 \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \qquad (7\text{–}1)$$

وبالمثل، يعرّف ناتج الضرب القياسي لمتّجهين في V_2 بواسطة

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \langle a_1, a_2 \rangle \cdot \langle b_1, b_2 \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

تأكد من ملاحظة أنّ ناتج الضرب النقطي لمتجهين هو كمية عددية (أي، عدد وليس متجهًا). لهذا السبب، يُطلق على ناتج الضرب النقطي اسم ناتج **الضرب القياسي**.

مثال 7-1 حساب ناتج ضرب نقطي في $\mathbb{R}^3$

احسب ناتج الضرب النقطي $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ لـ $\mathbf{a} = \langle 1, 2, 3 \rangle$ و $\mathbf{b} = \langle 5, -3, 4 \rangle$.

الحلّ لدينا

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \langle 1, 2, 3 \rangle \cdot \langle 5, -3, 4 \rangle = (1)(5) + (2)(-3) + (3)(4) = 11$$

بالتأكيد، يكون من السهل جدًا حساب نواتج الضرب النقطية، سواء كان المتجه مكتوبًا في الصورة الإحداثية أو مكتوبًا بدلالة المتجهات الأساسية المعياريّة، كما في المثال 7–2.

مثال 7-2 حساب ناتج ضرب نقطي في $\mathbb{R}^2$

جـد ناتج الضرب النقطي للمتجهَيْن $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$ و $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$.

الحلّ لدينا

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (2)(3) + (-5)(6) = 6 - 30 = -24$$

يحقّق ناتج الضرب النقطي في V_2 أو V_3 الخصائص البسيطة التالية.

النظرية 7-1

للمتّجهات $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$، وأي عدد d، لدينا ما يأتي:

(i) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$ (التبادل)
(ii) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$ (قانون التوزيع)
(iii) $(d\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = d(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot (d\mathbf{b})$
(iv) $\mathbf{0} \cdot \mathbf{a} = 0$ و
(v) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2$.

ملحوظة 7-1

بما أنّه يمكن التفكير في المتجهات في V_2 باعتبارها حالات خاصة من المتجهات في V_3 (حيث تكون المركّبة الثالثة هي صفرًا)، فإنّ جميع النتائج التي نثبتها للمتجهات V_3 تنطبق بالدرجة نفسها على المتجهات في V_2.

البرهان

نثبت (i) و (v) لـ $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V_3$. تُترك الأجزاء المتبقية كتمارين.

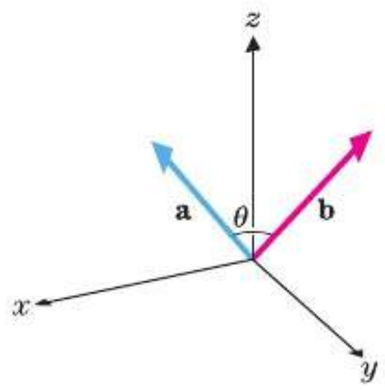
(i) لأجل $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ و $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ لدينا

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= \langle a_1, a_2, a_3 \rangle \cdot \langle b_1, b_2, b_3 \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \\ &= b_1 a_1 + b_2 a_2 + b_3 a_3 = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}\end{aligned}$$

بما أنّ ضرب الأعداد الحقيقية تبادلي.

(v) لـ $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ لدينا أنّ

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle \cdot \langle a_1, a_2, a_3 \rangle = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = |\mathbf{a}|^2$$



الشكل 7.23a
الزاوية بين متجهين

لاحظ أنّ الخصائص (i)-(iv) للنظرية 1-7 هي أيضًا خصائص ضرب الأعداد الحقيقية. لهذا السبب، نستخدم كلمة ناتج ضرب في ناتج الضرب النقطي. إلا أنّه ثمة بعض الخصائص لضرب الأعداد الحقيقية غير مشتركة مع ناتج الضرب النقطي. فعلى سبيل المثال، سنرى أنّ $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ لا تشير إلى أنّ $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ أو $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ لمتجهَيْن غير صفريين $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ في V_3، نحدّد **الزاوية** θ $(0 \le \theta \le \pi)$ **بين المتجهين** لتكون هي الزاوية الأصغر بين $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$، والتي تكوّنت من وضع نقاطهما الإبتدائية عند النقطة نفسها، على النحو المُبيّن في الشكل 7.23a.

لاحظ أنّه إذا كان $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ لهما الاتجاه نفسه، فإنّ $\theta = 0$. إذا كان $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ لهما اتجاه معاكس، فإنّ $\theta = \pi$. نقول إنّ $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ **متعامدان** (أو **عموديان**) إذا كانت $\theta = \frac{\pi}{2}$. نعتبر المتجه الصفري $\mathbf{0}$ متعامدًا على كل المتجهات. إنّ الحالة العامة مذكورة في النظرية 2-7.

انتبه!

الضرب المتجهي ينطبق تعريف الضرب المتجهي فقط على المتجهات في فضاء ثلاثي الأبعاد. ولا يعرّف الضرب المتجهي المتجهات في النظام الإحداثي ثنائي الأبعاد.

النظرية 2-7

لتكن θ هي الزاوية بين المتجهين غير الصفريين $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$. إذًا،

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \cos\theta \qquad (3.2)$$

البرهان

يجب أن نثبت النظرية لثلاث حالات منفصلة.

(i) إذا كان $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ لهما الاتجاه نفسه، فإنّ $\mathbf{b} = c\mathbf{a}$، لعدد ما $c > 0$ والزاوية بين $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ هي $\theta = 0$. يشير هذا إلى أنّ

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot (c\mathbf{a}) = c\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = c|\mathbf{a}|^2$$

علاوة على ذلك،

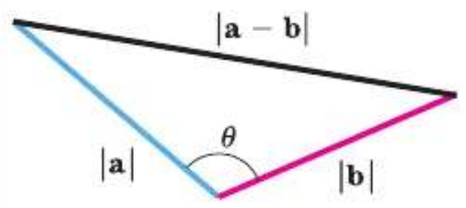
$$|\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos\theta = |\mathbf{a}||c|\,|\mathbf{a}| \cos 0 = c|\mathbf{a}|^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$$

بما أنّ $c > 0$، لدينا $|c| = c$.

(ii) إذا كان $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ لهما اتجاه معاكس، يكون البرهان مطابقًا تقريبًا للحالة (i) أعلاه، ونترك التفاصيل كتمرين.

(iii) إذا كان $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ غير متوازيين، فيكون لدينا أنّ $0 < \theta < \pi$، كما هو مبيّن في الشكل 7.23b. تذكّر أنّ قانون الـ Cosines يسمح لنا ربط أطوال أضلاع المثلثات مثل ذلك المُبيّن في الشكل 7.23b. لدينا

$$|\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2|\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos\theta \qquad (7\text{-}3)$$



الشكل 7.23b
الزاوية بين متجهين

لاحظ الآن أنّ

$$\begin{aligned}\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|^2 &= \|\langle a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3 \rangle\|^2 \\ &= (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2 \\ &= \left(a_1^2 - 2a_1 b_1 + b_1^2\right) + \left(a_2^2 - 2a_2 b_2 + b_2^2\right) + \left(a_3^2 - 2a_3 b_3 + b_3^2\right) \\ &= \left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\right) + \left(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2\right) - 2(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) \\ &= |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \qquad (7\text{-}4)\end{aligned}$$

بمساواة الجانبين الأيمنين من (7-3) و(7-4)، نحصل على (7-2)، على النحو المرغوب.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

يمكننا استخدام (2–7) لإيجاد الزاوية بين متجهين، كما في المثال 3–7.

مثال 7-3 إيجاد الزاوية بين متجهين

جِـــد الزاوية بين المتجهين $\mathbf{a} = \langle 2, 1, -3 \rangle$ و $\mathbf{b} = \langle 1, 5, 6 \rangle$.

الحلّ من (2–7)، يكون لدينا

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\ |\mathbf{b}|} = \frac{-11}{\sqrt{14}\sqrt{62}}$$

يُستنتج من ذلك أنّ (راديان) $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{-11}{\sqrt{14}\sqrt{62}}\right) \approx 1.953$ (أو حوالي $112°$)، بما أنّ $0 \le \theta \le \pi$ ويعيد معكوس cosine الزاوية في هذا المدى.

النتيجة التالية هي إستنتاج مباشر ومهم للنظرية 2–7.

النتيجة 7-1

يكون المتجهان $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ متعامدين إذا وفقط إذا كان $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$.

البرهان

أولًا، لاحظ أنّه إذا كان أي من $\mathbf{a}$ أو $\mathbf{b}$ هو المتجه الصفري، فإنّ $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ و $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ متعامدان، حيث يعتبر المتجه الصفري متعامدًا على كل المتجهات. إذا كان $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ متجهين غير صفريين وإذا كانت θ هي الزاوية بين $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$، يكون لدينا من النظرية 2–7 أنّ

$$|\mathbf{a}|\ |\mathbf{b}|\cos\theta = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$$

إذا وفقط إذا كان $\cos\theta = 0$ (بما أنّه ليس أي من $\mathbf{a}$ أو $\mathbf{b}$ هو المتجه الصفري). يحدث هذا فقط إذا كان $\theta = \frac{\pi}{2}$، والذي يكافئ وجود $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ متعامدين وما إلى ذلك، تترتب النتيجة على ذلك.

مثال 7-4 تحديد ما إذا كان متجهان متعامدين

برهن إذا كانت أزواج المتجهات الآتية متعامدة: (a) $\mathbf{a} = \langle 1, 3, -5 \rangle$ و $\mathbf{b} = \langle 2, 3, 10 \rangle$ و (b) $\mathbf{a} = \langle 4, 2, -1 \rangle$ و $\mathbf{b} = \langle 2, 3, 14 \rangle$.

الحل للجزء (a)، لدينا:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 2 + 9 - 50 = -39 \neq 0$$

لذا $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ غير متعامدين.

للجزء (b)، لدينا

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 8 + 6 - 14 = 0$$

لذا $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ متعامدين، في هذه الحالة.

توفّر لنا النتيجتان التاليتان بعض الأدوات القوية لمقارنة مقادير المتجهات.

النظرية 7-3 (متباينة كوشي–شفارز)

لأي متجهين $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$،

$$|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \le |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \qquad (7–5)$$

البرهان

إذا كان أي من $\mathbf{a}$ أو $\mathbf{b}$ هو المتجه الصفري، فلاحظ أنّ (5–7) يخبرنا ببساطة أنّ $0 \le 0$، وهو أمر صحيح بالتأكيد. من ناحية أخرى، إذا لم يكن أي من $\mathbf{a}$ أو $\mathbf{b}$ هو المتجه الصفري، يكون لدينا من (2–7) أنّ

$$|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}||\cos\theta| \le |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$$

بما أنّ $|\cos\theta| \le 1$ لجميع قيم θ.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

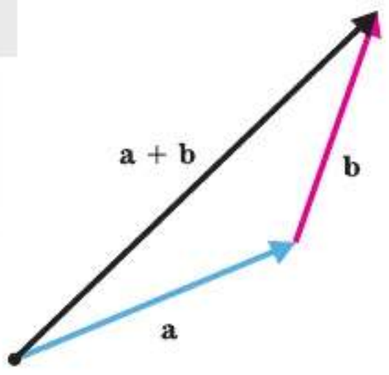
تتمثّل إحدى فوائد متباينة كوشي–شفارز بأنّها تتيح لنا إثبات النتيجة التالية كنتيجة مفيدة للغاية. إذا كنت ستتعلم متباينة واحدة فقط في حياتك، فهذه هي المتباينة التي سترغب في تعلمها على الأرجح.

النظرية 7-4 (متباينة المثلث)

لأي متجهين $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$،

$$|\mathbf{a}+\mathbf{b}| \le |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}| \qquad (7\text{–}6)$$

قبل أن نثبت النظرية، لنأخذ المثلث المكوَّن من المتجهات $\mathbf{a}$ و$\mathbf{b}$ و $\mathbf{a}+\mathbf{b}$، المُبيّن في الشكل 7.24. لاحظ أنّ متباينة المثلث تقول إنّ طول المتجه $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ لا يتعدى مطلقًا ناتج جمع الأطوال الإفراديّة لكلٍ من $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$.



الشكل 7.24
متباينة المثلث

البرهان

من النظرية 1–7 (i) و (ii) و (v)، لدينا

$$\begin{aligned}|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 &= (\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{a}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}\\ &= |\mathbf{a}|^2 + 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + |\mathbf{b}|^2\end{aligned}$$

من متباينة كوشي–شفارز (5–7)، لدينا $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} \le |\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}| \le |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|$ وهكذا لدينا

$$\begin{aligned}|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 &= |\mathbf{a}|^2 + 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + |\mathbf{b}|^2\\ &\le |\mathbf{a}|^2 + 2\,|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| + |\mathbf{b}|^2 = (|\mathbf{a}|+|\mathbf{b}|)^2\end{aligned}$$

بأخذ الجذر التربيعي يعطينا: (6–7).

المركّبات والمساقط لنأخذ الحالة التي يمثّل فيها متجه ما قوة. في كثير من الأحيان، يكون من غير العملي بذل قوة في الاتجاه الذي تريده. على سبيل المثال، عند سحب عربة طفل، نبذل قوة في الاتجاه الذي يحدّده موقع المقبض، وليس في اتجاه الحركة. (انظر الشكل 7.25). يتمثّل السؤال المهم بما إذا كان هنالك قوة لها مقدار أصغر يمكن بذلها في اتجاه مختلف وتظل تنتج التأثير نفسه على العربة. لاحظ أنّ الجزء الأفقي للقوة هو الذي يساهم بشكل مباشر وكبير في حركة العربة. (يعمل الجزء الرأسي للقوة فقط على تقليل الاحتكاك). ونحن نفكّر الآن في كيفية حساب مركّبة القوة هذه.



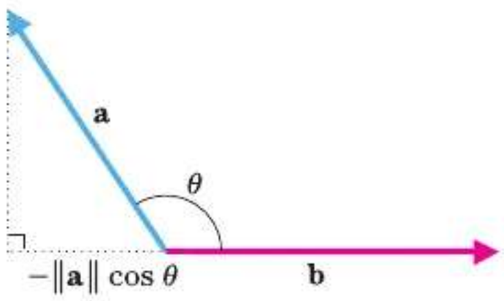
الشكل 7.25
سحب عربة

لأي متجهَيْ موقع غير صفريين $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$، لتكن θ هي الزاوية بين المتجهين. إذا أسقطنا قطعة مستقيمة عمودية من نقطة نهاية $\mathbf{a}$ على المستقيم الذي يحتوي على المتجه $\mathbf{b}$، يكون لدينا من حساب المثلثات الابتدائي أنّ طول قاعدة المثلث (في الحالة حيث $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) يُحدّد بالعلاقة $|\mathbf{a}|\cos\theta$. (انظر الشكل 7.26a).

اليوم في الرياضيات

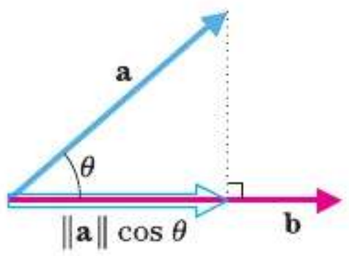
لين هاو (- 1959)
فيزيائية وعالمة رياضيات دنماركية اشتهرت بتجاربها لإبطاء وإيقاف الضوء. على الرغم من أنّه لم يكن لأي من والديها أي خلفية في العلوم أو الرياضيات، إلا أنها تقول إنها كطالبة، "أحببت الرياضيات. بل إنّني كنت أفضل إجراء العمليات الرياضية على الذهاب الى السينما في تلك الأيام. ولكن بعد فترة اكتشف ميكانيكا الكم، وقد أصبحت عاشقةً لها منذ ذلك الحين ... تُرجع هاو الفضل في نجاحها إلى ثقافة الإنجاز العلمي. "لقد كنت محظوظة بكوني دنماركية. فالدنمارك لها تراث علمي عريق تضمّن نيلز بور العظيم.... في الدنمارك، يولى اهتمام كبير بالفيزياء على نطاق واسع من الأشخاص العاديين إلى جانب العلماء ويساهم الأشخاص العاديون في مجال الفيزياء...

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education



الشكل 7.26b

$\text{comp}_{\mathbf{b}}\,\mathbf{a}$، لكل $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$



الشكل 7.26a

$\text{comp}_{\mathbf{b}}\,\mathbf{a}$، لكل $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

من ناحية أخرى، لاحظ أنّه إذا كانت $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$، فإنّ طول القاعدة معطى بالعلاقة $-|\mathbf{a}|\cos\theta$. (انظر الشكل 7.26b). في كلتا الحالتين، نشير إلى $|\mathbf{a}|\cos\theta$ بأنّه **مركبة a** على طول **b**، ويُرمز لها بـ $\text{comp}_{\mathbf{b}}\,\mathbf{a}$. باستخدام (2–7)، لاحظ أنّه يمكننا إعادة كتابة هذا في صورة

$$\text{comp}_{\mathbf{b}}\,\mathbf{a} = |\mathbf{a}|\cos\theta = \frac{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}{|\mathbf{b}|}\cos\theta$$

$$= \frac{1}{|\mathbf{b}|}\,|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos\theta = \frac{1}{|\mathbf{b}|}\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$$

$$\boxed{\text{comp}_{\mathbf{b}}\,\mathbf{a} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}.} \qquad (7\text{–}3)$$

أو

لاحظ أنّ $\text{comp}_{\mathbf{b}}\,\mathbf{a}$ هي عدد قياسي وأنّنا نقسم ناتج الضرب النقطي في (7–7) على $|\mathbf{b}|$ وليس على $|\mathbf{a}|$. تتمثّل إحدى الطرائق التي يمكننا من خلالها الإبقاء على ذلك مباشرًا بإدراك أنّ المركّبات في الشكلين 7.26a و7.26b تعتمد على مدى طول **a** ولكن ليس على مدى طول **b**. يمكننا النظر إلى (7–7) كناتج الضرب النقطي للمتجه **a** ومتجه وحدة في اتجاه **b**، يعطى بالعلاقة $\frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}$.

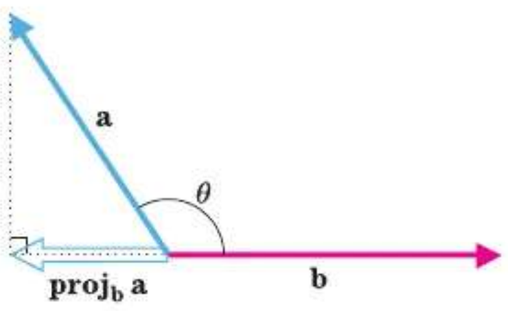
مرةً أخرى، فكّر في الحالة التي يمثّل فيها المتجه **a** قوة ما. بدلًا من مركّبة **a** على طول **b**، غالبًا ما نهتم بالعثور على متجه قوة موازٍ لـ **b** وله المركّبة نفسها على طول **b** مثل **a**. نُطلق على هذا المتجه مسقط **a** على **b**، ويُرمز له بـ $\text{proj}_{\mathbf{b}}\,\mathbf{a}$، على النحو المبيّن في الشكلين 7.27a و7.27b. وبما أنّ المسقط له مقدار $|\text{comp}_{\mathbf{b}}\,\mathbf{a}|$ ونقاط في اتجاه **b**، حيث $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ وعكس اتجاه **b**، حيث $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$، لدينا من (7–7) أنّ

$$\text{proj}_{\mathbf{b}}\,\mathbf{a} = (\text{comp}_{\mathbf{b}}\,\mathbf{a})\frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} = \left(\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}\right)\frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}$$

$$\boxed{\text{proj}_{\mathbf{b}}\,\mathbf{a} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2}\mathbf{b}} \qquad (7\text{–}8)$$

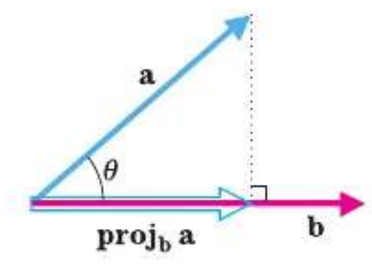
أو

حيث $\frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}$ يمثّل متجه وحدة في اتجاه **b**.



الشكل 7.27b

$\text{proj}_{\mathbf{b}}\,\mathbf{a}$، لكل $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$



الشكل 7.27a

$\text{proj}_{\mathbf{b}}\,\mathbf{a}$، لكل $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

نوضّح في المثال 5–7 عملية إيجاد المركّبات والمساقط.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 7-5 إيجاد المركّبات والمساقط

لكل $\mathbf{a} = \langle 2, 3 \rangle$ و $\mathbf{b} = \langle -1, 5 \rangle$، جِـد مركّبة $\mathbf{a}$ على طول $\mathbf{b}$ ومسقط $\mathbf{a}$ على $\mathbf{b}$.

الحلّ من (7-7)، لدينا

$$\text{comp}_{\mathbf{b}}\,\mathbf{a} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} = \frac{\langle 2,3\rangle\cdot\langle -1,5\rangle}{|\langle -1,5\rangle|} = \frac{-2+15}{\sqrt{1+5^2}} = \frac{13}{\sqrt{26}}$$

وبشكلٍ مماثل، من (7-8)، لدينا

$$\text{proj}_{\mathbf{b}}\,\mathbf{a} = \left(\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}\right)\frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} = \left(\frac{13}{\sqrt{26}}\right)\frac{\langle -1,5\rangle}{\sqrt{26}}$$

$$= \frac{13}{26}\langle -1,5\rangle = \frac{1}{2}\langle -1,5\rangle = \left\langle -\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right\rangle$$

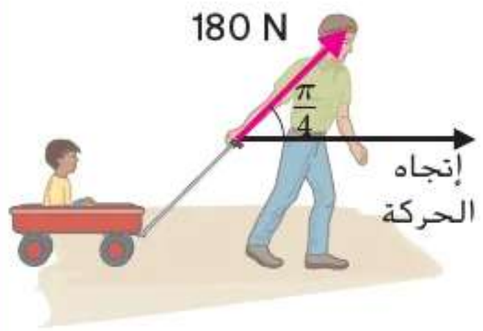
تنبيه

كن حذرًا للتمييز بين مسقط $\mathbf{a}$ على $\mathbf{b}$ (متجه) ومركّبة $\mathbf{a}$ على طول $\mathbf{b}$ (عدد قياسي). ومن الشائع جدًا أن يتم الخلط بين الاثنين.

ونتركها كتمرين لنثبت أنّ، بشكلٍ عام، $\text{comp}_{\mathbf{b}}\,\mathbf{a} \neq \text{comp}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b}$ و $\text{proj}_{\mathbf{b}}\,\mathbf{a} \neq \text{proj}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b}$. إنّ أحد أسباب الحاجة إلى التفكير في مركّبات متجه في اتجاه معيّن هو لحساب الشغل، كما نرى في المثال 6-7.

مثال 7-6 حساب الشغل

أنت تبذل قوة ثابتة تبلغ 180 N في اتجاه مقبض العربة المصوَّرة في الشكل 7.28. إذا كان المقبض يصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{4}$ مع خط الأفق ويمكنك سحب العربة على سطح مستو مسافة 1.6 km (1,609 m)، جِـد الشغل المبذول.



الشكل 7.28
سحب عربة

الحلّ تذكّر أولًا من مناقشتنا في الوحدة 5 أنّه، إذا بذلنا قوة ثابتة F لمسافة d، فإنّ الشغل المبذول يُحدّد بالعلاقة $W = Fd$. في هذه الحالة، لا يتم إعطاء القوة المبذولة في اتجاه الحركة. إلا أنّه بما أنّ مقدار القوة معطى، فإنّ متجه القوة يجب أن يكون

$$\mathbf{F} = 180\left\langle \cos\frac{\pi}{4}, \sin\frac{\pi}{4}\right\rangle = 180\left\langle \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\rangle = \langle 90\sqrt{2}, 90\sqrt{2}\rangle$$

تكون القوة المبذولة في اتجاه الحركة هي ببساطة مركّبة القوة على طول المتجه $\mathbf{i}$ (أي أنّها المركّبة الأفقية لـ $\mathbf{F}$) أو $90\sqrt{2}$. يكون الشغل المبذول عندئذٍ

$$W = Fd = 90\sqrt{2}\,(1609) \approx 203{,}632 \text{ نيوتن–متر}$$

وعمومًا، إذا حرّكت قوة ثابتة $\mathbf{F}$ جسمًا ما من النقطة P إلى النقطة Q، فإنّنا نشير إلى المتجه $\mathbf{d} = \overrightarrow{PQ}$ **بمتجه الإنتقال**. ويكون الشغل المبذول ناتج ضرب مركّبة $\mathbf{F}$ على طول d والمسافة:

$$W = \text{comp}_{\mathbf{d}}\,\mathbf{F}|\mathbf{d}|$$

$$= \frac{\mathbf{F}\cdot\mathbf{d}}{|\mathbf{d}|}\cdot|\mathbf{d}| = \mathbf{F}\cdot\mathbf{d}$$

يعطينا ذلك هنا

$W = \langle 90\sqrt{2}, 90\sqrt{2}\rangle \cdot \langle 1609, 0\rangle = 90\sqrt{2}\,(1609)$ كالسابق.

ما وراء الصيغ يعطينا ناتج الضرب النقطي طريقة مختصرة لحساب المركّبات والمساقط. فناتج الضرب النقطي يختبر ما إذا كانت المتجهات العمودية تُستنتج بشكلٍ مباشر من هذا التفسير. عمومًا، يتم استخدام المركّبات والمساقط لعزل جزء معيّن من مسألة أكبر لتحليلها بشكلٍ مفصّل. إنّ هذا النوع من تحليل المركّبات إلى عناصر بسيطة هو أمر أساسي في كثير من العلوم الحديثة.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

التعريف 7-2

نعرّف **المحدّد** لمصفوفة 2×2 من الأعداد الحقيقية بواسطة

$$\underbrace{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}_{\text{مصفوفة } 2 \times 2} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

مثال 7-7 حساب محدّد 2×2

جـــد قيمة المحدّد $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$.

الحلّ من (**7-2**)، يكون لدينا

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = (1)(4) - (2)(3) = -2$$

التعريف 7-3

نعرّف **المحدّد** لمصفوفة 3×3 من الأعداد الحقيقية كتوفيقة من ثلاثة محدّدات 2×2، كما يأتي:

$$\underbrace{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}}_{\text{مصفوفة } 3 \times 3} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \qquad (7\text{-}3)$$

نشير إلى المعادلة (7.3) باعتبارها **امتدادًا** للمحدّد **على طول الصف الأول**. لاحظ أنّ مضاعفات كل من المحدّدات 2×2 هي مدخلات الصف الأول من المصفوفة 3×3. يكون كل محدّد 2×2 عبارة عن المحدّد الذي تحصل عليه إذا حذفت الصف والعمود اللذين يقع بهما العدد المناظر للضرب. أي أنّه، للحد الأول، العدد المناظر للضرب a_1 ونوجد المحدّد 2×2 بحذف الصف الأول والعمود الأول من المصفوفة 3×3 :

$$\begin{vmatrix} \cancel{a_1} & \cancel{a_2} & \cancel{a_3} \\ \cancel{b_1} & b_2 & b_3 \\ \cancel{c_1} & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

وبالمثل، نوجد المحدّد الثاني 2×2 بحذف الصف الأول والعمود الثاني من المحدّد 3×3 :

$$\begin{vmatrix} \cancel{a_1} & \cancel{a_2} & \cancel{a_3} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}$$

تأكد من ملاحظة إشارة السالب أمام هذا الحد. أخيرًا، نوجد المحدّد الثالث بحذف الصف الأول والعمود الثالث من المحدّد 3×3 :

$$\begin{vmatrix} \cancel{a_1} & \cancel{a_2} & \cancel{a_3} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

مثال 7-8 إيجاد قيمة محدّد 3×3

جـــد قيمة المحدّد $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -3 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix}$.

الحل بالتوسّع على طول الصف الأول، يكون لدينا:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -3 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix} = (1)\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} - (2)\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + (4)\begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= (1)[(3)(5) - (1)(-2)] - (2)[(-3)(5) - (1)(3)] + (4)[(-3)(-2) - (3)(3)]$$

$$= 41$$

نستخدم مفهوم المحدّد كأداة ملائمة لتعريف ناتج الضرب المتجهي، على النحو التالي.

التعريف 7-4

للمتّجهين $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ و $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ في V_3، نعرّف **ناتج الضرب المتجهي** (أو **ناتج الضرب المتجهي**) لـ $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ بأنّه

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\mathbf{k} \qquad (7.3)$$

لاحظ أنّ $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ هو أيضًا متجه في V_3. لحساب $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$، يجب عليك كتابة مركّبات $\mathbf{a}$ في الصف الثاني ومركّبات $\mathbf{b}$ في الصف الثالث؛ فالترتيب مهم! لاحظ أيضًا أنّه عندما استخدمنا مفهوم المحدّد، لا يكون المحدّد 3×3 المشار إليه في (7.4) محدّدًا في الحقيقة، بالطريقة التي عرفناها بها، نظرًا إلى أنّ المدخلات في الصف الأول تكون متجهات بدلًا من الأعداد. ومع ذلك، نجد أنّ هذا الاستغلال الطفيف للمفهوم مناسب لحساب نواتج الضرب المتجهي ونحن نستخدمه بشكل روتيني.

McGraw-Hill Education مؤسسة لصالح محفوظة © والتأليف الطبع حقوق

المثال 7-9 حساب ناتج الضرب المتجهي

احسب $\langle 1, 2, 3\rangle \times \langle 4, 5, 6\rangle$.

الحل من (4.3)، يكون لدينا

$$\langle 1, 2, 3\rangle \times \langle 4, 5, 6\rangle = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}\mathbf{k}$$

$$= -3\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 3\mathbf{k} = \langle -3, 6, -3\rangle$$

النظرية 7-5

لأي متجه $\mathbf{a} \in V_3$، $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$ و $\mathbf{a} \times \mathbf{0} = \mathbf{0}$.

البرهان

نثبت أول نتيجة من هاتين النتيجتين. ونترك الثانية كتمرين. لـ $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$، يكون لدينا من (7.3) أنّ

$$\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_1 & a_3 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}\mathbf{k}$$

$$= (a_2a_3 - a_3a_2)\mathbf{i} - (a_1a_3 - a_3a_1)\mathbf{j} + (a_1a_2 - a_2a_1)\mathbf{k} = \mathbf{0}$$

لنلقِ نظرة سريعة على نتيجة المثال 7.3. وجدنا هناك أنّ

$$\langle 1, 2, 3\rangle \times \langle 4, 5, 6\rangle = \langle -3, 6, -3\rangle$$

ثمة شيء مثير للاهتمام بشكل أكبر يمكن ملاحظته هنا :

$$\langle 1, 2, 3\rangle \cdot \langle -3, 6, -3\rangle = 0$$

و $\langle 4, 5, 6\rangle \cdot \langle -3, 6, -3\rangle = 0$

أي أنّ، كلًا من $\langle 1, 2, 3\rangle$ و $\langle 4, 5, 6\rangle$ متعامدان على ناتج الضرب المتجهي لهما. وكما اتضح، فإنّ هذا صحيح بشكل عام، كما نرى في النظرية 7.6.

النظرية 7-6

لأي متجهين $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ في V_3، $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ هو متّجه متعامد على كلٍ من $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$.

البرهان

تذكّر أنّ أي متجهين يكونان متعامدين فقط إذا كان ناتج ضربهما النقطي يساوي صفرًا. والآن، باستخدام (4.3)، يكون لدينا

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \langle a_1, a_2, a_3\rangle \cdot \left[\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\mathbf{k}\right]$$

$$= a_1\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$= a_1[a_2b_3 - a_3b_2] - a_2[a_1b_3 - a_3b_1] + a_3[a_1b_2 - a_2b_1]$$

$$= a_1a_2b_3 - a_1a_3b_2 - a_1a_2b_3 + a_2a_3b_1 + a_1a_3b_2 - a_2a_3b_1$$

$$= 0$$

ومنه $\mathbf{a}$ و $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ متعامدين. ونترك توضيح أنّ $\mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0$ أيضًا كتمرين.

ملحوظة 7-

يتم تعريف ناتج الضرب المتجهي فقط للمتجهات في V_3. لا توجد عملية مناظرة للمتجهات في V_2.

الملاحظات التاريخية

جوزيه ويلارد جيبس (1839 - 1903)

عالم الفيزياء والرياضيات الأمريكي الذي قام بتعريف وتسمية ناتج الضرب النقطي وناتج الضرب المتجهي. فبعد تخرّجه من جامعة ييل، نشر جيبس مقالات مهمة في الديناميكا الحرارية والميكانيكا الإحصائية ونظرية الكهرومغناطيسية للضوء. كما قد استخدم جيبس المتجهات لتحديد مدار مذنب من ثلاث مشاهدات فقط. وساهم نظام المتجهات الذي وضعه جيبس، والذي أُنتج في الأصل كملاحظات مطبوعة لطلابه، في تبسيط النظام الأصلي الذي وضعه هاملتون إلى حد كبير. وقد كان جيبس محبوبًا ولكنه لم يكن مشهورًا في حياته. حيث كتب أحد كتاب السير عن جيبس قائلًا إنّ ..عظمة إنجازاته الفكرية لن تلقي بظلالها أبدًا على جمال ومهابة حياته...

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

لاحظ أنّه، للمتّجهين غير الصفريين وغير المتوازيين **a** و **b**، بما أن $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ متعامدًا على كل من **a** و **b**، فإنّه يكون أيضًا متعامدًا على كل متجه يقع في المستوى الذي يحتوي على **a** و **b**.
(نقول أيضًا إنّ $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ متعامد على المستوى، في هذه الحالة). ولكن، عند إعطاء مستوى، من أي جانب من المستوى يشير $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ ؟ يمكننا الحصول على فكرة عن طريق حساب بعض نواتج الضرب المتجهي البسيطة.
لاحظ أنّ

$$\mathbf{i}\times\mathbf{j}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\1&0&0\\0&1&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&0\\1&0\end{vmatrix}\mathbf{i}-\begin{vmatrix}1&0\\0&0\end{vmatrix}\mathbf{j}+\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}\mathbf{k}=\mathbf{k}$$

$$\mathbf{j}\times\mathbf{k}=\mathbf{i}$$

وبالمثل،

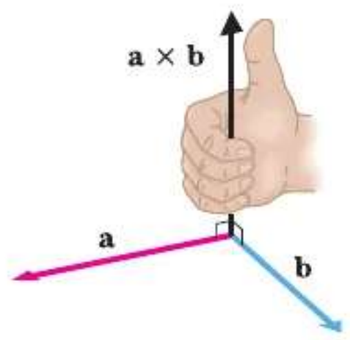
هذه رسوم توضيحية **لقاعدة اليد اليمنى**: إذا قمت بمحاذاة أصابع يدك اليمنى على طول المتجه **a** وثني أصابعك في اتجاه الدوران المحوري من **a** باتجاه **b** (عبر زاوية أصغر من 180°)، فسيشير إبهامك في اتجاه $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$، كما في الشكل 7.29a. والآن، باتباع قاعدة اليد اليمنى، سيشير $\mathbf{b}\times\mathbf{a}$ في الاتجاه المعاكس لـ $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$.
(انظر الشكل 7.29b). بالأخص، لاحظ أنّ

$$\mathbf{j}\times\mathbf{i}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\0&1&0\\1&0&0\end{vmatrix}=-\mathbf{k}$$

نترك توضيح ما يلي كتمرين

$$\mathbf{k}\times\mathbf{j}=-\mathbf{i}\ ,\ \mathbf{j}\times\mathbf{k}=\mathbf{i}$$

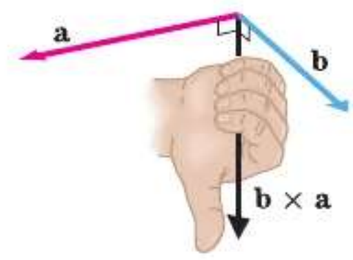
$$\mathbf{i}\times\mathbf{k}=-\mathbf{j}\ ,\ \mathbf{k}\times\mathbf{i}=\mathbf{j}$$



الشكل 7.29a
$\mathbf{a}\times\mathbf{b}$

خذ وقتك للتفكير في قاعدة اليد اليمنى لكلٍ من نواتج الضرب المتجهي هذه.

$$\mathbf{i}\times\mathbf{j}=\mathbf{k}\neq-\mathbf{k}=\mathbf{j}\times\mathbf{i}$$



الشكل 7.29b
$\mathbf{b}\times\mathbf{a}$

يوجد العديد من الأشياء الأخرى غير المعتادة لملاحظتها هنا. لاحظ أنّ

$$(\mathbf{i}\times\mathbf{j})\times\mathbf{j}=\mathbf{k}\times\mathbf{j}=-\mathbf{i}$$

في حين أنّ،

$$\mathbf{i}\times(\mathbf{j}\times\mathbf{j})=\mathbf{i}\times\mathbf{0}=\mathbf{0}$$

مما يوضّح أنّ ناتج الضرب المتجهي ليس تبادليًا. علاوة على ذلك، لاحظ أنّ

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}\neq\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$$

ما يعني أن ناتج الضرب المتجهي لا يحقّق خاصيّة التجميع. أي أنّه، بوجه عام، بما أنّ ناتج الضرب المتجهي لا يتبع العديد من القواعد التي قد تتوقع أن يستوفيها أي ناتج ضرب، فقد تسأل عن القواعد التي يستوفيها ناتج الضرب المتجهي. نلخّص ذلك في النظرية 7.7.

النظرية 7-7

لأي متجهات **a** و **b** و **c** في V_3 وأي عدد d، لدينا ما يأتي:

(i) $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=-(\mathbf{b}\times\mathbf{a})$ (غير تبادلية)

(ii) $(d\mathbf{a})\times\mathbf{b}=d(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=\mathbf{a}\times(d\mathbf{b})$

(iii) $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{a}\times\mathbf{c}$ (قانون التوزيع)

(iv) $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\times\mathbf{c}=\mathbf{a}\times\mathbf{c}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}$ (قانون التوزيع)

(v) $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}$ (ناتج ضرب ثلاثي قياسي ومتّجه) و

(vi) $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b}-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}$ (ناتج الضرب الثلاثي للمتجه).

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

البرهان

نثبت الجزأين (i) و(iii) فقط. نترك الأجزاء المتبقية كتمارين.

(i) للمتّجهين $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ و $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$، نجد استنادًا إلى (7.10) أنّ

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

$$= -\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} + \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ a_1 & a_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} - \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} \mathbf{k} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a})$$

بما أنّ التبديل بين صفين في مصفوفة 2×2 (أو في مصفوفة 3×3، لهذه المسألة) يغيّر إشارة المحدّد الخاص بها.

(iii) للمتّجه $\mathbf{c} = \langle c_1, c_2, c_3 \rangle$، لدينا

$$\mathbf{b} + \mathbf{c} = \langle b_1 + c_1, b_2 + c_2, b_3 + c_3 \rangle$$

وهكذا فإنّ

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 + c_1 & b_2 + c_2 & b_3 + c_3 \end{vmatrix}$$

بالنظر فقط إلى المركّبة $\mathbf{i}$ لدينا

$$\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 + c_2 & b_3 + c_3 \end{vmatrix} = a_2(b_3 + c_3) - a_3(b_2 + c_2)$$

$$= (a_2 b_3 - a_3 b_2) + (a_2 c_3 - a_3 c_2)$$

$$= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

والذي ينبغي عليك ملاحظته أيضًا هو المركّبة $\mathbf{i}$ لـ $\mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$. على غرار ذلك، يمكنك أن تبيّن أنّ المركّبتين $\mathbf{j}$ و $\mathbf{k}$ تتطابقان أيضًا، الأمر الذي يثبت النتيجة.

تذكّر دائمًا أنّه يتم تحديد المتجهات بعاملين: المقدار والاتجاه. وقد سبق أن وضّحنا أنّ $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ متعامد على كل من $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$. في النظرية 7.8، ندلي بتصريح عام (ومفيد للغاية) بشأن $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$.

النظرية 7-8

للمتجهين غير الصفريين $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ في V_3، إذا كانت θ هي الزاوية بين $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ $(0 \le \theta \le \pi)$، فإنّ

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| \, |\mathbf{b}| \sin\theta \tag{7.8}$$

البرهان

من (7.3)، نحصل على

$$\begin{aligned} |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 &= [a_2 b_3 - a_3 b_2]^2 + [a_1 b_3 - a_3 b_1]^2 + [a_1 b_2 - a_2 b_1]^2 \\ &= a_2^2 b_3^2 - 2a_2 a_3 b_2 b_3 + a_3^2 b_2^2 + a_1^2 b_3^2 - 2a_1 a_3 b_1 b_3 + a_3^2 b_1^2 \\ &\quad + a_1^2 b_2^2 - 2a_1 a_2 b_1 b_2 + a_2^2 b_1^2 \\ &= \left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2\right) - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2 \\ &= |\mathbf{a}|^2 \, |\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 \\ &= |\mathbf{a}|^2 \, |\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{a}|^2 \, |\mathbf{b}|^2 \cos^2\theta \\ &= |\mathbf{a}|^2 \, |\mathbf{b}|^2 (1 - \cos^2\theta) \\ &= |\mathbf{a}|^2 \, |\mathbf{b}|^2 \sin^2\theta \end{aligned}$$

بأخذ الجذور التربيعية، نحصل على

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| \, |\mathbf{b}| \sin\theta$$

بما أنّ $\sin\theta \ge 0$، حيث $0 \le \theta \le \pi$.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التوصيف التالي للمتجهات المتوازية هو نتيجة مباشرة للنظرية 4.4.

النتيجة 7-2

يُعَدّ متجهان غير صفريين $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V_3$ متوازيين إذا وفقط إذا $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$.

البرهان

تذكّر أنّ $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ يكونان متوازيين إذا وفقط إذا كانت الزاوية θ بينهما تساوي إما 0 أو π. في كلتا الحالتين، $\sin\theta = 0$ وهكذا، من النظرية 4.4،

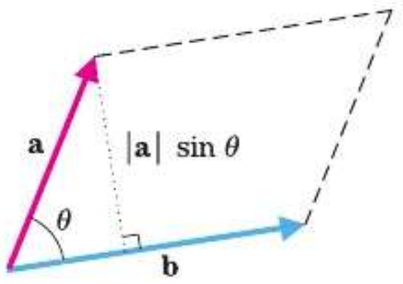
$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}|\ |\mathbf{b}|\ \sin\theta = |\mathbf{a}|\ |\mathbf{b}|\ (0) = 0$$

ثم نستنتج بعد ذلك حقيقة أنّ المتجه الوحيد الذي له المقدار صفر هو المتجه الصفري.

تقدّم لنا أيضًا النظرية 4.4 التفسير الهندسي التالي المثير للاهتمام لناتج الضرب المتجهي. لأي متجهين غير صفريين $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$، إذا كان $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ غير متوازيين، فإنّهما يشكلان ضلعين متجاورين لمتوازي أضلاع، كما نرى في الشكل 7.30. لاحظ أنّ مساحة متوازي الأضلاع تُحدَّد من ناتج ضرب القاعدة والارتفاع. لدينا

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{b}|\ |\mathbf{a}|\ \sin\theta = \tag{7.5}$$

من النظرية 4.4. إن مقدار ناتج الضرب المتجهي لمتجهين يعطي مساحة متوازي الأضلاع الذي له ضلعان متجاوران يشكلهما المتجهان.



الشكل 7.30
متوازي الأضلاع

المثال 7-10 إيجاد مساحة متوازي أضلاع باستخدام ناتج الضرب المتجهي

جد مساحة متوازي الأضلاع الذي له ضلعان متجاوران يشكلهما المتجهان $\mathbf{a} = \langle 1, 2, 3\rangle$ و $\mathbf{b} = \langle 4, 5, 6\rangle$.

الحل أولًا، لاحظ أنّ

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \mathbf{i}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = \langle -3, 6, -3\rangle$$

من (4.5)، تعطى مساحة متوازي الأضلاع بالعلاقة

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\langle -3, 6, -3\rangle| = \sqrt{54} \approx 7.348$$

يمكننا أيضًا استخدام النظرية 4.4 لإيجاد البعد من نقطة إلى مستقيم في $\mathbb{R}^3$، كما يلي. لتكن d تمثّل البعد من النقطة Q إلى المستقيم المار بالنقطتين P و R. من حساب المثلثات الأولي، لدينا

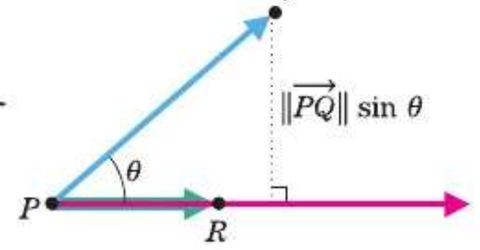
$$d = |\overrightarrow{PQ}|\ \sin\theta$$

حيث θ هي الزاوية بين $\overrightarrow{PQ}$ و $\overrightarrow{PR}$. (انظر الشكل 7.31). من (4.4)، يكون لدينا

$$|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}| = |\overrightarrow{PQ}|\ |\overrightarrow{PR}|\ \sin\theta = |\overrightarrow{PR}|\ (d)$$

بحل هذا لـ d، نحصل على

$$d = \frac{|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}|}{|\overrightarrow{PR}|} \tag{4.6}$$



الشكل 7.31
البعد من نقطة إلى مستقيم

المثال 7-11 إيجاد البعد من نقطة إلى مستقيم

جد البعد من النقطة $Q(1, 2, 1)$ إلى المستقيم المار بالنقطتين $P(2, 1, -3)$ و $R(2, -1, 3)$

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

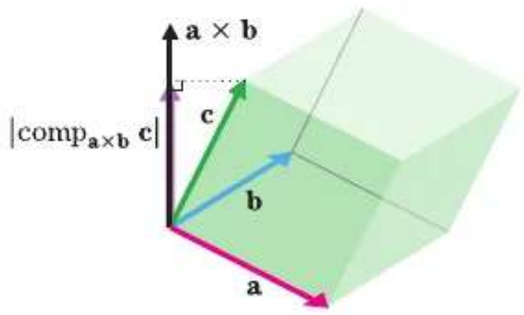
الحل أولًا، متجهات الموقع المناظرة لـ $\overrightarrow{PQ}$ و $\overrightarrow{PR}$ هي

$$\overrightarrow{PQ} = \langle -1, 1, 4 \rangle \quad \text{و} \quad \overrightarrow{PR} = \langle 0, -2, 6 \rangle$$

$$\langle -1, 1, 4 \rangle \times \langle 0, -2, 6 \rangle = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 6 \end{vmatrix} = \langle 14, 6, 2 \rangle \text{ و}$$

يكون لدينا عندئذٍ من (4.6) أنّ

$$d = \frac{|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}|}{|\overrightarrow{PR}|} = \frac{|\langle 14, 6, 2 \rangle|}{|\langle 0, -2, 6 \rangle|} = \frac{\sqrt{236}}{\sqrt{40}} \approx 2.429$$



الشكل 7.32
متوازي المستطيلات المكوّن من المتجهات **a** و **b** و **c**

لأي ثلاثة متجهات غير صفرية ولا تقع في المستوى نفسه **a** و **b** و **c** (أي، ثلاثة متجهات لا تقع في مستوى واحد)، فكّر في متوازي المستطيلات الذي يتكوّن باستخدام المتجهات كثلاث حواف متجاورة. (انظر الشكل 7.32). تذكّر أنّ حجم مثل هذا المجسم يُعطى بالعلاقة

$$\text{الحجم} = (\text{مساحة القاعدة})(\text{ارتفاع})$$

وعلاوة على ذلك، بما أنّ ضلعين متجاورين للقاعدة مشكّلان من المتجهين **a** و **b**، فنحن نعلم أنّ مساحة القاعدة تُعطى بالصيغة $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$. بالإشارة إلى الشكل 7.32، لاحظ أنّ الارتفاع يُعطى بالعلاقة

$$|\text{comp}_{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}\, \mathbf{c}| = \frac{|\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})|}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|}$$

من (3.7). يكون حجم متوازي المستطيلات عندئذٍ

$$\text{الحجم} = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| \, \frac{|\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})|}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|} = |\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})|$$

يُسمى العدد القياسي $\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ **ناتج ضرب ثلاثي قياسي متّجه** للمتجهات **a** و **b** و **c**. وقد اتضح أنّه يمكننا إيجاد قيمة هذا الناتج بحساب محدّد واحد، على النحو التالي. لاحظ أنّه حيث $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$، $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ و $\mathbf{c} = \langle c_1, c_2, c_3 \rangle$، يكون لدينا

$$\begin{aligned} \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) &= \mathbf{c} \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \\ &= \langle c_1, c_2, c_3 \rangle \cdot \left(\mathbf{i} \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right) \\ &= c_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \end{aligned} \tag{7.7}$$

المثال 7-12 إيجاد حجم متوازي مستطيلات باستخدام ناتج الضرب المتجهي

جـد قيمة حجم متوازي المستطيلات الذي له ثلاث حواف متجاورة تشكلها المتجهات $\mathbf{a} = \langle 1, 2, 3 \rangle$، $\mathbf{b} = \langle 4, 5, 6 \rangle$ و $\mathbf{c} = \langle 7, 8, 0 \rangle$.

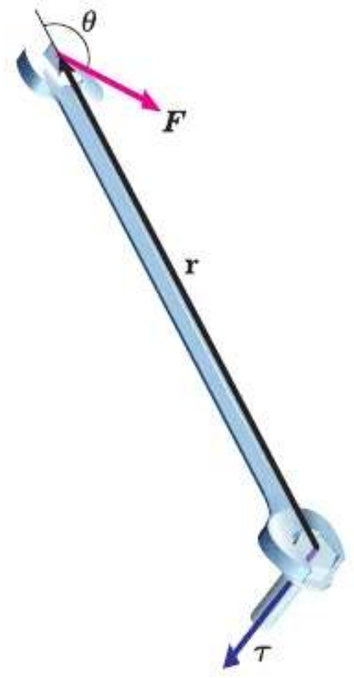
الحل أولًا، لاحظ أنّ الحجم $= |\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})|$. ومن (4.7)، يكون لدينا

$$\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \begin{vmatrix} 7 & 8 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 7 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} - 8 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$$
$$= 7(-3) - 8(-6) = 27$$

لذا، يكون حجم متوازي المستطيلات $= |\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})| = |27| = 27$.

لنأخذ حركة مفتاح ربط على مسمار، كما هو موضّح في الشكل 7.33. لإحكام ربط المسمار، نبذل قوة **F** على طرف المقبض، في الاتجاه المشار إليه في الشكل. تشكل هذه القوة **عزمًا** $\boldsymbol{\tau}$ يعمل على طول محور المسمار، يلفه لتثبيته بإحكام. لاحظ أنّ العزم يعمل في الاتجاه

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education



الشكل 11.33
العزم، τ

المتعامد على كل من $\mathbf{F}$ ومتجه الموقع $\mathbf{r}$ للمقبض كما هو مشار إليه في الشكل 7.33. وفي الواقع، باستخدام قاعدة اليد اليمنى، يعمل العزم في اتجاه $\mathbf{r}\times\mathbf{F}$ نفسه ويعرّف علماء الفيزياء متجه العزم بأنّه

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r}\times\mathbf{F}$$

وبالأخص، يشير ذلك إلى إنّ

$$|\boldsymbol{\tau}| = |\mathbf{r}\times\mathbf{F}| = |\mathbf{r}|\ |\mathbf{F}|\ \sin\theta \qquad (7.8)$$

من (7.4). يمكن أن نتوصّل إلى عدة ملاحظات استنادًا إلى ذلك. أولًا، يشير إلى أنّه كلما ابتعدنا عن محور المسمار الذي تُبذل عليه القوة (أي كلما كان $|\mathbf{r}|$ أكبر)، زاد مقدار العزم. إذًا، ينتج عن مفتاح الربط الأطول عزم أكبر، لقدر معطى من القوة المبذولة. ثانيًا، لاحظ أنّ $\sin\theta$ يزداد إلى أقصى قيمة عندما يكون $\theta = \frac{\pi}{2}$، لذا فمن (7.8) يزداد مقدار العزم إلى أقصى قيمة عندما يكون $\theta = \frac{\pi}{2}$ (عندما يكون متجه القوة $\mathbf{F}$ متعامدًا مع متجه الموقع $\mathbf{r}$). إذا كنت قد استخدمت مفتاح ربط من قبل، سيتماشى ذلك تمامًا مع تجربتك.

المثال 7-13 إيجاد قيمة العزم المبذول من مفتاح ربط

إذا بذلت قوة بمقدار 110 N على طرف مفتاح ربط طوله 40 cm، بزاوية $\frac{\pi}{3}$ مع مفتاح الربط، جد مقدار العزم المبذول على المسمار. ما مقدار العزم الأقصى الذي يمكن أن تنتجه قوة تبلغ 110 N مبذولة عند هذه النقطة؟

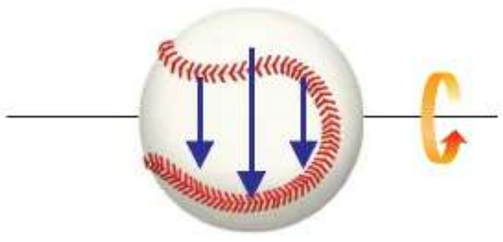
الحل من (7.8)، لدينا

$$|\boldsymbol{\tau}| = |\mathbf{r}|\ |\mathbf{F}|\ \sin\theta = (40)\,110\,\sin\frac{\pi}{3}$$

$$= (4400)\,\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 3810.5 \text{ سنتيمتر–نيوتن}$$

علاوة على ذلك، يتم الحصول على القيمة القصوى للعزم عندما تكون الزاوية بين مفتاح الربط ومتجه القوة هي $\frac{\pi}{2}$. سيمنحنا هذا قيمة قصوى للعزم تبلغ

$$|\boldsymbol{\tau}| = |\mathbf{r}|\ |\mathbf{F}|\ \sin\theta = (40)\,110\,(1) = 4400 \text{ سنتيمتر–نيوتن}$$

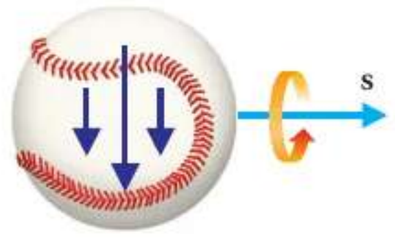


الشكل 7.34
دوران كرة

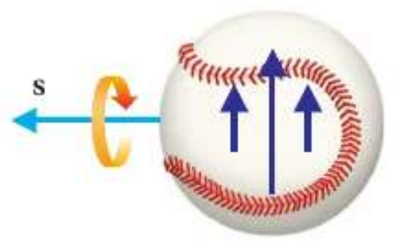
في العديد من الألعاب الرياضية، تتأثر الحركة بشكلٍ جزئي على الأقل بحركة دوران كرة. فعلى سبيل المثال، في لعبة البيسبول، يجب أن يتعامل لاعبو المضارب باحتراف مع الكرات المنحرفة التي يقذفها رماة الكرات وفي لعبة الغولف، يحاول اللاعبون السيطرة على رمياتهم المنحرفة الخاطئة. في التنس، يسدّد اللاعبون كرات بدوران علوي، بينما في كرة السلة، يحسّن اللاعبون تسديداتهم باستخدام الدوران الخلفي. والقائمة تطول. تُعَدّ تلك جميعها أمثلة على **قوة ماغنوس**، التي نصفها أدناه.

على فرض أنّ كرة تدور بسرعة زاوية متّجهة ω، تُقاس بالراديان في الثانية (أي، ω هو معدل تغيّر زاوية الدوران المحوري). تدور الكرة حول محور، كما هو موضّح في الشكل 7.34. نعرّف متجه الدوران $\mathbf{s}$ بأنّ له المقدار ω واتجاه مواز لمحور الدوران. نستخدم قاعدة اليد اليمنى للتمييز بين الاتجاهين الموازيين لمحور الدوران: قم بلف أصابع يدك اليمنى حول الكرة في اتجاه الدوران، وسيشير إبهامك إلى الاتجاه الصحيح. يتم توضيح مثالين في الشكلين 7.35a و 7.35b. تتسبب الكرة عند تحركها في اضطراب الهواء الذي تنطلق خلاله، مما ينشئ قوة ماغنوس $\mathbf{F}_m$ تؤثر على الكرة. لكرة تتحرك بسرعة متجهة $\mathbf{v}$ ومتجه دوران $\mathbf{s}$، تُعطى $\mathbf{F}_m$ بالعلاقة

$$\mathbf{F}_m = c(\mathbf{s}\times\mathbf{v})$$



الشكل 7.35a
الدوران الخلفي

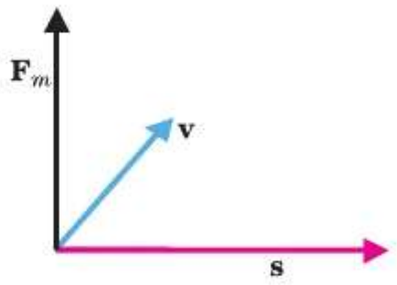


الشكل 7.35b
الدوران العلوي

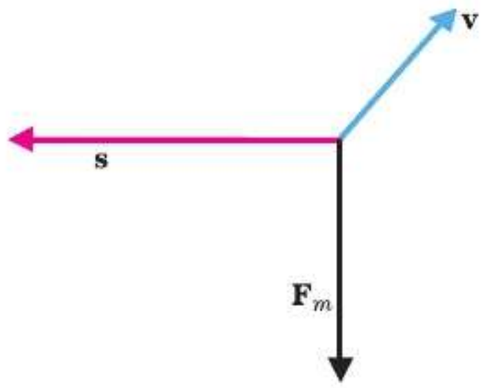
لعدد ثابت موجب c. على فرض أنّ الكرتين في الشكل 7.35a والشكل 7.35b تتحركان باتجاه الصفحة وبعيدًا عنك. باستخدام المصطلحات الرياضية المعتادة، يكون للكرة الأولى دوران خلفي وللكرة الثانية دوران علوي. باستخدام قاعدة اليد اليمنى، نلاحظ أنّ قوة ماغنوس التي تؤثر على الكرة الأولى تعمل في اتجاه الصعود، كما هو مبيّن في الشكل 11.36a. يشير ذلك إلى أنّ الدوران الخلفي (على سبيل المثال، على تسديدة كرة السلة أو ضربة غولف) ينتج قوة في اتجاه الصعود تساعد الكرة على الهبوط بهدوء أكثر من كرة من دون دوران. وبالمثل، فإنّ قوة ماغنوس التي تؤثر على الكرة الثانية تعمل في اتجاه الهبوط (انظر الشكل 11.36b)، بحيث ينتج الدوران العلوي (على سبيل المثال، على ضربة كرة تنس أو تسديد كرة بيسبول) قوة هبوط تتسبّب في سقوط الكرة على

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الأرض بسرعة أكبر من كرة من دون دوران.



الشكل 7.36a
قوة ماغنوس لكرة بدوران خلفي



الشكل 7.36b
قوة ماغنوس لكرة بدوران علوي

المثال 7-14 إيجاد اتجاه قوة ماغنوس

تتحرك الكرتان الموضّحتان في الشكلين 7.37a و 7.37b باتجاه الصفحة وبعيدًا عنك بدوران كما هو مشار إليه. تمثّل الكرة الأولى كرة منحرفة يرميها رامي كرة بيسبول بيده اليمنى، في حين تمثّل الكرة الثانية تسديدة لاعب غولف باليد اليمنى. حدّد اتجاه قوة ماغنوس وناقش التأثيرات على الكرة.

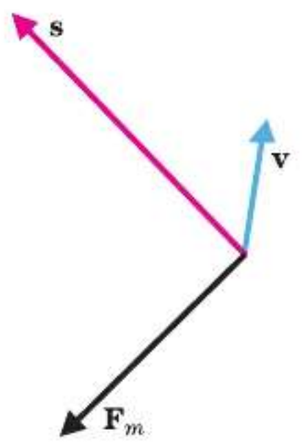
الحل للكرة الأولى، لاحظ أنّ متجه الدوران يشير إلى الأعلى وإلى اليسار، بحيث يشير $\mathbf{s} \times \mathbf{v}$ إلى أسفل وإلى اليسار كما هو مبيّن في الشكل 7.38a. ستنحني مثل هذه الكرة إلى اليسار وتسقط أسرع من الكرة التي لا تدور، مما يجعل ضربها أكثر صعوبة. للكرة الثانية، يشير متجه الدوران لأسفل وإلى اليمين، لذا فإنّ $\mathbf{s} \times \mathbf{v}$ يشير للأعلى وإلى اليمين. سوف تتحرك مثل هذه الكرة إلى اليمين (..بانحراف..) وتستغرق في الهواء مدة أطول من كرة لا تدور. (انظر الشكل 7.38b).



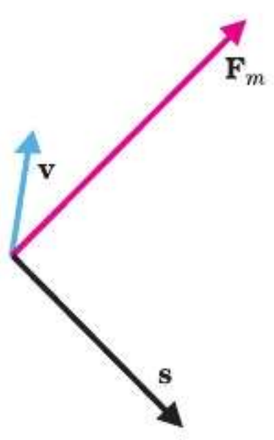
الشكل 7.37a
كرة منحرفة مسددة باليد اليمنى



الشكل 7.37b
ضربة غولف باليد اليمنى



الشكل 7.38a
قوة ماغنوس لكرة منحرفة مسددة باليد اليمنى



الشكل 7.38b
قوة ماغنوس لضربة غولف باليد اليمنى

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تمارين كتابية

1. اشرح كتابيًا سبب كون متباينة المثلث صحيحة.
2. يُسمى ناتج الضرب النقطي «ناتج ضرب» لأن الخصائص المذكورة في النظرية 1–7 صحيحة في ما يتعلق بضرب الأعداد الحقيقية. ينطوي اثنان من الخصائص الأخرى لضرب الأعداد الحقيقية على تحليل العوامل: (1) إذا كان $ab = ac\ (a \neq 0)$، فإنّ $b = c$ و(2) إذا كان $ab = 0$، فإنّ $a = 0$ أو $b = 0$. ناقش مدى صحة هذه الخصائص في ما يتعلق بناتج الضرب النقطي.
3. لفهم أهمية متجهات الوحدة وتحديد التبسيط في القوانين لإيجاد الزاوية بين متجهين ولإيجاد مركّب المتجه، إذا كانت المتجهات هي متجهات وحدة. ثمة أيضًا فائدة نظرية لاستخدام متجهات الوحدة. مقارنة عدد من المتجهات في اتجاه معيّن بعدد من متجهات الوحدة في ذلك الاتجاه. (لهذا السبب، يُطلق على متجهات الوحدة في بعض الأحيان اسم **متجهات الاتجاه**.)
4. من المهم فهم سبب حساب الشغل باستخدام مركّبة القوة في اتجاه الحركة فقط. على فرض أنّك تدفع بابًا لتغلقه. إذا كنت تدفع حافة الباب مباشرةً في اتجاه مفصلات الباب، فهل تنجز أي شيء مفيد؟ في هذه الحالة، يكون الشغل المبذول صفرًا. إذا غيّرت الزاوية التي تدفع بها بشكلٍ بسيط جدًا، فماذا يحدث؟ كلما زادت الزاوية، ناقش طريقة تغيّر مركّبة القوة في اتجاه الحركة وكيفية تغيّر الشغل المبذول.

في التمارين 6-1، احسب $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$.

1. $\mathbf{a} = \langle 3, 1\rangle, \mathbf{b} = \langle 2, 4\rangle$
2. $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j}, \mathbf{b} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$
3. $\mathbf{a} = \langle 2, -1, 3\rangle, \mathbf{b} = \langle 0, 2, -4\rangle$
4. $\mathbf{a} = \langle 3, 2, 0\rangle, \mathbf{b} = \langle -2, 4, 3\rangle$
5. $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - \mathbf{k}, \mathbf{b} = 4\mathbf{j} - \mathbf{k}$
6. $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 3\mathbf{k}, \mathbf{b} = -2\mathbf{i} + \mathbf{j}$

في التمارين 10-7، احسب الزاوية بين المتجهين.

7. $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}, \mathbf{b} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$
8. $\mathbf{a} = \langle 2, 0, -2\rangle, \mathbf{b} = \langle 0, -2, 4\rangle$
9. $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 4\mathbf{k}, \mathbf{b} = -2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$
10. $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}, \mathbf{b} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{k}$

في التمارين 14-11، حدّد ما إذا كان المتجهان متعامدين.

11. $\mathbf{a} = \langle 2, -1\rangle, \mathbf{b} = \langle 2, 4\rangle$
12. $\mathbf{a} = 6\mathbf{i} + 2\mathbf{j}, \mathbf{b} = -\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$
13. $\mathbf{a} = 3\mathbf{i}, \mathbf{b} = 6\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$
14. $\mathbf{a} = \langle 4, -1, 1\rangle, \mathbf{b} = \langle 2, 4, 4\rangle$

في التمارين 18-15، (a) جِـــد متجهًا ثلاثي الأبعاد عموديًا على المتجه المعطى و (b) جِد متجهًا له الصورة $\langle a, 2, -3\rangle$ يكون عموديًا على المتجه المعطى.

15. $\langle 2, -1, 0\rangle$
16. $\langle 4, -1, 1\rangle$
17. $6\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$
18. $2\mathbf{i} - 3\mathbf{k}$

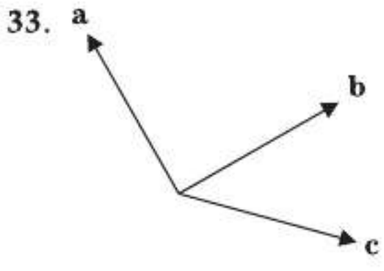
في التمارين 24-19، جِـــد $\text{comp}_{\mathbf{b}}\,\mathbf{a}$ و $\text{proj}_{\mathbf{b}}\,\mathbf{a}$.

19. $\mathbf{a} = \langle 2, 1\rangle, \mathbf{b} = \langle 3, 4\rangle$
20. $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j}, \mathbf{b} = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$
21. $\mathbf{a} = \langle 2, -1, 3\rangle, \mathbf{b} = \langle 1, 2, 2\rangle$
22. $\mathbf{a} = \langle 1, 4, 5\rangle, \mathbf{b} = \langle -2, 1, 2\rangle$
23. $\mathbf{a} = \langle 2, 0, -2\rangle, \mathbf{b} = \langle 0, -3, 4\rangle$
24. $\mathbf{a} = \langle 3, 2, 0\rangle, \mathbf{b} = \langle -2, 2, 1\rangle$

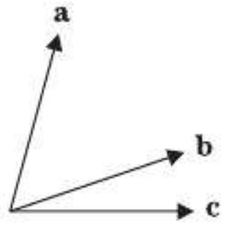
25. كرّر المثال 6–7 مع زاوية قياسها $\frac{\pi}{3}$ مع خط الأفق.
26. كرّر المثال 6–7 مع زاوية قياسها $\frac{\pi}{6}$ مع خط الأفق.
27. اشرح سبب اختلاف الإجابة على التمرينين 25 و26، على الرغم من أنّ القوة المبذولة هي نفسها. في هذا الإطار، اشرح سبب تناظر كمية أكبر من الشغل استخدام أكثر كفاءة للقوة.
28. جِـــد القوة التي تحتاج إليها في التمرين 25 لإنتاج الكمية نفسها من الشغل كما في المثال 6–7.
29. تحرّك قوة ثابتة $\langle 30, 20\rangle$ كيلوجرام جسمًا ما في خط مستقيم من النقطة $(0, 0)$ إلى النقطة $(24, 10)$. احسب الشغل المبذول.
30. تحرّك قوة ثابتة $\langle -30, 60\rangle$ كيلوجرام جسمًا ما في خط مستقيم من النقطة $(0, 0)$ إلى النقطة $(-10, 10)$. احسب الشغل المبذول.
31. حدّد ما إذا كانت كل عبارة صحيحة أم خاطئة. إذا كانت صحيحة، اشرح السبب باختصار؛ وإذا كانت خاطئة، فأعطِ مثالًا عكسيًا.
    (a) إذا كان $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$، فإنّ $\mathbf{b} = \mathbf{c}$.
    (b) إذا كان $\mathbf{b} = \mathbf{c}$، فإنّ $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$.
    (c) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2$.
    (d) إذا كان $|\mathbf{a}| > |\mathbf{b}|$ فإنّ $\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} > \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$.
    (e) إذا كان $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$ فإنّ $\mathbf{a} = \mathbf{b}$
32. لحساب $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$، حيث $\mathbf{a} = \langle 2, 5\rangle$ و $\mathbf{b} = \frac{\langle 4, 1\rangle}{\sqrt{17}}$، يمكنك أولًا أن تحسب $\langle 2, 5\rangle \cdot \langle 4, 1\rangle$ ومن ثم تقسم النتيجة (13) على $\sqrt{17}$. أي خاصية من تلك المذكورة في النظرية 1–7 هي التي يجري استخدامها؟

في التمرينين 33 و 34، استخدم الشكل لكتابة $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$، $\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$ و $\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$ في ترتيب تزايدي.

33.



34.



حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

35. إذا كان $\mathbf{a} = \langle 2, 1 \rangle$، فجِد المتجه $\mathbf{b}$ بحيث يكون $\text{comp}_{\mathbf{b}} \mathbf{a} = 1$ (a) ؛ $\text{comp}_{\mathbf{a}} \mathbf{b} = -1$ (b).

36. إذا كان $\mathbf{a} = \langle 4, -2 \rangle$، فجِد المتجه $\mathbf{b}$ بحيث يكون $\text{proj}_{\mathbf{b}} \mathbf{a} = \langle 4, 0 \rangle$ (a) ؛ $\text{proj}_{\mathbf{a}} \mathbf{b} = \langle 4, -2 \rangle$ (b).

37. جِد الزوايا في المثلث رؤوسه $(1, 2, 0)$، $(3, 0, -1)$ و $(1, 1, 1)$.

38. جِد الزوايا في الشكل الرباعي $ABCD$ رؤوسه $A = (2, 0, 1)$، $B = (2, 1, 4)$، $C = (4, -2, 5)$ و $D = (4, 0, 2)$.

39. البعد من نقطة P إلى مستقيم L هي طول القطعة المستقيمة التي تربط بين P و L بزاوية قائمة. أثبت أنّ البعد من (x_1, y_1) إلى المستقيم $ax + by + c = 0$ يساوي $\dfrac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

40. أثبت أنّ البعد بين المستقيمين $ax + by + c = 0$ و $ax + by + d = 0$ تساوي $\dfrac{|d - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

41. (a) جِد قياس الزاوية بين قطر المربع وضلع مجاور. (b) جِد قياس الزاوية بين قطر مكعب وضلع مجاور. (c) قم بتوسيع نتيجتي الجزأين (a) و (b) إلى مكعب فائق له بُعد $n \geq 4$.

42. أثبت أنّ $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 + |\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 = 2|\mathbf{a}|^2 + 2|\mathbf{b}|^2$. اذكر هذه النتيجة بدلالة خصائص متوازي الأضلاع الذي يشكّله المتجهان $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$.

تتضمّن التمارين 43–54 على متباينة كوشي–شفارز ومتباينة المثلث.

43. حسب متباينة كوشي–شفارز، $|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$. ما العلاقة التي يجب أن توجد بين $\mathbf{a}$ و$\mathbf{b}$ ليكون لدينا $|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$ ؟

44. من المتباينة المثلثية، $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$. ما هي العلاقة التي يجب أن توجد بين $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ ليكون لدينا $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$؟

45. استخدم متباينة المثلث لإثبات أنّ $|\mathbf{a} - \mathbf{b}| \geq |\mathbf{a}| - |\mathbf{b}|$.

46. للمتجهين $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$، استخدم متباينة كوشي–شفارز لإيجاد القيمة العظمى لـ $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ إذا كانت $|\mathbf{a}| = 3$ و $|\mathbf{b}| = 5$.

47. جِد صيغة لـ $\mathbf{a}$ بدلالة $\mathbf{b}$ إذا كانت $|\mathbf{a}| = 3$، $|\mathbf{b}| = 5$ و $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ هي القيمة العظمى.

48. استخدم متباينة كوشي–شفارز في n أبعاد لتثبت أن $\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) \geq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k|\right)^2$. إذا كان كل من $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ و $\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2$ متقاربان، فما الذي يمكن استنتاجه؟ طبّق النتيجة على $a_k = \frac{1}{k}$ و $b_k = \frac{1}{k^2}$.

49. أثبت أنّ $\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \leq \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} a_k^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} b_k^2$. إذا كان كل من $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ و $\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2$ متقاربان، فما الذي يمكن استنتاجه؟ طبّق النتيجة على $a_k = \frac{1}{k}$ و $b_k = \frac{1}{k^2}$. هل هذا الحد أفضل أم أسوأ من الحد المذكور في التمرين 49؟

50. (a) استخدم متباينة كوشي–شفارز في n أبعاد لتثبت أن $\sum_{k=1}^{n} |a_k| \leq \sqrt{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{1/2}$. (b) إذا كانت $p_1, p_2, \ldots, p_n$ هي أعداد غير سالبة مجموعها 1، أثبت أنّ $\sum_{k=1}^{n} p_k^2 \geq \frac{1}{n}$. (c) من بين جميع مجموعات الأعداد غير السالبة $p_1, p_2, \ldots, p_n$ التي هي مجموعها 1، جِد اختيار $p_1, p_2, \ldots, p_n$ الذي يحقق القيمة الصغرى لـ $\sum_{k=1}^{n} p_k^2$.

51. استخدم متباينة كوشي–شفارز في n أبعاد لتثبت أنّ $\sum_{k=1}^{n} |a_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^{2/3}\right)^{1/2}\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^{4/3}\right)^{1/2}$.

52. أثبت أنّ $\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 b_k^2\right) \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)$ ثم $\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k c_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} c_k^2\right)$.

53. أثبت أنّ $\sqrt{\dfrac{x+y}{x+y+z}} + \sqrt{\dfrac{y+z}{x+y+z}} + \sqrt{\dfrac{x+z}{x+y+z}} \leq \sqrt{6}$.

54. أثبت أنّ $\text{comp}_{\mathbf{c}}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \text{comp}_{\mathbf{c}} \mathbf{a} + \text{comp}_{\mathbf{c}} \mathbf{b}$ لأي متجهات غير صفرية $\mathbf{a}$ و$\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$.

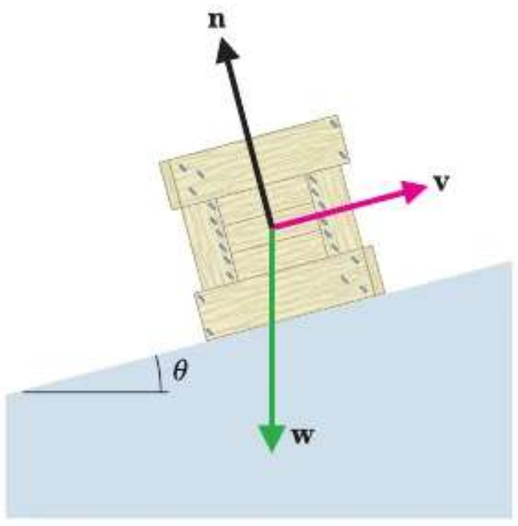
55. يعرّف **المسقط المتعامد** للمتجه $\mathbf{a}$ على طول المتجه $\mathbf{b}$ في صورة $\text{orth}_{\mathbf{b}} \mathbf{a} = \mathbf{a} - \text{proj}_{\mathbf{b}} \mathbf{a}$. ارسم صورة تبيّن المتجهات $\mathbf{a}$، $\mathbf{b}$، $\text{proj}_{\mathbf{b}} \mathbf{a}$ و $\text{orth}_{\mathbf{b}} \mathbf{a}$، واشرح ما المتعامد مع $\text{orth}_{\mathbf{b}} \mathbf{a}$.

56. اكتب المتجه المعطى في صورة $\mathbf{a} + \mathbf{b}$، حيث يكون $\mathbf{a}$ موازيًا لـ $\langle 1, 2, 3 \rangle$ و $\mathbf{b}$ عموديًا على $\langle 1, 2, 3 \rangle$، لكلٍ من (a) $\langle 3, -1, 2 \rangle$ و (b) $\langle 0, 4, 2 \rangle$.

57. في جزيء الميثان (CH_4)، تكون ذرة الكربون مُحاطة بأربع ذرات من الهيدروجين. فرضًا أنّ ذرات الهيدروجين تقع عند $(0, 0, 0)$ و$(1, 1, 0)$ و$(1, 0, 1)$ و$(0, 1, 1)$ وأنّ ذرة الكربون تقع عند $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. احسب **زاوية الرابطة**، الزاوية من ذرة هيدروجين إلى ذرة الكربون إلى ذرة هيدروجين.

58. على فرض أنّه قد تم تركيب منصة لحفار آبار نفط في اتجاه موازٍ لـ $\langle 10, 1, 5 \rangle$. (a) إذا تم بذل قوة $\langle 0, -200, 0 \rangle$ نيوتن، جِد مركّبة هذه القوة على طول المنصة. (b) كرّر مع قوة $\langle -61, -190, 13 \rangle$ نيوتن. للقوتان في الجزأين (a) و (b) المقدار نفسه تقريبًا. اشرح سبب اختلاف مركّبات القوة.

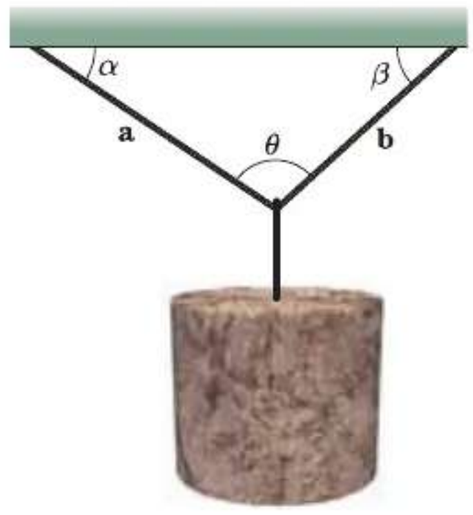
59. في المخطط أدناه، وُضِع صندوق يزن w كيلوجرام على منحدر مائل بزاوية θ أعلى خط الأفق. ويُحدّد المتجه $\mathbf{v}$ على طول المنحدر بالعلاقة $\mathbf{v} = \langle \cos\theta, \sin\theta \rangle$ والمتجه **العمودي** بالعلاقة $\mathbf{n} = \langle -\sin\theta, \cos\theta \rangle$. (a) أثبت أنّ $\mathbf{v}$ و $\mathbf{n}$ عموديان. جِد مركّبة $\mathbf{w} = \langle 0, -w \rangle$ على طول $\mathbf{v}$ ومركّبة $\mathbf{w}$ على طول $\mathbf{n}$.



McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

(b) إذا كان معامل الاحتكاك الساكن بين الصندوق والمنحدر يساوي μ_s، سينزلق الصندوق إلى أسفل على المنحدر إذا كانت مركّبة $\mathbf{w}$ على طول $\mathbf{v}$ أكبر من ناتج ضرب μ_s ومركّبة $\mathbf{w}$ على طول $\mathbf{n}$. أثبت أنّ هذا يحدث إذا كانت زاوية θ منحدرة بما يكفي حتى يكون $\theta > \tan^{-1} \mu_s$.

60. يتم دعم وزن يبلغ 500 kg بحبلين يبذلان قوتين تبلغان $\mathbf{a}\ \text{kg} = \langle -100, 200 \rangle$ و $\mathbf{b}\ \text{kg} = \langle 100, 300 \rangle$. جِـد الزاويتين α، β و θ بين الحبلين.



61. تنعطف سيارة على طريق مائل من الجانبين. فإذا كان الطريق مائلًا من الجانبين بدرجة 10°، فأثبت أنّ المتجه الموازي للطريق هو $\langle \cos 10°, \sin 10° \rangle$.

(a) إذا كانت السيارة تزن 2000 kg، فجِـد مركّبة متجه الوزن على طول متجه الطريق. توفّر مركّبة الوزن هذه قوة تساعد السيارة على الانعطاف. احسب نسبة مركّبة الوزن على طول الطريق إلى مركّبة الوزن داخل الطريق. ناقش سبب خطورة الأمر المحتمَلة إذا كانت هذه النسبة صغيرة جدًا أو كبيرة جدًا.



(b) كرّر الجزء (a) لسيارة بوزن 2500 kg على ميل بزاوية 15°.

62. يشتهر مضمار السباق في بريستول، تينيسي، بمسافته القصيرة ومنحنياته المائلة بشكل حاد. يبلغ طول المضمار بيضاوي الشكل 857 m، وتكون الزوايا مائلة بزاوية 36°. تتطلّب الحركة الدائرية بسرعة ثابتة v قوة جذب مركزية تبلغ $F = \frac{mv^2}{r}$، حيث r تشكّل نصف قطر الدائرة و m هو كتلة السيارة. لمضمار مائل بزاوية A، يوفّر وزن السيارة قوة جذب مركزية تبلغ $mg \sin A$، حيث g يكون ثابت الجاذبية. تعطينا المساواة بين الإثنين $\frac{v^2}{r} = g \sin A$. بافتراض أنّ مضمار بريستول دائري الشكل (هو ليس كذلك في الحقيقة) وباستخدام $g = 9.8\ \text{m/s}^2$، جِـد السرعة التي يدعمها ميل جانبي مضمار بريستول. وفي الحقيقة، فإنّ السيارات تُكمل الدورة بسرعة تزيد عن 190 km/h. ناقش من أين يمكن للقوة الإضافية لهذه السرعة العليا أن تأتي.

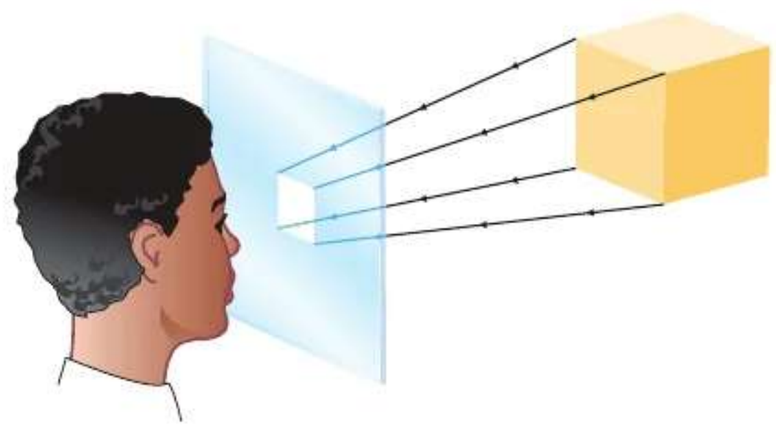
63. على فرض أنّ مؤسسة صغيرة تبيع ثلاثة منتجات. في شهر معيّن، إذا باعت 3000 وحدة من المنتج A وباعت 2000 وحدة من المنتج B وباعت 4000 وحدة من المنتج C، فإنّ **متجه المبيعات** لهذا الشهر يُعرَّف بواسطة $\mathbf{s} = \langle 3000, 2000, 4000 \rangle$. إذا كانت أسعار المنتجات A و B و C هي AED20 وAED15 وAED25، على الترتيب، فإنّ **متجه السعر** يُعرَّف بواسطة $\mathbf{p} = \langle 20, 15, 25 \rangle$ أحسب $\mathbf{s} \cdot \mathbf{p}$ وناقش كيف ترتبط العائدات الشهريّة.

64. على فرض أنّه، في دولة معيّنة، تعطى مبيعات المثلجات (بآلاف اللترات) في السنة بالمتجه $\mathbf{s} = \langle 3, 5, 12, 40, 60, 100, 120, 160, 110, 50, 10, 2 \rangle$. أي أنّه تم بيع 3000 L في يناير و 5000 L في فبراير وهكذا. في الدولة نفسها، على فرض أنّ جرائم القتل في العام تُعطى بالمتجه $\mathbf{m} = \langle 2, 0, 1, 6, 4, 8, 10, 13, 8, 2, 0, 6 \rangle$. أثبت أنّ متوسط مبيعات المثلجات في الشهر هو $\bar{s} = 56{,}000$ لتر وأنّ متوسط عدد جرائم القتل في الشهر هو $\bar{m} = 5$. احسب المتجهين $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$، حيث تساوي مركّبات $\mathbf{a}$ مركّبات $\mathbf{s}$ مع طرح وسط يبلغ 56 (بحيث يكون $\mathbf{a} = \langle -53, -51, -44, \ldots \rangle$) ومركّبات $\mathbf{b}$ تساوي مركّبات $\mathbf{m}$ مع طرح وسط يبلغ 5. يُعرَّف الارتباط بين مبيعات المثلجات وجرائم القتل بواسطة $\rho = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}$. في كثيرٍ من الأحيان، يتم تفسير الارتباط الموجب بشكلٍ غير صحيح على أنّه يعني أنّ $\mathbf{a}$ ..تسبّب.. $\mathbf{b}$. (في الواقع، ينبغي ألا يُستخدم الارتباط مطلقًا للاستدلال على علاقة سبب ونتيجة). بيّن سبب عدم دقة هذا الاستنتاج في هذه الحالة.

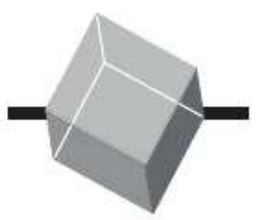
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تمارين استكشافية

1. يطوّر هذا التمرين مبدأً أساسيًا يُستخدَم في رسوم الحاسوب. أثناء الرسم، يصف فنان صورة لجسم ما على لوح زجاجي. اشرح سبب اعوجاج الرسم ما لم يبقِ الفنان اللوح الزجاجي عموديًا على خط البصر. يكون عندئذٍ هذا الرسم بمثابة مسقط للجسم على اللوح الزجاجي. ولزيادة الأمر دقةً، على فرض أنّ الفنان عند النقطة $(100, 0, 0)$ وأنّ النقطة $P_1 = (2, 1, 3)$ هي جزء من الجسم الذي يجري رسمه. جِـد المسقط $\mathbf{p}_1$ لمتجه الموقع $\langle 2, 1, 3 \rangle$ على طول متجه موقع الفنان $\langle 100, 0, 0 \rangle$. ثم جِـد المتجه $\mathbf{q}_1$ بحيث يكون $\langle 2, 1, 3 \rangle = \mathbf{p}_1 + \mathbf{q}_1$. أي من المتجهين $\mathbf{p}_1$ و $\mathbf{q}_1$ يراه الفنان في الحقيقة وأيهما يكون غير ظاهر. كرّر ذلك مع النقطة $P_2 = (-2, 1, 3)$ وجِـد المتجهين $\mathbf{p}_2$ و $\mathbf{q}_2$ بحيث يكون $\langle -2, 1, 3 \rangle = \mathbf{p}_2 + \mathbf{q}_2$. سيقوم الفنان برسم النقطتين P_1 و P_2 عند النقطة نفسها على اللوح الزجاجي. حدّد أيًا من المتجهين $\mathbf{p}_1$، $\mathbf{q}_1$، $\mathbf{p}_2$ و $\mathbf{q}_2$ يناظر هذه النقطة. من منظور الفنان، واحدة من النقطتين P_1 أو P_2 تكون مخفية وراء الأخرى. حدّد أيًا من النقطتين تكون غير ظاهرة واشرح طريقة استخدام المعلومات الموجودة في المتجهين $\mathbf{p}_1$، $\mathbf{q}_1$، $\mathbf{p}_2$ و $\mathbf{q}_2$ لتحديد النقطة غير الظاهرة.



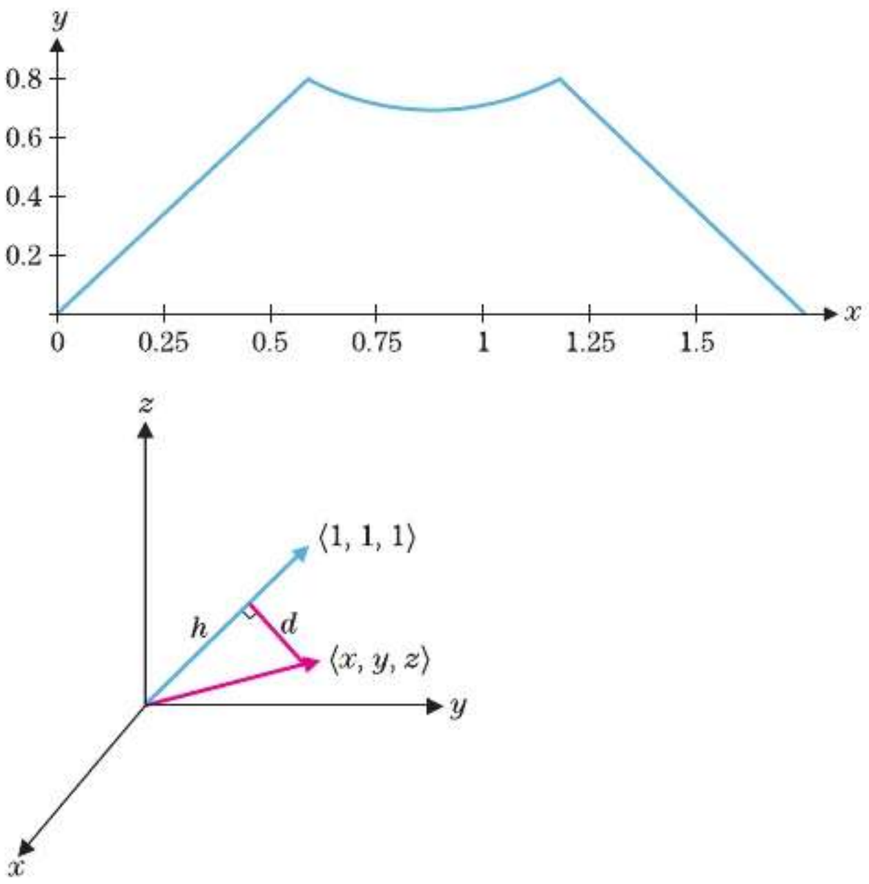
2. خذ مكعبًا وقم بإدارته حول القطر.



إذا قمت بإدارته بشكل سريع، فسترى مخططًا منحنيًا يظهر في الوسط. (انظر الشكل أدناه). كيف يصبح المكعب منحنيًا؟ يجيب هذا التمرين عن هذا السؤال. على فرض أنّ المكعب هو مكعب وحدة حيث $0 \le x \le 1$، $0 \le y \le 1$ و $0 \le z \le 1$، وندوّره حول القطر من $(0, 0, 0)$ إلى $(1, 1, 1)$. بتدوير المكعب، نرى توافيق النقاط على المكعب عند القيمة العظمى لها من القطر. تقع النقاط الموجودة على حافة المكعب في أقصى مسافة. إذا كانت (x, y, z) تشكّل نقطة على حافة المكعب، عرّف h على أنّها مركّبة المتجه $\langle x, y, z \rangle$ على طول القطر $\langle 1, 1, 1 \rangle$.

تبلغ المسافة d من (x, y, z) إلى القطر إذًا $d = \sqrt{|\langle x, y, z \rangle|^2 - h^2}$، كما يظهر في المخطط أدناه. يتكوّن المنحنى من الحافة من $(0, 0, 1)$ إلى $(0, 1, 1)$. تُعَدّ المعادلات الوسيطيّة لهذه القطعة $x = 0$، $y = t$ و $z = 1$، لكل $0 \le t \le 1$. للمتّجه $\langle 0, t, 1 \rangle$، احسب h ثم d.

مثّل $d(t)$ بيانيًا. ينبغي أن ترى منحنى مماثلًا لوسط المخطط المبيّن أدناه. أثبت أنّ هذا المنحنى هو في الواقع جزء من القطع الزائد. ثم جِـد المخطط الذي تم إنشاؤه بواسطة أضلاع أخرى للمكعب. أي من هذه الأضلاع يشكّل منحنيات وأيها يشكّل خطوطًا مستقيمة؟



حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تمارين كتابية

1. في هذه الوحدة، وضعنا عدة اختبارات للعلاقات الهندسية. وضّح بإيجاز كيفية اختبار ما إذا كان متجهان (a) متوازيين؛ (b) عموديين. وضّح بإيجاز كيفية اختبار ما إذا كانت (c) النقاط الثلاثة متسامتة؛ (d) النقاط الأربعة تقع في المستوى نفسه.
2. يكمن الجانب الآخر من المسائل في التمرين 1 بإنشاء متجهات بالخصائص المطلوبة. وضّح بإيجاز كيفية إنشاء متجه (a) موازٍ لمتجه مُعطى؛ (b) عمودي على متجه مُعطى. (c) عند إعطاء متجه، وضّح كيفية إنشاء متجهين آخرين بحيث تكون المتجهات الثلاثة عمودية بالتبادل.
3. في المثال 4.7، كيف سيتغيّر العزم إذا تم استبدال القوة $\mathbf{F}$ بالقوة $\mathbf{F}-$ ؟ أجب باستخدام كل من المصطلحات الرياضية والفيزيائية.
4. ارسم صورة واشرح مستخدمًا مصطلحات هندسية سبب $\mathbf{k}\times\mathbf{j}=-\mathbf{i}$ و $\mathbf{k}\times\mathbf{i}=\mathbf{j}$.

في التمارين 4-1، احسب المحدّد المُعطى.

1. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$
2. $\begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$
3. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 3 \end{vmatrix}$
4. $\begin{vmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

في التمارين 10-5، احسب ناتج الضرب المتجهي $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$.

5. $\mathbf{a}=\langle 1,2,-1\rangle, \mathbf{b}=\langle 1,0,2\rangle$
6. $\mathbf{a}=\langle 3,0,-1\rangle, \mathbf{b}=\langle 1,2,2\rangle$
7. $\mathbf{a}=\langle 0,1,4\rangle, \mathbf{b}=\langle -1,2,-1\rangle$
8. $\mathbf{a}=\langle 2,-2,0\rangle, \mathbf{b}=\langle 3,0,1\rangle$
9. $\mathbf{a}=2\mathbf{i}-\mathbf{k}, \mathbf{b}=4\mathbf{j}+\mathbf{k}$
10. $\mathbf{a}=-2\mathbf{i}+\mathbf{j}-3\mathbf{k}, \mathbf{b}=2\mathbf{j}-\mathbf{k}$

في التمارين 16-11، جد متجهي وحدة متعامدين على متجهين معطيين.

11. $\mathbf{a}=\langle 1,0,4\rangle, \mathbf{b}=\langle 1,-4,2\rangle$
12. $\mathbf{a}=\langle 2,-2,1\rangle, \mathbf{b}=\langle 0,0,-2\rangle$
13. $\mathbf{a}=\langle 2,-1,0\rangle, \mathbf{b}=\langle 1,0,3\rangle$
14. $\mathbf{a}=\langle 0,2,1\rangle, \mathbf{b}=\langle 1,0,-1\rangle$
15. $\mathbf{a}=3\mathbf{i}-\mathbf{j}, \mathbf{b}=4\mathbf{j}+\mathbf{k}$
16. $\mathbf{a}=-2\mathbf{i}+3\mathbf{j}-3\mathbf{k}, \mathbf{b}=2\mathbf{i}-\mathbf{k}$

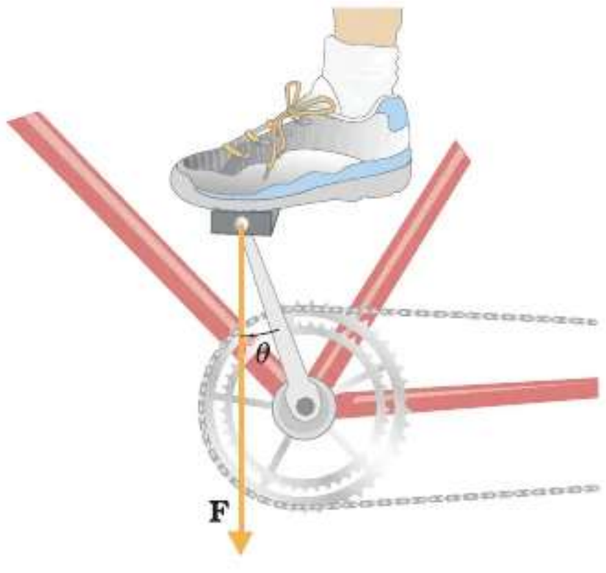
في التمارين 20-17، جد البعد من النقطة Q إلى المستقيم المُعطى.

17. $Q=(1,2,0)$، المستقيم المار بالنقطتين $(0,1,2)$ و $(3,1,1)$
18. $Q=(2,0,1)$، المستقيم المار بالنقطتين $(1,-2,2)$ و $(3,0,2)$
19. $Q=(3,-2,1)$، المستقيم المار بالنقطتين $(2,1,-1)$ و $(1,1,1)$
20. $Q=(1,3,1)$، المستقيم المار بالنقطتين $(1,3,-2)$ و $(1,0,-2)$

في التمارين 26-21، جد المساحة أو الحجم المشار إليهما.

21. مساحة متوازي الأضلاع له ضلعان متجاوران يشكلهما $\langle 2,3\rangle$ و $\langle 1,4\rangle$
22. مساحة متوازي الأضلاع له ضلعان متجاوران يشكلهما $\langle -2,1\rangle$ و $\langle 1,3\rangle$
23. مساحة المثلث رؤوسه $(0,0,0)$ و $(-1,2,3)$ و $(4,-1,3)$
24. مساحة المثلث رؤوسه $(1,1,0)$ و $(0,-2,0)$ و $(0,-3,1)$
25. حجم متوازي المستطيلات له ثلاث حواف متجاورة تشكلها $\langle 2,1,0\rangle$، $\langle -1,2,0\rangle$ و $\langle 1,1,2\rangle$
26. حجم متوازي المستطيلات له ثلاث حواف متجاورة تشكلها $\langle 0,-1,0\rangle$، $\langle 0,2,-1\rangle$ و $\langle 1,0,2\rangle$

27. إذا بذلت قوة بمقدار 90 N على طرف مفتاح ربط طوله 20 cm، بزاوية $\frac{\pi}{4}$ مع مفتاح الربط، جد مقدار العزم المبذول على المسمار.
28. إذا بذلت قوة بمقدار 180 N على طرف مفتاح ربط طوله 45 cm، بزاوية $\frac{\pi}{3}$ مع مفتاح الربط، جد مقدار العزم المبذول على المسمار.
29. استخدم قانون العزم $\boldsymbol{\tau}=\mathbf{r}\times\mathbf{F}$ لشرح مواقع مقابض الأبواب. على وجه الخصوص، اشرح سبب وضع مقبض الباب أبعد ما يمكن من المفصلات وعلى ارتفاع يساعد معظم الأشخاص على دفع أو سحب الباب بزاوية قائمة على الباب.
30. في المخطط ادناه، تبذل قدم قوة $\mathbf{F}$ رأسيًا على دواسة دراجة. احسب العزم على الترس بدلالة θ و $\mathbf{F}$. حدّد الزاوية θ التي يزداد عندها العزم إلى أقصى قيمة. عند مساعدة شاب على تعلم ركوب الدراجة، يقوم معظم الأشخاص بتدوير الترس بحيث تصعد الدواسة مباشرة إلى الأمام. اشرح سبب كون هذا الأمر مفيدًا.



حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

في التمارين 34–31، على فرض أنّ الكرات تتحرك باتجاه الصفحة (وبعيدًا عنك) مع الدوران المُشار إليه. حدّد اتجاه متجه الدوران وقوة ماغنوس.

31.

(a)



(b)

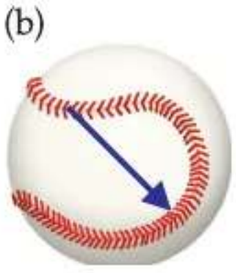


32.

(a)



(b)

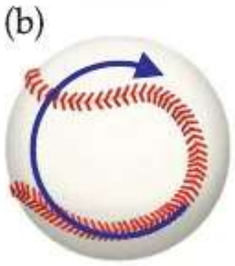


33.

(a)



(b)



في التمارين 35–40، حدّد ما إذا كانت كل عبارة صحيحة أم خاطئة. إذا كانت صحيحة، اشرح السبب بإيجاز. إذا كانت خاطئة، أعطِ مثالًا عكسيًا.

34. إذا كان $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{c}$، فإنّ $\mathbf{b} = \mathbf{c}$.

35. $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$

36. $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \|\mathbf{a}\|^2$

37. $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$

38. إذا تضاعفت القوة، يتضاعف العزم.

39. إذا تضاعف الدوران، تتضاعف قوة ماغنوس.

في التمارين 41–44، استخدم ناتج الضرب المتجهي لتحديد الزاوية θ بين المتجهات، بافتراض أنّ $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$.

41. $\mathbf{a} = \langle 1, 0, 4 \rangle, \mathbf{b} = \langle 2, 0, 1 \rangle$

42. $\mathbf{a} = \langle 2, 2, 1 \rangle, \mathbf{b} = \langle 0, 0, 2 \rangle$

43. $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + \mathbf{k}, \mathbf{b} = 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$

44. $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 3\mathbf{k}, \mathbf{b} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$

في التمارين 45–50، ارسم صورًا لتحديد ناتج الضرب المتجهي (لا تحسب!).

45. $\mathbf{i} \times (3\mathbf{k})$

46. $\mathbf{k} \times (2\mathbf{i})$

47. $\mathbf{i} \times (\mathbf{j} \times \mathbf{k})$

48. $\mathbf{j} \times (\mathbf{j} \times \mathbf{k})$

49. $\mathbf{j} \times (\mathbf{j} \times \mathbf{i})$

50. $(\mathbf{j} \times \mathbf{i}) \times \mathbf{k}$

في التمارين 51–54، استخدم قانون حجم متوازي المستطيلات لتحديد ما إذا كانت المتجهات تقع في المستوى نفسه.

51. $\langle 2, 3, 1 \rangle$، $\langle 1, 0, 2 \rangle$ و $\langle 0, 3, -3 \rangle$

52. $\langle 1, -3, 1 \rangle$، $\langle 2, -1, 0 \rangle$ و $\langle 0, -5, 2 \rangle$

53. $\langle 1, 0, -2 \rangle$، $\langle 3, 0, 1 \rangle$ و $\langle 2, 1, 0 \rangle$

54. $\langle 1, 1, 2 \rangle$، $\langle 0, -1, 0 \rangle$ و $\langle 3, 2, 4 \rangle$

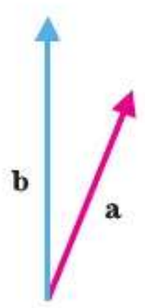
55. أثبت أنّ $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2$

56. أثبت أنّ $(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = 2(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$.

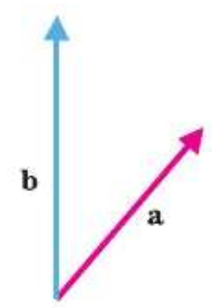
57. أثبت أنّ $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = \begin{vmatrix} \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} & \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{d} & \mathbf{b} \cdot \mathbf{d} \end{vmatrix}$.

58. أثبت الأجزاء (ii) و(iv) و(v) و(vi) من النظرية 4.3.

59. في كل من الحالات الموضّحة هنا، $\|\mathbf{a}\| = 3$ و $\|\mathbf{b}\| = 4$. في أي حالة يكون $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|$ أكبر؟ ما أقصى قيمة ممكنة لـ $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|$ ؟



الشكل A



الشكل B

60. في الشكلين A و B، إذا كانت الزوايا بين $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ هي $50°$ و $20°$، على الترتيب، جد القيم الدقيقة لـ $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|$. اذكر أيضًا ما إذا كان $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ يشير باتجاه داخل أو خارج الصفحة.

61. حدّد التعابير غير المعرفة.

(a) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ (b) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$

(c) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$ (d) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$

62. اشرح سبب كون كل معادلة صحيحة.

(a) $\cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0$ (b) $\mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{a}) = 0$

التطبيقات

في التمارين 70-63، وُصِف موقف رياضي، مع دوران الكرة النموذجي المبيّن في التمرين المشار إليه. ناقش التأثيرات على الكرة وطريقة تأثّر اللعبة.

63. كرة بيسبول سريعة مسددة بذراع مرفوعة، الدوران في التمرين (a) 31

64. كرة بيسبول منحرفة مسددة باليد اليمنى، الدوران في التمرين (a) 33

65. ضربة كرة تنس أرضية بدوران علوي، الدوران في التمرين (a) 34

66. ضربة منحنية لكرة تنس باليد اليسرى، الدوران في التمرين (b) 32

67. تمريرة حلزونية لكرة قدم، الدوران في التمرين (b) 34

68. ركلة مقوسة لكرة القدم بالقدم اليسرى، الدوران في التمرين (b) 31

69. الضربة "المثالية" لكرة غولف، الدوران في التمرين (a) 31

70. ضربة كرة غولف "خطافية" على شكل قوس جانبي باليد

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

اليمنى، الدوران في التمرين (b) 33

تمارين استكشافية

1. ضع اختبارًا يحدّد بسرعة سواء كان $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| < |\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}|$ أم $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| > |\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}|$ أم $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = |\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}|$. قم بتطبيق اختبارك على المتجهات التالية: (a) $\langle 2, 1, 1 \rangle$ و $\langle 3, 1, 2 \rangle$، (b) $\langle 2, 1, -1 \rangle$ و $\langle -1, -2, 1 \rangle$ و (c) $\langle 2, 1, 1 \rangle$ و $\langle -1, 2, 2 \rangle$. للمتّجهات التي تمّ اختيارها عشوائيًا، أي من الحالات الثلاثة هي الأكثر ترجيحاً؟

في هذا التمرين، نستكشف معادلة الحركة لمقذوف عام في ثلاثة أبعاد. يتمثّل قانون نيوتن الثاني بـ $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. إنّ القوى الثلاث التي قد تؤثر على حركة المقذوف هي الجاذبية وسحب الهواء وقوة ماغنوس. قم بتوجيه المحاور بحيث يكون المحور z الموجب لأعلى والمحور x الموجب لليمين والمحور y الموجب للأمام مباشرةً. إنّ القوة الناتجة عن الجاذبية هي الوزن، وتُعطى بالعلاقة $\mathbf{F}_g = \langle 0, 0, -mg \rangle$. يتناسب مقدار سحب الهواء مع مربع السرعة والاتجاه المعاكس لهذه السرعة المتجهة. أثبت أنّه إذا كان $\mathbf{v}$ هو متجه السرعة المتجهة، فإنّ $\mathbf{F}_d = -\|\mathbf{v}\|\mathbf{v}$ يحقّق كلتا الخاصيتين. تتناسب قوة ماغنوس مع $\mathbf{s} \times \mathbf{v}$، حيث $\mathbf{s}$ هو متجه الدوران. يكون النموذج الكامل عندئذٍ

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \langle 0, 0, -g \rangle - c_d\|\mathbf{v}\|\mathbf{v} + c_m(\mathbf{s} \times \mathbf{v})$$

للعددين الثابتين الموجبين c_d و c_m. مع $\mathbf{v} = \langle v_x, v_y, v_z \rangle$ و $\mathbf{s} = \langle s_x, s_y, s_z \rangle$، قم بتمديد هذه المعادلة إلى معادلات تفاضلية قابلة للفصل لكل من v_x، v_y و v_z. لا يمكننا حل هذه المعادلات، ولكن يمكننا الحصول على بعض المعلومات بالتفكير في الرموز. لمضرب غولف، قد يكون الدوران الناتج هو دوران خلفي فقط، وفي هذه الحالة يكون متجه الدوران $\mathbf{s} = \langle \omega, 0, 0 \rangle$ لدوران أكبر $\omega > 0$. (يمكن لضربة غولف أن يكون لها دوران يبلغ 4000 دورة بالدقيقة). ستكون السرعة المتجهة الإبتدائية لضربة جيدة للأمام مباشرةً مع رفع الكرة لأعلى قليلًا، $\mathbf{v}(0) = \langle 0, b, c \rangle$ للعددين الثابتين الموجبين b و c. في بداية انطلاق الكرة، أثبت أنّ $v_y' < 0$ وبالتالي، يقل v_y. إذا استغرقت الكرة تقريبًا المقدار نفسه من الزمن للارتفاع والهبوط، استنتج أنّ الكرة ستنطلق إلى مسافة أبعد أثناء ارتفاعها مقارنةً بهبوطها. بعد ذلك، فكّر في حالة كرة لها بعض الدوران الجانبي، بحيث يكون $s_x > 0$ و $s_y > 0$. من خلال فحص الرمز v_x'، حدّد ما إذا كانت هذه الكرة ستأخذ منحنى إلى اليمين أم إلى اليسار. تحقّق من المعادلات الأخرى وحدّد الآثار الأخرى التي قد تنتج عن هذا الدوران الجانبي.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الوحدة 7

دليل الدراسة والمراجعة

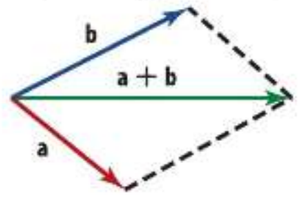
ملخص الوحدة

المفاهيم الأساسية

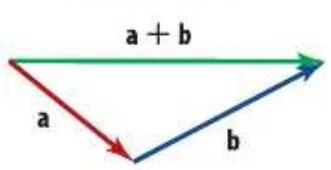
مقدمة عن المتجهات (الدرس 1-7)

- يعتبر اتجاه المتجه هو الزاوية الموجهة المحصورة بين المتجه ومستقيم أفقي. ويعتبر مقدار المتجه طوله.
- عند الجمع بين متجهين أو أكثر يكون المجموع متجه واحد يسمى الناتج. ويمكن إيجاده باستخدام طريقة المثلث أو طريقة متوازي الأضلاع.

طريقة متوازي الأضلاع



طريقة المثلث



المتجهات في المستوى الإحداثي (الدرس 2-7)

- تعتبر الصورة المُركّبة لمتجه يحتوي على المركبات المتعامدة x و y هي $\langle x, y \rangle$.
- يتم الحصول على الصورة المُركّبة لمتجه ليس في الوضع القياسي، ويحتوي على نقطة البداية $A(x_1, y_1)$ ونقطة النهاية $B(x_2, y_2)$ من خلال $\langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle$.
- يتم الحصول على مقدار متجه $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$ من خلال $|\mathbf{v}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.
- إذا كان $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$ و $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2 \rangle$ هما متجهان و k هي كمية عددية، إذًا $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2 \rangle$, $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2 \rangle$, $k\mathbf{a} = \langle ka_1, ka_2 \rangle$.
- يمكن استخدام متجهات الوحدة القياسية i و j للتعبير عن أي متجه $\mathbf{v} = \langle a, b \rangle$ في الصورة $a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$.

الضرب النقطي (الدرس 3-7)

- يحدد ناتج الضرب النقطي لـ $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$ و $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2 \rangle$ على أنه $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2$.
- إذا كانت θ هي الزاوية بين المتجهات غير الصفرية a و b، فإن $\cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|}$.

المتجهات في الفضاء ثلاثي الأبعاد (الدرس 4-7)

- يتم الحصول على المسافة بين $A(x_1, y_1, z_1)$ و $B(x_2, y_2, z_2)$ من خلال $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.
- يتم الحصول على نقطة منتصف $\overline{AB}$ من خلال $M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$.

الضرب النقطي والضرب المتجهي للمتجهات في الفضاء (الدرس 5-7)

- يحدد ناتج الضرب النقطي لـ $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ و $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ على أنه $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$.
- إذا كان $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ و $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$، فإن ناتج الضرب المتجهي لـ a و b هو المتجه $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\mathbf{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{k}$.

المفردات الأساسية

صورة مُركّبة component form	متجهات موازية parallel vectors
مُركّبات components	اتجاه ربعي quadrant bearing
ناتج الضرب المتجهي cross product	مُركّبات متعامدة rectangular components
اتجاه direction	ناتج resultant
ناتج الضرب النقطي dot product	الوضع القياسي standard position
متجهات متكافئة equivalent vectors	نقطة النهاية terminal point
نقطة البداية initial point	نظام إحداثي ثلاثي الأبعاد three-dimensional coordinate system
توفيق خطي linear combination	العزم torque
مقدار magnitude	طريقة المثلث triangle method
أثمان octants	الضرب القياسي لثلاثة متجهات triple scalar product
متجهات متعاكسة opposite vectors	اتجاه حقيقي true bearing
ثلاثي مُرتب ordered triple	متجه وحدة unit vector
متعامد orthogonal	متجه vector
متوازي المستطيلات parallelepiped	مسقط المتجه vector projection
طريقة متوازي الأضلاع parallelogram method	الشغل work
	محور z z-axis
	متجه صفري zero vector

مراجعة المفردات

حدد ما إذا كانت كل عبارة صحيحة أم *خاطئة*. فإذا كانت خاطئة، فاستبدل الكلمة أو العبارة التي تحتها خط بحيث تكون الجملة صحيحة.

1. نقطة النهاية للمتجه هي النقطة التي يبدأ منها المتجه.
2. إذا كان $\mathbf{a} = \langle -4, 1 \rangle$ و $\mathbf{b} = \langle 3, 2 \rangle$، فيتم حساب ناتج الضرب النقطي من خلال $-4(1) + 3(2)$.
3. يتم الحصول على نقطة منتصف $\overline{AB}$ التي تحتوي على $A(x_1, y_1, z_1)$ و $B(x_2, y_2, z_2)$ من خلال $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$.
4. مقدار r إذا كانت نقطة البداية هي $A(-1, 2)$ ونقطة النهاية هي $B(2, -4)$ يساوي $\langle 3, -6 \rangle$.
5. يكون المتجهان متساويين فقط إن كانا يتساويان في الاتجاه والمقدار.
6. عندما يكون المتجهان متعامدين يكون قياس الزاوية المحصورة بينهما 180°.
7. يعتبر مركب u على v هو المتجه الذي يكون تجاهه موازيًا لـ v وطوله مركب u على v.
8. لإيجاد متجه واحد على الأقل عمودي على أي متجهين آخرين في الفضاء، احسب ناتج الضرب المتجهي للمتجهين الأصليين.
9. عند طرح متجه، فالأمر يكافئ جمع متجه معاكس.
10. إذا كان v متجه وحدة في نفس اتجاه u، فإن $\mathbf{v} = \frac{|\mathbf{u}|}{\mathbf{u}}$.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

مراجعة درسبدرس

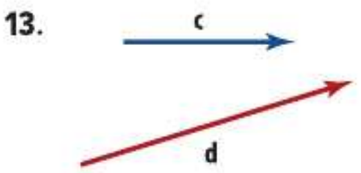
7-1 مقدمة عن المتجهات

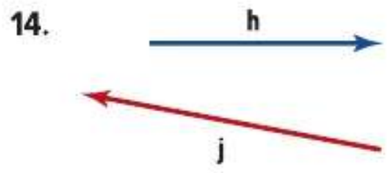
اذكر ما إذا كانت كل كمية موصوفة هي كمية متجهة أم كمية عددية.

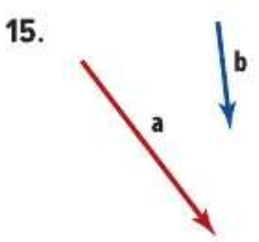
11. تسير سيارة بسرعة 50 km/h في اتجاه الشرق

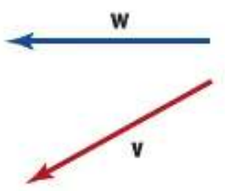
12. تهب نسمة هواء بسرعة 5 m/s

جـد ناتج كل زوج من المتّجهات باستخدام إما طريقة المثلّث أو متوازي الأضلاع. اذكر مقدار الناتج مع التقريب لأقرب جزء من عشرة من السنتيمتر واتجاهه بالنسبة إلى المحور الأفقي.

13. 

14. 

15. 

16. 

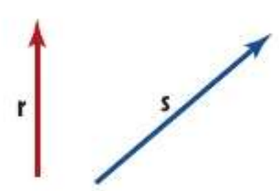
حدد مقدار واتجاه ناتج مجموع كل متجه.

17. 70 m باتجاه الغرب ثم 150 m **باتجاه الشرق**

18. 8 N للأمام مباشرة ثم 12 N للخلف مباشرة

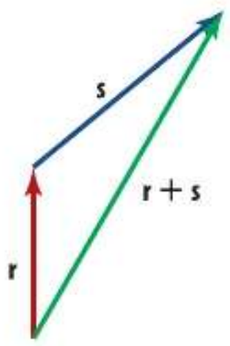
مثال 1

جـد ناتج المتجهين *r* و *s* باستخدام إما طريقة المثلّث أو متوازي الأضلاع. اذكر مقدار الناتج بالسنتيمتر واتجاهه بالنسبة إلى المركّبة الأفقية.



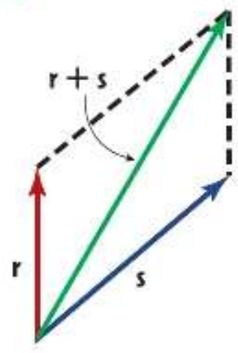
طريقة المثلث

قم بإزاحة *r* بحيث يلامس طرف *r* ذيل *s*. الناتج هو المتجه من ذيل *r* إلى طرف *s*.



طريقة متوازي الأضلاع

قم بإزاحة *s* بحيث يلامس ذيل *s* طرف *r*. أكمل متوازي الأضلاع الذي يحتوي على *r* و *s* كضلعين من أضلاعه. الناتج هو المتجه الذي يشكل القطر المشار إليه لمتوازي الأضلاع.



يكون مقدار الناتج 3.4 cm واتجاهه 59°.

7-2 المتجهات في المستوى الإحداثي

جـد الصورة المُركّبة ومقدار المتّجه $\overrightarrow{AB}$ بنقطتي البداية والنهاية المذكورتين.

19. $A(-1, 3), B(5, 4)$

20. $A(7, -2), B(-9, 6)$

21. $A(-8, -4), B(6, 1)$

22. $A(2, -10), B(3, -5)$

جـد كل مما يلي لكل من $p = \langle 4, 0 \rangle$ و $q = \langle -2, -3 \rangle$ و $t = \langle -4, 2 \rangle$.

23. $2q - p$

24. $p + 2t$

25. $t - 3p + q$

26. $2p + t - 3q$

جـد متّجه الوحدة *u* الذي له نفس اتّجاه *v*.

27. $v = \langle -7, 2 \rangle$

28. $v = \langle 3, -3 \rangle$

29. $v = \langle -5, -8 \rangle$

30. $v = \langle 9, 3 \rangle$

مثال 2

جـد الصورة المركّبة والمقدار للمتّجه $\overrightarrow{AB}$ الذي تكون نقطة بدايته $A(3, -2)$ ونقطة نهايته $B(4, -1)$.

الصورة المُركّبة $\overrightarrow{AB} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle$

عوّض. $= \langle 4 - 3, -1 - (-2) \rangle$

اطرح. $= \langle 1, 1 \rangle$

جـد المقدار باستخدام قانون المسافة.

قانون المسافة $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

عوّض. $= \sqrt{[(4 - 3)]^2 + [-1 - (-2)]^2}$

بسّط. $= \sqrt{2}$ تقريبًا $= 1.4$

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

7-3 الضرب النقطي ومساقط المتجهات

جـد ناتج الضرب النقطي لـ u و v. ثمّ حدّد ما إذا كان u و v متعامدين أم لا.

31. $u = \langle -3, 5 \rangle, v = \langle 2, 1 \rangle$

32. $u = \langle 4, 4 \rangle, v = \langle 5, 7 \rangle$

33. $u = \langle -1, 4 \rangle, v = \langle 8, 2 \rangle$

34. $u = \langle -2, 3 \rangle, v = \langle 1, 3 \rangle$

جـد الزاوية θ بين u و v لأقرب جزء من عشرة من الدرجة.

35. $u = \langle 5, -1 \rangle, v = \langle -2, 3 \rangle$

36. $u = \langle -1, 8 \rangle, v = \langle 4, 2 \rangle$

مثال 3

جـد ناتج الضرب النقطي لكل من $x = \langle 2, -5 \rangle$ و $y = \langle -4, 7 \rangle$. ثمّ حدّد ما إذا كان x و y متعامدين أم لا.

ناتج الضرب النقطي $x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2$

عوّض. $= 2(-4) + -5(7)$

بسّط. $= -8 + (-35) = -43$

حيث إن $x \cdot y \neq 0$، فإن x و y غير متعامدين.

7-4 المتجهات في الفضاء ثلاثي الأبعاد

عيّن كل نقطة في نظام إحداثي ثلاثي الأبعاد.

37. $(1, 2, -4)$

38. $(3, 5, 3)$

39. $(5, -3, -2)$

40. $(-2, -3, -2)$

جـد طول القطعة المستقيمة ونقطة المنتصف لها باستخدام نقطتي طرفيها المبينتين.

41. $(-4, 10, 4), (2, 0, 8)$

42. $(-5, 6, 4), (-9, -2, -2)$

43. $(3, 2, 0), (-9, -10, 4)$

44. $(8, 3, 2), (-4, -6, 6)$

حدد موقع كل متجه في الفضاء ثم مثله بيانيًا.

45. $a = \langle 0, -3, 4 \rangle$

46. $b = -3i + 3j + 2k$

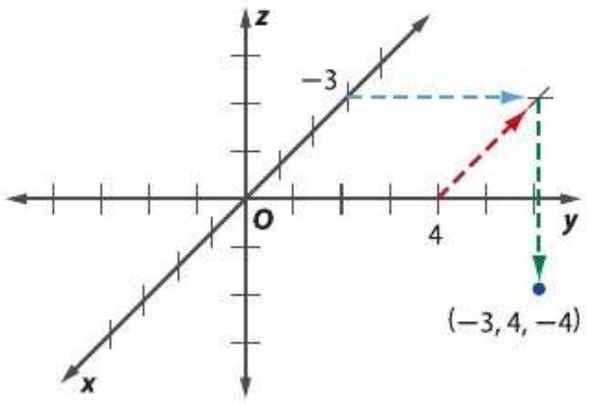
47. $c = -2i - 3j + 5k$

48. $d = \langle -4, -5, -3 \rangle$

مثال 4

عيّن $(-3, 4, -4)$ في نظام إحداثي ثلاثي الأبعاد.

حدد موقع النقطة $(-3, 4)$ في المستوى xy وضع عليها علامة X. ثم عيّن نقطة على بعد 4 وحدات أسفل هذا الموقع وموازية للمحور z.



7-5 الضرب النقطي والضرب المتجهي للمتجهات في الفضاء

جـد ناتج الضرب النقطي لـ u و v. ثمّ حدّد ما إذا كان u و v متعامدين أم لا.

49. $u = \langle 2, 5, 2 \rangle, v = \langle 8, 2, -13 \rangle$

50. $u = \langle 5, 0, -6 \rangle, v = \langle -6, 1, 3 \rangle$

جـد ناتج الضرب المتجهي لـ u و v. ثم برهن أن $u \times v$ متعامد على كل من u و v.

51. $u = \langle 1, -3, -2 \rangle, v = \langle 2, 4, -3 \rangle$

52. $u = \langle 4, 1, -2 \rangle, v = \langle 5, -4, -1 \rangle$

مثال 5

جـد ناتج الضرب المتجهي لـ $u = \langle -4, 2, -3 \rangle$ و $v = \langle 7, 11, 2 \rangle$. ثم برهن أن $u \times v$ متعامد على كل من u و v.

$$u \times v = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 11 & 2 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} -4 & -3 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 7 & 11 \end{vmatrix} k$$

$$= \langle 37, -13, -58 \rangle$$

$$(u \times v) \cdot u = \langle 37, -13, -58 \rangle \cdot \langle -4, 2, -3 \rangle$$

$$= -148 - 26 + 174 = 0 \checkmark$$

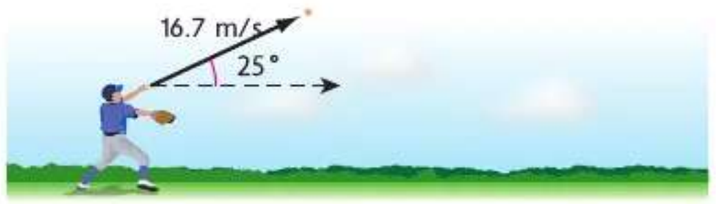
$$(u \times v) \cdot v = \langle 37, -13, -58 \rangle \cdot \langle 7, 11, 2 \rangle$$

$$= 259 - 143 - 116 = 0 \checkmark$$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

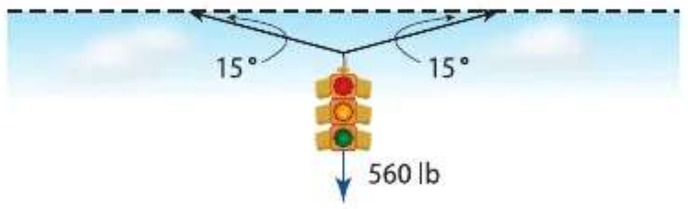
التطبيقات وحل المسائل

53. البيسبول يرمى لاعب بيسبول الكرة بسرعة مبدئية قدرها 16.7 m/s وبزاوية 25° أعلى المحور الأفقي. كما هو موضح في الشكل أدناه. جـد مقدار المركبات الأفقية والرأسية. (الدرس 1-7)

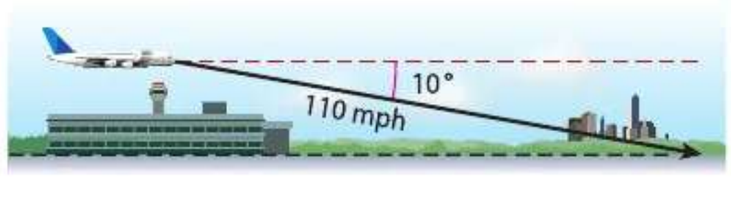


54. عربة أطفال تدفع ليلى عربة أطفال بقوة تبلغ 200 N بزاوية 20° أسفل المحور الأفقي. جـد مقدار المركبتين الأفقية والرأسية للقوة. (الدرس 1-7)

55. الأضواء تُعلّق إشارة مرور عند تقاطع من سلكين لهما نفس الطول بزاوية 15° أسفل المحور الأفقي كما هو موضح. فإذا كانت إشارة المرور تزن 560 lb. فما مقدار الشد الذي يبذله السلكان لتظل إشارة المرور متزنة؟ (الدرس 1-7)



56. الطائرات تهبط طائرة بسرعة 110 mph في الساعة وبزاوية 10° أسفل المحور الأفقي. جـد الصورة المُركّبة للمتجه الذي يمثل سرعة الطائرة. (الدرس 2-7)



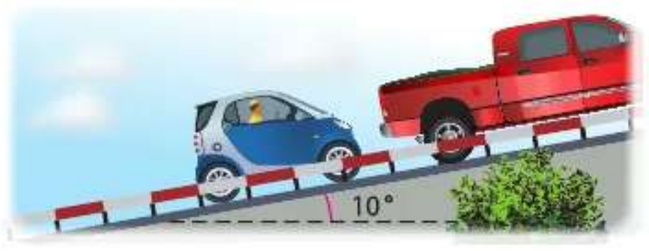
57. المنقذ يسبح منقذ في أحد حمامات السباحة بسرعة 4 kmph وبزاوية 60° إلى جانب الحمام كما هو موضح. (الدرس 2-7)



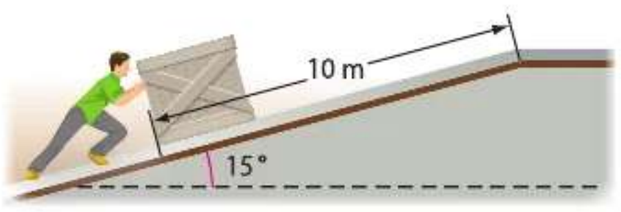
a. ما السرعة التي يتحرك بها المنقذ إذا كان التيار في حمام السباحة يساوي 2 km/h وبموازاة جانب الحمام كما هو موضح؟

b. ما الزاوية التي يتحرك بها المنقذ بالنسبة لجانب بداية حمام السباحة؟

58. المرور توقفت سيارة تزن 680.4 kg وسط المرور على تل زاويه انحداره 10°. حدد القوة اللازمة لمنع تدحرج السيارة لأسفل التل. (الدرس 3-7)



59. الشغل في أحد المخازن، يدفع جاسم صندوقًا موضوعًا على مزلقة بقوة ثابتة قدرها 80 N لأعلى منحدر بزاوية انحدار 15° بالنسبة للمحور الأفقي. حدد مقدار الشغل بالجول الذي يبذله جاسم إذا دفع المنصة المتحركة 10 m. (الدرس 3-7)



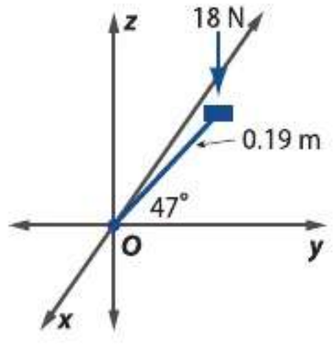
60. الأقمار الصناعية يمكن تمثيل موقع قمرين صناعيين يدوران في مدار بالإحداثيات (28,625, 32,461, −38,426) و (−31,613, −29,218, 43,015). حيث تمثل (0, 0, 0) مركز الأرض وتذكر الإحداثيات بالأميال. وبلغ نصف قطر الأرض حوالي 3963 mi. (الدرس 4-7)

a. حدد المسافة بين القمرين.

b. إذا وضع قمر ثالث بين القمرين مباشرة، فكم ستكون إحداثياته؟

c. هل يمكن وضع قمر ثالث بالإحداثيات التي تم التوصل إليها في الجزء **b**؟ وضّح استنتاجك.

61. الدراجات يبذل قائد دراجة قوة قدرها 18 N لأسفل على الدواسة لتتحرك الدراجة. وقد كان موضع الدواسة المبدئي 47° أعلى محور y ومسافة طول 0.19 m بالنسبة لمحور دوران الدواسة. (الدرس 5-7)



a. جـد المتجه الذي يمثل العزم المبذول على محور دوران دواسة الدراجة في الصورة المُركّبة.

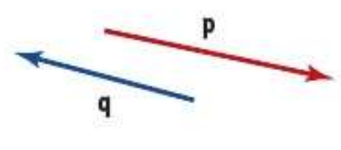
b. جـد مقدار العزم واتّجاهه.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

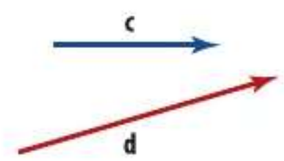
7 تدريب على الاختبار المعياري

جـد ناتج كل زوج من المتّجهات باستخدام إما طريقة المثلّث أو متوازي الأضلاع. اذكر مقدار الناتج مع التقريب لأقرب جزء من عشرة من السنتيمتر واتجاهه بالنسبة إلى المحور الأفقي.

1.



2.

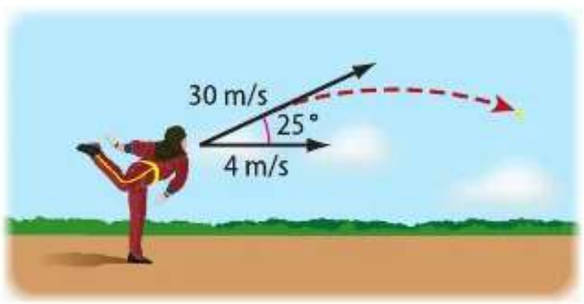


جـد الصورة المُركّبة ومقدار المتّجه $\overrightarrow{AB}$ بنقطتي البداية والنهاية المذكورتين.

3. $A(1, -3), B(-5, 1)$

4. $A\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right), B(-1, 7)$

5. **السوفتبول** تضرب لاعبة السوفتبول في الفريق الخصم كرة على الأرض فتتدحرج إلى لميا بيسار الملعب. تجري ليلى إلى الكرة بسرعة 4 m في الثانية وتلتقطها ثم تتقدم لترميها إلى ملتقطة الكرة بسرعة 30 m/s وبزاوية 25° بالنسبة للمحور الأفقي في محاولة لتسجيل نقاط. ما مقدار السرعة الناتجة للكرة واتّجاه الرمية؟



جـد متّجه الوحدة الذي له نفس اتّجاه u.

6. $u = \langle -1, 4 \rangle$

7. $u = \langle 6, -3 \rangle$

جـد ناتج الضرب النقطي لـ u و v. ثمّ حدّد ما إذا كان u و v متعامدين أم لا.

8. $u = \langle 2, -5 \rangle, v = \langle -3, 2 \rangle$

9. $u = \langle 4, -3 \rangle, v = \langle 6, 8 \rangle$

10. $u = 10i - 3j, v = i + 8j$

11. **الاختيار من متعدد** اكتب **u** في صورة مجموع المتجهين المتعامدين، بحيث يكون أحدهما مسقط **u** على **v** إذا كان $u = \langle 1, 3 \rangle$ و $v = \langle -4, 2 \rangle$.

A $u = \left\langle \frac{2}{5}, -\frac{3}{5} \right\rangle + \left\langle \frac{3}{5}, \frac{18}{5} \right\rangle$

B $u = \left\langle \frac{2}{5}, \frac{3}{5} \right\rangle + \left\langle \frac{3}{5}, \frac{12}{5} \right\rangle$

C $u = \left\langle -\frac{4}{5}, \frac{2}{5} \right\rangle + \left\langle \frac{9}{5}, \frac{13}{5} \right\rangle$

D $u = \left\langle -\frac{2}{5}, \frac{1}{5} \right\rangle + \left\langle \frac{7}{5}, \frac{14}{5} \right\rangle$

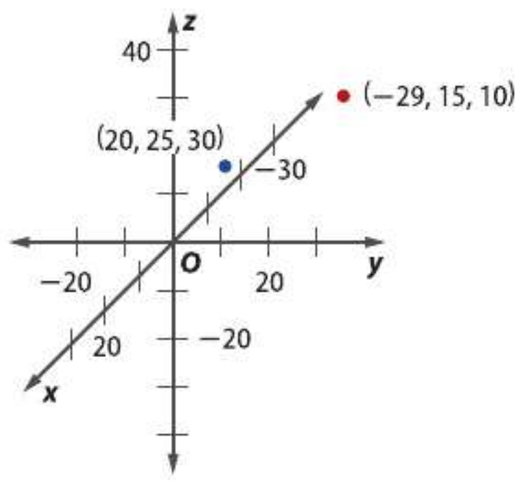
12. **الحركة** تدفع لميس صندوقًا على مستوى الأرض بقوة قدرها 54.4 kg وبزاوية انخفاض 20°. حدد مقدار الشغل المبذول إذا تم تحريك الصندوق 25 m.

جـد كل مما يلي لكل من $a = \langle 2, 4, -3 \rangle$ و $b = \langle -5, -7, 1 \rangle$ و $c = \langle 8, 5, -9 \rangle$.

13. $2a + 5b - 3c$

14. $b - 6a + 2c$

15. **منطاد الهواء الساخن** أثناء أحد المهرجانات، انطلق اثني عشر منطادًا. وبعدها بدقائق، كانت إحداثيات أول منطادين هي $(20, 25, 30)$ و $(-29, 15, 10)$ كما هو موضح. حيث تذكر الإحداثيات بالقدم.



a. حدد المسافة بين أول منطادين انطلقا.

b. يقع منطاد ثالث في منتصف المسافة بين أول منطادين. جـد إحداثيات المنطاد الثالث.

c. جـد متجه الوحدة للمنطاد الأول إذا انطلق من النقطة $(0, 0, 0)$.

جـد الزاوية θ بين المتجهين u و v مع التقريب لأقرب جزء من عشرة من الدرجة.

16. $u = \langle -2, 4, 6 \rangle, v = \langle 3, 7, 12 \rangle$

17. $u = -9i + 5j + 11k, v = -5i - 7j - 6k$

جـد ناتج الضرب المتجهي لـ u و v. ثم برهن أن $u \times v$ متعامد على كل من u و v.

18. $u = \langle 1, 7, 3 \rangle, v = \langle 9, 4, 11 \rangle$

19. $u = -6i + 2j - k, v = 5i - 3j - 2k$

20. **القوارب** يعتبر ذراع الدفة رافعة تتحكم في موقع دفة توجيه القارب. وعندما تبذل قوة على ذراع الدفة سيدور المركب. افترض أن طول ذراع الدفة لقارب ما 0.75 m ويستقر في المستوى xy بزاوية 15° من محور x الموجب. جـد مقدار العزم المبذول على محور دوران ذراع الدفة إذا تم بذل قوة قدرها 50 N في اتجاه مواز لمحور y الموجب.

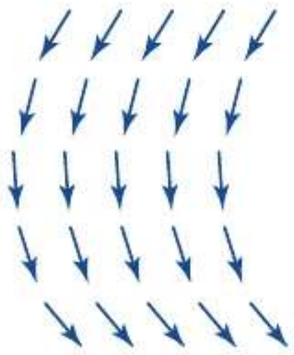
McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

الوحدة 7

7 الربط مع حساب التفاضل والتكامل المتقدم
مجالات المتجهات

الهدف

- تمثيل المتجهات بيانيًا وتحديد التمثيل البياني لمجالات المتجهات.



في الوحدة 7، درست آثار تيارات الرياح والمياه على الأجسام المتحركة. وقد تم تمثيل القوة التي تبذلها الرياح أو التيارات بمتجه واحد.
ولكننا نعلم جميعًا أن التيار الموجود في مسطح مائي أو القوة التي يبذلها لا تكون بالضرورة ثابتة؛ بل تتغير من منطقة لأخرى. وإذا أردنا تمثيل التيار بأكمله أو تدفق الهواء في منطقة، فسنحتاج إلى تعيين متجه لكل نقطة في الفضاء، وبذلك نشكل *مجال* متجه.

ويشيع استخدام مجالات المتجهات في الهندسة والفيزياء لتمثيل مقاومة الهواء والقوى المغناطيسية والجاذبية وحركة السوائل. وبالرغم من أن هذه التطبيقات لمجالات المتجهات تتطلب عدة أبعاد، إلا أننا سنحلل مجالات المتجهات في بعدين فقط.

ومجال المتجه $\mathbf{F}(x, y)$ هو دالة تحول الإحداثيات ثنائية الأبعاد إلى مجموعات من المتجهات ثنائية الأبعاد.

$\mathbf{F}(x, y) = \langle f_1(x, y), f_2(x, y) \rangle$، حيث إن $f_2(x, y)$ و $f_1(x, y)$ دالتين عدديتين.

ولتمثيل مجال المتجه، جـد قيمة $\mathbf{F}(x, y)$ عند (x, y) ومثّل المتجه بيانيًا باستخدام (x, y) كنقطة البداية. ويتم ذلك مع عدة نقاط.

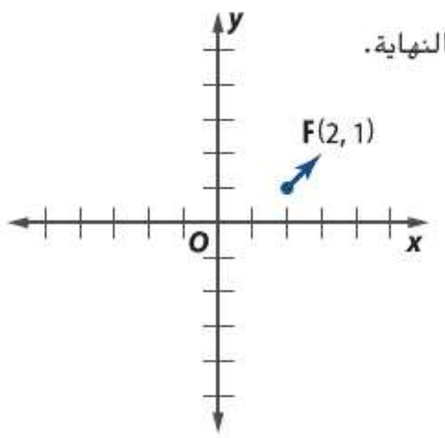
النشاط 1 مجالات المتجهات

جـد قيمة $\mathbf{F}(2, 1)$ و$\mathbf{F}(-1, -1)$ و$\mathbf{F}(1.5, -2)$ و $\mathbf{F}(-3, 2)$ لمجال المتجه $\mathbf{F}(x, y) = \langle y^2, x - 1 \rangle$. ومثّل كل متجه بيانيًا مستخدمًا (x, y) كنقطة بداية.

الخطوة 1 لإيجاد قيمة $\mathbf{F}(2, 1)$، افترض أن $x = 2$ و $y = 1$.

$$\begin{aligned}\langle y^2, x - 1 \rangle &= \langle 1^2, 2 - 1 \rangle \\ &= \langle 1, 1 \rangle\end{aligned}$$

الخطوة 2 للتمثيل البياني، افترض أن $(2, 1)$ تمثل نقطة البداية للمتجه. ويجعل ذلك النقطة $(1 + 1, 2 + 1)$ أو $(3, 2)$ نقطة النهاية.

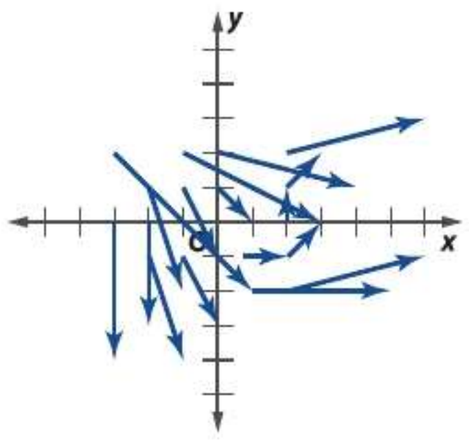


الخطوة 3 كرر الخطوتين 2-1 للدوال $\mathbf{F}(-1, -1)$ و$\mathbf{F}(1.5, -2)$ و $\mathbf{F}(-3, 2)$.

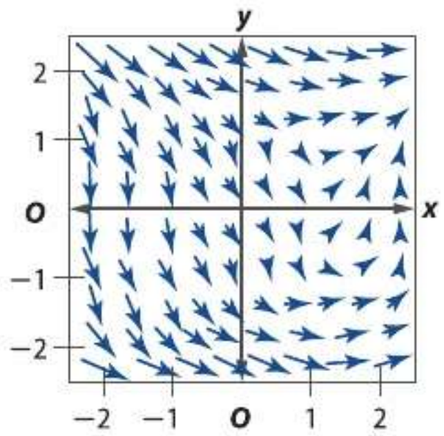
تحليل النتائج

1. هل مقدار المتجهات وطولها *متماثل* أم *مختلف*؟
2. خمّن السبب في أنه يمكن تعريف مجال المتجه كدالة.
3. هل يمكن تمثيل كل متجه في مجال المتجه بيانيًا؟ اشرح استنتاجك.

ينبغي أن يتضمن التمثيل البياني لمجال متجه $\mathbf{F}(x, y)$ عددًا من المتجهات التي تكون نقطة بدايتها (x, y). وتستخدم أجهزة التمثيل البياني لتمثيل مجالات المتجهات حيث إن رسمها باليد يعد أمرًا صعبًا.



حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education



لمنع تداخل المتجهات مع بعضها البعض وتجنب أن يبدو التمثيل البياني مختلطًا، تقلل أجهزة التمثيل البياني من أطوال المتجهات بشكل تناسبي ولا تضع المتجهات إلا بفترات محددة. فعلى سبيل المثال، إذا واصلنا تمثيل العديد من المتجهات بيانيًا لمجال المتجه الموجود في النشاط 1، ستكون النتيجة هي التمثيل البياني الموجود إلى اليسار.

حلل دوال المركبات لمجال متجه لتحديد نوع التمثيل البياني الناتج عنها.

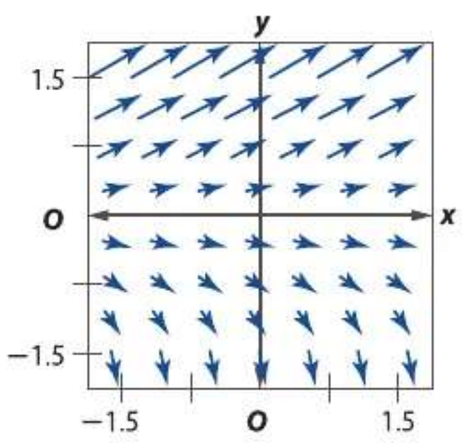
نصيحة دراسية

التمثيل البياني لمجالات المتجهات لكل نقطة في المستوى متجه مقابل. وتوضح التمثيلات البيانية لمجالات المتجهات مجموعة مختارة من النقاط.

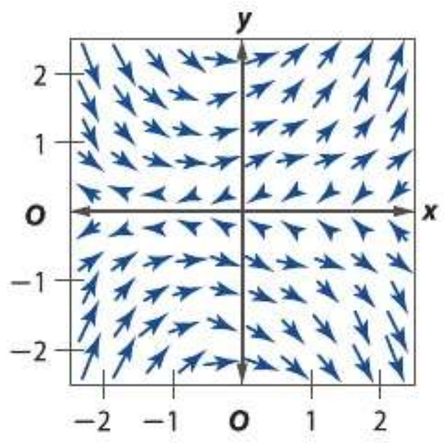
النشاط 2 مجالات المتجهات

صل بين كل مجال متجه وتمثيله البياني.

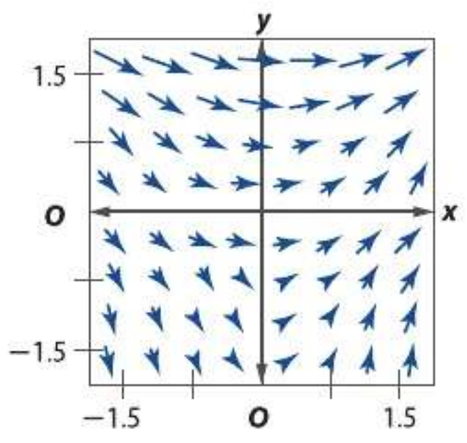
$F(x, y) = \langle 2, 1 + 2xy \rangle$ $G(x, y) = \langle e^y, x \rangle$ $H(x, y) = \langle e^y, y \rangle$



الشكل 1



الشكل 2



الشكل 3

الخطوة 1 ابدأ بتحليل المركبات التي تكوّن $F(x, y)$. سينتج عن المركب الثاني $(1 + 2xy)$ نتيجة موجبة عندما يكون لكل من x و y نفس العلامة. يكون المركب الرأسي للمتجهات في الربع الأول والثالث موجبًا، مما يجعل المتجهات في هذين الربعين متجهين لأعلى.

الخطوة 2 التمثيل البياني الذي يحتوي على متجهات متجهة لأعلى في الربعين الأول والثالث هو الشكل 2.

الخطوة 3 كرر الخطوتين 2-1 مع بقية مجالات المتجهات.

تحليل النتائج

4. افترض أن المتجهات في مجال المتجه تمثل قوة. ما العلاقة بين القوة ومقدار المتجه وطوله؟

5. بتمثيل الرياح بمتجه واحد وافتراض أن القوة الناشئة ظلت ثابتة بمنطقة بأكملها. إذا كانت القوة الناشئة عن الرياح ممثلة بعدة متجهات في مجال متجه، فما الافتراض الذي ينبغي التوصل إليه بشأن البعد الثالث؟

استخدام النماذج والتطبيق

6. أكمل الجدول لمجال المتجه $F(x, y) = \langle -y, x \rangle$. ثم مثّل كل متجه بيانيًا.

(x, y)	$\langle -y, x \rangle$	(x, y)	$\langle -y, x \rangle$
(2, 0)		(−2, 1)	
(1, 2)		(−2, 0)	
(2, 1)		(−1, −2)	
(0, 2)		(0, −2)	
(−1, 2)		(1, −2)	
(−2, −1)		(2, −1)	

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الوحدة 8

الاحداثيات القطبية والأعداد المركبة



Chapter Sourced From Precalculus Chapter 9 © 2014

السابق

في السابق، قمت بتحديد المعادلات الديكارتية للقطوع المخروطية وتمثيلها بيانيًا.

الحالي

بعد دراستك لهذه الوحدة ستكون قادرًا على:

- تمثيل الإحداثيات القطبية بيانيًا.
- التحويل بين المعادلات والإحداثيات القطبية والديكارتية.
- تحديد المعادلات القطبية للقطوع المخروطية.
- تحويل الأعداد المركبة بين الصورة القطبية والديكارتية.

لماذا؟ ▲

الحفلات يمكن استخدام المعادلات القطبية لتمثيل أنماط الأصوات للمساعدة في تحديد ترتيب المسرح ومواضع مكبرات الصوت والميكروفون ومستويات الصوت والتسجيل. يمكن استخدام المعادلات القطبية أيضًا في ضبط زوايا الإضاءة والكاميرات عند تصوير الحفلات.

قراءة مسبقة استخدم مقدمات دروس الوحدة 8 للتوصل إلى توقعين أو ثلاثة بشأن الدروس المستفادة من هذه الوحدة.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

الاستعداد للوحدة

أجب عن أسئلة التدريب السريع أدناه.

تدريب سريع

مثّل كل دالة بيانيًا باستخدام حاسبة التمثيل البيانية. حلل التمثيل البياني لتحديد ما إذا كانت كل دالة *زوجية* أم *فردية* أم *غير ذلك*. أثبت إجابتك جبريًا. إذا كانت الدالة زوجية أو فردية، فوضح تماثل التمثيل البياني للدالة.

1. $f(x) = x^2 + 10$
2. $f(x) = -2x^3 + 5x$
3. $g(x) = \sqrt{x + 9}$
4. $h(x) = \sqrt{x^2 - 3}$
5. $g(x) = 3x^5 - 7x$
6. $h(x) = \sqrt{x^2} - 5$
7. **المنطاد** يمكن تمثيل المسافة بالمتر بين منطاد وشخص بواسطة $d(t) = \sqrt{t^2 + 3000}$ ، حيث يمثل t الزمن بالثانية. حلل التمثيل البياني لتحديد ما إذا كانت كل دالة زوجية أم فردية أم غير *ذلك*.

قرّب إلى أقرب جزء من مئة القيم القصوى النسبية أو المطلقة لكل دالة. أذكر قيم x حيث تظهر.

8. $f(x) = 4x^2 - 20x + 24$
9. $g(x) = -2x^2 + 9x - 1$
10. $f(x) = -x^3 + 3x - 2$
11. $f(x) = x^3 + x^2 - 5x$
12. **الصاروخ** تم إطلاق صاروخ في الهواء. تمثل الدالة $h(t) = -16t^2 + 35t + 15$ ارتفاع الصاروخ h بالمتر بعد t ثانية. جد القيمة العظمى المحلية لهذه الدالة.

حدد جميع الزوايا المشتركة في ضلع الانتهاء مع الزاوية المعطاة. ثم جد مع الرسم زاوية موجبة وزاوية سالبة مشتركة في ضلع الانتهاء مع الزاوية المُعطاة.

13. $165°$
14. $205°$
15. $-10°$
16. $\frac{\pi}{6}$
17. $\frac{4\pi}{3}$
18. $-\frac{\pi}{4}$

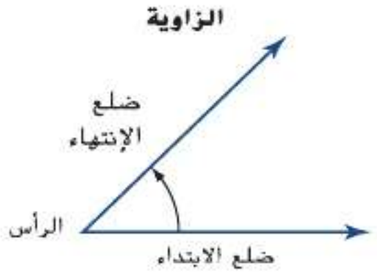
المفردات الجديدة

نظام إحداثي قطبي	polar coordinate system
قطب	pole
المحور القطبي	polar axis
الإحداثيات القطبية	polar coordinates
معادلة قطبية	polar equation
تمثيل بياني قطبي	polar graph
منحنى قلبي الشكل	limaçon
قلبي الشكل	cardioid
بدر	rose
منحنى ذو عروتين	lemniscate
حلزون أرشميدس	spiral of Archimedes
مستوى مركب	complex plane
محور حقيقي	real axis
محور تخيلي	imaginary axis
مستوى أرجاند	Argand plane
قيمة مطلقة لعدد مركب	absolute value of a complex number
صورة قطبية	polar form
صيغة مثلثية	modulus
معامل	argument
فرضية	

مراجعة المفردات

ضلع ابتداء زاوية في الوضع القياسي للشعاع

ضلع الانتهاء لزاوية وضع الشعاع بعد الدوران



قياس الزاوية كمية واتجاه الدوران الضروري لتتحرك من ضلع الابتداء إلى ضلع الانتهاء للزاوية

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

8-1 الإحداثيات القطبية

السابق:
- قمتَ برسم الزوايا الموجبة والسالبة المعطاة بالدرجة والراديان في الوضع القياسي.

الحالي:
1. التمثيل البياني للنقاط باستخدام إحداثياتها القطبية.
2. التمثيل البياني للمعادلات القطبية البسيطة

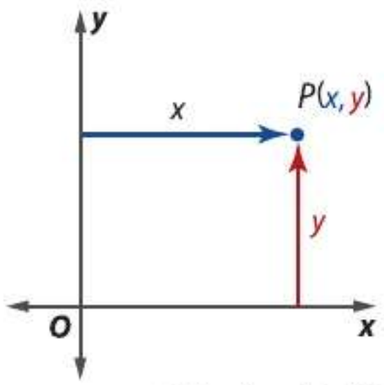
لماذا؟
- لتوفير الطرق والسفر الآمن، يستخدم مراقبو الحركة الجوية أنظمة رادار متقدمة لتوجيه حركة الطائرات. ويضمن هذا إبقاء الطائرات على مسافة كافية من بعضها البعض ومن المعالم على الأرض. يستخدم الرادار قياس الزوايا والمسافة الموجهة لتعيين مواقع الطائرات. ويستطيع المراقبون حينها نقل هذه المعلومات إلى الطيارين.



المفردات الجديدة
- نظام إحداثي قطبي — polar coordinate system
- قطب — pole
- المحور القطبي — polar axis
- الإحداثيات القطبية — polar coordinates
- معادلة قطبية — polar equation
- تمثيل بياني قطبي — polar graph

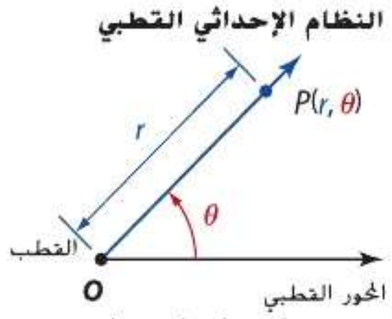
1 التمثيل البياني للإحداثيات القطبية

حتى الآن، رسمتَ المعادلات بنظام إحداثي ديكارتي. عندما يسجل مراقبو الحركة الجوية مواقع الطائرات باستخدام المسافات والزوايا، فهم يقومون باستخدام **نظام إحداثي قطبي** أو **النظام الإحداثي الديكارتي** مستوى قطبي.



في النظام الإحداثي الديكارتي، المحوران x و y مستقيمان أفقي ورأسي على التوالي، ونقطة تقاطعهما O تُسمى نقطة الأصل. يتم تحديد موقع النقطة P بواسطة إحداثيات ديكارتية بالصورة (x, y)، حيث x و y هما *المسافتان الموجهتان* أفقيًا ورأسيًا على التوالي من النقطة. على سبيل المثال، تقع النقطة $(3, -4)$ على مسافة 3 وحدات يمين المحور y و4 وحدات أسفل المحور x.

النظام الإحداثي القطبي



في النظام الإحداثي القطبي، نقطة الأصل نقطة ثابتة O تُسمى **القطب**. **المحور القطبي** هو شعاع ابتداء من القطب، وهو في العادة أفقي وموجه لليمين. يمكن تحديد موقع النقطة P في النظام الإحداثي القطبي بواسطة **الإحداثيات القطبية** بالصورة (r, θ)، حيث r هي المسافة الموجهة من القطب إلى النقطة و θ هي *الزاوية الموجهة* من المحور القطبي إلى $\overrightarrow{OP}$.

للتمثيل البياني لنقطة معطاة بالإحداثيات القطبية، تذكر أن قيمة θ الموجبة تشير إلى التدوير بعكس اتجاه عقارب الساعة من المحور القطبي، بينما القيمة السالبة تشير إلى التدوير باتجاه عقارب الساعة.

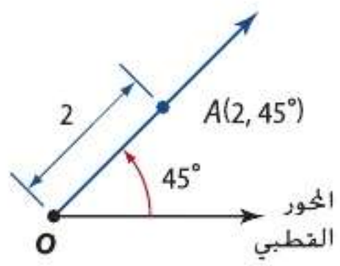
إذا كانت r موجبة، فإن P تقع على ضلع الانتهاء لـ θ. إذا كانت r سالبة، فإن P تقع على الشعاع المقابل لضلع الإنتهاء لـ θ.

المثال 1 التمثيل البياني للإحداثيات القطبية

مثّل كل نقطة بيانيًا.

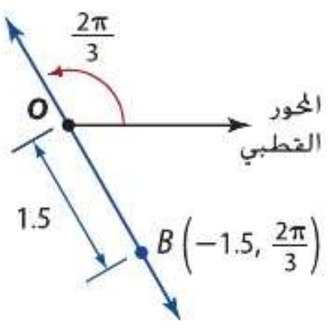
a. $A(2, 45°)$

لأن $\theta = 45°$، ارسم ضلع الانتهاء لزاوية $45°$ بحيث يكون ضلع الابتداء لها هو المحور القطبي. لأن $r = 2$، عيّن نقطة على مسافة وحدتين من القطب على طول ضلع الانتهاء لهذه الزاوية.



b. $B\left(-1.5, \frac{2\pi}{3}\right)$

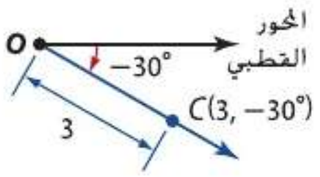
لأن $\theta = \frac{2\pi}{3}$، ارسم ضلع الانتهاء لزاوية $\frac{2\pi}{3}$ بحيث يكون المحور القطبي هو ضلع الابتداء لها. لأن r سالبة، قم بمد ضلع الانتهاء للزاوية في الاتجاه *المقابل* وعيّن نقطة على مسافة 1.5 وحدة من القطب على طول هذا الشعاع الممتد.



حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

c. $C(3, -30°)$

لأن $\theta = -30°$. ارسم ضلع الانتهاء لزاوية $-30°$ بحيث يكون ضلع الابتداء لها هو المحور القطبي. لأن $r = 3$، عيّن نقطة على مسافة 3 وحدات من القطب على طول ضلع الانتهاء لهذه الزاوية.



تمرين موجّه

مـــثّـــل كل نقطة بيانيًا.

1A. $D\left(-1, \frac{\pi}{2}\right)$ **1B.** $E(2.5, 240°)$ **1C.** $F\left(4, -\frac{5\pi}{6}\right)$

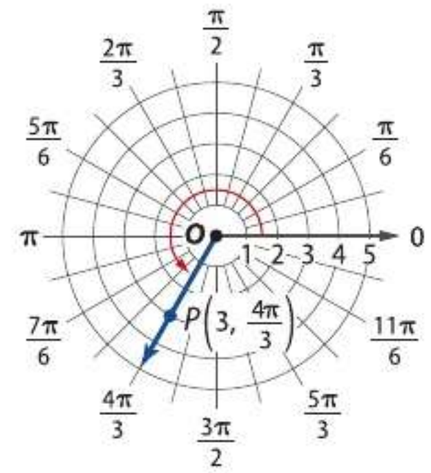
تمامًا كما يتم التمثيل البياني للإحداثيات الديكارتية على شبكة ديكارتية، يتم التمثيل البياني للإحداثيات القطبية على شبكة دائرية أو *قطبية* تمثل المستوى القطبي.

المثال 2 التمثيل البياني للنقاط على شبكة قطبية

مـــثّـــل كل نقطة بيانيًا على شبكة قطبية.

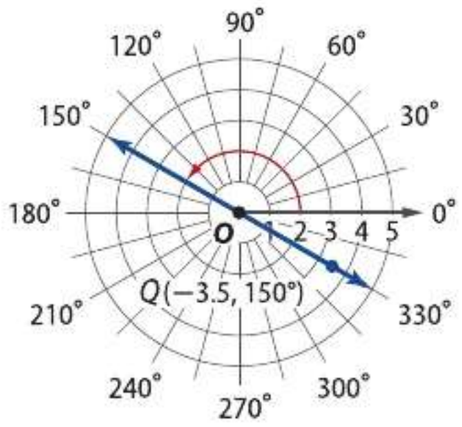
a. $P\left(3, \frac{4\pi}{3}\right)$

لأن $\theta = \frac{4\pi}{3}$. ارسم ضلع الانتهاء لزاوية $\frac{4\pi}{3}$ بحيث يكون المحور القطبي هو ضلع الابتداء لها. لأن $r = 3$، عيّن نقطة على مسافة 3 وحدات من القطب على طول ضلع الانتهاء للزاوية.



b. $Q(-3.5, 150°)$

لأن $\theta = 150°$. ارسم ضلع الانتهاء لزاوية $150°$ بحيث يكون المحور القطبي هو ضلع الابتداء لها. لأن r سالبة، قم بمد ضلع الانتهاء للزاوية في الاتجاه *المقابل* وعيّن نقطة على مسافة 3.5 وحدات من القطب على طول هذا الشعاع الممتد.



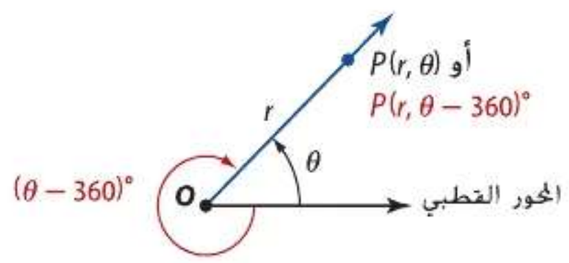
تمرين موجّه

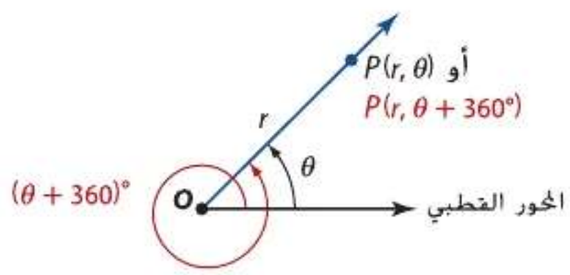
2A. $R\left(1.5, -\frac{7\pi}{6}\right)$ **2B.** $S(-2, -135°)$

نصيحة دراسية

القطب يمكن تمثيل القطب بواسطة $(0, \theta)$، حيث θ هي أي زاوية.

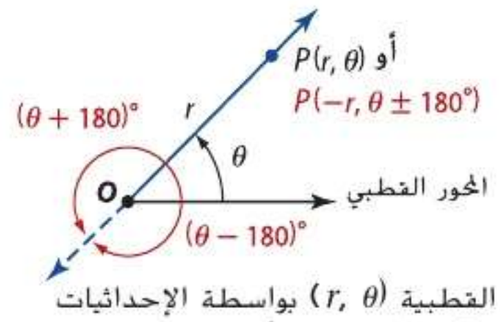
في النظام الإحداثي الديكارتي، لكل نقطة مجموعة فريدة من الإحداثيات. *لا* ينطبق هذا على النظام الإحداثي القطبي. في الدرس 2-4، تعلمتَ أن الزاوية المعطاة لها عدد لانهائي من الزوايا المشتركة في ضلع الانتهاء. وبالتالي، إذا كانت الإحداثيات القطبية لنقطة ما هي (r, θ)، فإن لها أيضًا الإحداثيات القطبية $(r, \theta \pm 360°)$ أو $(r, \theta \pm 2\pi)$ كما هو موضح.





McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

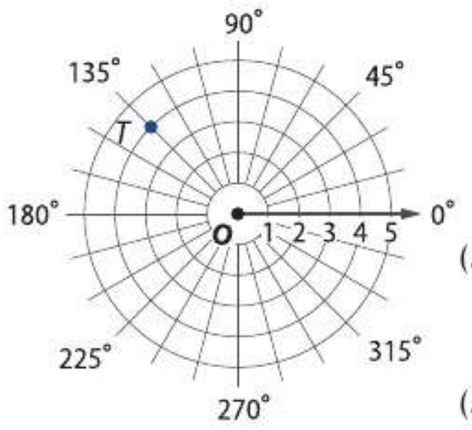
بالإضافة إلى ذلك، لأن r مسافة موجهة، تمثل (r, θ) و $(-r, \theta \pm 180°)$ أو $(-r, \theta \pm \pi)$ النقطة ذاتها كما هو موضح.



بوجه عام، إذا كان n أي عدد صحيح، فيمكن كذلك تمثيل النقطة ذات الإحداثيات القطبية (r, θ) بواسطة الإحداثيات القطبية بالصورة $(r, \theta + 360n°)$ أو $(-r, \theta + (2n + 1)180)$. وبالمثل، إذا كانت θ بالراديان و n أي عدد صحيح، تكون التمثيلات الأخرى لـ (r, θ) بالصورة $(r, \theta + 2n\pi)$ أو $(-r, \theta + (2n + 1)\pi)$.

المثال 3 التمثيلات المتعددة للإحداثيات القطبية

جـد أربعة أزواج مختلفة من الإحداثيات القطبية التي تعيّن النقطة T إذا علمتَ أن $-360° \le \theta \le 360°$.



زوج من الإحداثيات القطبية التي تعيّن النقطة T هو $(4, 135°)$. التمثيلات الثلاثة الأخرى هي كما يلي.

اطرح $360°$ من θ.
$$(4, 135°) = (4, 135° - 360°)$$
$$= (4, -225°)$$

عوض عن r باستخدام $-r$ و اجمع $180°$ مع θ.
$$(4, 135°) = (-4, 135° + 180°)$$
$$= (-4, 315°)$$

عوض عن r باستخدام $-r$ و اطرح $180°$ من θ.
$$(4, 135°) = (-4, 135° - 180°)$$
$$= (-4, -45°)$$

تمرين موجّه

جـد ثلاثة أزواج إضافية من الإحداثيات القطبية التي تعيّن النقطة المعطاة إذا كان $-360° \le \theta \le 360°$ أو $-2\pi \le \theta \le \pi$.

3A. $(5, 240°)$

3B. $\left(2, \frac{\pi}{6}\right)$

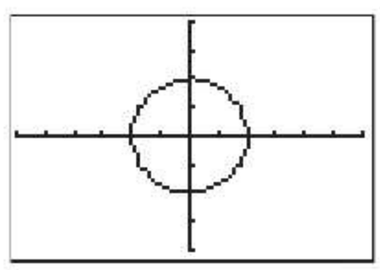
2 التمثيلات البيانية للمعادلات القطبية

المعادلة التي يتم التعبير عنها بدلالة الإحداثيات القطبية تُسمى **معادلة قطبية**. على سبيل المثال، $r = 2 \sin \theta$ هي معادلة قطبية. **التمثيل البياني القطبي** هو مجموعة كل النقاط التي لها الإحداثيات (r, θ) والتي تحقق معادلة قطبية مُعطاة.

تعلمتَ في السابق كيفية التمثيل البياني للمعادلات بالنظام الإحداثي *الديكارتي*. التمثيلات البيانية للمعادلات التي تشتمل على ثوابت مثل $x = 2$ و $y = -3$ تُعتبر أساسية في النظام الإحداثي الديكارتي. وبالمثل، التمثيلات البيانية للمعادلتين القطبيتين $r = k$ و $\theta = k$، حيث k ثابت، تُعتبر أساسية في النظام الإحداثي القطبي.

تلميح تقني

التمثيل البياني للمعادلات القطبية للتمثيل البياني للمعادلة القطبية $r = 2$ على حاسبة التمثيل البياني، اضغط أولاً على MODE وغيّر إعداد التمثيل البياني من FUNC إلى POL. عند الضغط على Y=، لاحظ تغير المتغير التابع من Y إلى r وتغير المتغير المستقل من x إلى θ. مثّل بيانيًا $r = 2$.



$[0, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{16}$ by $[-6, 6]$ scl: 1 by $[-4, 4]$ scl: 1

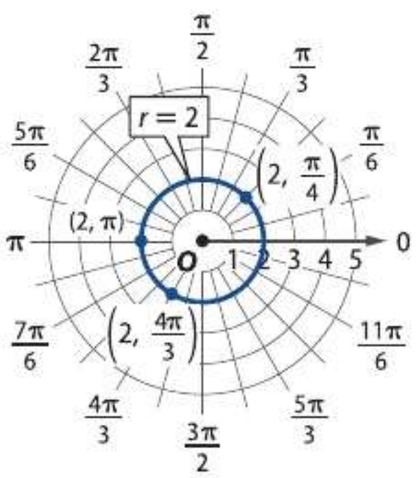
المثال 4 تمثيل المعادلات القطبية بيانيًا

مـثّـل كل معادلة قطبية بيانيًا.

a. $r = 2$

حلول $r = 2$ هما الزوجان المرتبان بالصورة $(2, \theta)$، حيث θ أي عدد حقيقي.

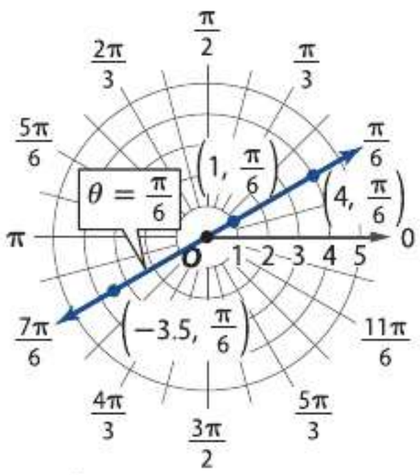
يتكون التمثيل البياني من جميع النقاط التي تبعد وحدتين عن القطب، بحيث يكون التمثيل البياني دائرة مركزها عند نقطة الأصل ونصف قطرها 2.



حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

b. $\theta = \frac{\pi}{6}$

حلول $\theta = \frac{\pi}{6}$ هما الزوجان المرتبان بالصورة $\left(r, \frac{\pi}{6}\right)$، حيث r أي عدد حقيقي. يتكون التمثيل البياني من جميع النقاط على المستقيم والتي تصنع الزاوية $\frac{\pi}{6}$ مع المحور القطبي الموجب.



تمرين موجّه

مـــثّـــل كل معادلة قطبية بيانيًا.

4A. $r = 3$

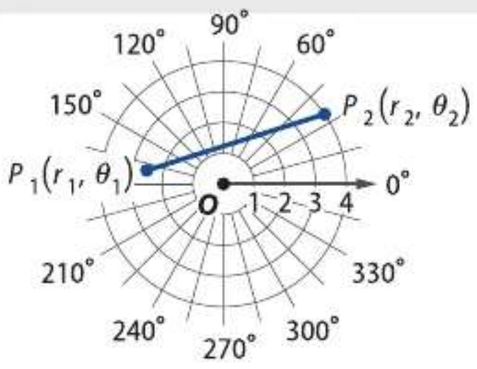
4B. $\theta = \frac{2\pi}{3}$

يمكن إيجاد المسافة بين نقطتين في المستوى القطبي باستخدام الصيغة التالية.

المفهوم الأساسي صيغة المسافة القطبية

إذا كانت $P_1(r_1, \theta_1)$ و $P_2(r_2, \theta_2)$ نقطتين في المستوى القطبي، فإن المسافة P_1P_2 معطاة بواسطة

$$\sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_2 - \theta_1)}$$



انتبه!

الوضع عند استخدام صيغة المسافة القطبية، إذا تم كانت θ بالدرجة، فتأكد من ضبط حاسبة التمثيل البياني على وضع الدرجات.

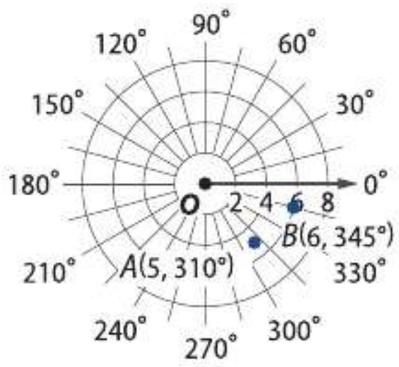
ستبرهن على هذه الصيغة في التمرين 63.

مثال 5 من الحياة اليومية إيجاد المسافة بين الإحداثيات القطبية

الحركة الجوية **يتتبع مراقب حركة جوية طائرتين تطيران على الارتفاع ذاته. إحداثيات الطائرتين هي $A(5, 310°)$ و $B(6, 345°)$، حيث يتم قياس المسافة الموجهة بالكيلومترات.**

a. ارسم تمثيلًا بيانيًا لهذا الموقف.

تقع الطائرة A على مسافة 5 km من القطب على ضلع الانتهاء للزاوية 310°. وتقع الطائرة B على مسافة 6 km من القطب على ضلع الانتهاء للزاوية 345°، كما هو موضح.



b. إذا كانت اللوائح تحظر على الطائرات المرور ضمن مسافة 3 km من بعضها البعض، فهل تنتهك الطائرتان اللوائح؟ اشرح. استخدم صيغة المسافة القطبية.

صيغة المسافة القطبية

$(r_2, \theta_2) = (6, 345°)$ و $(r_1, \theta_1) = (5, 310°)$

$$AB = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_2 - \theta_1)}$$
$$= \sqrt{5^2 + 6^2 - 2(5)(6)\cos(345° - 310°)}$$

تقريبًا $= 3.44$

يفصل بين الطائرتين مسافة 3.44 km، إذًا فهما لا تنتهكان هذه اللائحة.

تمرين موجّه

5. السفن يتتبع رادار بحري حاملتي طائرات. إحداثيات الحاملتين هي $(8, 150°)$ و $(3, 65°)$، حيث r بالكيلومترات.

A. ارسم تمثيلاً بيانيًا لهذا الموقف.

B. ما المسافة بين حاملتي الطائرات؟



الربط بالحياة اليومية

طورت ألمانيا جهاز رادار في 1936 يمكنه اكتشاف الطائرات في مدى نصف قطره 128 km. وفي العام التالي، حازت ألمانيا على الفضل في تزويد بارجة، *جراف سبي*، بأول نظام رادار.

المصدر: تاريخ صناعة أشباه الموصلات العالمية

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تمارين

مـثّـل كل نقطة بيانيًا على شبكة قطبية. (المثالان 1 و2)

1. $R(1, 120^\circ)$
2. $T(-2.5, 330^\circ)$
3. $F\left(-2, \frac{2\pi}{3}\right)$
4. $A\left(3, \frac{\pi}{6}\right)$
5. $Q\left(4, -\frac{5\pi}{6}\right)$
6. $B(5, -60^\circ)$
7. $D\left(-1, -\frac{5\pi}{3}\right)$
8. $G\left(3.5, -\frac{11\pi}{6}\right)$
9. $C(-4, \pi)$
10. $M(0.5, 270^\circ)$
11. $P(4.5, -210^\circ)$
12. $W(-1.5, 150^\circ)$

13. **الرماية** يتكون الهدف في منافسة الرماية على الأهداف من 10 دوائر متحدة المركز على مسافات متساوية مدرجة من 1 إلى 10 نقاط من الدائرة الخارجية إلى المركز. افترض أن أحد الرماة يستخدم هدفًا نصف قطره 60 cm ويطلق السهام عند $(57°, 45°)$ و$(41°, 315°)$ و$(15°, 240°)$. (المثالان 1 و2)



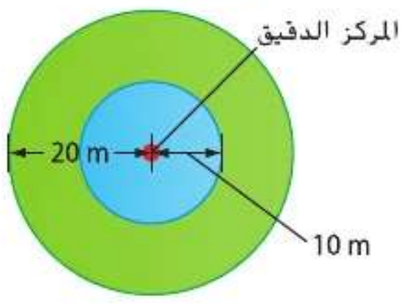
a. عيّن نقاط إصابة الهدف التي يحققها الرامي على شبكة قطبية.

b. كم عدد النقاط التي يحرزها الرامي؟

جـد ثلاثة أزواج مختلفة من الإحداثيات القطبية التي تعيّن النقطة المعطاة إذا كان $-360° \le \theta \le 360°$ أو $-2\pi \le \theta \le 2\pi$. (المثال 3)

14. $(1, 150^\circ)$
15. $(-2, 300^\circ)$
16. $\left(4, -\frac{7\pi}{6}\right)$
17. $\left(-3, \frac{2\pi}{3}\right)$
18. $\left(5, \frac{11\pi}{6}\right)$
19. $\left(-5, -\frac{4\pi}{3}\right)$
20. $(2, -30^\circ)$
21. $(-1, -240^\circ)$

22. **القفز الحر** في منافسات الهبوط الدقيق، يحاول لاعبو القفز الحر الهبوط في أقرب نقطة ممكنة من "المركز الدقيق"، مركز هدف علامته قرص قطره متران. (مثال 4)



a. اكتب المعادلات القطبية التي تمثل الحدود الثلاثة للهدف.

b. مثّل المعادلات بيانيًا على شبكة قطبية.

مـثّـل كل معادلة قطبية بيانيًا. (المثال 4)

23. $r = 4$
24. $\theta = 225^\circ$
25. $r = 1.5$
26. $\theta = -\frac{7\pi}{6}$
27. $\theta = -15^\circ$
28. $r = -3.5$

29. **لوحة السهام** نصف قطر إحدى لوحات السهام 225 mm. نقطة الهدف لها قسمان. قسم 50 نقطة نصف قطره 6.3 ملّيمترًا. قسم 25 نقطة يحيط بقسم 50 نقطة بمقدار 9.7 mm إضافية. (المثال 4)

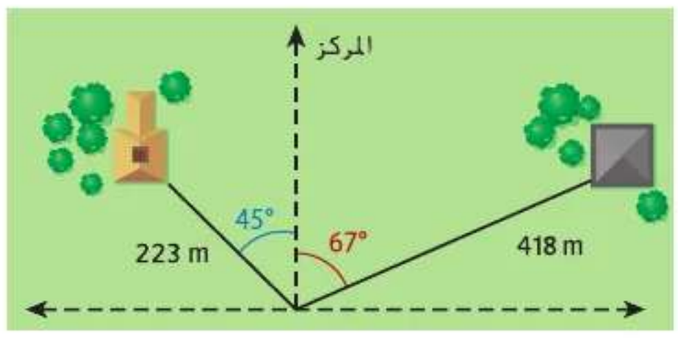
a. اكتب مع التمثيل البياني المعادلات القطبية التي تمثل حدود لوحة السهام وهذين القسمين.

b. ما النسبة المئوية لمساحة نقطة الهدف من مساحة لوحة السهام؟

جـد المسافة بين كل زوج من النقاط. (المثال 5)

30. $(2, 30^\circ), (5, 120^\circ)$
31. $\left(3, \frac{\pi}{2}\right), \left(8, \frac{4\pi}{3}\right)$
32. $(6, 45^\circ), (-3, 300^\circ)$
33. $\left(7, -\frac{\pi}{3}\right), \left(1, \frac{2\pi}{3}\right)$
34. $\left(-5, \frac{7\pi}{6}\right), \left(4, \frac{\pi}{6}\right)$
35. $(4, -315^\circ), (1, 60^\circ)$
36. $(-2, -30^\circ), (8, 210^\circ)$
37. $\left(-3, \frac{11\pi}{6}\right), \left(-2, \frac{5\pi}{6}\right)$
38. $\left(1, -\frac{\pi}{4}\right), \left(-5, \frac{7\pi}{6}\right)$
39. $(7, -90^\circ), (-4, -330^\circ)$
40. $\left(8, -\frac{2\pi}{3}\right), \left(4, -\frac{3\pi}{4}\right)$
41. $(-5, 135^\circ), (-1, 240^\circ)$

42. **المسح** يعمل أحد المساحين على وضع خريطة لقطعة أرض سيتم بناء مشروع إسكان جديد عليها ويحدد أحد المعالم على مسافة 223 m من المركز وبزاوية 45° على يسار المركز. يوجد معلَم آخر على مسافة 418 m من المركز وبزاوية 67° على يمين المركز. حدد المسافة بين المعلَمين. (المثال 5)



43. **المراقبة** تتحرك كاميرا مراقبة مثبتة وتراقب أحد أجزاء منطقة دائرية محددة بواسطة $-60° \le \theta \le 150°$ و $0 \le r \le 40$، حيث تُقاس r بالمتر.

a. ارسم تمثيلاً بيانيًا لمنطقة تغطية الكاميرا الأمنية على شبكة قطبية.

b. جـد مساحة المنطقة.

جـد زوجًا مختلفًا للإحداثيات القطبية لكل نقطة بحيث تكون $0 \le \theta \le 180°$ أو $0 \le \theta \le \pi$.

44. $(5, 960^\circ)$
45. $\left(-2.5, \frac{5\pi}{2}\right)$
46. $\left(4, \frac{11\pi}{4}\right)$
47. $(1.25, -920^\circ)$
48. $\left(-1, -\frac{21\pi}{8}\right)$
49. $(-6, -1460^\circ)$

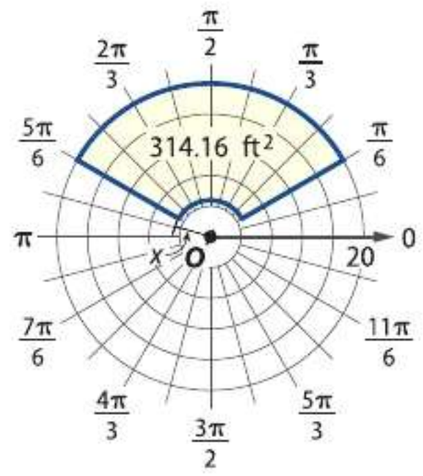
McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف

50. المسرح المدرج افترض أن مغنيًا يغني على مسرح مدرج. يمكننا تمثيل هذا الموقف بالإحداثيات القطبية من خلال افتراض أن المغني يقف عند القطب ويواجه اتجاه المحور القطبي. ويمكن حينها وصف المقاعد على أنها تشغل المساحة المحددة بواسطة $-45° \le \theta \le 45°$ و $30 \le r \le 240$، حيث تقاس r بالمتر.

a. ارسم تمثيلاً بيانيًا لهذه المنطقة على شبكة قطبية.

b. إذا كان كل شخص يحتاج إلى مساحة $5\ m^2$، فكم عدد المقاعد التي يمكن للمسرح المدرج استيعابها؟

51. الأمن يعمل مصباح أمني تم تركيبه فوق منزل على إضاءة جزء من مساحة دائرة محددة بواسطة $\frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{5\pi}{6}$ و $x \le r \le 20$، حيث تقاس r بالمتر. إذا كانت المساحة الإجمالية للمنطقة هي تقريبًا $314.16\ m^2$، فجد x.



جد قيمة للإحداثي الناقص تحقق الشرط التالي.

52. $P_1 = (3, 35°); P_2 = (r, 75°); P_1P_2 = 4.174$

53. $P_1 = (5, 125°); P_2 = (2, \theta); P_1P_2 = 4; 0 \le \theta \le 180°$

54. $P_1 = (3, \theta); P_2 = \left(4, \frac{7\pi}{9}\right); P_1P_2 = 5; 0 \le \theta \le \pi$

55. $P_1 = (r, 120°); P_2 = (4, 160°); P_1P_2 = 3.297$

56. التمثيلات المتعددة في هذه المسألة، سنقوم باستقصاء العلاقة بين الإحداثيات القطبية والإحداثيات الديكارتية.

a. بيانيًا عيّن النقطتين $A\left(2, \frac{\pi}{3}\right)$ و $B\left(4, \frac{5\pi}{6}\right)$ على شبكة قطبية. قم برسم نظام إحداثي ديكارتي على الشبكة القطبية بحيث تتطابق نقطتي الأصل ويحاذي المحور x المحور القطبي. يجب أن يحاذي المحور y المستقيم $\theta = \frac{\pi}{2}$. اصنع زاوية قائمة واحدة من خلال توصيل النقطة A بنقطة الأصل بشكل متعامد على المحور x. اصنع زاوية قائمة أخرى من خلال توصيل النقطة B بنقطة الأصل بشكل متعامد على المحور x.

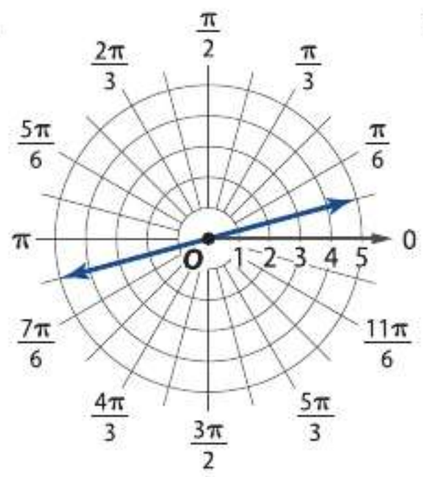
b. عدديًا احسب أطوال أضلاع كل مثلث.

c. تحليليًا ما العلاقة بين أطوال الأضلاع والإحداثيات الديكارتية لكل نقطة؟

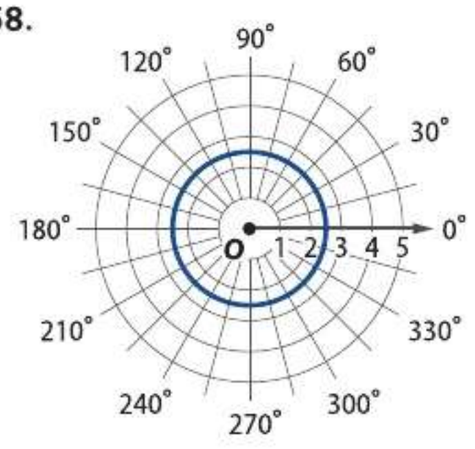
d. تحليليًا اشرح العلاقة بين الإحداثيات القطبية (r, θ) والإحداثيات الديكارتية (x, y).

اكتب معادلة لكل تمثيل بياني قطبي.

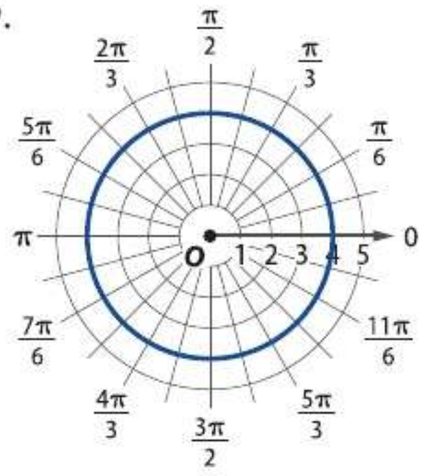
57.



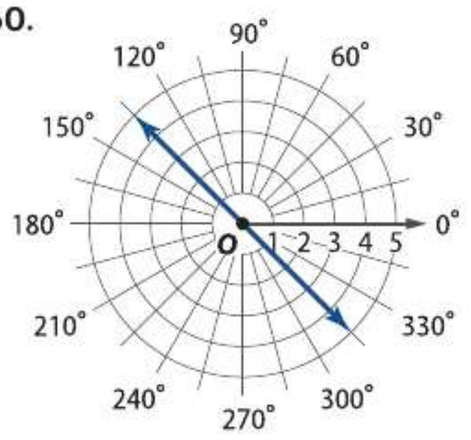
58.



59.



60.



مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

61. التبرير اشرح سبب عدم أهمية ترتيب النقاط المستخدمة في صيغة المسافة القطبية. بمعنى، لماذا يمكنك اختيار أن تكون نقطة P_1 والأخرى P_2؟

62. التحدي قم بإيجاد زوج مرتب من إحداثيات قطب لتمثيل نقطة بالإحداثيات الديكارتية $(-3, -4)$. قرّب الزاوية لأقرب درجة.

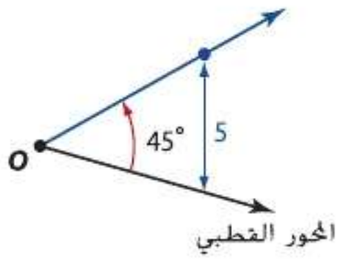
63. الإثبات أثبت أن المسافة بين نقطتين بالإحداثيات القطبية $P_1(r_1, \theta_1)$ و $P_2(r_2, \theta_2)$ هي

$$P_1P_2 = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_2 - \theta_1)}.$$

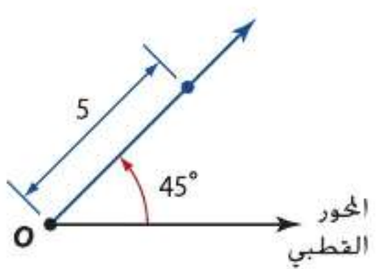
64. الاستنتاج صف ما يحدث لصيغة المسافة القطبية عندما تكون $\theta_2 - \theta_1 = \frac{\pi}{2}$. اشرح هذا التغير.

65. تحليل الخطأ رسمت ريهام وسالي التمثيل البياني للإحداثيات القطبية $(5, 45°)$. فهل أيٌّ منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.

ريهام



سالي



66. الكتابة في الرياضيات خمّن سبب عدم كفاية الحصول على الإحداثيات القطبية لطائرة لتحديد موقعها بدقة.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مراجعة شاملة

جـــد ناتج الضرب النقطي لكل من u و v. ثم حدد ما إذا كان u و v متعامدين.

67. $\mathbf{u} = \langle 4, 10, 1 \rangle, \mathbf{v} = \langle -5, 1, 7 \rangle$

68. $\mathbf{u} = \langle -5, 4, 2 \rangle, \mathbf{v} = \langle -4, -9, 8 \rangle$

69. $\mathbf{u} = \langle -8, -3, 12 \rangle, \mathbf{v} = \langle 4, -6, 0 \rangle$

إذا كان $\mathbf{a} = \langle -4, 3, -2 \rangle$ **و** $\mathbf{b} = \langle 2, 5, 1 \rangle$ **و** $\mathbf{c} = \langle 3, -6, 5 \rangle$. **فجـــد كل مما يلي:**

70. $3\mathbf{a} + 2\mathbf{b} + 8\mathbf{c}$

71. $-2\mathbf{a} + 4\mathbf{b} - 5\mathbf{c}$

72. $5\mathbf{a} - 9\mathbf{b} + \mathbf{c}$

لكل معادلة، حدد الرأس والبؤرة ومعادلة محور التماثل والدليل. ثم مثّل القطع المكافئ بيانيًا.

73. $-14(x - 2) = (y - 7)^2$

74. $(x - 7)^2 = -32(y - 12)$

75. $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{19}{2}$

76. المعرض الوطني إذا اشترى كل من عمر وعلي العدد الموضح أدناه من تذاكر الألعاب والأراجيح. فما سعر كل نوع من التذاكر؟

الشخص	نوع التذكرة	التذاكر	الإجمالي (AED)
عمر	لعبة أرجوحة	6 15	93
علي	لعبة أرجوحة	7 12	81

اكتب المصفوفة الموسعة لنظام المعادلات الخطية.

77.
$$12w + 14x - 10y = 23$$
$$4w - 5y + 6z = 33$$
$$11w - 13x + 2z = -19$$
$$19x - 6y + 7z = -25$$

78.
$$-6x + 2y + 5z = 18$$
$$5x - 7y + 3z = -8$$
$$y - 12z = -22$$
$$8x - 3y + 2z = 9$$

79.
$$x + 8y - 3z = 25$$
$$2x - 5y + 11z = 13$$
$$-5x + 8z = 26$$
$$y - 4z = 17$$

حُـــلّ كل معادلة لجميع قيم x.

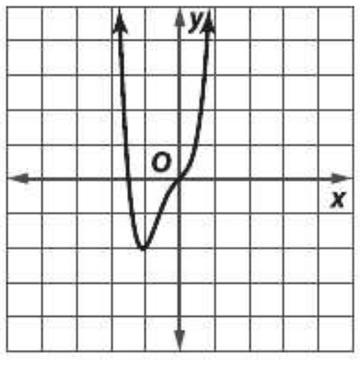
80. $2\cos^2 x + 5\sin x - 5 = 0$

81. $\tan^2 x + 2\tan x + 1 = 0$

82. $\cos^2 x + 3\cos x = -2$

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

83. SAT/ACT إذا كان الشكل يوضح أحد أجزاء التمثيل البياني لـــ $f(x)$. فأي مما يلي يمكن أن يكون مدى $f(x)$؟



A $\{y \mid y \geq -2\}$

B $\{y \mid y \leq -2\}$

C $\{y \mid -2 < y < 1\}$

D $\{y \mid -2 \leq y \leq 1\}$

E $\{y \mid y > -2\}$

84. مراجعة أي مما يلي الصورة المُركّبة لـــ $\overrightarrow{RS}$ بنقطة البداية $R(-5, 3)$ ونقطة النهاية $S(2, -7)$؟

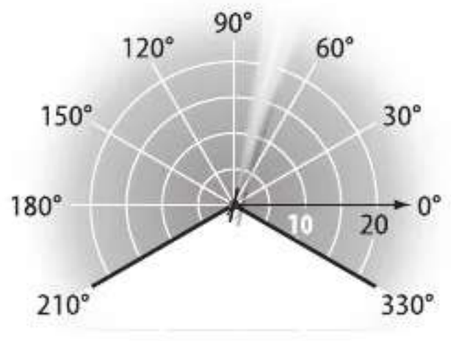
F $\langle 7, -10 \rangle$

G $\langle -3, 10 \rangle$

H $\langle -7, 10 \rangle$

J $\langle -3, -10 \rangle$

85. رشاش العشب الموضح يمكنه تغطية جزء من منطقة دائرية تحدده المتباينتان القطبيتان $-30° \leq \theta \leq 210°$ و $0 \leq r \leq 20$. حيث تُقاس r بالمتر. ما المقدار التقريبي لمساحة هذه المنطقة؟



A $821\ m^2$

B $838\ m^2$

C $852\ m^2$

D $866 m^2$

86. مراجعة ما نوع المخروط الذي يمثله $25y^2 = 400 + 16x^2$؟

F دائرة

G قطع ناقص

H قطع زائد

J قطع مكافئ

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الاستكشاف

8-2 استكشاف التمثيلات البيانية للمعادلات القطبية

مختبر تقنية التمثيل البياني

الهدف

- استخدام حاسبة التمثيل البياني لاسكتشاف أشكال التمثيلات البيانية للمعادلات القطبية وتماثلها.

في الدرس 1-8، قمت بتمثيل الإحداثيات القطبية والمعادلات القطبية البسيطة بيانيًا على النظام الإحداثي القطبي. والآن سوف تستكشف شكل التمثيلات البيانية الأكثر تعقيدًا للمعادلات القطبية وتماثلها عبر استخدام حاسبة التمثيل البياني.

نصيحة دراسية

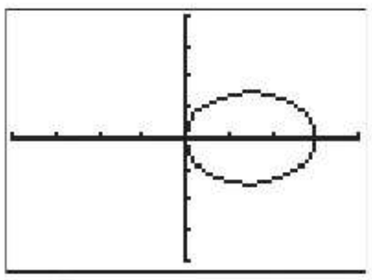
حوّل النافذة إلى الشكل المربّع لعرض التمثيلات البيانية في هذا النشاط دون أيّ تشويه، حوّل النافذة إلى الشكل المربع عبر اختيار ZSquare تحت القائمة ZOOM .

النشاط تمثيل المعادلات القطبية بيانيًا

مـثّـل كل معادلة بيانيًا. ثم صِف شكل التمثيل البياني وتماثله.

a. $r = 3 \cos \theta$

أولاً، غيّر نمط التمثيل البياني إلى النمط القطبي ونمط الزاوية إلى الراديان. بعد ذلك، أدخل $r = 3 \cos \theta$ من أجل r_1 في قائمة Y= . استخدم نافذة العرض المبيّنة أدناه.

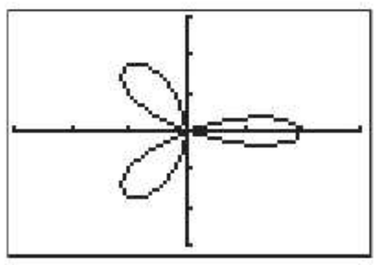


$[0, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{24}$ by $[-4, 4]$ scl: 1 by $[-4, 4]$ scl: 1

التمثيل البياني لـ $r = 3 \cos \theta$ هو دائرةٌ مركزها (1.5, 0) ونصف قطرها 1.5 وحدة. التمثيل البياني متماثل بالنسبة للمحور القطبي.

b. $r = 2 \cos 3\theta$

امسح المعادلة الواردة في القسم a في القائمة Y = وأدخل $r = 2 \cos 3\theta$. استخدم النافذة المبيّنة.

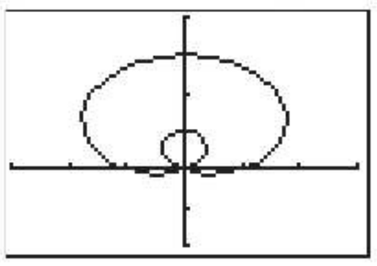


$[0, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{24}$ by $[-3, 3]$ scl: 1 by $[-3, 3]$ scl: 1

التمثيل البياني لـ $r = 2 \cos 3\theta$ منحنًى قطبيّ كلاسيكيّ يدعى منحنى الوردة، وسنتناوله في الدرس 2-8. للتمثيل البياني 3 بتلات، وهو متماثل بالنسبة للمحور القطبي.

c. $r = 1 + 2 \sin \theta$

امسح المعادلة الواردة في القسم b في القائمة Y =. وأدخل $r = 1 + 2 \sin \theta$. اضبط النافذة لتعرض التمثيل البياني بكامله.



$[0, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{24}$ by $[-3, 3]$ scl: 1 by $[-2, 4]$ scl: 1

التمثيل البياني لـ $r = 1 + 2 \sin \theta$ منحنًى قطبيّ كلاسيكيّ يدعى المنحنى قلبي الشكل، وسنتناوله في الدرس 2-8.

للتمثيل البياني منحنًى ذو حلقة داخلية، وهو متماثلٌ بالنسبة للمستقيم $\theta = \frac{\pi}{2}$.

تمارين

مـثّـل كل معادلة بيانيًا. ثم صِف شكل التمثيل البياني وتماثله.

1. $r = -3 \cos \theta$
2. $r = 3 \sin \theta$
3. $r = -3 \sin \theta$
4. $r = 2 \cos 4\theta$
5. $r = 2 \cos 5\theta$
6. $r = 2 \cos 6\theta$
7. $r = 2 + 4 \sin \theta$
8. $r = 1 - 3 \sin \theta$
9. $r = 1 + 2 \sin (-\theta)$

تحليل النتائج

10. **سؤال تحليلي** اشرح كيف تؤثر كل قيمةٍ في التمثيل البياني للمعادلة المعطاة.
    a. قيمة n في $r = a \cos n\theta$
    b. قيمة $|a|$ في $r = b \pm a \sin n\theta$

11. **التخمين** صف دون التمثيل البياني للمتباينة $r = 10 \cos 24\theta$. شكل التمثيل البياني لها وتماثله. وضّح استنتاجك.

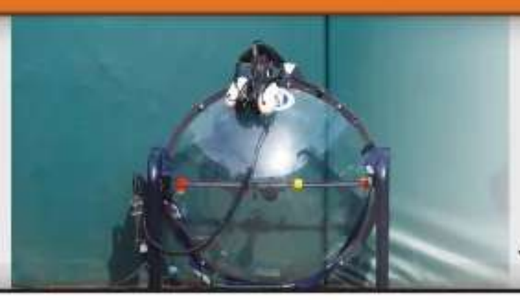
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

8-2 التمثيلات البيانية للمعادلات القطبية

السابق:
- قمت بتمثيل الدوال بيانيًا في النظام الإحداثي الديكارتي.

الحالي:
1. تمثيل المعادلات القطبية بيانيًا.
2. تحديد المنحنيات الكلاسيكية وتمثيلها بيانيًا.

لماذا؟
- لتقليل الضجيج في الخلفية، تستخدم الشبكات التي تذيع الأحداث الرياضية مكبرات صوت اتجاهية لالتقاط أصوات المباراة. وتتسم مكبرات الصوت الاتجاهية بقدرتها على التقاط الصوت الصادر من اتجاه أو منطقة معينة بشكل أساسي. ويمكن التعبير عن الأصوات التي تستطيع مكبرات الصوت هذه التقاطها على هيئة دوال قطبية.



المفردات الجديدة

منحنى حلزون بسكال limaçon
قلبي الشكل cardioid
منحنى الوردة rose
منحنى ذو عروتين lemniscate
حلزون أرشميدس spiral of Archimedes

1 التمثيلات البيانية للدوال القطبية عندما مثّلت المعادلات بيانيًا على نظام إحداثي ديكارتي، بدأت باستخدام معادلة للحصول على مجموعة من الأزواج المرتبة. بعد ذلك حددت موضع النقاط على هذه الإحداثيات ووصلت بينها بمنحنى بسيط. في هذا الدرس، سوف نتناول تمثيل المعادلات القطبية بيانيًا بطريقة مشابهة.

المثال 1 تمثيل المعادلات القطبية بتحديد النقاط

مثّل كل معادلة بيانيًا.

a. $r = \cos \theta$

اصنع جدول قيم لإيجاد قيم r المتوافقة مع قيم θ المختلفة على الفترة $[0, 2\pi]$. وقرّب كل قيمة من قيم r إلى أقرب جزء من عشرة.

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$r = \cos \theta$	1	0.9	0.5	0	-0.5	-0.9	-1	-0.9	-0.5	0	0.5	0.9	1

مثّل الأزواج المرتبة (r, θ) بيانيًا ووصل بينها بمنحنى بسيط. يظهر أن التمثيل البياني الموضح في الشكل 8.2.1 عبارة عن دائرة مركزها عند $(0.5, 0)$ ونصف قطرها مقداره 0.5 وحدة.

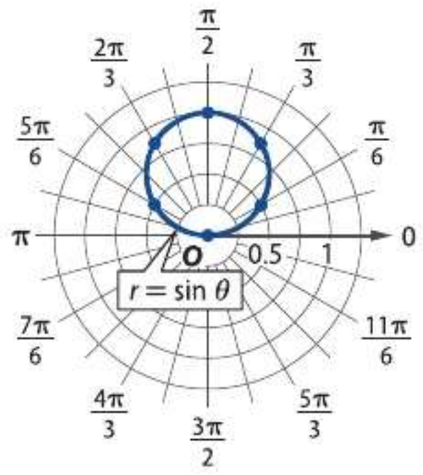
b. $r = \sin \theta$

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$r = \sin \theta$	0	0.5	0.9	1	0.9	0.5	0	−0.5	−0.9	−1	−0.9	−0.5	0

مثّل الأزواج المرتبة بيانيًا ووصل بينها بمنحنى بسيط. يظهر أن التمثيل البياني الموضح في الشكل 8.2.2 عبارة عن دائرة مركزها عند $\left(0.5, \frac{\pi}{2}\right)$ ونصف قطرها مقداره 0.5 وحدة.



الشكل 8.2.1



الشكل 8.2.2

تمرين موجّه

1A. $r = -\sin \theta$ **1B.** $r = 2 \cos \theta$ **1C.** $r = \sec \theta$

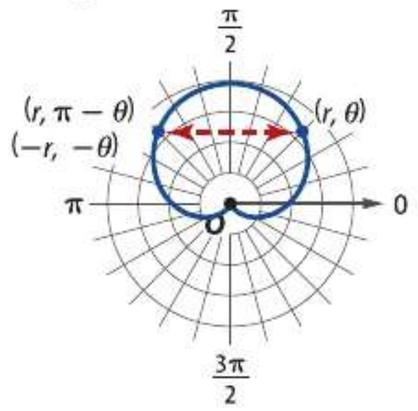
لاحظ أنه مع تزايد θ في الفترة $[0, 2\pi]$، تم رسم كل تمثيل بياني مرتين. وهذا لأن الإحداثيات القطبية التي حصلنا عليها عند الفترة $[0, \pi]$ تمثل النقاط نفسها التي حصلنا عليها عند الفترة $[\pi, 2\pi]$.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

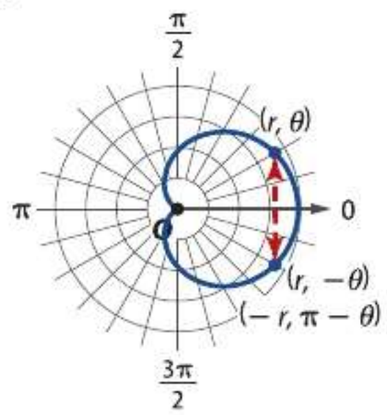
مثلما تساعد معرفة ما إذا كان التمثيل البياني في النظام الإحداثي الديكارتي متماثلاً على المحور x أو المحور y أو نقطة الأصل، فإن معرفة ما إذا كان التمثيل البياني للمعادلة القطبية متماثلاً يمكن أن يساعد على تقليل عدد النقاط اللازمة لرسم التمثيل البياني للمعادلة. يمكن أن تكون التمثيلات البيانية للمعادلات القطبية متماثلة على الخط $\theta = \frac{\pi}{2}$ أو المحور القطبي، أو القطب، مثلما موضح بالأسفل.

المفهوم الأساسي تماثل التمثيلات البيانية القطبية

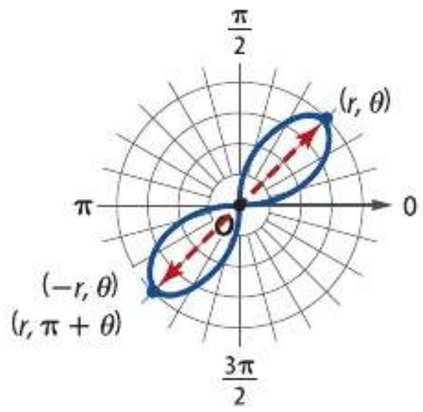
تماثل على الخط $\theta = \frac{\pi}{2}$



تماثل على المحور القطبي



تماثل على القطب



تقدم التحديدات البيانية بالأعلى طريقة لاختبار المعادلة القطبية للتحقق من وجود تماثل. على سبيل المثال، إذا نتج عن استبدال (r, θ) في معادلة قطبية ما بـ $(r, -\theta)$ أو $(-r, \pi - \theta)$ معادلة مكافئة، فإن تمثيلها البياني متماثل على المحور القطبي. وإذا اجتازت المعادلة أحد اختبارات التماثل، فهذا كافٍ لضمان أن المعادلة لها هذا النوع من التماثل. ولكن العكس ليس صحيحًا. فإذا فشلت معادلة قطبية في اجتياز جميع هذه الاختبارات، فقد لا يزال التمثيل البياني متماثلًا.

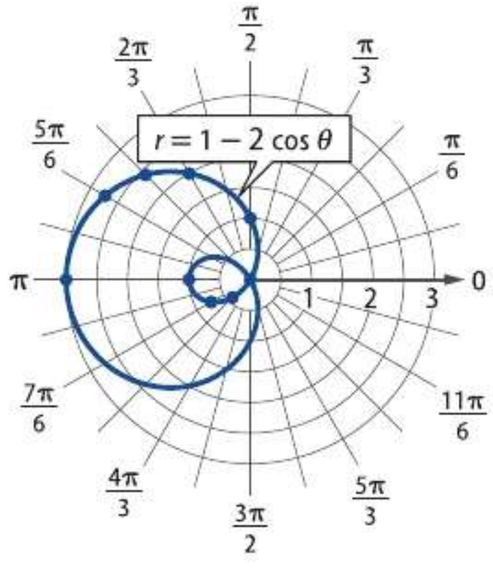
المثال 2 التماثل حول المحور القطبي

استخدم التماثل لتمثيل $r = 1 - 2 \cos \theta$ بيانيًا.

استبدال (r, θ) بـ $(r, -\theta)$ ينتج عنه $r = 1 - 2 \cos (-\theta)$. نظرًا لأن جيب التمام دالة زوجية، $\cos (-\theta) = \cos \theta$. إذًا يتم تبسيط هذه المعادلة إلى $r = 1 - 2 \cos \theta$. ونظرًا لأن الاستبدال نتج عنه معادلة مكافئة للمعادلة الأصلية، فإن التمثيل البياني لهذه المعادلة متماثل حول المحور القطبي.

بسبب هذا التماثل، تحتاج فقط إلى عمل جدول قيم لإيجاد قيم r المتوافقة مع θ في الفترة $[0, \pi]$.

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$r = 1 - 2 \cos \theta$	−1	−0.7	−0.4	0	1	2	2.4	2.7	3



بتحديد موضع هذه النقاط واستخدام التماثل حول المحور القطبي، تحصل على التمثيل البياني الموضح.

يطلق على هذا النوع من المنحنيات اسم **حلزون بسكال**. تحتوي بعض منحنيات حلزون بسكال على حلقة داخلية مثل هذا المنحنى. والبعض الآخر يصل إلى نقطة معينة أو تكون له نقرة، أو مجرد منحنى للخارج.

نصيحة دراسية

تمثيل المعادلات القطبية بيانيًا

من المألوف تمثيل الدوال القطبية بيانيًا بوحدات الراديان بدلاً من الدرجات.

تمرين موجّه

استخدم التماثل لتمثيل كل معادلة بيانيًا.

2A. $r = 1 - \cos \theta$

2B. $r = 2 + \cos \theta$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

في المثالين 1 و 2، لاحظ أن التمثيلين البيانيين $r = \cos \theta$ و $r = 1 - 2 \cos \theta$ متماثلان على المحور القطبي، بينما التمثيل البياني $r = \sin \theta$ متماثل على الخط $\theta = \frac{\pi}{2}$. يمكن تعميم هذه الملاحظات كالآتي.

المفهوم الأساسي اختبارات سريعة على التماثل في التمثيلات البيانية القطبية

الشرح

يكون التمثيل البياني لدالة قطبية متماثلاً على

- المحور القطبي إذا كانت الدالة $\cos \theta$
- الخط $\theta = \frac{\pi}{2}$ إذا كانت الدالة $\sin \theta$.

مثال

التمثيل البياني لـ $r = 3 + \sin \theta$ متماثل على الخط $\theta = \frac{\pi}{2}$.

يمكن ضبط هذه الاختبارات لحالات معينة في التمرينين 66–65.

يمكن استخدام التناظر لتمثيل الدوال القطبية التي تعبر عن مواقف من الحياة اليومية بيانيًا.

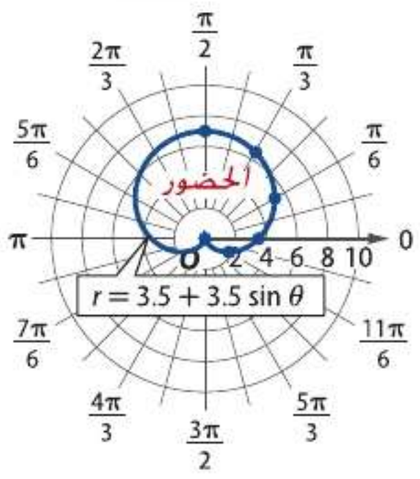
مثال 3 من الحياة اليومية تماثل حول الخط $\theta = \frac{\pi}{2}$

تكنولوجيا الصوتيات خلال إحدى الحفلات، وُضِع مكبر صوت اتجاهي في مواجهة الحضور بمنتصف خشبة المسرح من أجل التقاط ضجيج الحشد في تسجيل حي. يمكن تمثيل مجال الصوت الذي يلتقطه مكبر الصوت بالمعادلة $r = 3.5 + 3.5 \sin \theta$. افترض أن واجهة خشبة المسرح في اتجاه الشمال تمامًا.

a. مثّل النمط القطبي لمكبر الصوت بيانيًا.

نظرًا لأن هذه المعادلة القطبية دالة لدالة جيب التمام، فإنها متماثلة عند الخط $\theta = \frac{\pi}{2}$. لذلك، ارسم جدولاً واحسب قيم r عند $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

θ	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$r = 3.5 + 3.5 \sin \theta$	0	0.5	1.0	1.8	3.5	5.25	6.0	6.5	7



بتحديد موقع هذه النقاط واستخدام التماثل عند الخط $\theta = \frac{\pi}{2}$، تحصل على التمثيل البياني الموضح. ويسمى هذا النوع من المنحنيات باسم **المنحنى القلبي**. والمنحنى القلبي عبارة عن حلزون "بسكال" خاص له شكل القلب.

b. صف ما يخبرك به النمط القطبي عن مكبر الصوت.

يشير النمط القطبي أن مكبر الصوت سوف يلتقط أصواتًا تبعد حتى 7 وحدات عن واجهة مكبر الصوت المباشرة، وحتى بُعد 3.5 وحدات للأصوات على يمين مكبر الصوت أو يساره مباشرة.

تمرين موجّه

3. **تصوير فيديو** تقوم مدرّسة بالمدرسة الثانوية بتصوير العروض التقديمية التي تلقيها طالباتها مستخدمة كاميرا فيديو ثابتة موضوعة في آخر الحجرة. يمكن تمثيل مجال الصوت الذي يلتقطه مكبر الصوت بالكاميرا بالمعادلة $r = 5 + 2 \sin \theta$. افترض أن مقدمة الصف الدراسي تواجه شَمَال الكاميرا تمامًا.

A. مثّل النمط القطبي لمكبر الصوت بيانيًا.

B. صف ما يخبرك به النمط القطبي عن مكبر الصوت.



الربط بالحياة اليومية

أقيمت حفلة "لايف إيد" لموسيقى الروك في عام 1985 بهدف جمع 3.6 مليون درهم إماراتي لمساعدة إثيوبيا. تم بث الحفلات التي أقيمت في لندن وفيلاديلفيا ومدن أخرى على التلفاز وشاهدها 1.9 مليار متفرج في 150 بلدًا. جمع هذا الحدث 514 مليون درهم إماراتي.

المصدر: وكالة أنباء CNN

انتبه!

التمثيل البياني على الفترة

عادة ما يكون استخدام فترة الدالة المثلثية في المعادلة القطبية كافيًا لرسم التمثيل البياني كاملاً، ولكن ليس دائمًا. إن أفضل طريقة لمعرفة ما إذا كنت رسمت تمثيلاً بيانيًا كافيًا لتمييز نمط هو رسم مزيد من النقاط.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

في السابق، استخدمت النقاط العظمى والدنيا إلى جانب الأصفار لمساعدتك على تمثيل الدوال المثلثية بيانيًا. في التمثيل البياني للدالة القطبية، تبلغ r ذروتها بالنسبة لقيمة θ عندما تصل المسافة بين هذه النقطة (r, θ) والقطب إلى أقصى بعد لها. لإيجاد النقطة (النقاط) العظمى على التمثيل البياني للمعادلة القطبية، جـد قيم θ التي تصل عندها $|r|$ إلى ذروتها. بالإضافة إلى ذلك، إذا كانت $r = 0$ لبعض قيم θ، فإنك تعلم أن التمثيل البياني يتقاطع مع القطب.

المثال 4 التماثل، والأصفار، وقيم r العظمى

استخدم التماثل والأصفار وقيم r العظمى لتمثيل $r = 2 \cos 3\theta$ بيانيًا.

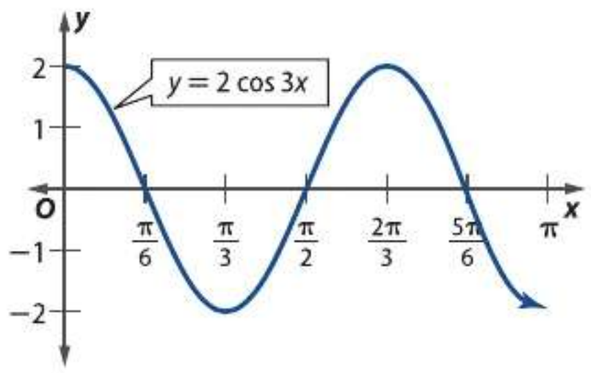
حدد تماثل التمثيل البياني.

هذه الدالة متماثلة على المحور القطبي، لذا يمكنك إيجاد النقاط في الفترة $[0, \pi]$ ثم استخدام التماثل حول المحور القطبي لإكمال التمثيل البياني.

جـد الأصفار وقيم r العظمى.

ارسم التمثيل البياني للدالة المستطيلة $y = 2 \cos 3x$ في الفترة $[0, \pi]$.

من التمثيل البياني، يمكنك رؤية أن $|y| = 2$ عندما تكون $x = 0$، و $\frac{\pi}{3}$، و $\frac{2\pi}{3}$، و π و $y = 0$ عندما تكون $x = \frac{\pi}{6}$، و $\frac{\pi}{2}$، و $\frac{5\pi}{6}$.

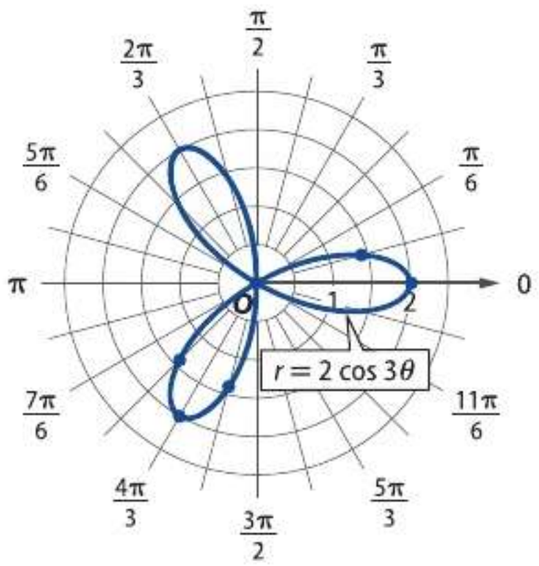


بتفسير هذه النتائج بدلالة المعادلة القطبية $r = 2 \cos 3\theta$، يمكننا قول إن $|r|$ تصل لقيمتها العظمى 2 عندما تكون $\theta = 0$، أو $\frac{\pi}{3}$، أو $\frac{2\pi}{3}$، أو π و $r = 0$ عندما تكون $\theta = \frac{\pi}{6}$، أو $\frac{\pi}{2}$، أو $\frac{5\pi}{6}$.

مـثّـل الدالة بيانيًا.

استخدم هذه النقاط وبعض النقاط الإضافية لرسم التمثيل البياني للدالة.

θ	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{12}$	π
$r = 2 \cos 3\theta$	2	1.4	0	−1	−2	−1.4	0	1.4	2	1.4	0	−1.4	−2



لاحظ أن التماثل حول المحور القطبي يمكن استخدامه لإكمال التمثيل البياني بعد تحديد موضع النقاط على $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

ويسمى هذا النوع من المنحنيات باسم **الوردة**. ويمكن أن تحتوي منحنيات الوردة على ثلاث حلقات متساوية أو أكثر.

نصيحة دراسية

طريقة بديلة

بحل الدالة المستطيلة $y = 2 \cos 3x$، نجد أن الدالة لها قيم عظمى عندما تكون $x = 0$، أو $\frac{\pi}{3}$، أو $\frac{2\pi}{3}$، أو π، وبالمثل، تحتوي الدالة على أصفار عندما تكون $x = \frac{\pi}{6}$، أو $\frac{\pi}{2}$، أو $\frac{5\pi}{6}$.

تمرين موجّه

استخدم التماثل والأصفار وقيم r العظمى لتمثيل كل دالة بيانيًا.

4A. $r = 3 \sin 2\theta$

4B. $r = \cos 5\theta$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

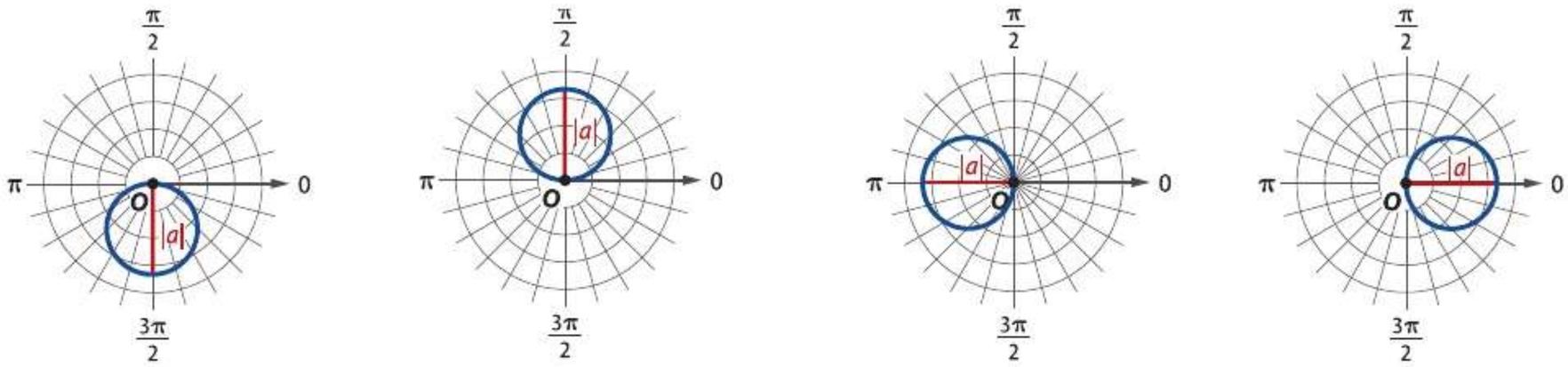
2 المنحنيات القطبية الكلاسيكية

المنحنيات الدائرية وحلزون باسكال والقلبية الشكل ومنحنيات الوردة عبارة عن أمثلة للمنحنيات الكلاسيكية. بالأسفل ملخص لأشكال هذه المنحنيات الكلاسيكية وغيرها وتمثيلاتها البيانية النموذجية.

ملخص المفهوم أنواع خاصة من التمثيلات البيانية القطبية

منحنيات دائرية

$r = a\cos\theta$ or $r = a\sin\theta$



$a < 0$
$r = a\sin\theta$

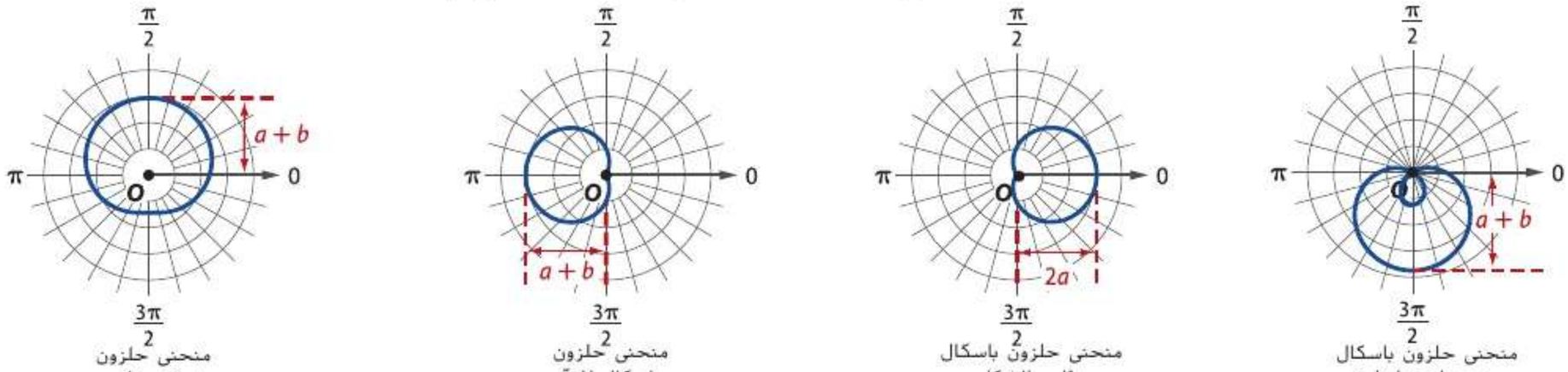
$a > 0$
$r = a\sin\theta$

$a < 0$
$r = a\cos\theta$

$a > 0$
$r = a\cos\theta$

منحنيات حلزون باسكال

$r = a \pm b\cos\theta$ أو $r = a \pm b\sin\theta$، حيث a و b كلاهما موجب



منحنى حلزون باسكال المحدب
$a \geq 2b$
$r = a + b\sin\theta$

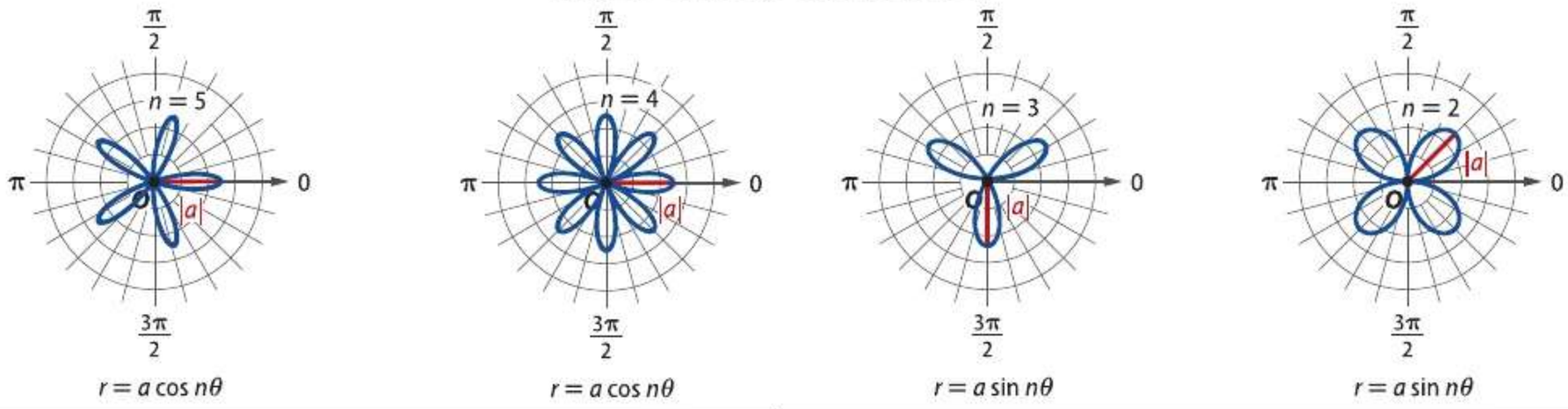
منحنى حلزون باسكال المنقّر
$b < a < 2b$
$r = a - b\cos\theta$

منحنى حلزون باسكال قلبي الشكل
$a = b$
$r = a + b\cos\theta$

منحنى حلزون باسكال مع حلقة داخلية
$a < b$
$r = a - b\sin\theta$

منحنيات الوردة

$r = a\cos n\theta$ أو $r = a\sin n\theta$، حيث $n \geq 2$ عدد صحيح يكون لمنحنى الوردة عدد n من البتلات إذا كان n عددًا فرديًا، وعدد $2n$ من البتلات إذا كان n عددًا زوجيًا.



$r = a\cos n\theta$

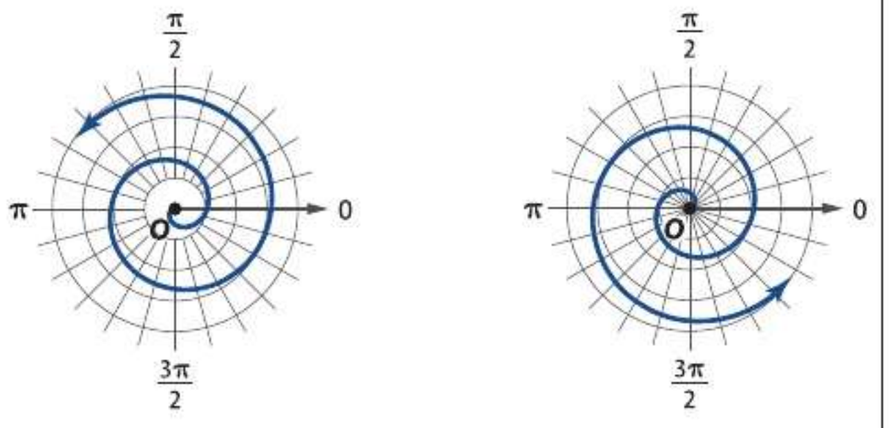
$r = a\cos n\theta$

$r = a\sin n\theta$

$r = a\sin n\theta$

حلزون أرشميدس

$r = a\theta + b$

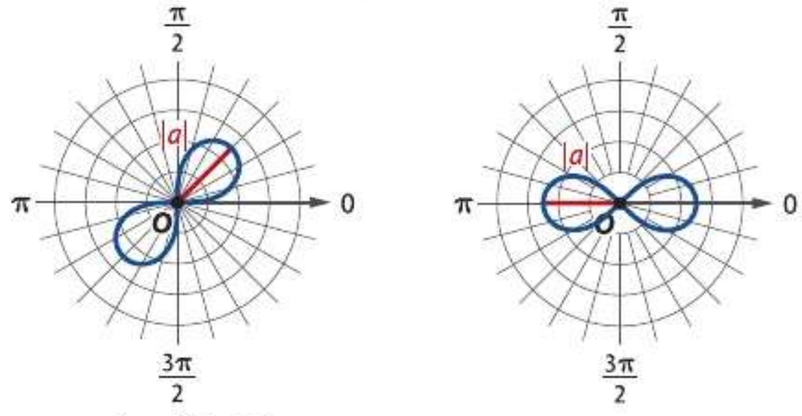


$\theta < 0, r = a\theta + b$

$\theta > 0, r = a\theta + b$

منحنيات ذات عروتين

$r^2 = a^2\sin 2\theta$ أو $r^2 = a^2\cos 2\theta$



$r^2 = a^2\sin 2\theta$

$r^2 = a^2\cos 2\theta$

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

المثال 5 تحديد المنحنيات الكلاسيكية وتمثيلها بيانيًا

حدد نوع المنحنى الذي تقدمه كل معادلة. ثم استخدم التماثل والأصفار وقيم r العظمى لتمثيل كل دالة بيانيًا.

a. $r^2 = 16 \sin 2\theta$

نوع المنحنى والتماثل

المعادلة تأخذ الصورة $r^2 = a^2 \sin 2\theta$. لذا تمثيلها البياني عبارة عن منحنى ذي عروتين. وباستبدال (r, θ) مع $(-r, \theta)$ ينتج $(-r)^2 = 16 \sin 2\theta$ أو $r^2 = 16 \sin 2\theta$. وبناءً عليه فإن الدالة متماثلة على القطب.

قيم r العظمى والأصفار

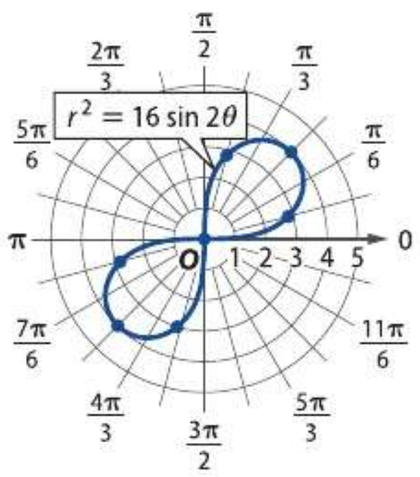
المعادلة $r^2 = 16 \sin 2\theta$ مكافئة لـ $r = \pm 4\sqrt{\sin 2\theta}$. وهي غير معرفة عندما تكون $\sin 2\theta < 0$.

وبالتالي، فإن مجال الدالة مقيد بالفترات $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ أو $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$. نظرًا لأنك تستطيع استخدام التماثل حول القطب، فإنك لا تحتاج إلا لتمثيل النقاط بيانيًا في الفترة $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. تصل الدالة إلى قيمة r عظمى مقدارها $|a|$ أو 4 عندما تكون $\theta = \frac{\pi}{4}$ وقيمة r صفرية عندما تكون $x = 0$ و $\frac{\pi}{2}$.

التمثيل البياني

استخدم هذه النقاط والتماثل المشار إليه لرسم التمثيل البياني للدالة.

θ	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$
r	0	±2.8	±3.7	±4	±3.7	±2.8	0



b. $r = 3\theta$

نوع المنحنى والتماثل

المعادلة تأخذ الشكل $r = a\theta + b$. ولذلك فإن تمثيلها البياني عبارة عن حلزون أرشميدس. وباستبدال (r, θ) مع $(-r, -\theta)$ ينتج $(-\boldsymbol{r}) = 3(-\theta)$ أو $r = 3\theta$. ولذلك، الدالة متماثلة على الخط $\theta = \frac{\pi}{2}$.

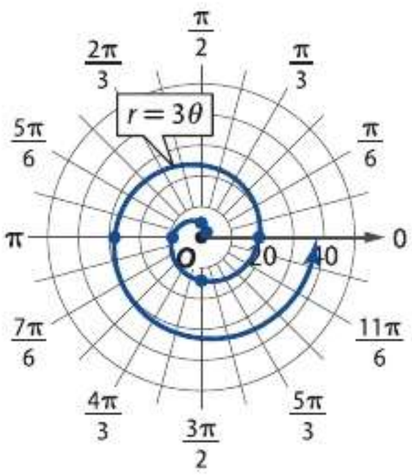
قيم r العظمى والأصفار

المنحنيات الحلزونية غير مقيدة. ولذلك، ليس للدالة قيم $\boldsymbol{r}$ عظمى ولكن لها صفر وحيد عندما تكون $\theta = 0$.

التمثيل البياني

استخدم النقاط في الفترة $[0, 4\pi]$ لرسم التمثيل البياني للدالة. لإظهار التماثل، ينبغي أيضًا تمثيل النقاط في الفترة $[-4\pi, 0]$ بيانيًا.

θ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	3π	4π
r	0	2.4	4.7	9.4	14.1	18.8	28.3	37.7



تلميح تقني

إعدادات النافذة تحدد θmin و θmax قيم θ التي سيتم تمثيلها بيانيًا. الإعدادات العادية لهما هي θmin=0 و θmax=2π. على الرغم من أنه قد يكون تغيير هذه القيم ضروريًا للحصول على التمثيل البياني الكامل. تحدد θstep الفترات التي تُرسم فيها النقاط. كلما قلت هذه القيمة، كان التمثيل البياني أبسط.

تمرين موجّه

5A. $r^2 = 9 \cos 2\theta$

5B. $r = 3 \sin 5\theta$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تمارين

مـثّـل كل معادلة بيانيًا بتحديد النقاط. (المثال 1)

1. $r = -\cos\theta$
2. $r = \csc\theta$
3. $r = \frac{1}{2}\cos\theta$
4. $r = 3\sin\theta$
5. $r = -\sec\theta$
6. $r = \frac{1}{3}\sin\theta$
7. $r = -4\cos\theta$
8. $r = -\csc\theta$

استخدم التماثل لرسم كل معادلة بيانيًا. (المثالان 2 و 3)

9. $r = 3 + 3\cos\theta$
10. $r = 1 + 2\sin\theta$
11. $r = 4 - 3\cos\theta$
12. $r = 2 + 4\cos\theta$
13. $r = 2 - 2\sin\theta$
14. $r = 3 - 5\cos\theta$
15. $r = 5 + 4\sin\theta$
16. $r = 6 - 2\sin\theta$

استخدم التماثل والأصفار وقيم r العظمى لتمثيل كل دالة بيانيًا. (المثال 4)

17. $r = \sin 4\theta$
18. $r = 2\cos 2\theta$
19. $r = 5\cos 3\theta$
20. $r = 3\sin 2\theta$
21. $r = \frac{1}{2}\sin 3\theta$
22. $r = 4\cos 5\theta$
23. $r = 2\sin 5\theta$
24. $r = 3\cos 4\theta$

25. **علم الأحياء البحرية** يمكن ملاحظة منحنيات الوردة في الحياة البحرية. حدد التماثل والأصفار وقيم r العظمى لكل دالة تمثل فصيلة بحرية عندما تكون $0 \le \theta \le \pi$. ثم استخدم المعلومات لتمثيل الدالة بيانيًا. (المثال 4)

a. يمكن تمثيل المسام التي تشكل نمط البتلة في أحافير دولار الرمل (الشكل 8.2.3) بـ $r = 3\cos 5\theta$.

b. يمكن تمثيل إطار جسم نجم البحر الشوكي (الشكل 8.2.4) بـ $r = 20\cos 8\theta$.



الشكل 8.2.3



الشكل 8.2.4

حدد نوع المنحنى الذي تقدمه كل معادلة. ثم استخدم التماثل والأصفار وقيم r العظمى لتمثيل كل دالة بيانيًا. (المثال 5)

26. $r = \frac{1}{3}\cos\theta$
27. $r = 4\theta + 1;\ \theta > 0$
28. $r = 2\sin 4\theta$
29. $r = 6 + 6\cos\theta$
30. $r^2 = 4\cos 2\theta$
31. $r = 5\theta + 2;\ \theta > 0$
32. $r = 3 - 2\sin\theta$
33. $r^2 = 9\sin 2\theta$

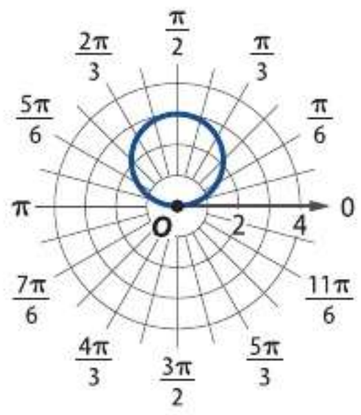
34. **التزلج الفني على الجليد** كان الموضوع الأصلي للتزلج الفني على الجليد هو حفر أشكال تعرف باسم الأشكال الإجبارية على الجليد. يمكن تمثيل أحد هذه الأشكال بـ $r^2 = 25\cos 2\theta$. (المثال 5)

a. ما المنحنى الكلاسيكي الذي يمثله الشكل؟

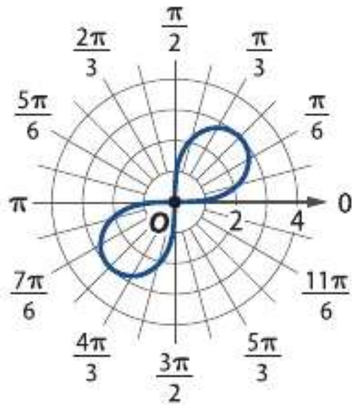
b. مثّل النموذج بيانيًا.

اكتب معادلة لكل تمثيل بياني.

35.



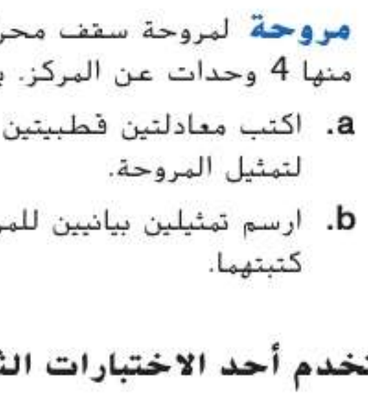
36.



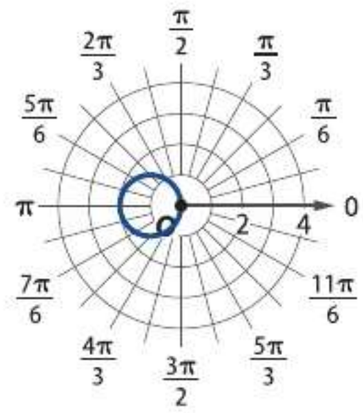
37.



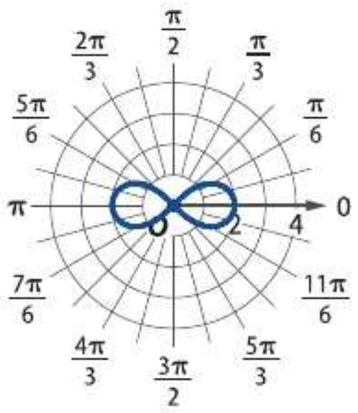
38.



39.



40.



41. **مروحة** لمروحة سقف محرك في المركز وخمس شفرات تبعد كل منها 4 وحدات عن المركز. يمكن تمثيل شكل المروحة بمنحنى وردة.

a. اكتب معادلتين قطبيتين يمكن استخدامهما لتمثيل المروحة.

b. ارسم تمثيلين بيانيين للمروحة باستخدام المعادلتين اللتين كتبتهما.

استخدم أحد الاختبارات الثلاثة لإثبات التماثل المحدد.

42. $r = 3 + \sin\theta$، متماثل على الخط $\theta = \frac{\pi}{2}$.
43. $r^2 = 4\sin 2\theta$، متماثل على القطب
44. $r = 3\sin 2\theta$، متماثل على المحور القطبي
45. $r = 5\cos 8\theta$، متماثل على الخط $\theta = \frac{\pi}{2}$.
46. $r = 2\sin 4\theta$، متماثل على القطب

47. **نبتة برسيم رباعية الأوراق** يمكن تمثيل نوع معين من نبتة البرسيم باستخدام منحنى وردة. اكتب معادلة قطبية لنبتة البرسيم إذا كان:

a. لديها 5 بتلات بطول 2 وحدة لكل بتلة.

b. لديها 4 بتلات بطول 7 وحدات لكل بتلة.

c. لديها 8 بتلات بطول 6 وحدات لكل بتلة.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

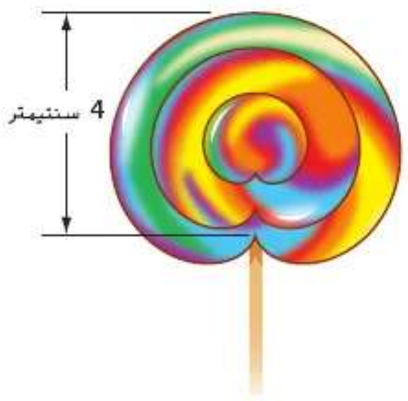
48. **حفل موسيقي** تم إنشاء خشبة مسرح دائرية من أجل حفلة موسيقية، ووضع المسرح في المركز بحيث يحيط المعجبون بالعازفين من جميع الجوانب. ولتسجيل صوت الحشد، وُضِع مكبرا صوت اتجاهيان على جانبي خشبة المسرح، أحدهما يواجه الشرق تمامًا والآخر يواجه الغرب تمامًا. يمكن تمثيل نمطي مكبري الصوت بالمعادلتين القطبيتين $r = 2.5 + 2.5 \cos \theta$ و $r = -2.5 - 2.5 \cos \theta$.

a. حدد نوع المنحنى الذي تقدمه كل معادلة قطبية.

b. ارسم تمثيلاً بيانيًا لكل نمط مكبر صوت على الشبكة القطبية ذاتها.

c. صف ما يخبرك به التمثيل البياني عن المساحة التي يغطيها مكبرا الصوت.

49. **حلوى** اكتب معادلة يمكنها تمثيل هذه المصاصة في شكل حلزون باسكال إذا كانت متماثلة على الخط $\theta = \frac{\pi}{2}$ وكان طرف المصاصة يبعد 4 سنتيمترات عن نقطة التقاء الحلوى بالعصا.



صل كل معادلة بتمثيلها البياني.

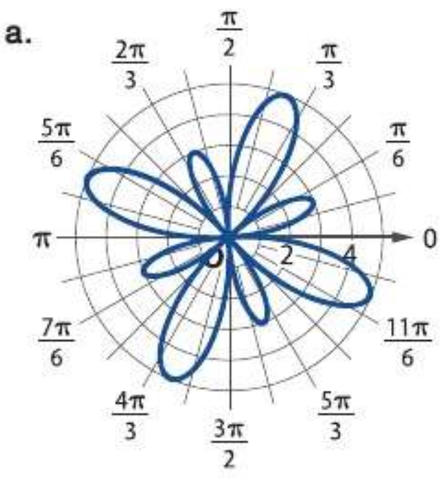
50. $r = 1 + 4 \cos 3\theta$

51. $r = 1 - 4 \sin 4\theta$

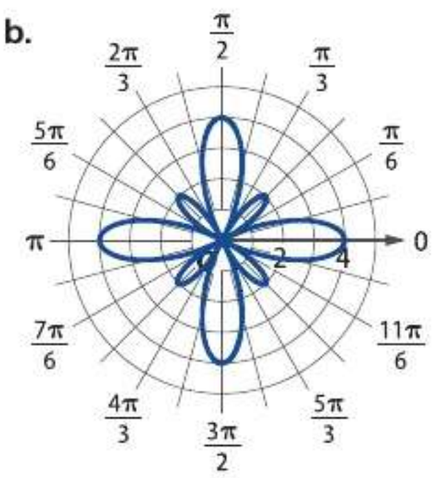
52. $r = 1 - 3 \sin 3\theta$

53. $r = 1 + 3 \cos 4\theta$

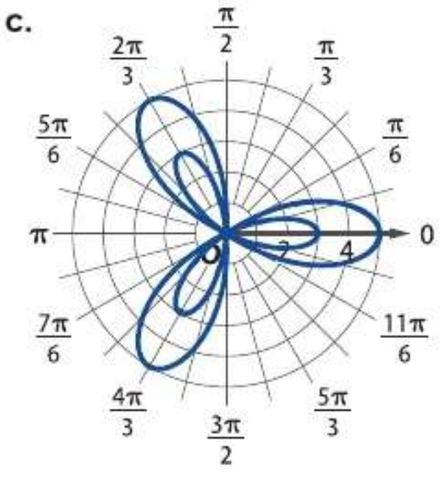
a.



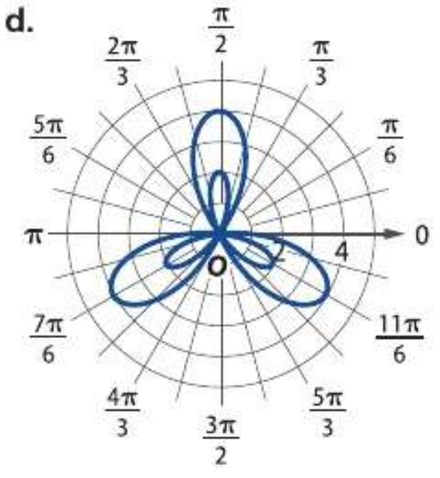
b.



c.



d.



جـد x في الفترة $0 \le \theta \le x$ بحيث تكون x قيمة صغرى والتمثيل البياني مكتمل.

54. $r = 3 + 2 \cos \theta$

55. $r = 2 - \sin 2\theta$

56. $r = 1 + \cos \frac{\theta}{3}$

صل كل معادلة بالمعادلة التي تنتج تمثيلاً بيانيًا مكافئًا.

57. $r = 5 + 4 \cos \theta$

58. $r = -5 + 4 \sin \theta$

59. $r = 5 - 4 \sin \theta$

60. $r = -5 - 4 \cos \theta$

a. $r = 5 + 4 \sin \theta$

b. $r = -5 + 4 \cos \theta$

c. $r = 5 - 4 \cos \theta$

d. $r = -5 - 4 \sin \theta$

61. **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة، ستستكشف حلزون أرشميدس.

a. **بيانيًا** ارسم تمثيلات بيانية منفصلة لـ $r = \theta$ للفترات $0 \le \theta \le 3\pi$، و $-3\pi \le \theta \le 0$، و $-3\pi \le \theta \le 3\pi$.

b. **لفظيًا** خمّن ماهية تماثل $r = \theta$. اشرح استنتاجك.

c. **تحليليًا** اثبت تخمينك في الجزء **b** باستخدام أحد اختيارات التماثل التي نوقشت في هذا الدرس.

d. **لفظيًا** كيف يؤثر تغيير الفترة لـ θ على المنحنيات الكلاسيكية الأخرى؟ وكيف يختلف ذلك عن الطريقة التي تؤثر بها الفترة على حلزون أرشميدس؟ اشرح استنتاجك.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

62. **تحليل الخطأ** ترسم حليمة وإيمان تمثيلات بيانية للمعادلات القطبية. تقول إيمان إن $r = 7 \sin 2\theta$ ليست دالة لأنها لم تجتز اختبار الخط الرأسي، وتقول حليمة إن اختبار الخط الرأسي لا ينطبق على الشبكة القطبية. فهل أيٌّ منهما على صواب؟ وضِّح استنتاجك.

63. **التبرير** ارسم التمثيلات البيانية لـ $r_1 = \cos \theta$، و $r_2 = \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$، و $r_3 = \cos(\theta - \pi)$ على الشبكة القطبية ذاتها. صف العلاقة بين التمثيلات البيانية الثلاثة. خمّن التغيير الذي يطرأ على التمثيل البياني عند طرح قيمة d من θ.

64. **تحدٍ** حل نظام المعادلات القطبية التالي جبريًا في الفترة $[0, 2\pi)$. مثّل النظام بيانيًا وقارن بين نقاط التقاطع والحل الذي خلصت إليه. وضح أي اختلافات.

$r = 1 + 2 \sin \theta$

$r = 4 \sin \theta$

65. **الإثبات** أثبت أن التمثيل البياني لـ $r = a + b \cos 2\theta$ متماثل على الخط $\theta = \frac{\pi}{2}$.

66. **الإثبات** أثبت أن التمثيل البياني لـ $r = a \sin 2\theta$ متماثل على المحور القطبي.

67. **الكتابة في الرياضيات** صف تأثير a على التمثيل البياني $r = a \cos \theta$.

68. **مسألة غير محددة الإجابة** ارسم التمثيل البياني لمنحنى وردة بـ 8 بتلات. ثم اكتب معادلة لتمثيلك البياني.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مراجعة شاملة

مثّل كل معادلة قطبية بيانيًا.

69. $r = 3.5$

70. $\theta = -\frac{\pi}{3}$

71. $\theta = 225°$

جد الزاوية θ بين المتجهين u و v مع التقريب لأقرب جزء من عشرة من الدرجة.

72. $\mathbf{u} = \langle 4, -3, 5\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 2, 6, -8\rangle$

73. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 5\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 11\mathbf{k}$

74. $\mathbf{u} = \langle -1, 1, 5\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 7, -6, 9\rangle$

افترض أن $\overrightarrow{DE}$ هو المتجه بنقطتي البداية والنهاية المذكورتين. اكتب $\overrightarrow{DE}$ على هيئة توفيق خطي للمتجهين i و j.

75. $D\left(-5, \frac{2}{3}\right)$, $E\left(-\frac{4}{5}, 0\right)$

76. $D\left(-\frac{1}{2}, \frac{4}{7}\right)$, $E\left(-\frac{3}{4}, \frac{5}{7}\right)$

77. D(9.7, −2.4), E(−6.1, −8.5)

78. ساحة العمل يدفع أحمد عربة يدوية مليئة بورق الشجر بقوة 525 N وزاوية 48° مع الأرض.



a. ارسم مخططًا يوضح تحليل القوة التي يبذلها سالم إلى مُركبات متعامدة.

b. جد مقدار المركبين الأفقي والرأسي للقوة.

مثّل بيانيًا القطع الزائد الممثل بكل معادلة.

79. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{25} = 1$

80. $\frac{(y-4)^2}{16} - \frac{(x+2)^2}{9} = 1$

81. $\frac{(x+1)^2}{4} - \frac{(y+3)^2}{9} = 1$

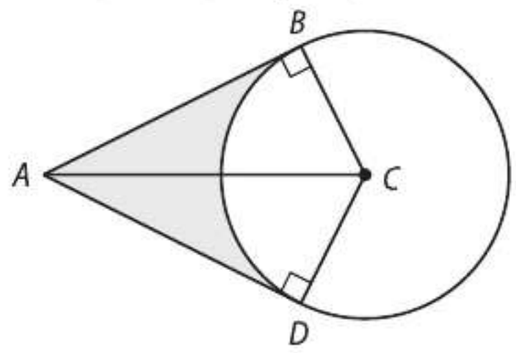
اكتب معادلة لكل قطع زائد له البؤرة F والخصائص المعطاة ومثّله بيانيًا.

82. $F(-5, 8)$؛ مفتوح ناحية اليمين؛ يضم (-5, 12)

83. $F(-1, -5)$؛ مفتوح ناحية اليسار؛ يضم (-1, 5)

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

84. SAT/ACT في الشكل، C هي مركز الدائرة، و $AC = 12$ و$m\angle BAD = 60°$. فما محيط المنطقة المظللة؟



A $12 + 3\pi$

B $6\sqrt{3} + 4\pi$

C $6\sqrt{3} + 3\pi$

D $12\sqrt{3} + 3\pi$

E $12\sqrt{3} + 4\pi$

85. مراجعة أثناء تخطيط موقع مستوٍ، حدد مسّاح أراضي علامة بارزة على بُعد 450 m بزاوية 30° على يسار المركز، وعلامة بارزة أخرى على بُعد 600 m بزاوية 50° على يمين المركز. ما المسافة التقريبية بين العلامتين البارزتين؟

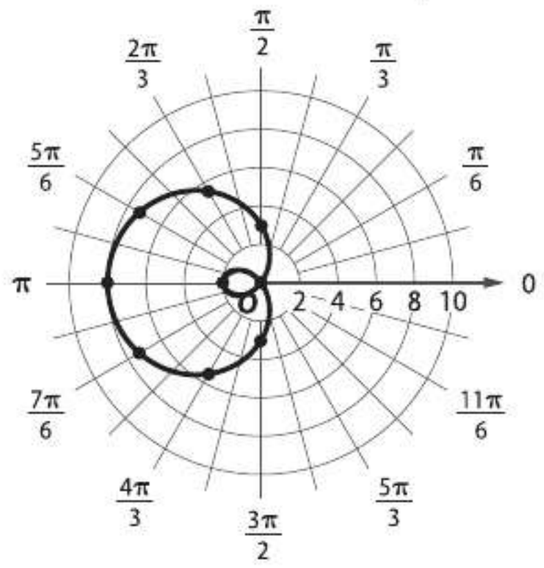
F 672 m

G 685 m

H 691 m

J 703 m

86. ما نوع المنحنى الذي يمثله الشكل؟



A منحنى ذو عروتين

B منحنى حلزون باسكال

C منحنى وردة

D منحنى قلبي الشكل

87. مراجعة يتتبع مراقب حركة جوية طائرتين على الارتفاع نفسه. إحداثيات الطائرتين هي (5, 310°) و (6, 345°). حيث r بالكيلومترات. ما المسافة التقريبية بين الطائرتين؟

F 2.97 km

G 3.25 km

H 3.44 km

J 3.71 km

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

8-3 الصور القطبية والديكارتية للمعادلات

السابق:
- لقد استخدمت نظام الإحداثيات القطبية لتمثيل النقاط والمعادلات بيانيًا.

الحالي:
1. التحويل بين الإحداثيات القطبية والديكارتية.
2. التحويل بين المعادلات القطبية والديكارتية.

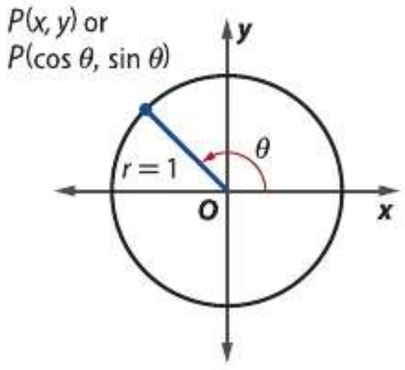
لماذا؟
- يبعث مستشعر موجات فوق صوتية مثبت بإنسان آلي شعاعًا خارجًا يدور في دائرة كاملة. ويستقبل المستشعر إشارة عائدة عندما يصطدم الشعاع بجسم ما. فيحسب موضع الجسم بدلالة المسافة r وزاوية القياس θ بالنسبة إلى واجهة الإنسان الآلي. بعد ذلك ينقل المستشعر هذه الإحداثيات القطبية إلى الإنسان الآلي، والذي يحولها إلى إحداثيات ديكارتية بحيث يستطيع تحديد موضع الجسم على خريطة داخلية.



1 الإحداثيات القطبية والديكارتية

تذكر من وحدة سابقة أن إحداثيات نقطة $P(x, y)$ المقابلة لزاوية θ على دائرة وحدة لها نصف قطر يساوي 1 يمكن كتابتها بدلالة θ بالشكل $P(\cos \theta, \sin \theta)$ لأن

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{1} \text{ أو } y. \quad \text{و} \quad \cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{1} \text{ أو } x$$



إذا اكتسبت r أي قيمة حقيقية، فيمكننا كتابة النقطة $P(x, y)$ بدلالة كل من r و θ.

$$\sin \theta = \frac{y}{r} \quad \text{و} \quad \cos \theta = \frac{x}{r}$$

$$r \sin \theta = y \qquad r \cos \theta = x$$

بضرب كل طرف في r.

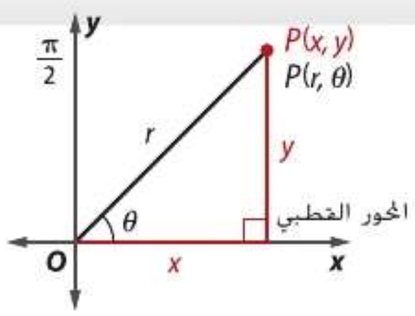
إذا افترضنا أن المحور القطبي وقطب نظام الإحداثيات القطبية يتطابقان مع محور x الموجب ونقطة الأصل في النظام الإحداثي الديكارتي، على التوالي. فقد أصبح لدينا الآن وسيلة لتحويل الإحداثيات القطبية إلى إحداثيات ديكارتية.

المفهوم الأساسي تحويل الإحداثيات القطبية إلى الديكارتية

إذا كان للنقطة P الإحداثيات (r, θ)، فإن الإحداثيات الديكارتية (x, y) للنقطة P يتم التعبير عنها كالآتي

$$y = r \sin \theta \quad \text{و} \quad x = r \cos \theta$$

أي أن $(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$.



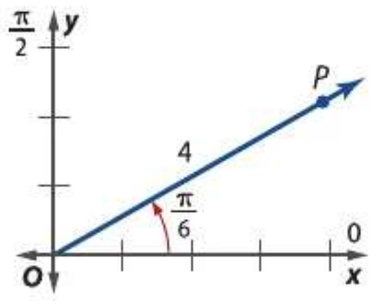
المثال 1 تحويل الإحداثيات القطبية إلى إحداثيات ديكارتية

جـد الإحداثيات الديكارتية لكل نقطة من خلال الإحداثيات القطبية المعطاة.

a. $P\left(4, \frac{\pi}{6}\right)$

بالنسبة إلى $P\left(4, \frac{\pi}{6}\right)$، فإن $\theta = \frac{\pi}{6}$ و $r = 4$.

$x = r \cos \theta$	صيغة التحويل	$y = r \sin \theta$
$= 4 \cos \frac{\pi}{6}$	$r = 4$ و $\theta = \frac{\pi}{6}$	$= 4 \sin \frac{\pi}{6}$
$= 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	بسّط.	$= 4\left(\frac{1}{2}\right)$
$= 2\sqrt{3}$		$= 2$

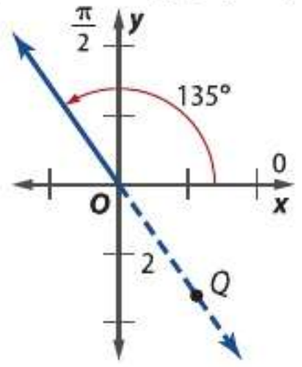


الإحداثيات الديكارتية للنقطة P هي $(2\sqrt{3}, 2)$ أو تقريبًا $(3.46, 2)$ مثلما موضح.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

b. $Q(-2, 135°)$

بالنسبة إلى $Q(-2, 135°)$. فإن $\theta = 135°$ و $r = -2$.

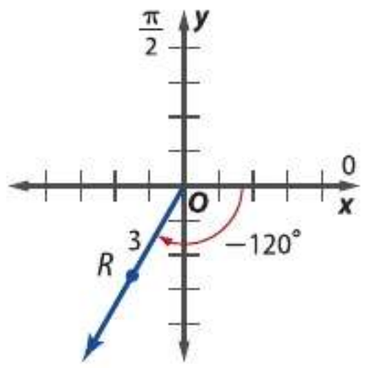


$x = r\cos\theta$	صيغة التحويل	$y = r\sin\theta$
$= -2\cos 135°$	$r = -2$ و $\theta = 135°$	$= -2\sin 135°$
$= -2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	بسّط.	$= -2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$= \sqrt{2}$		$= -\sqrt{2}$

الإحداثيات الديكارتية للنقطة Q هي $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ أو تقريبًا $(1.41, -1.41)$ كما هو موضح.

c. $V(3, -120°)$

بالنسبة إلى $V(3, -120°)$. فإن $\theta = -120°$ و $r = 3$.



$x = r\cos\theta$	صيغة التحويل	$y = r\sin\theta$
$= 3\cos -120°$	$r = 3$ و $\theta = -120°$	$= 3\sin -120°$
$= 3\left(-\frac{1}{2}\right)$	بسّط.	$= 3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$= -\frac{3}{2}$		$= -\frac{3\sqrt{3}}{2}$

الإحداثيات الديكارتية للنقطة V هي $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ أو تقريبًا $(-1.5, -2.6)$ كما هو موضح.

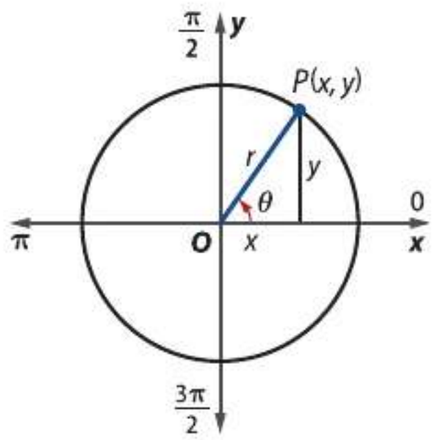
تمرين موجّه

1A. $R(-6, -120°)$ **1B.** $S\left(5, \frac{\pi}{3}\right)$ **1C.** $T(-3, 45°)$

نصيحة دراسية

تحويلات الإحداثيات إن عملية تحويل الإحداثيات الديكارتية إلى إحداثيات قطبية هي نفسها العملية المستخدمة لتحديد مقدار المتجهات واتجاهها.

لكتابة زوج من الإحداثيات الديكارتية بالصورة القطبية، عليك إيجاد المسافة r التي تبعدها نقطة (x, y) عن نقطة الأصل أو القطب، وزاوية القياس θ المقاسة لهذه النقطة من المحور x أو المحور القطبي.



لإيجاد المسافة r بين النقطة (x, y) ونقطة الأصل، استخدم نظرية فيثاغورس.

$r^2 = x^2 + y^2$ نظرية فيثاغورس

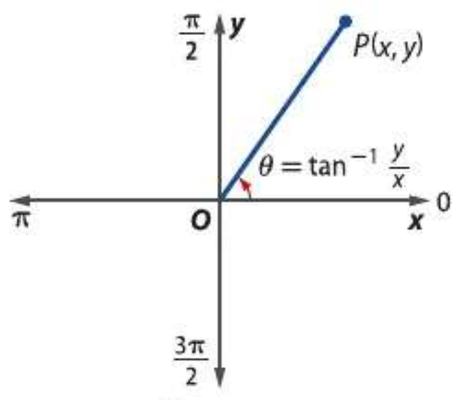
$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ خذ الجذر التربيعي الموجب لكل طرف.

ترتبط الزاوية θ بكل من x و y عن طريق دالة ظل الزاوية.

$\tan\theta = \frac{y}{x}$ نسبة ظل الزاوية

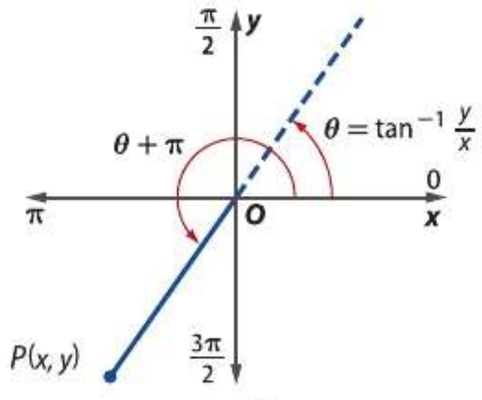
$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$ تعريف دالة الظل العكسية

تذكر أن دالة الظل العكسية تكون معرفة فقط عند الفترة $[-90°, 90°]$ أو $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. في النظام الإحداثي الديكارتي، يشير ذلك إلى قيم θ في الربعين الإحداثيين IV و I أو عندما تكون $x > 0$. مثلما هو موضح في الشكل 8.3.1. إذا كانت النقطة تقع في الربع II أو III، وهو ما يحدث عندما تكون $x < 0$. فيجب عليك جمع π أو $180°$ إلى قياس الزاوية المعطى بدالة الظل العكسية. مثلما هو موضح في الشكل 8.3.2.



عندما تكون $x > 0$، فإن $\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$.

الشكل 8.3.1



عندما تكون $x < 0$، فإن $\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} + 180°$ أو $\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} + \pi$.

الشكل 8.3.2

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

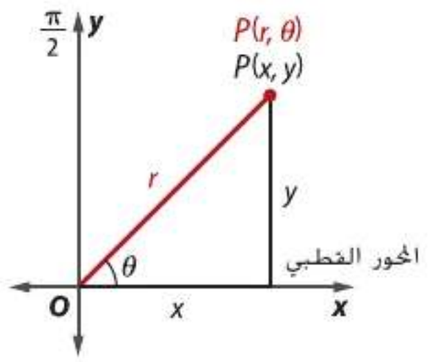
المفهوم الأساسي تحويل الإحداثيات الديكارتية إلى قطبية

إذا كان للنقطة P إحداثيات ديكارتية (x, y) فإن الإحداثيات القطبية (r, θ) للنقطة P يتم التعبير عنها بالآتي

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ و $\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$، عندما $x > 0$

$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} + \pi$ أو

$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} + 180°$، عندما $x < 0$.



تذكر أن الإحداثيات القطبية ليست فريدة. فالتحويل من إحداثيات ديكارتية إلى قطبية ينتج عنه تمثيل *واحد* فقط للإحداثيات القطبية. ولكن هناك عدد لا نهائي من التمثيلات القطبية لنقطة معطاة بالصورة الديكارتية.

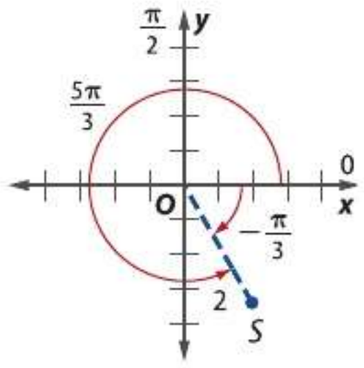
المثال 2 تحويل الإحداثيات الديكارتية إلى إحداثيات قطبية

جـــد زوجين من الإحداثيات القطبية لكل نقطة من خلال الإحداثيات الديكارتية المعطاة.

a. $S(1, -\sqrt{3})$

بالنسبة إلى $S(x, y) = (1, -\sqrt{3})$. فإن $y = -\sqrt{3}$ و $x = 1$. نظرًا لأن $x > 0$. استخدم $\tan^{-1}\frac{y}{x}$ لإيجاد θ.

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$	صيغة التحويل	$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$
$= \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2}$	$x = 1$ و $y = -\sqrt{3}$	$= \tan^{-1}\frac{-\sqrt{3}}{1}$
$= \sqrt{4} = 2$	بسّط.	$= -\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$



أحد مجموعات الإحداثي القطبي للنقطة S هي $\left(2, -\frac{\pi}{3}\right)$.

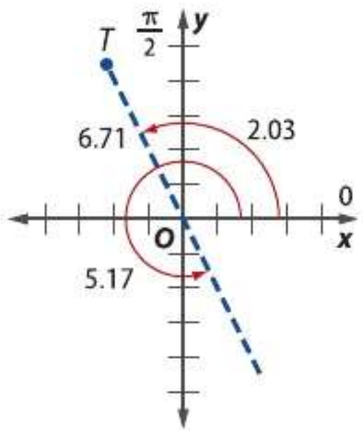
تمثيل آخر يستخدم قيمة θ موجبة هو $\left(2, -\frac{\pi}{3} + 2\pi\right)$ أو $\left(2, \frac{5\pi}{3}\right)$. مثلما موضح.

b. $T(-3, 6)$

بالنسبة إلى $T(x, y) = (-3, 6)$. فإن $y = 6$ و $x = -3$.

لأن $x < 0$. استخدم $\tan^{-1}\frac{y}{x} + \pi$ لإيجاد θ.

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$	صيغة التحويل	$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} + \pi$
$= \sqrt{(-3)^2 + 6^2}$	$x = -3$ و $y = 6$	$= \tan^{-1}\left(-\frac{6}{3}\right) + \pi$
$= \sqrt{45}$ أو حوالي 6.71	بسّط.	$= \tan^{-1}(-2) + \pi$ أو حوالي 2.03



أحد مجموعات الإحداثيات القطبية للنقطة T هي تقريبًا $(6.71, 2.03)$. تمثيل آخر يستخدم قيمة r سالبة هو $(-6.71, 2.03 + \pi)$ أو $(-6.71, 5.17)$. مثلما موضح.

تلميح تقني

تحويلات الإحداثيات

لتحويل الإحداثيات الديكارتية إلى إحداثيات قطبية باستخدام الآلة الحاسبة، اضغط 2nd APPS لعرض قائمة ANGLE. حدد R▸Pr (وأدخل الإحداثيات. سيؤدي هذا لحساب قيمة r. لحساب قيمة θ. كرر هذه العملية ولكن حدد R▸Pθ).

تمرين موجّه

جـــد زوجين من الإحداثيات القطبية لكل نقطة من خلال الإحداثيات الديكارتية المعطاة. وقرّب إلى أقرب مئة إذا لزم الأمر.

2A. $V(8, 10)$

2B. $W(-9, -4)$

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

في بعض ظواهر الحياة اليومية، يكون من المفيد التحويل بين الإحداثيات القطبية والديكارتية.

مثال 3 من الحياة اليومية تحويل الإحداثيات

الروبوتية ارجع إلى بداية الدرس. افترض أن الإنسان الآلي يقف مواجهًا للشرق تمامًا، وأن المستشعر المثبت له اكتشف جسمًا عند $(5, 295°)$.

a. ما الإحداثيات الديكارتية التي سيتعين على الإنسان الآلي حسابها؟

صيغة التحويل	$x = r \cos \theta$	$y = r \sin \theta$
$r = 5$ و $\theta = 295°$	$= 5 \cos 295°$	$= 5 \sin 295°$
بسّط.	≈ 2.11	≈ -4.53

يقع الجسم عند الإحداثيات الديكارتية $(2.11, -4.53)$.

b. إذا كان لجسم تم اكتشافه من قبل الإحداثيات الديكارتية $(3, 7)$، فكم يبعد الجسم وما قياس زاويته بالنسبة إلى الجانب الأمامي للإنسان الآلي؟

صيغة التحويل	$r = \sqrt{x^2 + y^2}$	$\theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}$
$x = 3$ و $y = 7$	$= \sqrt{3^2 + 7^2}$	$= \tan^{-1} \frac{7}{3}$
بسّط.	≈ 7.62	$\approx 66.8°$

يقع الجسم عند الإحداثيات القطبية $(7.62, 66.8°)$.

تمرين موجّه

3. **الصيد** "محدد موقع الأسماك" عبارة عن أحد أنواع الرادارات المستخدمة في تحديد أماكن الأسماك بالمياه. افترض أن قاربًا يواجه الشرق تمامًا، وأن محدد موقع الأسماك قدّم إحداثيات قطبية لسرب من الأسماك هي $(6, 125°)$.
   - **A.** ما الإحداثيات الديكارتية لسرب الأسماك؟
   - **B.** إذا كان لسرب أسماك تم اكتشافه من قبل الإحداثيات الديكارتية $(-2, 6)$ فكم يبعد السرب وما قياس زاويته بالنسبة إلى الجهة الأمامية من القارب؟



الربط بالحياة اليومية

يبلغ وزن الإنسان الآلي لناسا "المناور البارع محدد الغرض"، أو ديكستر" 1542 km . ويصل طوله إلى 3.7 m وذراع تمتد 3.4 m . و"ديكستر" مسؤول عن أداء مهام في الفضاء التي كانت تتطلب رواد فضاء فيما سبق.

المصدر: جريدة *New York Times*

2 المعادلات القطبية والديكارتية

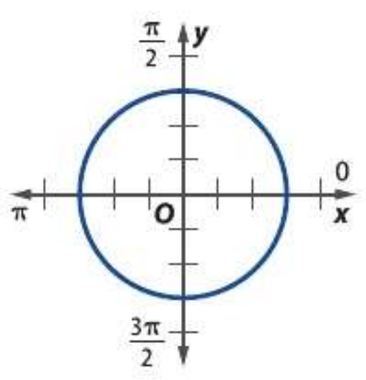
في حساب التفاضل والتكامل، سوف تحتاج في بعض الأحيان إلى التحويل من الصورة الديكارتية للمعادلة إلى الصورة القطبية لها والعكس لتسهيل إجراء بعض العمليات الحسابية. فبعض المعادلات الديكارتية المعقدة يكون لها معادلات قطبية أبسط بكثير.
تأمل المعادلتين الديكارتية والقطبية للدائرة الممثلة بيانيًا أدناه.

المعادلة الديكارتية

$x^2 + y^2 = 9$

المعادلة القطبية

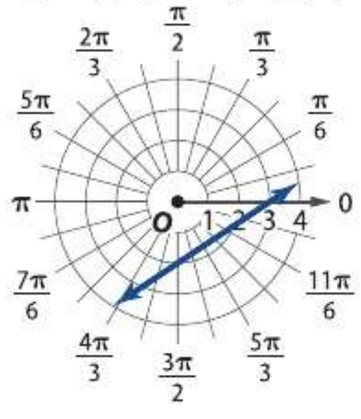
$r = 3$



وبالمثل، بعض المعادلات القطبية لها معادلات ديكارتية أبسط بكثير، مثل الخط الممثل بيانيًا أدناه.

المعادلة الديكارتية

$2x - 3y = 6$



المعادلة القطبية

$r = \frac{6}{2 \cos \theta - 3 \sin \theta}$

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

إن التحويل من معادلة ديكارتية إلى معادلة قطبية مباشر إلى حد ما. استبدل x بـ $r \cos \theta$ و y بـ $r \sin \theta$. ثم حول المعادلة الناتجة إلى أبسط صورة باستخدام التغييرات الجبرية والمتطابقات المثلثية.

المثال 4 تحويل المعادلات الديكارتية إلى معادلات قطبية

حدد التمثيل البياني لكل معادلة ديكارتية. ثم اكتب المعادلة في الصورة القطبية. ادعم إجابتك بتمثيل الصورة القطبية للمعادلة بيانيًا.

a. $(x - 4)^2 + y^2 = 16$

التمثيل البياني للمعادلة $(x - 4)^2 + y^2 = 16$ عبارة عن دائرة لها نصف قطر 4 ومركزها عند النقطة $(4, 0)$. لإيجاد الصورة القطبية لهذه المعادلة، استبدل x بـ $r \cos \theta$ و y بـ $r \sin \theta$. ثم حوّل لأبسط صورة.

$(x - 4)^2 + y^2 = 16$	المعادلة الأصلية
$(r \cos \theta - 4)^2 + (r \sin \theta)^2 = 16$	$x = r \cos \theta$ و $y = r \sin \theta$
$r^2 \cos^2 \theta - 8r \cos \theta + 16 + r^2 \sin^2 \theta = 16$	اضرب.
$r^2 \cos^2 \theta - 8r \cos \theta + r^2 \sin^2 \theta = 0$	اطرح 16 من كل طرف.
$r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta = 8r \cos \theta$	افصل الحدود المربّعة.
$r^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = 8r \cos \theta$	حلل إلى العوامل.
$r^2(1) = 8r \cos \theta$	متطابقة فيثاغورس
$r = 8 \cos \theta$	اقسم كل طرف على r.

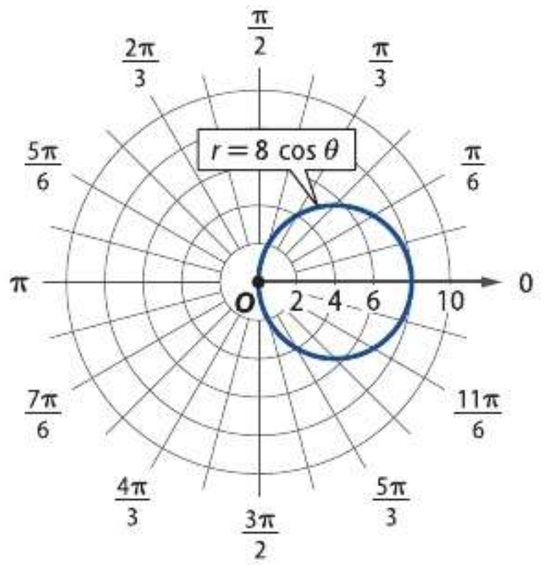
التمثيل البياني لهذه المعادلة القطبية (الشكل 8.3.3) عبارة عن دائرة لها نصف قطر 4 ومركزها عند النقطة $(4, 0)$.

b. $y = x^2$

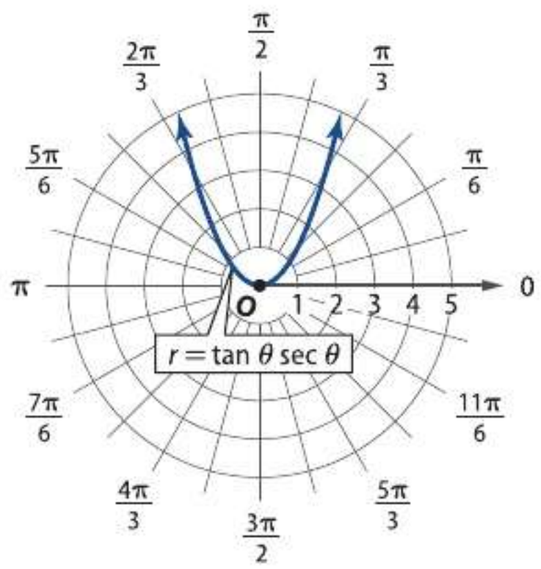
التمثيل البياني للمعادلة $y = x^2$ عبارة عن قطع مكافئ رأسه عند نقطة الأصل المفتوحة لأعلى.

$y = x^2$	المعادلة الأصلية
$r \sin \theta = (r \cos \theta)^2$	$x = r \cos \theta$ و $y = r \sin \theta$
$r \sin \theta = r^2 \cos^2 \theta$	اضرب.
$\frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} = r$	اقسم كل طرف على $r \cos^2 \theta$.
$\frac{\sin \theta}{\cos \theta} \times \frac{1}{\cos \theta} = r$	أعد الكتابة.
$\tan \theta \sec \theta = r$	ناتج القسمة ومتطابقة المقلوب

التمثيل البياني للمعادلة القطبية $r = \tan \theta \sec \theta$ (الشكل 8.3.4) عبارة عن قطع مكافئ رأسه عند القطب ثم الذي يفتح لأعلى.



الشكل 8.3.3



الشكل 8.3.4

نصيحة دراسية

المتطابقات المثلثية

سيكون من المفيد مراجعة المتطابقات المثلثية التي درستها لمساعدتك على تحويل الصور القطبية للمعادلات الديكارتية لأبسط صورة. يوجد داخل الغلاف الخلفي لهذا الكتاب ملخص بهذه المتطابقات.

تمرين موجّه

4A. $x^2 + (y - 3)^2 = 9$

4B. $x^2 - y^2 = 1$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

لكتابة معادلة قطبية في صورة ديكارتية، فإنك تستخدم أيضًا العلاقات $y = r \sin \theta$ و $x = r \cos \theta$، و $r^2 = x^2 + y^2$. إلى جانب العلاقة $\tan \theta = \frac{y}{x}$. إلا أن العملية ليست بالشكل المباشر مثل التحويل من الصورة الديكارتية إلى الصورة القطبية.

المثال 5 تحويل المعادلات القطبية إلى معادلات ديكارتية

اكتب كل معادلة في الصورة الديكارتية ثم حدد تمثيلها البياني. ادعم إجابتك بتمثيل الصورة القطبية للمعادلة بيانيًا.

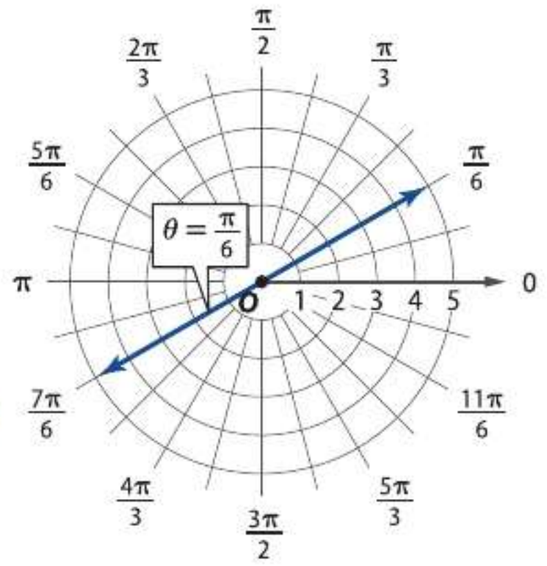
a. $\theta = \frac{\pi}{6}$

$\theta = \frac{\pi}{6}$ — المعادلة الأصلية

$\tan \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$ — جد ظل الزاوية لكل طرف.

$\frac{y}{x} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ — $\tan \theta = \frac{y}{x}$

$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ — اضرب كل طرف في x.



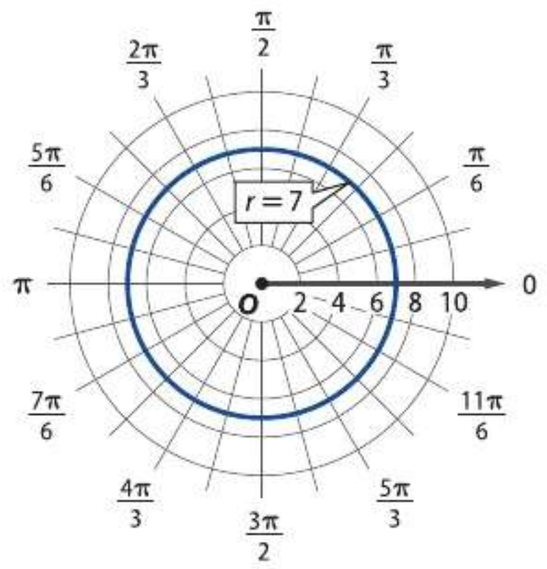
التمثيل البياني لهذه المعادلة عبارة عن خط يمر عبر نقطة الأصل وله ميل $\frac{\sqrt{3}}{3}$ أو حوالي $\frac{2}{3}$، مثلما يبين التمثيل البياني $\theta = \frac{\pi}{6}$ الموضح.

b. $r = 7$

$r = 7$ — المعادلة الأصلية

$r^2 = 49$ — قم بتربيع كل طرف.

$x^2 + y^2 = 49$ — $r^2 = x^2 + y^2$



التمثيل البياني لهذه المعادلة الديكارتية عبارة عن دائرة مركزها نقطة الأصل ولها نصف قطر 7، كما يبين التمثيل البياني $r = 7$ الموضح.

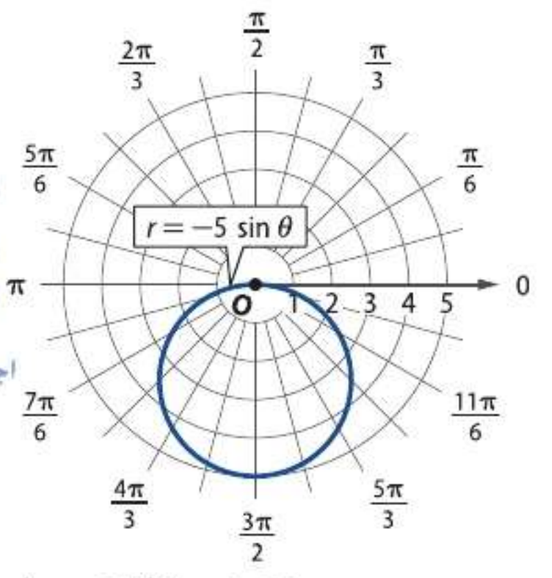
c. $r = -5 \sin \theta$

$r = -5 \sin \theta$ — المعادلة الأصلية

$r^2 = -5r \sin \theta$ — اضرب كل طرف في r.

$x^2 + y^2 = -5y$ — $r^2 = x^2 + y^2$ و $y = r \sin \theta$

$x^2 + y^2 + 5y = 0$ — اجمع $5y$ على كل طرف.



نظرًا لأنه في الصورة القياسية، $x^2 + (y + 2.5)^2 = 6.25$، فبإمكانك تحديد التمثيل البياني لهذه المعادلة على هيئة دائرة مركزها عند النقطة $(0, -2.5)$ ولها نصف قطر 2.5، مثلما يبين التمثيل البياني $r = -5 \sin \theta$.

تمرين موجّه

5A. $r = -3$

5B. $\theta = \frac{\pi}{3}$

5C. $r = 3 \cos \theta$

نصيحة دراسية

طريقة بديلة نقطتان على الخط $\theta = \frac{\pi}{6}$ هما $\left(4, \frac{\pi}{6}\right)$ و $\left(2, \frac{\pi}{6}\right)$. في الصورة الديكارتية، هذه النقط هي $(\sqrt{3}, 1)$ و $(2\sqrt{3}, 2)$. معادلة الخط المار بهاتين النقطتين هي $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$.

نصيحة دراسية

التحويل إلى الصورة الديكارتية هناك استبدالات أخرى مفيدة وهي عبارة عن أشكال مختلفة للمعادلات $y = r \sin \theta$ و $x = r \cos \theta$. مثل $r = \frac{y}{\sin \theta}$ و $r = \frac{x}{\cos \theta}$.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

تمارين

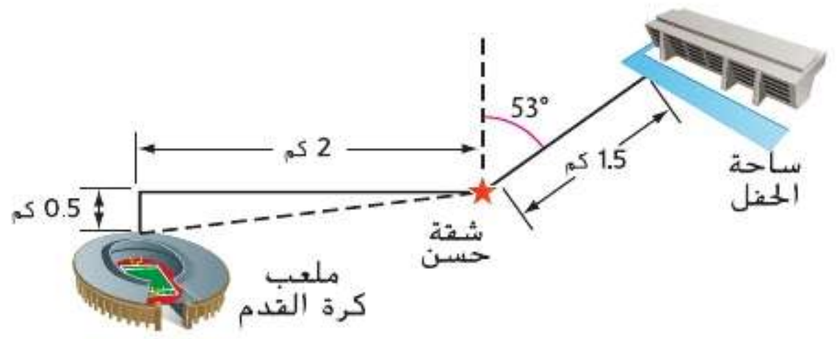
جــد الإحداثيات الديكارتية لكل نقطة من خلال الإحداثيات القطبية المعطاة. وقرّب إلى أقرب مئة إذا لزم الأمر. (المثال 1)

1. $\left(2, \frac{\pi}{4}\right)$
2. $\left(\frac{1}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$
3. $(5, 240°)$
4. $(2.5, 250°)$
5. $\left(-2, \frac{4\pi}{3}\right)$
6. $(-13, -70°)$
7. $\left(3, \frac{\pi}{2}\right)$
8. $\left(\frac{1}{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$
9. $(-2, 270°)$
10. $(4, 210°)$
11. $\left(-1, -\frac{\pi}{6}\right)$
12. $\left(5, \frac{\pi}{3}\right)$

جــد زوجين من الإحداثيات القطبية لكل نقطة من خلال الإحداثيات الديكارتية المعطاة إذا كان $0 \le \theta \le 2\pi$. قرّب إلى أقرب جزء من مئة إذا لزم الأمر. (المثال 2)

13. $(7, 10)$
14. $(-13, 4)$
15. $(-6, -12)$
16. $(4, -12)$
17. $(2, -3)$
18. $(0, -173)$
19. $(a, 3a), a > 0$
20. $(-14, 14)$
21. $(52, -31)$
22. $(3b, -4b), b > 0$
23. $(1, -1)$
24. $(2, \sqrt{2})$

25. **مسافة** وقف حسن أعلى البناية التي تضم شقته، وحدد أن ساحة الحفل تقع 53° شمال شرق. افترض أن الساحة تبعد عن شقة حسن 1.5 km بالضبط. (المثال 3)



a. كم عدد الكيلومترات التي يجب أن يقطعها حسن شرقًا وشمالاً حتى يبلغ الساحة؟

b. إذا كان هناك ملعب كرة قدم على بعد 2 km غربًا و 0.5 km جنوبًا من شقة حسن، فما الإحداثيات القطبية للملعب إذا كانت شقة حسن عند القطب؟

حدد التمثيل البياني لكل معادلة ديكارتية. ثم اكتب المعادلة في الصورة القطبية. ادعم إجابتك بتمثيل الصورة القطبية للمعادلة بيانيًا. (المثال 4)

26. $x = -2$
27. $(x + 5)^2 + y^2 = 25$
28. $y = -3$
29. $x = y^2$
30. $(x - 2)^2 + y^2 = 4$
31. $(x - 1)^2 - y^2 = 1$
32. $x^2 + (y + 3)^2 = 9$
33. $y = \sqrt{3}x$
34. $x^2 + (y + 1)^2 = 1$
35. $x^2 + (y - 8)^2 = 64$

اكتب كل معادلة في الصورة الديكارتية ثم حدد تمثيلها البياني. ادعم إجابتك بتمثيل الصورة القطبية للمعادلة بيانيًا. (المثال 5)

36. $r = 3 \sin \theta$
37. $\theta = -\frac{\pi}{3}$
38. $r = 10$
39. $r = 4 \cos \theta$
40. $\tan \theta = 4$
41. $r = 8 \csc \theta$
42. $r = -4$
43. $\cot \theta = -7$
44. $\theta = \frac{3\pi}{4}$
45. $r = \sec \theta$

46. **زلزال** يمكن تمثيل الموجات الزلزالية بالمعادلة $r = 12.6 \sin \theta$، حيث تقاس r بالكيلومترات. (المثال 5)

a. مثّل النمط القطبي للزلزال بيانيًا.

b. اكتب معادلة بالصورة الديكارتية لتمثيل الموجات الزلزالية بيانيًا.

c. جــد الإحداثيات الديكارتية للبؤرة الزلزالية ووضح المساحة المتضررة من الزلزال.

47. **مكبر صوت** تعبر المعادلة $r = 2 + 2 \cos \theta$ عن النمط القطبي لمكبر الصوت الاتجاهي في مباراة كرة قدم. (المثال 5)

a. مثّل النمط القطبي بيانيًا.

b. هل سيكتشف المكبر الصوت الناشئ من النقطة ذات الإحداثيات الديكارتية $(-2, 0)$؟ اشرح.

اكتب كل معادلة في الصورة الديكارتية ثم حدد تمثيلها البياني. ادعم إجابتك بتمثيل الصورة القطبية للمعادلة بيانيًا.

48. $r = \frac{1}{\cos \theta + \sin \theta}$
49. $r = 10 \csc \left(\theta + \frac{7\pi}{4}\right)$
50. $r = 3 \csc \left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$
51. $r = -2 \sec \left(\theta - \frac{11\pi}{6}\right)$
52. $r = 4 \sec \left(\theta - \frac{4\pi}{3}\right)$
53. $r = \frac{5 \cos \theta + 5 \sin \theta}{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}$
54. $r = 2 \sin \left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)$
55. $r = 4 \cos \left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$

56. **علم الفلك** تستخدم المعادلات القطبية لتمثيل مسارات الأقمار الصناعية أو الأجسام الأخرى التي تدور في الفضاء. افترض أن مسار قمر صناعي قد تم تمثيله بالمعادلة $r = \frac{4}{4 + 3 \sin \theta}$، حيث تقاس r بعشرات الآلاف من الكيلومترات، وأن الأرض في القطب.

a. ارسم تمثيلاً بيانيًا لمسار القمر الصناعي.

b. حدد أدنى وأقصى مسافة يبعدها القمر الصناعي عن الأرض في أي وقت.

c. افترض أن قمرًا صناعيًا آخر يمر عبر نقطة لها الإحداثيات الديكارتية $(-3, 1.5)$. هل هناك خطر لاصطدام القمرين الصناعيين عند هذه النقطة؟ اشرح.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

حدد التمثيل البياني لكل معادلة ديكارتية. ثم اكتب المعادلة في الصورة القطبية. ادعم إجابتك بتمثيل الصورة القطبية للمعادلة بيانيًا.

57. $6x - 3y = 4$

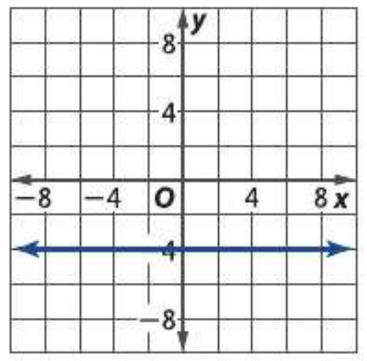
58. $2x + 5y = 12$

59. $(x - 6)^2 + (y - 8)^2 = 100$

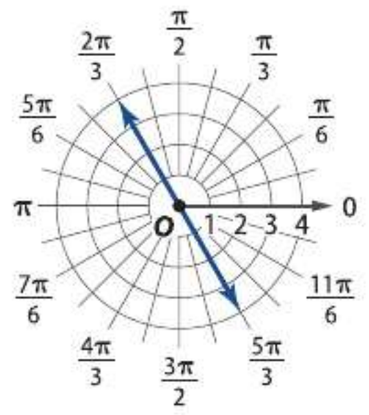
60. $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 13$

اكتب معادلة قطبية وديكارتية لكل تمثيل بياني.

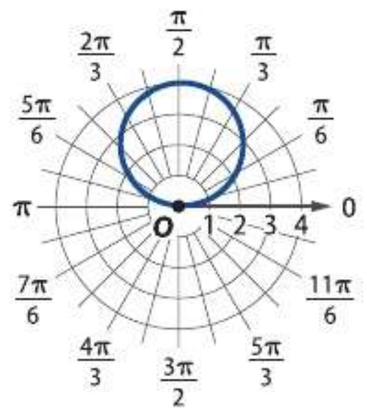
61.



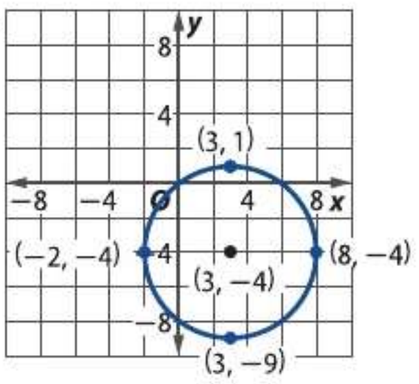
62.



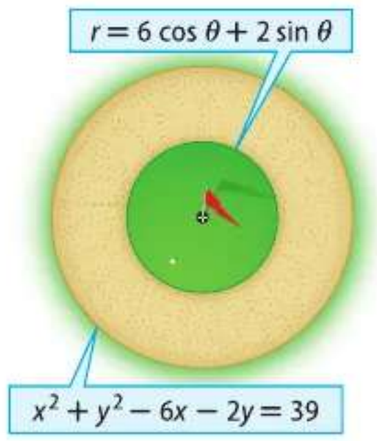
63.



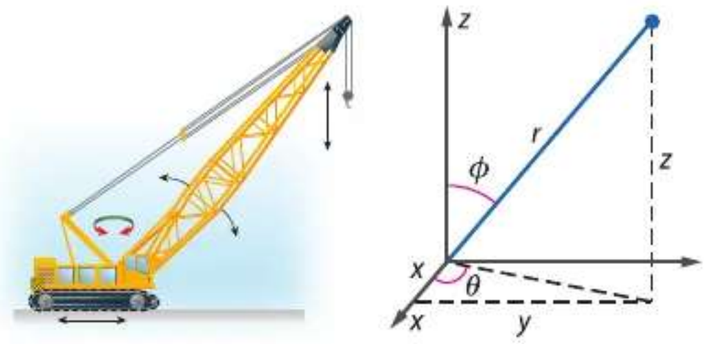
64.



65. الجولف في الحفرة رقم 18 بملعب جولف دبي، تحاط المساحة الخضراء الدائرية بحلقة رملية كما هو موضح بالشكل. جـد مساحة المنطقة المغطاة بالرمال مع افتراض أن الحفرة تمثل قطب كلا المعادلتين والوحدات معطاة باليارد.



66. التشييد تعمل الرافعات الذراعية على نظائر ثلاثية الأبعاد من الإحداثيات القطبية تسمى *الإحداثيات الكروية*. نقطة في الفضاء لها الإحداثيات الكروية (r, θ, ϕ)، حيث r تمثل البُعد عن القطب، و θ تمثل زاوية الدوران حول المحور الرأسي، و ϕ تمثل الزاوية القطبية من المحور الرأسي الموجب. مع مراعاة نقطة لها الإحداثيات الكروية (r, θ, ϕ) جـد الإحداثيات الديكارتية (x, y, z) بدلالة r، و θ، و ϕ.



67. التمثيلات المتعددة في هذه المسألة، سوف تستكشف العلاقة بين الأعداد المركبة والإحداثيات القطبية.

a. **بيانيًا** يمكن تحديد موضع العدد المركب $a + bi$ على مستوى مركب باستخدام الزوج المرتب (a, b)، حيث المحور x هو المحور الحقيقي R والمحور y هو المحور التخيلي i. مثّل بيانيًا العدد المركب $6 + 8i$.

b. **عدديًا** جـد الإحداثيات القطبية للعدد المركب باستخدام الإحداثيات الديكارتية المحددة في الجزء a إذا كان $0 < \theta < 360°$. مثّل الإحداثيات على شبكة قطبية بيانيًا.

c. **بيانيًا** مثّل العدد المركب $-3 + 3i$ بيانيًا على نظام إحداثي ديكارتي.

d. **بيانيًا** جـد الإحداثيات القطبية للعدد المركب باستخدام الإحداثيات الديكارتية المحددة في الجزء c إذا كان $0 < \theta < 360°$. مثّل الإحداثيات على شبكة قطبية بيانيًا.

e. **تحليليًا** بالنسبة للعدد المركب $a + bi$، جـد تعبيرًا ليتم تحويله للإحداثيات القطبية.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

68. تحليل الخطأ يكتب راشد وزياد المعادلة القطبية $r = \sin\theta$ بالصورة الديكارتية. يعتقد زياد أن الإجابة هي $x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$. ويعتقد راشد أن الإجابة ببساطة هي $y = \sin x$. فأيهما على صواب؟ وضّح استنتاجك.

69. تحدٍ معادلة إحدى الدوائر هي $r = 2a\cos\theta$. اكتب هذه المعادلة في صورة ديكارتية. جـد مركز الدائرة ونصف قطرها.

70. التبرير مع مراعاة مجموعة الإحداثيات الديكارتية (x, y) وقيمة r، اكتب تعابير لإيجاد θ بدلالة جيب الزاوية وبدلالة جيب التمام. (*إرشاد:* قد يتعين عليك كتابة عدة تعابير لكل دالة، مثلما هو الأمر مع التعابير المعطاة في هذا الدرس باستخدام ظل الزاوية.)

71. الكتابة في الرياضيات خمّن متى يكون التمثيل البياني للمعادلة أسهل عند تمثيل المعادلة بالصورة القطبية بدلاً من الديكارتية والعكس.

72. الإثبات استخدم $y = r\sin\theta$ و $x = r\cos\theta$ لإثبات أن $r = y\csc\theta$ و $r = x\sec\theta$.

73. تحدٍ اكتب $r^2(4\cos^2\theta + 3\sin^2\theta) + r(-8a\cos\theta + 6b\sin\theta) = 12 - 4a^2 - 3b^2$ بالصورة الديكارتية. (*إرشاد:* وزّع قبل التعويض بقيم r^2 و r. ينبغي أن تكون المعادلة الديكارتية مخروطية.)

74. الكتابة في الرياضيات استخدم تعريف المحور القطبي المقدم في الدرس 8-1 لشرح السبب وراء ضرورة ذكر أن الإنسان الآلي في المثال 3 كان مواجهًا للشرق تمامًا. وكيف يمكن أن يساعد استخدام الاتجاه الربعي في التخلص من تلك الحاجة؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مراجعة شاملة

استخدم التماثل لرسم كل معادلة بيانيًا.

75. $r = 1 - 2 \sin \theta$

76. $r = -2 - 2 \sin \theta$

77. $r = 2 \sin 3\theta$

جـــد ثلاثة أزواج مختلفة من الإحداثيات القطبية تحدد النقطة المعطاة إذا كان $-360° < \theta \leq 360°$ أو $-2\pi < \theta \leq 2\pi$.

78. $T(1.5, 180°)$

79. $U\left(-1, \frac{\pi}{3}\right)$

80. $V(4, 315°)$

جـــد الزاوية θ بين u و v لأقرب جزء من عشرة من الدرجة.

81. $u = \langle 6, -4 \rangle$, $v = \langle -5, -7 \rangle$

82. $u = \langle 2, 3 \rangle$, $v = \langle -9, 6 \rangle$

83. $u = \langle 1, 10 \rangle$, $v = \langle 8, -2 \rangle$

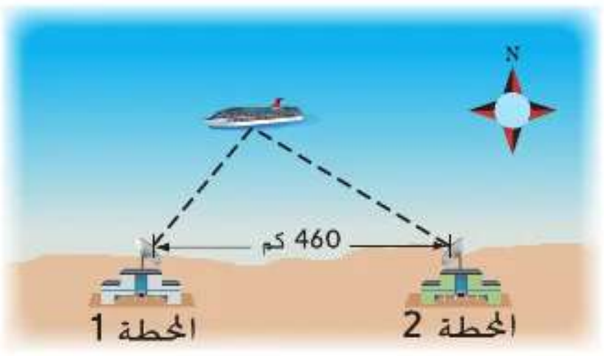
اكتب كل زوج من المعادلات الوسيطية في صورة ديكارتية. ثم مثلهما واذكر أية قيود على المجال.

84. $y = t + 6$ و $x = \sqrt{t}$

85. $y = \frac{t}{2} + 1$ و $x = \frac{t^2}{4}$

86. $y = -3 \sin t$ و $x = 3 \cos t$

87. الإبحار تقع المحطتان لوران للبث الإذاعي على بُعد 460 km تلقت سفينة إشارات من كلتا المحطتين وحددت بُعدها عن المحطة 2 بمسافة تزيد عن المحطة 1 بمقدار 108 km.



a. حدد معادلة القطع الزائد الذي يقع مركزه عند نقطة الأصل التي توجد فيها السفينة.

b. مثّل المعادلة بيانيًا، مع توضيح فرع القطع الزائد الذي توجد فيه السفينة.

c. جـــد إحداثيات موقع السفينة على الشبكة الإحداثية إذا كانت تبعد عن المحور x بمقدار 110 km.

88. دراجات تصنع شركة الإمارات للصناعات الوطنية طرازين من دراجات الطرق الوعرة: المغامرات، والتي تُباع بمبلغ AED 250، والمخاطرة الكبرى، والتي تُباع بمبلغ AED 350. يستخدم الطرازان الإطار نفسه. يستغرق وقت تجميع دراجة "المغامرات" وطلائها ساعتين، بينما تستغرق دراجة "المخاطرة الكبرى" 3 ساعات. إذا كان هناك 175 إطارًا و 450 ساعة من العمل متوفرين للإنتاج، فكم العدد الذي ينبغي إنتاجه من كل طراز لزيادة الربح للحد الأقصى؟ ما الحد الأقصى للربح؟

حُـــلّ كل نظام من المعادلات باستخدام اختزال جاوس-جوردان.

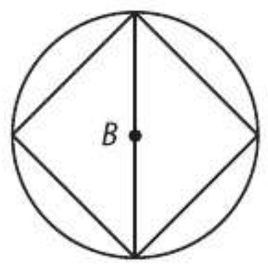
89.
$$3x + 9y + 6z = 21$$
$$4x - 10y + 3z = 15$$
$$-5x + 12y - 2z = -6$$

90.
$$x + 5y - 3z = -14$$
$$2x - 4y + 5z = 18$$
$$-7x - 6y - 2z = 1$$

91.
$$2x - 4y + z = 20$$
$$5x + 2y - 2z = -4$$
$$6x + 3y + 5z = 23$$

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

92. SAT/ACT مربع محاط بالدائرة B. إذا كان محيط الدائرة 50π، فما طول قطر المربع؟



A $10\sqrt{2}$
B 25
C $25\sqrt{2}$
D 50
E $50\sqrt{2}$

93. مراجعة أي مما يلي قد يكون معادلة لزهرة بثلاث بتلات؟

F $r = 3 \sin \theta$
G $r = \sin 3\theta$
H $r = 6 \sin \theta$
J $r = \sin 6\theta$

94. ما الصورة القطبية لـ $x^2 + (y - 2)^2 = 4$؟

A $r = \sin \theta$
B $r = 2 \sin \theta$
C $r = 4 \sin \theta$
D $r = 8 \sin \theta$

95. مراجعة أي مما يلي يمكن أن يكون معادلة لحلزون أرشميدس الذي يمر عبر $A\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$؟

F $r = \frac{\sqrt{2}\pi}{2} \cos \theta$
G $r = \theta$
H $r = \frac{3}{4}$
J $r = \frac{\theta}{2}$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

8 اختبار منتصف الوحدة

الدروس من 1-8 إلى 3-8

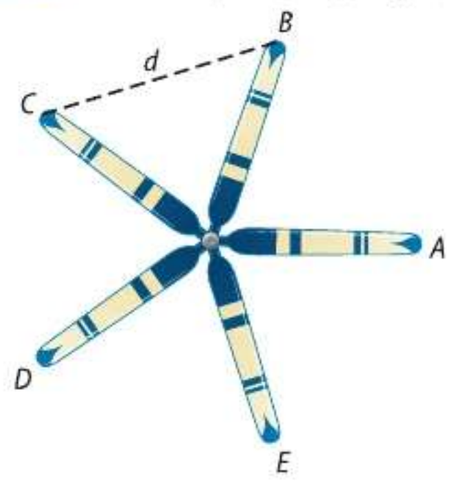
مـثّـل كل نقطة بيانيًا على الشبكة القطبية. (الدرس 1-8)

1. $A(-2, 45°)$
2. $D(1, 315°)$
3. $C\left(-1.5, -\frac{4\pi}{3}\right)$
4. $B\left(3, -\frac{5\pi}{6}\right)$

مـثّـل كل معادلة قطبية بيانيًا. (الدرس 1-8)

5. $r = 3$
6. $\theta = -\frac{3\pi}{4}$
7. $\theta = 60°$
8. $r = -1.5$

9. **طائرات مروحية** يتكون دوار الطائرة المروحية من خمس شفرات على بُعد متساوٍ. يبلغ طول كل شفرة 11.5 cm. (الدرس 1-8)



a. إذا كانت الزاوية التي تصنعها الشفرة A مع المحور القطبي تساوي 3°. فاكتب زوجًا مرتبًا لتمثيل طرف كل شفرة على الشبكة القطبية. افترض أن الدوار متمركز عند القطب.

b. ما المسافة d بين أطراف شفرات الطائرة المروحية مقربًا لأقرب جزء من السنتيمتر؟

مـثّـل كل معادلة بيانيًا. (الدرس 2-8)

10. $r = \frac{1}{4} \sec \theta$
11. $r = \frac{1}{3} \cos \theta$
12. $r = 3 \csc \theta$
13. $r = 4 \sin \theta$

14. **زجاج ملون** نافذة الوردة عبارة عن نافذة دائرية يمكن رؤيتها في الفن المعماري القوطي. يتشعب نمط النافذة من المركز. يمكن مقاربة النافذة الموضحة بالمعادلة $r = 3 \sin 6\theta$. استخدم التماثل والأصفار وقيم r العظمى بالدالة لتمثيلها بيانيًا. (الدرس 2-8)

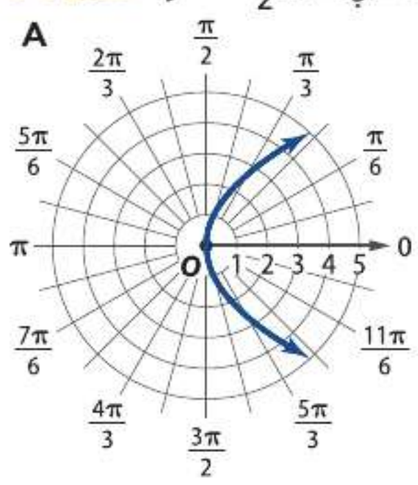


حدد كل منحنى كلاسيكي ومثله بيانيًا. (الدرس 2-8)

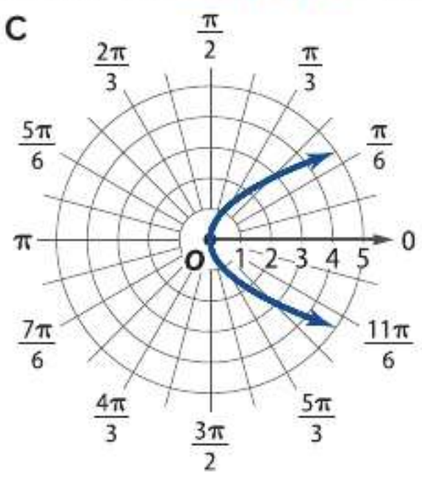
15. $r = \frac{1}{2} \sin \theta$
16. $r = \frac{1}{3}\theta + 3,\ \theta \geq 0$
17. $r = 1 + 2 \cos \theta$
18. $r = 5 \sin 3\theta$

19. **الاختيار من متعدد** حدد التمثيل البياني القطبي لـ $y^2 = \frac{1}{2}x$. (الدرس 3-8)

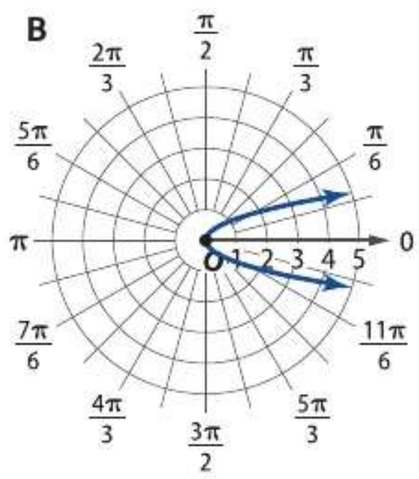
A



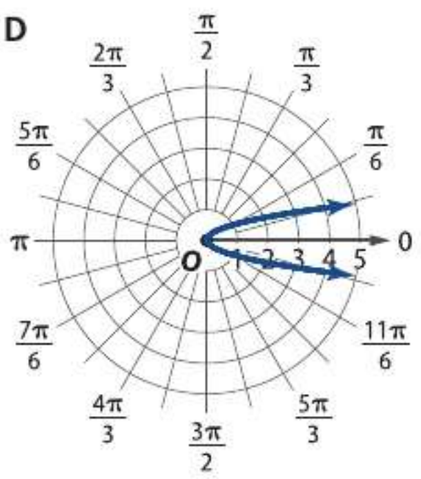
C



B



D



جـد الإحداثيات الديكارتية لكل نقطة من خلال الإحداثيات القطبية المعطاة. (الدرس 3-8)

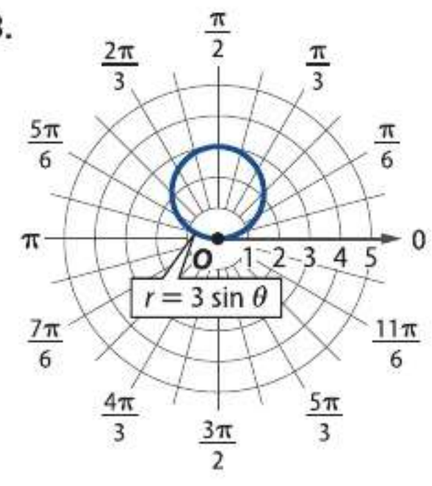
20. $\left(4, \frac{2\pi}{3}\right)$
21. $\left(-2, -\frac{\pi}{4}\right)$
22. $(-1, 210°)$
23. $(3, 30°)$

جـد زوجين من الإحداثيات القطبية لكل نقطة من خلال الإحداثيات الديكارتية المعطاة إذا كان $0 \leq \theta \leq 2\pi$. قرّب إلى أقرب جزء من مئة. (الدرس 3-8)

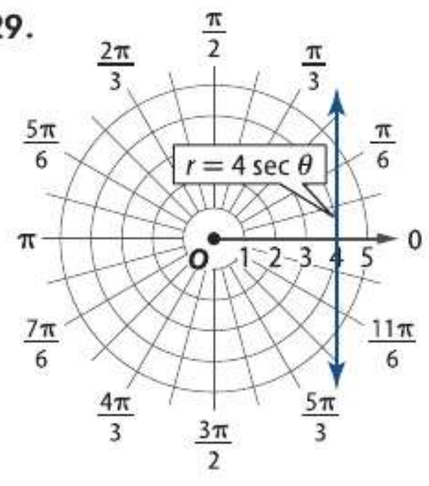
24. $(-3, 5)$
25. $(8, 1)$
26. $(7, -6)$
27. $(-4, -10)$

اكتب معادلة ديكارتية لكل تمثيل بياني. (الدرس 3-8)

28.



29.



حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

4-8 الصور القطبية للقطوع المخروطية

السابق:
- لقد قمت بتحديد القطوع المخروطية.

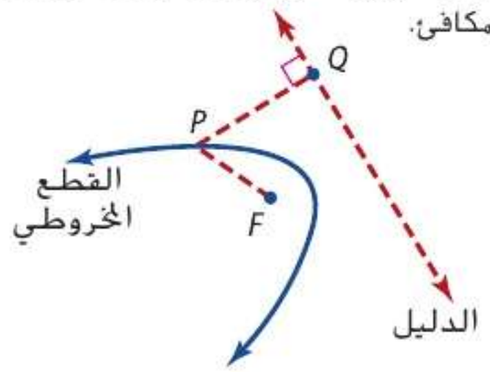
الحالي:
1. تحديد المعادلات القطبية للقطوع المخروطية.
2. كتابة المعادلة القطبية لقطعٍ مخروطيٍ معطي اختلافه المركزيّ ومعادلة دليله وتمثيلها بيانيًا.

لماذا؟
- يمكن استخدام المعادلات القطبية للقطوع المخروطية لتمثيل الحركة المدارية، كمدار كوكبٍ حول الشمس أو مدار قمرٍ صناعيٍ حول كوكب.



1 استخدام المعادلات القطبية للقطوع المخروطية

لقد حدّدت القطوع المخروطية بدلالة المسافة بين البؤرة والدليل (في القطع المكافئ) أو المسافة بين البؤرتين (القطع الناقص والقطع الزائد). وبدلاً عن ذلك، يمكنك تحديد هذه المنحنيات باستخدام تعريف البؤرة-الدليل في القطع المكافئ.



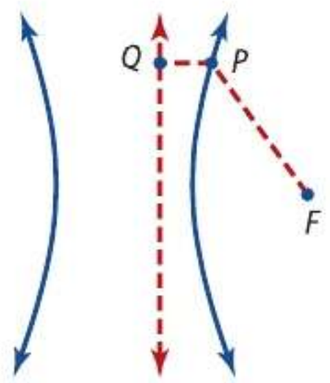
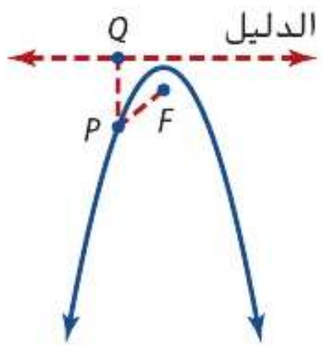
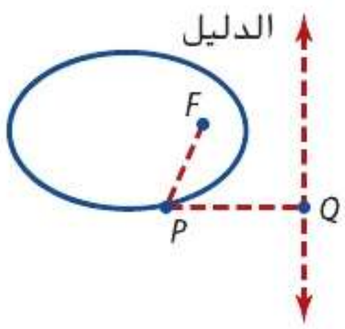
وبصورةٍ عامة، يمكن تعريف القطع المخروطي على أنه المحلّ الهندسي لمجموعة نقاط، بحيث يتحقق أن نسبة المسافة من نقطةٍ ما على القطع P إلى البؤرة إلى المسافة من النقطة نفسها إلى مستقيمٍ ثابتٍ لا يضمّ P (الدليل) هي نسبةٌ ثابتة. تمثل النسبة الثابتة $\frac{PF}{PQ}$ الاختلاف المركزي للقطع المخروطي ويرمز لها e.

e بمثابة مضاعفٍ ثابت $\frac{PF}{PQ}$ **e بمثابة نسبةٍ ثابتة**

$PF = e \times PQ$ أو $e = \frac{PF}{PQ}$

تذكّر أنه لكل قطع مكافئ، يكون $PF = PQ$. ولذلك، للقطع المكافئ اختلافٌ مركزي $\frac{PF}{PQ} = 1$ تعطينا القيم الأخرى لـ e قطوعًا مخروطيةً أخرى. وفيما يلي تلخيصٌ لهذه الاختلافات المركزية.

ملخص المفهوم الاختلاف المركزي

قطع زائد	قطع مكافئ	قطع ناقص
$e > 1$	$e = 1$	$0 < e < 1$
		
$\frac{PF}{PQ} > 1$	$\frac{PF}{PQ} = 1$	$0 < \frac{PF}{PQ} < 1$

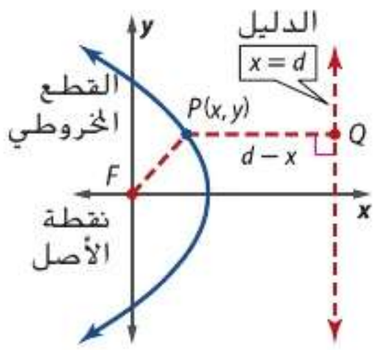
تذكّر أيضًا أنّه حين يقع مركز قطعٍ مخروطيٍ عند نقطة الأصل، فإن المعادلات الديكارتية للقطوع المخروطية تأخذ صورةً أبسط.

القطع الزائد	القطع المكافئ	القطع الناقص
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ أو $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$	$x^2 = 4pv$ أو $y^2 = 4px$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ أو $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education.

باستخدام تعريف البؤرة–الدليل، تبسّط معادلة القطع المخروطي بالصورة القطبية إذا كانت إحدى بؤر القطع تقع عند نقطة الأصل.

إذا فكّرنا في قطع مخروطي تقع بؤرته عند نقطة الأصل ويقع دليله إلى اليمين عند $x = d$. من أجل أي نقطة $P(x, y)$ واقعةٍ على المنحنى، فإن المسافة PF تعطى من خلال $\sqrt{x^2 + y^2}$. وتعطى المسافة PQ من خلال $d - x$. يمكننا استبدال هذين التعبيرين في تعريف القطع المخروطي.



تعريف القطع المخروطي

$$PF = e \times PQ$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = e(d - x)$$

$PQ = d - x$ و $PF = \sqrt{x^2 + y^2}$

نصيحة دراسية

القطوع المخروطية الأخرى عند تحديد القطوع المخروطية بدلالة اختلافها المركزي، فإن e يكون ثابتًا موجبًا قطعًا. ولا توجد دوائر أو مستقيماتٌ أو مخاريط منحسرةٌ أخرى.

ينبغي أن يجعلك التعبير $\sqrt{x^2 + y^2}$ تفكّر في الإحداثيات القطبية. وفي الحقيقة، للمعادلة الواردة أعلاه صورةٌ أبسطُ في النظام الإحداثي القطبي.

الصورة الديكارتية لقطعٍ مخروطي معرّفٍ بدلالة اختلافه المركزي e

$$\sqrt{x^2 + y^2} = e(d - x)$$

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ و $x = r\cos\theta$

$$r = e(d - r\cos\theta)$$

خاصية التوزيع

$$r = ed - er\cos\theta$$

اعزل حدود r.

$$r + er\cos\theta = ed$$

حلل إلى العوامل.

$$r(1 + e\cos\theta) = ed$$

حلّ لإيجاد r.

$$r = \frac{ed}{1 + e\cos\theta}$$

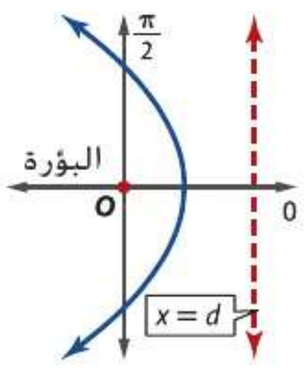
هذه المعادلة الأخيرة هي الصورة القطبية لمعادلة للقطوع المخروطية التي تقع بؤرتها عند القطب ويقع دليلها الرأسي ومركزها أو رأسها إلى يمين القطب. يمكن أن تؤدي التوجيهات المختلفة للبؤرة والدليل صورًا مختلفةً لهذه المعادلة القطبية، وفق ما نوجز أدناه.

المفهوم الأساسي المعادلات القطبية للقطوع المخروطية

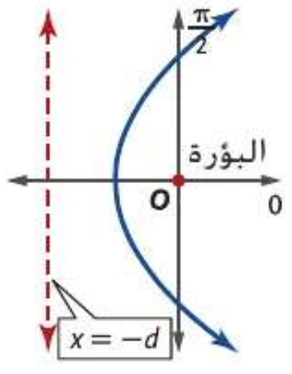
يأخذ القطع المخروطي الذي اختلافه المركزي $e > 0$، وفيه $d > 0$، وتقع بؤرته عند القطب، المعادلة القطبية التالية:

- $r = \frac{ed}{1 + e\cos\theta}$ إذا كان الدليل هو المستقيم الرأسي $x = d$ (الشكل 8.4.1).
- $r = \frac{ed}{1 - e\cos\theta}$ إذا كان الدليل هو المستقيم الرأسي $x = -d$ (الشكل 8.4.2).
- $r = \frac{ed}{1 + e\sin\theta}$ إذا كان الدليل هو المستقيم الأفقي $y = d$ (الشكل 8.4.3)، و
- $r = \frac{ed}{1 - e\sin\theta}$ إذا كان الدليل هو المستقيم الأفقي $y = -d$ (الشكل 8.4.4).

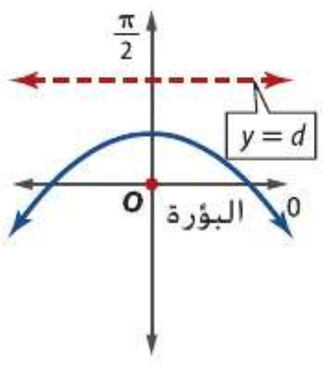
في كلٍ من الأمثلة أدناه، يكون $e = 1$، وبالتالي يأخذ القطع المخروطي صورة قطعٍ مكافئ.



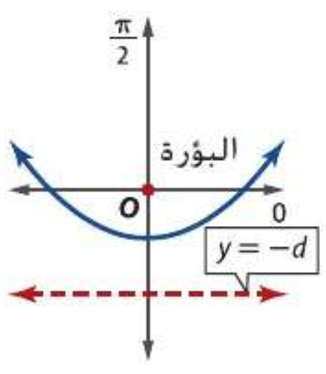
الشكل 8.4.1



الشكل 8.4.2



الشكل 8.4.3



الشكل 8.4.4

قراءة في الرياضيات

الاختلاف المركزي في كلّ من هذه المعادلات القطبية، e متغيرٌ يمثل الاختلاف المركزي للقطع المخروطي. وينبغي عدم *الخلط* بينه وبين العدد النابيري e، والذي يعدّ ثابتًا.

سوف تشتق المعادلات الثلاثة الأخيرة من هذه المعادلات في التمارين 52-50.

لاحظ أنه من أجل $r = \frac{ed}{1 - e\cos\theta}$، يقع دليل القطع المخروطي إلى يسار القطب، من أجل $r = \frac{ed}{1 + e\sin\theta}$، يقع الدليل فوق القطب. من أجل $r = \frac{ed}{1 - e\sin\theta}$، يقع الدليل تحت القطب.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

لتحليل المعادلة القطبية، ابدأ بكتابة المعادلة بالصورة القياسية $r = \frac{ed}{1 \pm e \sin \theta}$ أو $r = \frac{ed}{1 \pm e \cos \theta}$. وفي هذه الصورة، حدّد الاختلاف المركزي واستخدم هذه القيمة لتحديد نوع القطع المخروطي الذي تمثله المعادلة. ثمّ حدّد معادلة الدليل واستخدمها لوصف توجيه القطع المخروطي.

المثال 1 تحديد نوع القطع المخروطي من المعادلات القطبية

حدد الاختلاف المركزي ونوع القطع ومعادلة الدليل لكل معادلة قطبية.

a. $r = \frac{9}{3 + 2.25 \cos \theta}$

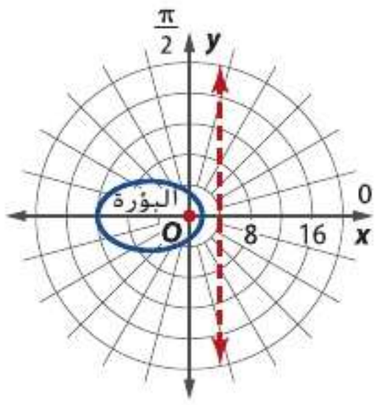
اكتب المعادلة بالصورة القياسية، $r = \frac{ed}{1 + e \cos \theta}$.

$r = \frac{9}{3 + 2.25 \cos \theta}$ المعادلة الأصلية

$r = \frac{3(3)}{3(1 + 0.75 \cos \theta)}$ حلل البسط والمقام إلى العوامل.

$r = \frac{3}{1 + 0.75 \cos \theta}$ اقسم البسط والمقام على 3.

في هذه الصورة، يمكن أن تلاحظ من خلال المقام أن $e = 0.75$. ولذلك فإن القطع المخروطي هو قطعٌ ناقص. بالنسبة للمعادلات القطبية بهذه الصورة، معادلة الدليل هي $x = d$. من البسط، نعلم أن $ed = 3$. إذًا $d = 3 \div 0.75 = 4$. إذًا، معادلة الدليل هي $x = 4$.



التحقق ارسم التمثيل البياني لـ $r = \frac{9}{3 + 2.25 \cos \theta}$ ودليلِهِ $x = 4$ وذلك إما باستخدام التقنيات المعروضة في الدرس 2-8 أو باستخدام حاسبة التمثيل البياني. التمثيل البياني هو قطعٌ ناقصٌ يقع دليله إلى يمين القطب. ✔

b. $r = \frac{-16}{4 \sin \theta - 2}$

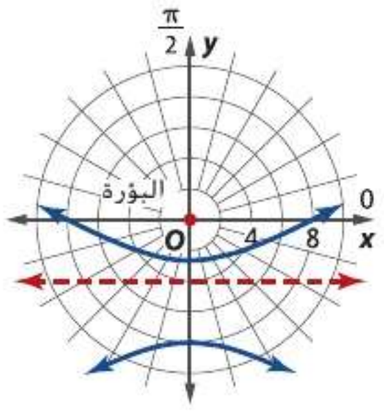
اكتب المعادلة بالصيغة القياسية.

$r = \frac{-16}{4 \sin \theta - 2}$ المعادلة الأصلية

$r = \frac{-2(8)}{-2(1 - 2 \sin \theta)}$ حلل البسط والمقام إلى العوامل.

$r = \frac{8}{1 - 2 \sin \theta}$ اقسم البسط والمقام على -2.

المعادلة من الصيغة $r = \frac{ed}{1 - e \sin \theta}$. إذًا $e = 2$. ولذلك فإن القطع المخروطي هو قطعٌ زائد. بالنسبة للمعادلات القطبية من هذه الصورة، فإن معادلة الدليل هي $y = -d$. نظرًا إلى أنّ $ed = 8$ فإن، $d = 8 \div 2$ أو 4. ولذلك، معادلة الدليل هي $y = -4$.



التحقق ارسم التمثيل البياني لـ $r = \frac{-16}{4 \sin \theta - 2}$ ودليلِه $y = -4$. التمثيل البيانيّ قطعٌ زائدٌ تقع بؤرته عند نقطة الأصل، وفوق الدليل. ✔

تمرين موجّه

1A. $r = \frac{-6}{3 \cos \theta - 1}$ **1B.** $r = \frac{9}{3 + 3 \sin \theta}$ **1C.** $r = \frac{1}{6 + 1.2 \cos \theta}$

نصيحة دراسية

أزواج البؤر–الأدلّة في حين أن القطع المكافئ يضم بؤرةً واحدةً ودليلاً واحدًا، فإن لكلٍّ من القطع الناقص والقطع الزائد بؤرتين ودليلين. ويمكن استخدام أيٍّ من زوجي البؤرة–الدليل لتحديد القطع المخروطي.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

2 كتابة المعادلات القطبية للقطوع المخروطية

يمكنك كتابة المعادلة القطبية لقطعٍ مخروطيٍ عند إعطائك دليله أو اختلافه المركزي إضافةً إلى بعض الخواصّ الأخرى.

المثال 2 كتابة المعادلات القطبية للقطوع المخروطية

اكتب معادلةً قطبيةً للقطع المخروطي ذي الخواصّ المعطاة ومثّله مع دليله بيانيًا.

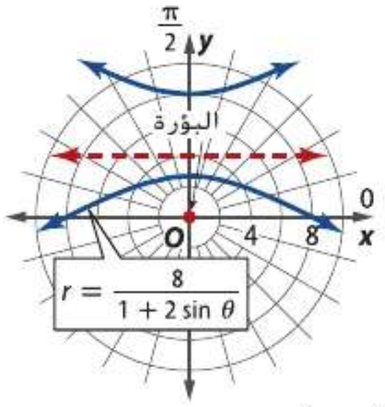
a. $e = 2$; الدليل: $y = 4$

نظرًا إلى أن $e = 2$، فالمخروط قطعٌ زائد. يقع الدليل $y = 4$ فوق القطب، وبالتالي فإن للمعادلة الصورة $r = \frac{ed}{1 + e \sin \theta}$. استخدم قيمتي e و d لكتابة المعادلة.

$r = \frac{ed}{1 + e \sin \theta}$ — الصورة القطبية لقطعٍ مخروطيٍ دليله $y = d$

$r = \frac{2(4)}{1 + 2 \sin \theta}$ أو $\frac{8}{1 + 2 \sin \theta}$ — $e = 2$ و $d = 4$

ارسم التمثيل البياني للمعادلة القطبية التالية مع دليله.
التمثيل البياني هو قطعٌ زائدٌ دليله فوق القطب.



b. $e = 0.5$; الرأسان عند $(12, 0)$ و $(-4, 0)$

نظرًا إلى أن $e = 0.5$، فالمخروط قطعٌ ناقص. يقع مركز القطع الناقص عند النقطة $(4, 0)$، وهي نقطة منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بين الرأسين المعطيين. تقع هذه النقطة إلى يمين القطب. ولذلك سيقع الدليل إلى يسار القطب عند $x = -d$. المعادلة القطبية لقطعٍ مخروطيٍ له هذا الدليل هي $r = \frac{ed}{1 - e \cos \theta}$.

استخدم قيمة e والصورة القطبية لنقطةٍ تقع على القطع المخروطي لإيجاد قيمة d. لنقطة الرأس $(12, 0)$ الإحداثيان القطبيان $(12, 0)$ أو $(r, \theta) = \left(\sqrt{12^2 + 0^2}, \tan^{-1} \frac{0}{12}\right)$.

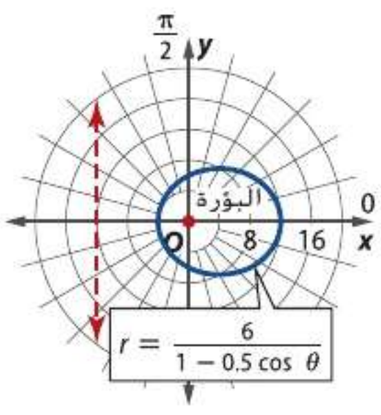
$r = \frac{ed}{1 - e \cos \theta}$ — الصورة القطبية لقطعٍ مخروطيٍ دليله $x = -d$

$12 = \frac{0.5d}{1 - 0.5 \cos 0}$ — $e = 0.5$ و $r = 12$, و $\theta = 0$

$12 = \frac{0.5d}{0.5}$ — $\cos 0 = 1$

$12 = d$ — بسّط.

ولذلك، فمعادلة القطع الناقص هي أو $r = \frac{0.5 \times 12}{1 - 0.5 \cos \theta}$ أو $r = \frac{6}{1 - 0.5 \cos \theta}$. نظرًا إلى أنّ $d = 12$، فإن معادلة الدليل هي $x = -12$. والتمثيل البياني قطعٌ ناقصٌ يقع رأساه عند النقطتين $(-4, 0)$ و $(12, 0)$.



نصيحة دراسية

آثار تعدد الاختلافات المركزية

سوف تستكشف آثار تعدّد الاختلافات المركزية مقابل وجود دليلٍ ثابت وآثار تعدد الأدلة مقابل وجود اختلافٍ مركزيٍ ثابتٍ في التمرين 49.

تمرين موجّه

2A. $e = 1$; الدليل: $x = 2$

2B. $e = 2.5$; الرأسان عند $(0, -7)$ و $(0, -3)$

لقد حلّلت المعادلات الديكارتية للقطوع المخروطية بالصورة القياسية لوصف الخواصّ الهندسية للقطوع المكافئة والقطوع الناقصة والقطوع الزائدة. ويمكنك استخدام التحليل الهندسي للتمثيل البياني لقطعٍ مخروطيٍّ معطًى بالصورة القطبية لكتابة المعادلة بالصورة الديكارتية.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

المثال 3 كتابة الصورة القطبية لقطوع مخروطيةٍ بالصورة الديكارتية

اكتب كل معادلة قطبية بالصورة الديكارتية.

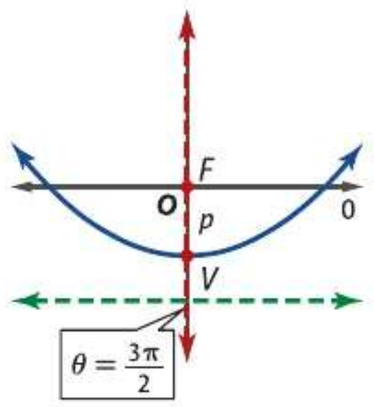
a. $r = \frac{4}{1 - \sin \theta}$

الخطوة 1 حلّل المعادلة القطبية.

من أجل هذه المعادلة، يكون $d = 4$ و $e = 1$. إن الاختلاف المركزي وصورة المعادلة يحددان أن هذا قطعٌ مكافئٌ مفتوحٌ رأسيًا تقع بؤرته عند المحور ودليله $y = -4$. المعادلة العامة لهذا القطع المكافئ بالصورة الديكارتية هي $(x - h)^2 = 4p(y - k)$.

الخطوة 2 حدّد قيم h و k و p.

يقع الرأس بين بؤرة القطع المكافئ F ودليله، ويحدث ذلك عندما $\theta = \frac{3\pi}{2}$، كما هو موضح في الشكل 8.4.5. بإيجاد قيمة الدالة عند هذه القيمة، فإننا نتوصل إلى أن الرأس يقع عند الإحداثي القطبي $\left(2, \frac{3\pi}{2}\right)$، والذي يقابل الإحداثي الديكارتي $(0, -2)$. إذًا، $(h, k) = (0, -2)$. المسافة p من الرأس الواقع عند النقطة $(0, -2)$ إلى البؤرة الواقعة عند النقطة $(0, 0)$ تساوي 2.



الشكل 8.4.5

الخطوة 3 عوّض قيم h و k وp في الصورة القياسية لمعادلة قطعٍ مكافئ.

$(x - h)^2 = 4p(y - k)$	الصورة القياسية للقطع المكافئ
$(x - 0)^2 = 4(2)[y - (-2)]$	$h = 0$ و $k = -2$ و $p = 2$
$x^2 = 8y + 16$	بسّط.

b. $r = \frac{3.2}{1 - 0.6 \cos \theta}$

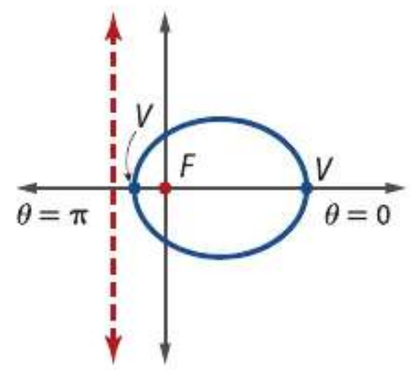
الخطوة 1 حلّل المعادلة القطبية.

من أجل هذه المعادلة، $d \approx 5.3$ و $e = 0.6$. إن الاختلاف المركزي وصورة المعادلة يحدّدان أن هذا قطعٌ ناقصٌ دليله $x = -5.3$. ولذلك، يقع المحور الأكبر للقطع الناقص على طول القطب أو المحور الأفقي x. المعادلة العامة لهذا القطع المكافئ بالصورة الديكارتية هي $\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$.

الخطوة 2 حدّد قيم h و k و a وb.

الرأسان هما النقطتان الطرفيتان للمحور الأكبر. وتتشكلان عند $\theta = 0$ و π كما هو موضح في الشكل 8.4.6. بإيجاد قيمة الدالة عند هاتين القيمتين، نتوصّل إلى أن للرأسين الإحداثيين القطبيين $(2, \pi)$ و $(8, 0)$، واللذين يقابلان الإحداثيين الديكارتيين $(-2, 0)$ و $(8, 0)$. مركز القطع الناقص هو نقطة منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بين الرأسين. إذًا $(h, k) = (3, 0)$.

تساوي المسافة a بين المركز وكل رأس 5. المسافة c من المركز إلى البؤرة الواقعة عند النقطة $(0, 0)$ تساوي 3. من علاقة فيثاغورس، يكون لدينا $b = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$ أو $b = \sqrt{a^2 - c^2}$.



الشكل 8.4.6

الخطوة 3 عوّض قيم h و k و a وb في الصورة القياسية لمعادلة قطعٍ ناقص.

$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$	الصورة القياسية للقطع الناقص.
$\frac{(x - 3)^2}{5^2} + \frac{(y - 0)^2}{4^2} = 1$	$h = 3, k = 0$ و $a = 5,$ و $b = 4$
$\frac{(x - 3)^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$	بسّط.

تمرين موجّه

3A. $r = \frac{2.5}{1 - 1.5 \cos \theta}$

3B. $r = \frac{5}{1 + \sin \theta}$

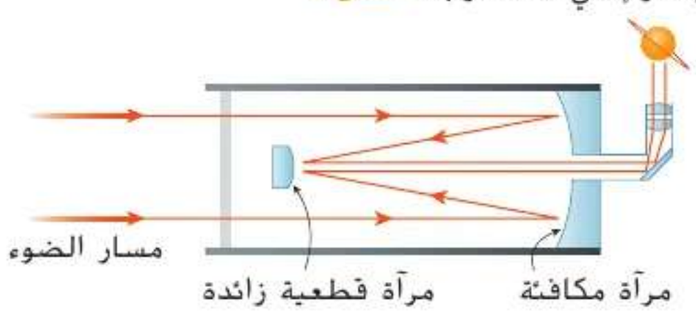
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تمارين

حدد الاختلاف المركزي ونوع القطع ومعادلة الدليل لكل معادلة قطبية. (المثال 1)

1. $r = \frac{20}{4 + 4 \sin \theta}$
2. $r = \frac{18}{2 - 6 \cos \theta}$
3. $r = \frac{21}{3 \cos \theta + 1}$
4. $r = \frac{24}{4 \sin \theta + 8}$
5. $r = \frac{-12}{6 \cos \theta - 6}$
6. $r = \frac{9}{4 - 3 \sin \theta}$
7. $r = \frac{-8}{\sin \theta - 0.25}$
8. $r = \frac{10}{2.5 + 2.5 \cos \theta}$

9. **التلسكوبات** ينتج تلسكوب كاسيغران، والذي اختُرِع عام 1692، الصورة عبر انعكاس الضوء عن مرايا قطعيةٍ مكافئةٍ وقطعيةٍ زائدة. حدّد الاختلاف المركزي ونوع القطع المخروطي ومعادلة الدليل لكلّ معادلةٍ ممثلةٍ لمرآةٍ في التلسكوب. (المثال 1)



a. $r = \frac{7}{2 \sin \theta + 2}$
b. $r = \frac{28}{12.5 \cos \theta + 5}$

اكتب مع التمثيل البياني معادلةً قطبيةً ودليلاً لمخروط بالخصائص المعطاة. (المثال 2)

10. $e = 1$; الدليل: $y = 6$
11. $e = 0.75$; الدليل: $x = -8$
12. $e = 5$; الدليل: $x = 2$
13. $e = 0.1$; الدليل: $y = 8$
14. $e = 6$; الدليل: $y = -7$
15. $e = 1$; الدليل: $x = -1.5$
16. $e = 0.8$; الرأسان عند $(4, 0)$ و $(-36, 0)$
17. $e = 1.5$; الرأسان عند $(-15, 0)$ و $(-3, 0)$

اكتب كل معادلة قطبية بالصورة الديكارتية. (المثال 3)

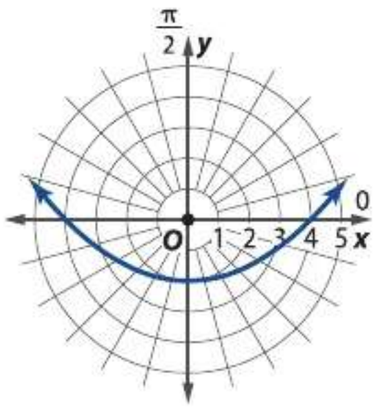
18. $r = \frac{4.8}{1 + \sin \theta}$
19. $r = \frac{30}{4 + \cos \theta}$
20. $r = \frac{5}{1 - 1.5 \cos \theta}$
21. $r = \frac{5.1}{1 + 0.7 \sin \theta}$
22. $r = \frac{12}{1 - \cos \theta}$
23. $r = \frac{6}{0.25 - 0.75 \sin \theta}$
24. $r = \frac{4.5}{1 + 1.25 \sin \theta}$
25. $r = \frac{8.4}{1 - 0.4 \cos \theta}$

الآلة الحاسبة البيانية حدّد نوع القطع المخروطي لكلّ معادلةٍ قطبيةٍ مما يلي. ثم مثّل كل معادلة بيانيًا.

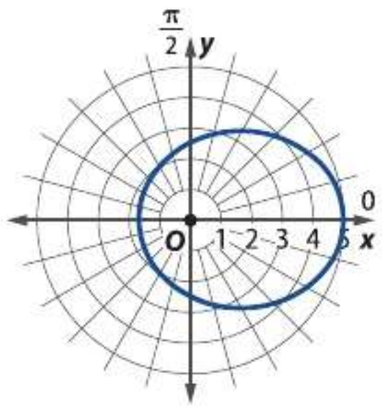
26. $r = \frac{2}{2 + \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)}$
27. $r = \frac{3}{1 + \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)}$
28. $r = \frac{2}{1 - \cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)}$
29. $r = \frac{4}{1 + 2 \sin\left(\theta + \frac{3\pi}{4}\right)}$

صل كل معادلة قطبية بتمثيلها البياني.

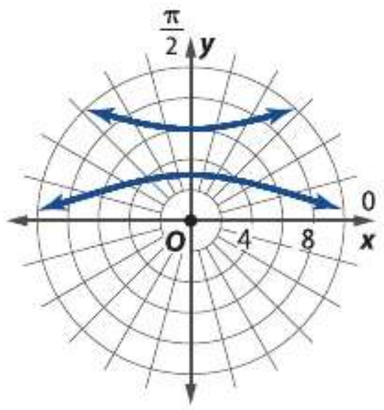
a.



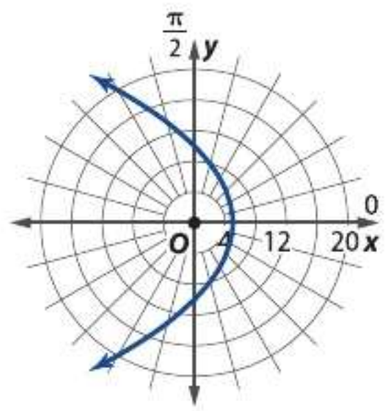
b.



c.



d.



30. $r = \frac{10}{1 + \cos \theta}$
31. $r = \frac{4}{1 - \sin \theta}$
32. $r = \frac{5}{2 - \cos \theta}$
33. $r = \frac{12}{1 + 3 \sin \theta}$

حدد الاختلاف المركزي ونوع القطع ومعادلة الدليل لكل معادلة قطبية مما يلي. ثم ارسم التمثيل البياني للمعادلة، وحدّد الدليل.

34. $r = \frac{12}{2 - 0.75 \cos \theta}$
35. $r = \frac{1}{0.2 - 0.2 \sin \theta}$
36. $r = \frac{6}{1.2 \sin \theta + 0.3}$
37. $r = \frac{8}{\cos \theta + 5}$

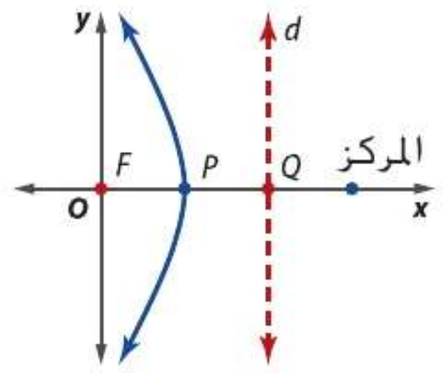
38. **علم الفلك** يسير مذنّب بوريلّي حول الشّمس بمسارٍ قطعيٍّ ناقصٍ اختلافه المركزيّ $e = 0.624$. تعرّف أقرب نقطةٍ إلى الشمس في مدار مذنّبٍ باسم *الحضيض* بينما تعرّف أبعد نقطةٍ عن الشّمس باسم *الأوج*. يتشكّل الأوج عند مسافة 5.83 AU (وحدة شمسية، على أساس المسافة بين الأرض والشمس) عن الشمس ويتشكّل الحضيض عند مسافة 1.35 AU. ويبلغ قطر الشمس 0.0093 AU تقريبًا.
   a. اكتب معادلةً قطبيةً للمسار القطعي الناقص لمذنّب بوريلّي، ومثّل تلك المعادلة بيانيًا.
   b. حدّد المسافة بالكيلومترات بين مذنّب بوريلّي وبين الشّمس عند الأوج والحضيض إذا كانت كل 1 AU ≈ 149.7 مليون كيلومتراً.

البرهان برهن كلّا مما يلي.

39. $b = a\sqrt{1 - e^2}$ من أجل القطع الناقص
40. $b = a\sqrt{e^2 - 1}$ من أجل القطع الزائد

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

41. **البرهان** استخدم تعريف الاختلاف المركزي لقطعٍ مخروطي، $PF = ePQ$ ورسم القطع الزائد المبيّن أدناه للتحقق من أن $d = \frac{a(e^2 - 1)}{e}$ من أجل أي قطعٍ زائد.



اكتب كل معادلة ديكارتية بالصورة القطبية.

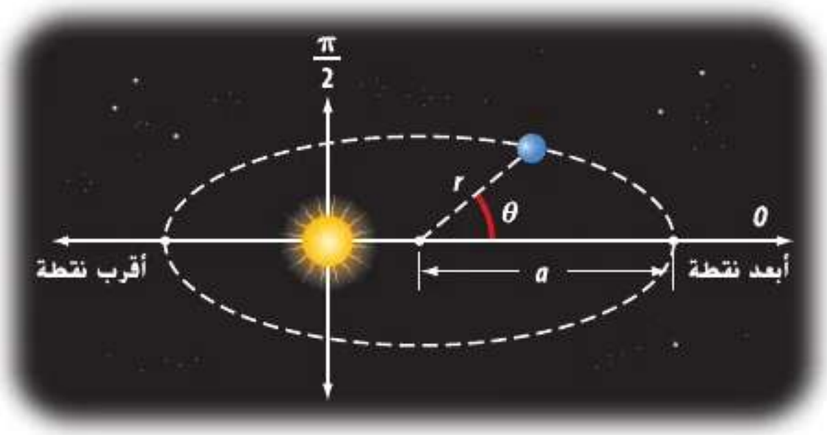
42. $x^2 = 4y + 4$

43. $-10y + 25 = x^2$

44. $\frac{(x-2)^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$

45. $\frac{(x+4)^2}{64} + \frac{y^2}{48} = 1$

46. **علم الفلك** تدور الكواكب حول الشمس بمداراتٍ قطعيةٍ ناقصةٍ تقريبًا تقع الشّمس عند إحدى البؤرتين. وذلك وفق ما هو موضّح أدناه.



a. بيّن أن المعادلة القطبية لمسار الكواكب يمكن أن تكتب بالصيغة $r = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e\cos\theta)}$.

b. أثبت أن مسافة أقرب نقطةٍ ممكنةٍ لأيّ كوكبٍ إلى الشّمس (الحضيض الشمسي) هي $a(1 - e)$ وأنّ مسافة أبعد نقطة عن الشمس (أوج المدار) هي $a(1 + e)$.

c. استخدم الصيغتين الواردتين في القسم **a** لإيجاد مسافتي الحضيض والأوج لكلٍ من الكواكب.

الكوكب	a	e	الكوكب	a	e
الأرض	1.000	0.017	نبتون	30.06	0.009
المشترى	5.203	0.048	زحل	9.539	0.056
المريخ	1.524	0.093	أورانوس	19.18	0.047
عطارد	0.387	0.206	الزهرة	0.723	0.007

d. ما الكوكب الذي يتمتع بأصغر مسافةٍ بين الحضيض والرأس؟ وما الكوكب الذي يتمتع بأكبر مسافةٍ بينهما؟

اكتب كل معادلةٍ بالصورة القطبية. (*إرشاد*: أزح كل قطعٍ مخروطيٍ بحيث تقع بؤرةٌ على القطب.)

47. $\frac{(x-2)^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$

48. $3(x+5)^2 + 4y^2 = 192$

49. **التمثيلات المتعددة** سوف تستكشف في هذه المسألة آثار تغيير الاختلاف المركزي والدليل على التمثيلات البيانية للقطوع المخروطية.

a. **عدديًا** اكتب معادلة قطعٍ مخروطيٍ بؤرته $(0, 0)$ ودليله $x = 3$ من أجل $e = 0.4$ و 0.6 و 1 و 1.6 و 2. ثمّ حدّد نوع القطع المخروطي الذي تمثّله كلّ معادلة.

b. **بيانيًا** مثّل الاختلاف المركزي وسمّه لكلٍّ من المعادلات التي توصلت إليها في القسم **a** على المستوى الإحداثي نفسه.

c. **لفظيًا** صف التغيرات التي تحدث في التمثيلات البيانية في القسم **b** مع اقتراب e من 2.

d. **عدديًا** اكتب معادلة قطعٍ مخروطيٍ بؤرته $(0, 0)$ واختلافه المركزي $e = 0.5$ من أجل $d = 0.25$ و 1 و 4.

e. **بيانيًا** مثّل كلاً من المعادلات بيانيًا على المستوى الإحداثي نفسه.

f. **لفظيًا** صِف العلاقة بين قيمة d والمسافة بين الرأسين والبؤرتين في التمثيلات البيانية في القسم **e**.

اشتقّ كلاً من المعادلات القطبية التالية لقطوع مخروطيةٍ وفق ما هو واردٌ في صفحة سابقة بالنسبة للمعادلة $r = \frac{ed}{1 + e\cos\theta}$. واشتمل على تمثيلٍ بيانيٍ في كل اشتقاق.

50. $r = \frac{ed}{1 - e\cos\theta}$

51. $r = \frac{ed}{1 + e\sin\theta}$

52. $r = \frac{ed}{1 - e\sin\theta}$

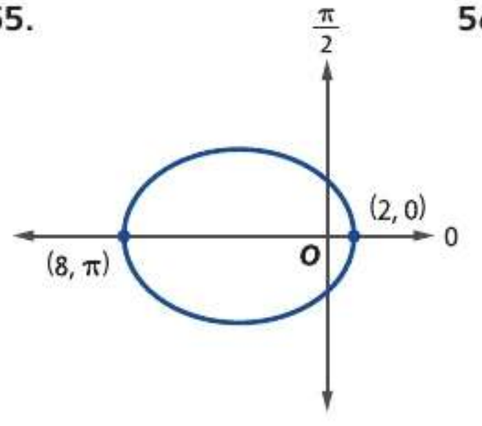
مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

53. **الكتابة في الرياضيات** صِف تعريفين يمكن استخدامهما لتحديد قطعٍ مخروطي.

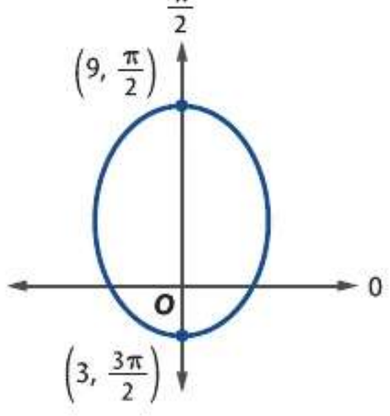
54. **التبرير** اشرح السبب في أن $r = \frac{ed}{1 + e\sin\theta}$ لا تعطي دائرةً حقيقيةً من أجل أي قيمة لـ e.

تحدٍّ حدّد معادلةً قطبيةً للقطع المكافئ ذي الرأسين المعطيين إذا كانت إحدى البؤرتين تقع عند القطب.

55.



56.



57. **الكتابة في الرياضيات** اشرح كيف تستطيع إيجاد المسافة من البؤرة الواقعة عند النقطة $(0, 0)$ إلى أيّ نقطةٍ على القطع المخروطيّ عند إعطاء الإحداثيات الديكارتية أو الإحداثيات القطبية أو θ.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مراجعة شاملة

جـــد زوجين من الإحداثيات القطبية لكل نقطة من خلال الإحداثيات الديكارتية المعطاة إذا كان $0 \le \theta \le 2\pi$. وعند الضرورة، قرّب إلى أقرب جزء من مئة.

58. $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

59. $(-2, -5)$

60. $(8, -12)$

حدد كل منحنى كلاسيكي ومثله بيانيًا.

61. $r = 3 + 3 \cos \theta$

62. $r = -2 \sin 3\theta$

63. $r = \frac{5}{2}\theta,\ \theta \ge 0$

حدّد معادلة القطع الناقص المقابل لكل مجموعة من الخواصّ مما يلي.

64. الرأسان المرافقان $(0, 5)$ و $(8, 5)$؛ البؤرتان $(2, 4)$ و $(8, 4)$.

65. المحور الأكبر يمتدّ من $(-2, 4)$ إلى $(8, 4)$؛ المحور الأصغر يمتد من $(1, 3)$ إلى $(7, 3)$.

66. البؤرتان $(-9, -1)$ و $(1, -1)$؛ طول المحور الأصغر يساوي 6

67. الألعاب الأولمبية تحدّد مراكز الفرق في الألعاب الأولمبية بناءً على العدد الإجمالي من النقاط التي يحرزها كل فريق. حيث يمنح كلّ نوع من أنواع الميداليات الأولمبية الفريق عددًا محدّدًا من النقاط. استخدم هذه المعلومات لتحدّد الدورة الأولمبية التي حققت خلالها الولايات المتّحدة أكبر عددٍ من النقاط.

الدورة الأولمبية	ذهبية	فضية	برونزية
1996	44	32	25
2000	37	24	31
2004	35	39	29
2008	36	38	36

الميدالية	النقاط
ذهبية	3
فضية	2
برونزية	1

جـــد قِيمَ $\cos 2\theta$، $\sin 2\theta$ و$\tan 2\theta$ للمقدار والفترة الموضحين.

68. $\sin \theta = \frac{2}{3},\ (0°, 90°)$

69. $\tan \theta = -\frac{24}{7},\ \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$

70. $\sin \theta = -\frac{4}{5},\ \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$

حدد الخطوط المقاربة الرأسية، ومثل كل دالة بيانيًّا.

71. $y = \sec\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

72. $y = 4 \cot \frac{x}{2}$

73. $y = 2 \cot\left[\frac{2}{3}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right] + 0.75$

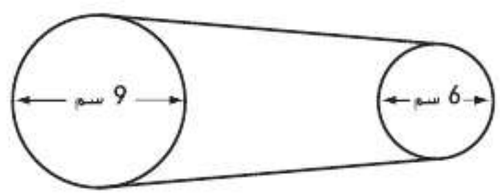
جـــد القيم الدقيقة للخمس دوال المثلثية المتبقية لـــ θ.

74. $\sec \theta = 2$، حيث $\cos \theta > 0$ و $\sin \theta > 0$

75. $\csc \theta = \sqrt{5}$، حيث $\cos \theta > 0$ و $\sin \theta > 0$

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

76. SAT/ACT تُربط بكرةٌ قطرها 9 cm ببكرةٍ أخرى قطرها 6 cm، كما هو موضح في الشكل. فإذا كانت البكرة الكبرى تدور بسرعة 120 rpm (دورة في الدقيقة)، فما سرعة البكرة الصغرى؟



A 80 rpm
B 120 rpm
C 160 rpm
D 180 rpm
E 200 rpm

77. ما نوع القطع المخروطي المعطى بالمعادلة $r = \frac{3}{2 - 0.5 \cos \theta}$؟

F دائرة
G قطع ناقص
H قطع مكافئ
J قطع زائد

78. مراجعة أي من الخيارات التالية يحتوي على الصورة المركّبة والمقدار للمتّجه $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته $A(3, 4, -2)$ ونقطة نهايته $B(-5, 2, 1)$؟

A $\langle -8, -2, 3 \rangle, \sqrt{77}$
B $\langle 8, -2, 3 \rangle, \sqrt{77}$
C $\langle -8, -2, 3 \rangle, \sqrt{109}$
D $\langle 8, -2, 3 \rangle, \sqrt{109}$

79. مراجعة ما الاختلاف المركزي للقطع الناقص الموصوف من خلال $\frac{y^2}{47} + \frac{(x - 12)^2}{34} = 1$؟

F 0.38
G 0.41
H 0.53
J 0.62

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

8-5 الأعداد المركبة ونظرية دي موافر

السابق
- أجريت العمليات بالأعداد المركبة المكتوبة في الصورة الديكارتية.

الحالي
1. تحويل الأعداد المركبة من الصورة الديكارتية إلى الصورة القطبية والعكس.
2. إيجاد ناتج ضرب الأعداد المركبة وناتج قسمتها وأسسها وجذورها في الصورة القطبية.

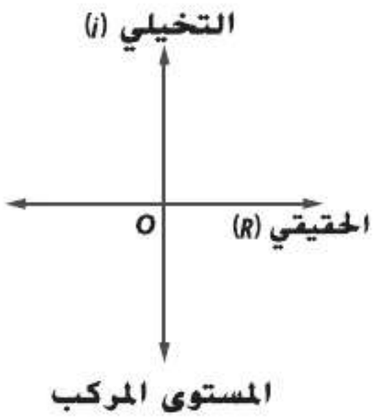
لماذا؟
- يستخدم المهندسون الكهربائيون الأعداد المركبة لوصف العلاقات الكهربائية. يمثل كل من الجهد الكهربائي E والمعاوقة Z، والتيار I الكميات الثلاث المربوطة بالمعادلة $E = I \times Z$ المستخدمة في وصف التيار المتردد. يمكن كتابة كل متغير في شكل أعداد مركبة في الصورة $a + bj$، حيث j هو عدد تخيلي (ويستخدم المهندسون الرمز j كي لا يختلط برمز التيار I). للمعاوقة، يمثل الجزء الحقيقي a المعاوقة التي يلاقيها تدفق التيار بسبب أجهزة المقاومة، ويتعلق الجزء التخيلي b بالمعاوقة بسبب المكثفات والمستحثات.



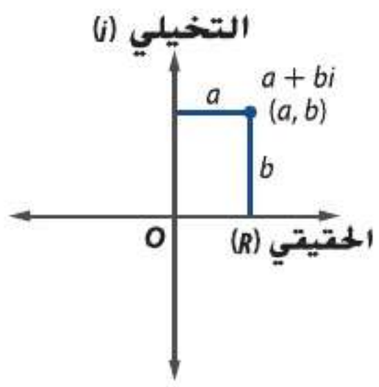
المفردات الجديدة
- مستوى مركب
- complex plane
- محور حقيقي real axis
- محور تخيلي
- imaginary axis
- مستوى أرجاند
- Argand plane
- القيمة المطلقة لعدد مركب
- absolute value of a complex number
- صورة قطبية polar form
- صيغة مثلثية
- trigonometric form
- معامل modulus
- فرضية argument
- جذور الوحدة
- pth roots of unity

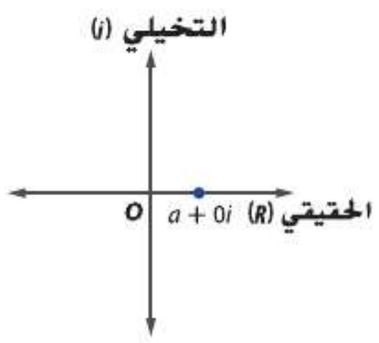
1 الصور القطبية للأعداد المركبة

يكون للأعداد المركبة المكتوبة في الصورة الديكارتية $a + bi$ المركب الحقيقي a والمركب التخيلي bi. يمكنك تمثيل العدد المركب بيانيًا على **المستوى المركب** بتمثيلها بالنقطة (a, b). وكما هو الحال مع المستوى الإحداثي، نحتاج إلى محورين لتمثيل العدد المركب. يطلق على المركب الحقيقي المعيّن على المحور الأفقي **المحور الحقيقي**، ويطلق على المركب التخيلي المعين على المحور الرأسي **المحور التخيلي**. وقد يشار إلى المستوى المركب بالمصطلح **مستوى أرجاند**.



افترض عددًا مركبًا حيث $b = 0$, $a + 0i$. وتكون النتيجة عددًا حقيقيًا a يمكن تمثيله بيانيًا باستخدام خط أعداد حقيقية أو المحور الحقيقي. وعندما يكون $b \neq 0$، نحتاج إلى المحور التخيلي لتمثيل المركب التخيلي.



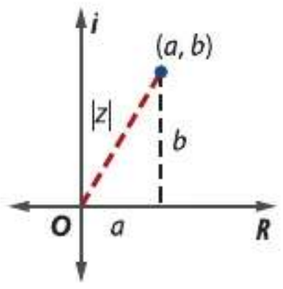


تذكر أن القيمة المطلقة لعدد حقيقي هي مقدار المسافة بينه وبين الصفر على خط الأعداد. وبالمثل، فإن **القيمة المطلقة لعدد مركب** هي مقدار المسافة بينه وبين الصفر على المستوى المركب. عندما يتم تمثيل $a + bi$ بيانيًا في المستوى المركب، يمكن حساب المسافة باستخدام نظرية فيثاغورث.

المفهوم الأساسي القيمة المطلقة لعدد مركب

تكون القيمة المطلقة للعدد المركب $z = a + bi$ هي

$$|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$$



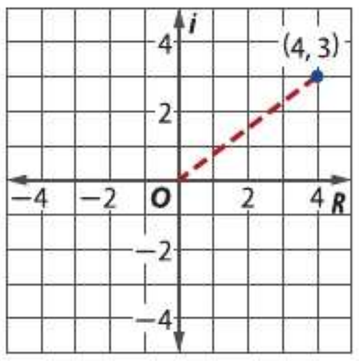
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education.

المثال 1 التمثيلات البيانية والقيم المطلقة للأعداد المركبة

مثل كل عدد بيانيًا في المستوى المركب وجـد قيمته المطلقة.

a. $z = 4 + 3i$

$(a, b) = (4, 3)$



$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ قانون القيمة المطلقة

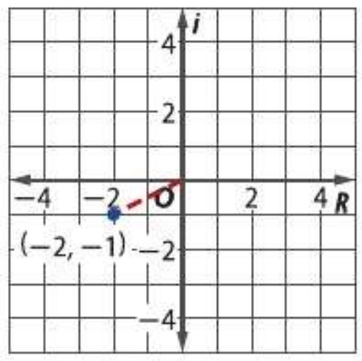
$= \sqrt{4^2 + 3^2}$ $a = 4$ و $b = 3$

$= \sqrt{25}$ أو 5 بسّط

القيمة المطلقة لـ $4 + 3i$ هي 5.

b. $z = -2 - i$

$(a, b) = (-2, -1)$



$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ قانون القيمة المطلقة

$= \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2}$ $a = -2$ و $b = -1$

$= \sqrt{5}$ or 2.24 بسّط

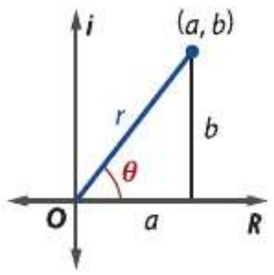
القيمة المطلقة لـ $-2 - i$ هي $2.24 \approx$.

تمرين موجّه

1A. $5 + 2i$

1B. $-3 + 4i$

وكما يمكن كتابة الإحداثيات الديكارتية (x, y) في الصورة القطبية. يمكن كتابة الإحداثيات التي تمثل التمثيل البياني لعدد مركب في المستوى المركب في الصورة القطبية أيضًا. ويمكن تطبيق نفس النسب المثلثية التي استخدمت لإيجاد قيم x وy لتمثيل قيم a وb.



$\cos \theta = \frac{a}{r}$ و $\sin \theta = \frac{b}{r}$

$r \cos \theta = a$ $r \sin \theta = b$ اضرب كل طرف في r

بالتعويض عن تمثيلات الصورة القطبية بـ a وb. يمكننا حساب **الصيغ القطبية** أو **الصيغة المثلثية** لعدد مركب.

$z = a + bi$ العدد المركب الأصلي

$= r\cos \theta + (r \sin \theta)i$ $a = r \cos \theta$ و $b = r \sin \theta$

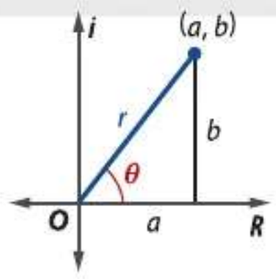
$= r(\cos \theta + i \sin \theta)$ حلل إلى العوامل

في حالة العدد المركب، يمثل r القيمة المطلقة أو **معامل**. العدد المركب ويمكن إيجاد قيمته باستخدام نفس العملية التي استخدمتها عند إيجاد القيمة المطلقة. $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. الزاوية θ تسمى **زاوية** العدد المركب. كما هو الحال مع إيجاد الزاوية θ بالإحداثيات الديكارتية (x, y). عند استخدام عدد مركب. $\theta = \tan^{-1} \frac{b}{a}$ أو $\theta = \tan^{-1} \frac{b}{a} + \pi$ إذا كانت $a < 0$.

المفهوم الأساسي الصورة القطبية لعدد مركب

تكون الصورة القطبية أو الصيغة المثلثية للعدد المركب $z = a + bi$ هي $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$. حيث

$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, $a = r \cos \theta$, $b = r \sin \theta$ و $\theta = tan^{-1} \frac{b}{a}$ لـ $a > 0$ أو $\theta = \tan^{-1} \frac{b}{a} + \pi$ لـ $a < 0$.



انتبه!

الصورة القطبية ينبغي عدم الخلط بين *الصورة القطبية لعدد مركب* والإحداثيات *القطبية للعدد المركب*. فالصورة القطبية للعدد المركب هي طريقة أخرى لتمثيل العدد المركب. أما الإحداثيات القطبية للعدد المركب فسيتم مناقشتها لاحقًا في هذا الدرس.

نصيحة دراسية

الزاوية يطلق على زاوية العدد المركب أيضًا *السعة*. كما هو الحال مع الإحداثيات القطبية، لا تعتبر θ فريدة بالرغم من أنه يتم الحصول عليها في الفترة $-2\pi < \theta < 2\pi$.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

المثال 2 الأعداد المركبة في الصورة القطبية

عبّر عن كل عدد مركب بالصورة القطبية.

a. $-6 + 8i$

جـــد المعامل r والزاوية θ.

$r = \sqrt{a^2 + b^2}$ — قانون التحويل — $\theta = tan^{-1}\frac{b}{a} + \pi$

$= \sqrt{(-6)^2 + 8^2} = 10$ — $a = -6$ و $b = 8$ — $= tan^{-1}\frac{8}{6} + \pi$ أو حوالي 2.21

تساوي الصورة القطبية $-6 + 8i$ حوالي $10(\cos 2.21 + i \sin 2.21)$.

b. $4 + \sqrt{3}i$

جـــد المعامل r والزاوية θ.

$r = \sqrt{a^2 + b^2}$ — قانون التحويل — $\theta = tan^{-1}\frac{b}{a}$

$= \sqrt{4^2 + (\sqrt{3})^2}$ — $a = 4$ و $b = \sqrt{3}$ — $= tan^{-1}\frac{\sqrt{3}}{4}$

$= \sqrt{19}$ أو حوالي 4.36 — بسّط — ≈ 0.41

تساوي الصورة القطبية $4 + \sqrt{3}i$ حوالي $4.36(\cos 0.41 + i \sin 0.41)$.

تمرين موجّه

2A. $9 + 7i$ **2B.** $-2 - 2i$

قراءة في الرياضيات

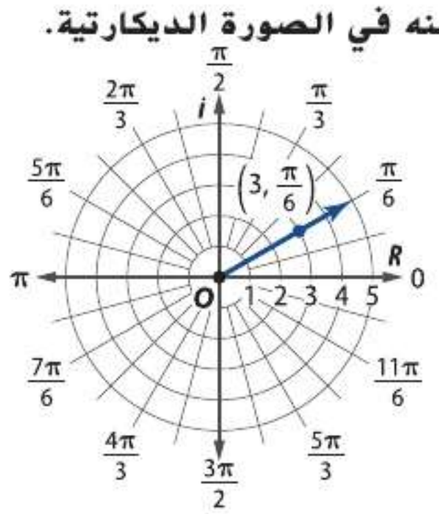
الصورة القطبية

$r(\cos\theta + i\sin\theta)$ تُختصر في كثير من الأحيان في الصورة $r\,\text{cis}\,\theta$. ففي المثال 2a. يمكنك أيضًا التعبير عن $-6 + 8i$ في الصورة $10\,\text{cis}\,2.21$. حيث $10 = \sqrt{(-6)^2 + 8^2}$ و $2.21 = \tan^{-1}\frac{8}{6}$.

يمكنك استخدام الصورة القطبية للعدد المركب لتمثيله بيانيًا على الشبكة القطبية باستخدام قيم r وθ في صورة الإحداثيات القطبية (r, θ). يمكنك أيضًا أن تأخذ العدد المركب المكتوب في الصورة القطبية وتحويله إلى الصورة الديكارتية بإيجاد القيمة.

المثال 3 تمثيل الصورة القطبية للعدد المركب بيانيًا وتحويلها

مـــثّـــل $z = 3\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ بيانيًا على شبكة قطبية. ثم عبّر عنه في الصورة الديكارتية.



قيمة r تساوي 3. وقيمة θ تساوي $\frac{\pi}{6}$.

عيّن الإحداثيات القطبية $\left(3, \frac{\pi}{6}\right)$.

للتعبير عن العدد في الصورة الديكارتية. جـــد القيم المثلثية وحوّلها لأبسط صورة.

$3\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ — الصورة القطبية

$= 3\left[\frac{\sqrt{3}}{2} + i\left(\frac{1}{2}\right)\right]$ — جـــد قيمة cosine وجيب الزاوية sine

$= \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$ — خاصية التوزيع

تكون الصورة الديكارتية لـــ $z = 3\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ هي $z = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$.

تمرين موجّه

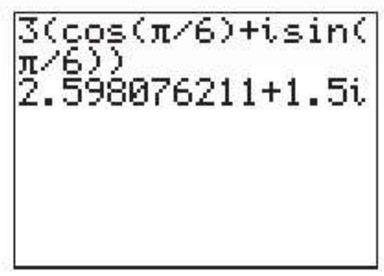
مـــثّـــل كل عدد مركب بيانيًا على الشبكة القطبية. ثم عبّر عنه في الصورة الديكارتية.

3A. $5\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$ **3B.** $4\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$

تلميح تقني

تحويلات العدد المركب

بمكنك تحويل العدد المركب في الصورة القطبية إلى الصورة الديكارتية بإدخال التعبير في الصورة القطبية، ثم تحديد ENTER. لتكون في الوضع القطبي، حدد MODE ثم a + bi.



حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

2 نواتج ضرب الأعداد المركبة ونواتج قسمتها وأسسها وجذورها

تساعد الصورة القطبية للعدد المركب بالإضافة إلى قوانين المجموع والفارق لجيب التمام وجيب الزاوية بشكل كبير في ضرب الأعداد المركبة وقسمتها. ويمكن اقتباس قانون ناتج ضرب عددين مركبين في الصورة القطبية من خلال إجراء عملية الضرب.

المعادلة الأصلية $z_1z_2 = r_1(\cos\theta_1 + \boldsymbol{i}\sin\theta_1) \times r_2(\cos\theta_2 + \boldsymbol{i}\sin\theta_2)$

فويل $= r_1r_2(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \boldsymbol{i}\cos\theta_1\sin\theta_2 + \boldsymbol{i}\sin\theta_1\cos\theta_2 + \boldsymbol{i}^2\sin\theta_1\sin\theta_2)$

$i^2 = -1$ وتجميع الحدود التخيلية. $= r_1r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + (\boldsymbol{i}\cos\theta_1\sin\theta_2 + \boldsymbol{i}\sin\theta_1\cos\theta_2)]$

استبعاد العامل i. $= r_1r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + \boldsymbol{i}(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2)]$

مجموع متطابقات cosine و sine $= r_1r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + \boldsymbol{i}\sin(\theta_1 + \theta_2)]$

المفهوم الأساسي ناتج ضرب الأعداد المركبة وناتج قسمتها في الصورة القطبية

بافتراض الأعداد المركبة $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ و$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$،

قانون ناتج الضرب $z_1z_2 = r_1r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]$

قانون ناتج القسمة $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)]$، حيث r_2 و$z_2 \neq 0$

ستثبت قانون ناتج القسمة في التمرين 77.

قراءة في الرياضيات

صيغ الجمع *المعاملات* هي صيغة الجمع من *المعامل*.

لاحظ أنه عند ضرب الأعداد المركبة، تقوم بضرب المعاملات وجمع الزوايا. وعند القسمة، تقوم بقسمة المعاملات وطرح الزوايا.

المثال 4 ناتج ضرب الأعداد المركبة في الصورة القطبية

جـد $2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) \times 4\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ في الصورة القطبية. ثم عبّر عن ناتج الضرب في الصورة الديكارتية.

التعبير الأصلي $2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + \boldsymbol{i}\sin\frac{5\pi}{3}\right) \times 4\left(\cos\frac{\pi}{6} + \boldsymbol{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)$

قانون ناتج الضرب $= 2(4)\left[\cos\left(\frac{5\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) + \boldsymbol{i}\sin\left(\frac{5\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right)\right]$

بسّط $= 8\left(\cos\frac{11\pi}{6} + \boldsymbol{i}\sin\frac{11\pi}{6}\right)$

والآن جـد الصورة الديكارتية لناتج الضرب.

الصورة القطبية $8\left(\cos\frac{11\pi}{6} + \boldsymbol{i}\sin\frac{11\pi}{6}\right)$

جـد القيمة $= 8\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \boldsymbol{i}\frac{1}{2}\right)$

خاصية التوزيع $= 4\sqrt{3} - 4\boldsymbol{i}$

الصورة القطبية عبارة عن $8\left(\cos\frac{11\pi}{6} + \boldsymbol{i}\sin\frac{11\pi}{6}\right)$. تساوي الصورة الديكارتية لناتج الضرب يكون $4\sqrt{3} - 4\boldsymbol{i}$.

تمرين موجّه

جـد كل ناتج ضرب بالصورة القطبية. ثم عبّر عن ناتج الضرب في الصورة الديكارتية.

4A. $3\left(\cos\frac{\pi}{3} + \boldsymbol{i}\sin\frac{\pi}{3}\right) \times 5\left(\cos\frac{\pi}{4} + \boldsymbol{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)$

4B. $-6\left(\cos\frac{3\pi}{4} + \boldsymbol{i}\sin\frac{3\pi}{4}\right) \times 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + \boldsymbol{i}\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

كما ذكرنا في بداية هذا الدرس، يمكن استخدام نواتج قسمة الأعداد المركبة لتوضيح العلاقات في الكهرباء.

مثال 5 من الحياة اليومية ناتج قسمة الأعداد المركبة في الصورة القطبية

الكهرباء دائرة كهربائية يبلغ جهدها الكهربائي E مقدار 150 فولت وتبلغ معاوقتها Z مقدار $6 - 3j$ أوم. جـد التيار I بالأمبير في الدائرة في الصورة الديكارتية. استخدم $E = I \times Z$.

عبّر عن كل عدد بالصورة القطبية.

$150 = 150(\cos 0 + j \sin 0)$ $r = \sqrt{150^2 + 0^2}$ 150 أو؛ $\theta = \tan^{-1} \frac{0}{150}$ 0 أو

$6 - 3j = 3\sqrt{5}[\cos(-0.46) + j \sin(-0.46)]$ $r = \sqrt{6^2 + (-3)^2}$ أو $3\sqrt{5}$؛ $\theta = \tan^{-1} -\frac{3}{6}$ -0.46 أو حوالي

حل لإيجاد قيمة التيار I في $I \times Z = E$.

$I \times Z = E$ المعادلة الأصلية

$I = \frac{E}{Z}$ اقسم كل طرف على Z.

$I = \frac{150(\cos 0 + j \sin 0)}{3\sqrt{5}[\cos(-0.46) + j \sin(-0.46)]}$ $E = 150(\cos 0 + j \sin 0)$ و $Z = 3\sqrt{5}[\cos(-0.46) + j \sin(-0.46)]$

$I = \frac{150}{3\sqrt{5}}\{\cos [0 - (-0.46)] + j \sin [0 - (-0.46)]\}$ قانون ناتج القسمة

$I = 10\sqrt{5}(\cos 0.46 + j \sin 0.46)$ بسّط

والآن حوّل التيار إلى الصورة الديكارتية.

$I = 10\sqrt{5}(\cos 0.46 + j \sin 0.46)$ المعادلة الأصلية

$= 10\sqrt{5}(0.90 + 0.44j)$ جـد القيمة

$= 20.12 + 9.84j$ خاصية التوزيع

التيار يساوي حوالي $20.12 + 9.84j$ amps.

تمرين موجّه

5. الكهرباء دائرة كهربائية يبلغ جهدها الكهربائي 120 فولت وتبلغ شدة تيارها $8 + 6j$ amps. جـد معاوقة الدائرة في الصورة الديكارتية.



مهنة من الحياة اليومية

المهندسون الكهربائيون يصمم المهندسون الكهربائيون ويخترعون التكنولوجيا الجديدة المستخدمة في تصنيع نظام تحديد المواقع العالمي والمولدات العملاقة التي تزود مدنًا بأكملها بالطاقة والمحركات التوربينية المستخدمة في الطائرات وأنظمة الرادار والملاحة. ويعمل المهندسون كذلك على تحسين المنتجات السابقة مثل الهواتف الخلوية والسيارات والإنسان الآلي.

قبل حساب أسس الأعداد المركبة وجذورها، قد يساعدك التعبير عن الأعداد المركبة في الصورة القطبية. ويعود الفضل إلى أبراهام دي موافر في اكتشاف النمط المفيد لإيجاد قيمة أسس الأعداد المركبة.

ويمكننا استخدام القانون لناتج ضرب الأعداد المركبة للمساعدة في تخيل النمط الذي اكتشفه دي موافر.

أولاً، جـد z^2 بأخذ ناتج ضرب $z \times z$.

$z \times z = r(\cos \theta + \boldsymbol{i} \sin \theta) \times r(\cos \theta + \boldsymbol{i} \sin \theta)$ اضرب

$z^2 = r^2[\cos (\theta + \theta) + \boldsymbol{i} \sin (\theta + \theta)]$ قانون ناتج الضرب

$z^2 = r^2(\cos 2\theta + \boldsymbol{i} \sin 2\theta)$ بسّط

والآن جـد z^3 بحساب $z^2 \times z$.

$z^2 \times z = r^2(\cos 2\theta + \boldsymbol{i} \sin 2\theta) \times r(\cos \theta + \boldsymbol{i} \sin \theta)$ اضرب

$z^3 = r^3[\cos (2\theta + \theta) + \boldsymbol{i} \sin (2\theta + \theta)]$ قانون ناتج الضرب

$z^3 = r^3(\cos 3\theta + \boldsymbol{i} \sin 3\theta)$ بسّط

لاحظ أنه عند حساب هذه الأسس للعدد المركب، تأخذ الأس النوني للمعاملات وضرب الزوايا في n.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

يلخص هذا النمط أدناه.

المفهوم الأساسي نظرية دي موافر

إذا كانت الصيغة القطبية لعدد مركب هي $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$، فللأعداد الصحيحة الموجبة n

$z^n = [r(\cos \theta + i \sin \theta)]^n$ أو $r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$.

الربط بتاريخ الرياضيات

أبراهام دي موافر
(1667–1754)

عالم رياضيات فرنسي اشتهر بنظريته التي سميت على اسمه وكتابه حول نظرية الاحتمالات *مذهب الفرص*.
ويعرف العالم بكونه أحد روّاد الهندسة التحليلية والاحتمالات.

المثال 6 نظرية دي موافر

جـد $(4 + 4\sqrt{3}i)^6$، وعبر عنه في الصورة الديكارتية.

أولاً، اكتب $4 + 4\sqrt{3}i$ في الصورة القطبية.

$r = \sqrt{a^2 + b^2}$ قانون التحويل

$= \sqrt{4^2 + (4\sqrt{3})^2}$ $a = 4$ و $b = 4\sqrt{3}$

$= \sqrt{16 + 48}$ بسّط

$= 8$ بسّط

$\theta = tan^{-1}\frac{b}{a}$

$= tan^{-1}\frac{4\sqrt{3}}{4}$

$= tan^{-1}\sqrt{3}$

$= \frac{\pi}{3}$

الصورة القطبية لـ $4 + 4\sqrt{3}i$ هي $8(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3})$.

والآن استخدم نظرية دي موافر لإيجاد الأس من الدرجة السادسة.

$(4 + 4\sqrt{3}i)^6 = \left[8\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)\right]^6$ المعادلة الأصلية

$= 8^6\left[\cos 6\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin 6\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$ نظرية دي موافر

$= 262{,}144(\cos 2\pi + i \sin 2\pi)$ بسّط

$= 262{,}144(1 + 0i)$ جد القيمة

$= 262{,}144$ بسّط

إذًا، $(4 + 4\sqrt{3}i)^6 = 262{,}144$.

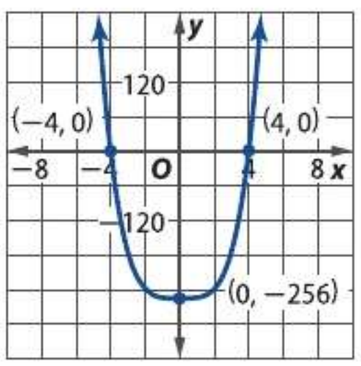
تمرين موجّه

جـد كل مقدار أسي، وعبر عنه في الصورة الديكارتية.

6A. $(1 + \sqrt{3}i)^4$

6B. $(2\sqrt{3} - 2i)^8$

في نظام الأعداد الحقيقية، $x^4 = 256$ لها حلان وهما 4 و4−. ويوضح التمثيل البياني لـ $y = x^4 - 256$ أنه يوجد صفران حقيقيان عند $x = 4$ و $x = -4$. إلا أنه في نظام الأعداد المركبة، يوجد حلان حقيقيان وحلان مركبان.



في الدرس 4-2، تعلمت من خلال النظرية الأساسية للجبر أن كثيرات الحدود من الدرجة n يوجد بها n من الأصفار بالضبط في نظام الأعداد المركبة. وبالتالي، فإن المعادلة $x^4 = 256$، والمعاد كتابتها في الصورة $x^4 - 256 = 0$، لها بالضبط أربعة حلول أو جذور: 4 و4− و$4i$ و$-4i$. بوجه عام، يكون للأعداد المركبة غير الصفرية p من الجذور p الفريدة. أي أن لكليهما جذرين تربيعيين وثلاثة جذور تكعيبية وأربعة من جذور الدرجة الرابعة وهكذا.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مراجعة المفردات

نظرية الجبر الأساسي إن دالة كثيرة الحدود من الدرجة n، والتي يكون فيها $n > 0$ بها صفر واحد على الأقل (حقيقي أو تخيلي) في نظام الأعداد المركبة.

لإيجاد قيمة جميع الجذور لكثيرة الحدود، يمكننا استخدام نظرية دي موافر للوصول إلى التعبير التالي.

المفهوم الأساسي الجذور المختلفة

للعدد الصحيح الموجب p، يكون للعدد المركب $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ عدد p فريد من الجذور p. ويمكن إيجاد الجذور من خلال $r^{\frac{1}{p}}\left(\cos\frac{\theta + 2n\pi}{p} + i\sin\frac{\theta + 2n\pi}{p}\right)$.

حيث $n = 0, 1, 2, \ldots, p - 1$.

يمكننا استخدام هذا القانون للقيم المختلفة لـ n، ولكننا يمكننا التوقف عندما تكون $n = p - 1$. وعندما n تساوي p أو تزيد عنها، تتكرر الجذور كما هو موضح فيما يلي.

$$\frac{\theta + 2\pi p}{p} = \frac{\theta}{p} + 2\pi$$ مشترك مع $\frac{\theta}{p}$، عندما تكون $n = 0$

المثال 7 الجذور p لعدد مركب

جـد الجذر من الدرجة الرابعة لـ $-4 - 4i$.

أولاً اكتب $-4 - 4i$ في الصورة القطبية.

$r = \sqrt{(-4)^2 + (-4)^2}$ أو $4\sqrt{2}$؛ $\theta = \tan^{-1}\frac{-4}{-4} + \pi$ أو $\frac{5\pi}{4}$

$$-4 - 4i = 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$$

والآن اكتب تعبيرًا للجذر من الدرجة الرابعة.

$\theta = \frac{5\pi}{4}$، $p = 4$، و $r^{\frac{1}{p}} = (4\sqrt{2})^{\frac{1}{4}}$

$$(4\sqrt{2})^{\frac{1}{4}}\left(\cos\frac{\frac{5\pi}{4} + 2n\pi}{4} + i\sin\frac{\frac{5\pi}{4} + 2n\pi}{4}\right)$$

بسّط

$$= \sqrt[8]{32}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{16} + \frac{n\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{16} + \frac{n\pi}{2}\right)\right]$$

افترض أن $n = 0$ و1 و2 و3 بالتسلسل لإيجاد الجذور من الدرجة الرابعة.

الجذور المختلفة

افترض أن $n = 0$.

$$\sqrt[8]{32}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{16} + \frac{(0)\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{16} + \frac{(0)\pi}{2}\right)\right]$$

الجذر الأول من الدرجة الرابعة

$$= \sqrt[8]{32}\left(\cos\frac{5\pi}{16} + i\sin\frac{5\pi}{16}\right) = 0.86 + 1.28i$$

افترض أن $n = 1$.

$$\sqrt[8]{32}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{16} + \frac{(1)\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{16} + \frac{(1)\pi}{2}\right)\right]$$

الجذر الثاني من الدرجة الرابعة

$$= \sqrt[8]{32}\left(\cos\frac{13\pi}{16} + i\sin\frac{13\pi}{16}\right) = 1.28 + 0.86i$$

افترض أن $n = 2$

$$\sqrt[8]{32}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{16} + \frac{(1)\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{16} + \frac{(2)\pi}{2}\right)\right]$$

الجذر الثالث من الدرجة الرابعة

$$= \sqrt[8]{32}\left(\cos\frac{21\pi}{16} + i\sin\frac{21\pi}{16}\right) = -0.86 + 1.28i$$

افترض أن $n = 3$

$$\sqrt[8]{32}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{16} + \frac{(2)\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{16} + \frac{(3)\pi}{2}\right)\right]$$

الجذر الرابع من الدرجة الرابعة

$$= \sqrt[8]{32}\left(\cos\frac{29\pi}{16} + i\sin\frac{29\pi}{16}\right) = -1.28 - 0.86i$$

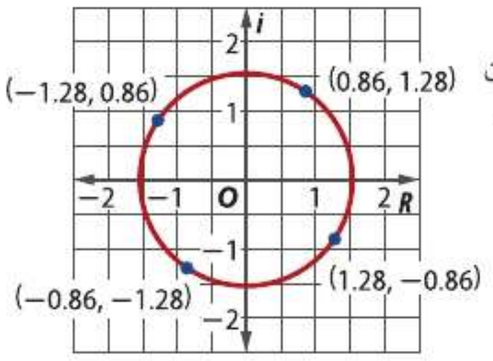
تكون الجذور من الدرجة الرابعة لـ $-4 - 4i$ هي تقريبًا $0.86 + 1.28i$ و$-1.28 + 0.86i$ و$-0.86 - 1.28i$ و $1.28 - 0.86i$.

تمرين موجّه

7A. جـد الجذور التكعيبية لـ $2 + 2i$.

7B. جـد الجذور من الدرجة الخامسة لـ $4\sqrt{3} - 4i$.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education



يمكننا استخلاص ملاحظات حول الجذور المختلفة لعدد ما من خلال التمثيل البياني للجذور على المستوى الإحداثي. وكما هو موضح على اليسار، يقع الجذر من الدرجة الرابعة الموجود في المثال 7 في دائرة. إذا نظرنا إلى الصورة القطبية لكل عدد مركب، فسنجد أن لكل منه نفس المعامل $\sqrt[8]{32}$ والذي يعتبر بمثابة نصف قطر الدائرة. وتكون الجذور على مسافات متساوية حول الدائرة نتيجة للزاوية المختلفة بمقدار $\frac{\pi}{2}$

وتحدث بعض الحالات الخاصة لإيجاد الجذور عند إيجاد الجذور p للعدد 1. عند كتابة 1 في الصورة القطبية $r = 1$. كما ذكرنا في الفقرة السابقة، يكون المعامل للجذور هو نصف قطر الدائرة التي تتشكل من تعيين الجذور على المستوى الإحداثي. ومن ثم، تقع الجذور p للعدد 1 على دائرة الوحدة. ويشار إلى إيجاد الجذور p للعدد 1 بإيجاد **جذور الوحدة p** .

المثال 8 جذور الوحدة pth

جـد جذور الوحدة من الدرجة الثامنة.

أولاً اكتب 1 في الصورة القطبية.

$1 = 1 \times (\cos 0 + i \sin 0)$ $\quad r = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1 = \theta = \tan^{-1} \frac{0}{1} = 0$

والآن اكتب تعبيرًا للجذر من الدرجة الثامنة.

$1\left(\cos \frac{0 + 2n\pi}{8} + i \sin \frac{0 + 2n\pi}{8}\right)$ $\quad \theta = 0$ و $p = 8$ و $r^{\frac{1}{p}} = 1^{\frac{1}{8}} = 1$

$= \cos \frac{n\pi}{4} + i \sin \frac{n\pi}{4}$ بسّط

افترض أن $n = 0$ لإيجاد الجذر الأول من 1.

$n = 0$ $\quad \cos \frac{(0)\pi}{4} + i \sin \frac{(0)\pi}{4}$ الجذور المختلفة

$= \cos 0 + i \sin 0 = 1$ الجذر الأول

لاحظ أن معامل كل عدد مركب يساوي 1. ويتم إيجاد الزوايا من خلال $\frac{n\pi}{4}$ مما يؤدي إلى زيادة θ بمقدار $\frac{\pi}{4}$ لكل جذر متتالٍ. إذًا، يمكننا حساب الجذور المتبقية عن طريق جمع $\frac{\pi}{4}$ لكل θ سابقة.

$\cos 0 + i \sin 0 = 1$ الجذر الأول من الدرجة الثامنة

$\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ الجذر الثاني من الدرجة الثامنة

$\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i$ الجذر الثالث من الدرجة الثامنة

$\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ الجذر الرابع من الدرجة الثامنة

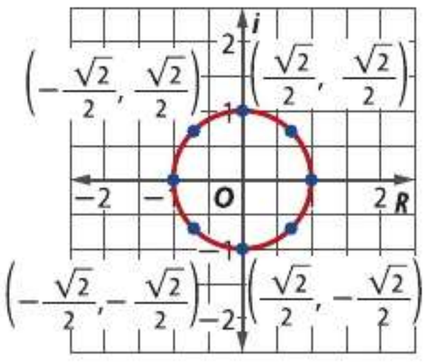
$\cos \pi + i \sin \pi = -1$ الجذر الخامس من الدرجة الثامنة

$\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$ الجذر السادس من الدرجة الثامنة

$\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} = -i$ الجذر السابع من الدرجة الثامنة

$\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$ الجذر الثامن من الدرجة الثامنة

الجذور من الدرجة الثامنة للعدد 1 هي $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, i, -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, -1, -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i, -i$ كما هو موضح في الشكل 8.5.1.



الشكل 8.5.1

تمرين موجّه

8A. جـد جذور الوحدة التكعيبية.

7a. جـد جذور الوحدة من الدرجة السابعة.

نصيحة دراسية

الجذور p لعدد مركب سيكون لكل جذر نفس المعامل $r^{\frac{1}{p}}$. تساوي زاوية الجذر من الدرجة الأولى $\frac{\theta}{p}$ ويتم إيجاد كل جذر متتالٍ من خلال تكرار جمع $\frac{2\pi}{p}$ على الزاوية.

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

تمارين

مثل كل عدد بيانيًا في المستوى المركب وجـد قيمته المطلقة. (مثال 1)

1. $z = 4 + 4i$
2. $z = -3 + i$
3. $z = -4 - 6i$
4. $z = 2 - 5i$
5. $z = 3 + 4i$
6. $z = -7 + 5i$
7. $z = -3 - 7i$
8. $z = 8 - 2i$

9. **المتجهات** تُمثل القوة المبذولة على أحد الأجسام بالعدد المركّب $z = 10 + 15i$، حيث تُقاس المركّبات بوحدة النيوتن (N). (مثال 1)
   - **a.** مثّل z كمتجه في المستوى المركب.
   - **b.** جـد مقدار المتجه وزاوية اتّجاهه.

عبّر عن كل عدد مركب بالصورة القطبية. (مثال 2)

10. $4 + 4i$
11. $-2 + i$
12. $4 - \sqrt{2}i$
13. $2 - 2i$
14. $4 + 5i$
15. $-2 + 4i$
16. $-1 - \sqrt{3}i$
17. $3 + 3i$

مثّل كل عدد مركب بيانيًا على الشبكة القطبية. ثم عبّر عنه في الصورة الديكارتية. (مثال 3)

18. $10(\cos 6 + i \sin 6)$
19. $2(\cos 3 + i \sin 3)$
20. $4\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$
21. $3\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)$
22. $\left(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6}\right)$
23. $2\left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}\right)$
24. $-3(\cos 180° + i \sin 180°)$
25. $\frac{3}{2}(\cos 360° + i \sin 360°)$

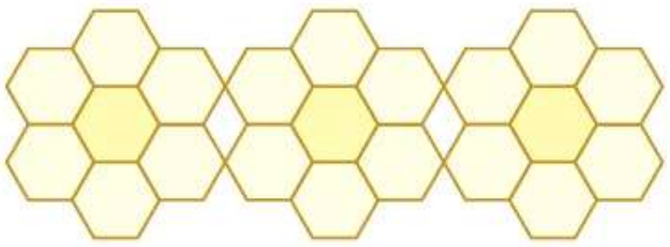
جـد ناتج ضرب أو قسمة كل مقدار أسي وعبر عنه في الصورة الديكارتية. (المثالان 4 و5)

26. $3\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{2}\right) \times 4\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)$
27. $5(\cos 135° + i \sin 135°) \times 2\ (\cos 45° + i \sin 45°)$
28. $3\left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}\right) \div \frac{1}{2}(\cos \pi + i \sin \pi)$
29. $2(\cos 90° + i \sin 90°) \times 2(\cos 270° + i \sin 270°)$
30. $3\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right) \div 4\left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}\right)$
31. $4\left(\cos \frac{9\pi}{4} + i \sin \frac{9\pi}{4}\right) \div 2\left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}\right)$
32. $\frac{1}{2}(\cos 60° + i \sin 60°) \times 6(\cos 150° + i \sin 150°)$
33. $6\left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}\right) \div 2\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)$
34. $5(\cos 90° + i \sin 1800°) \times 2(\cos 270° + i \text{ si}13570°)$
35. $\frac{1}{2}\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right) \div 3\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)$

جـد كل أس، وعبر عنه في الصورة الديكارتية. (المثال 6)

36. $(2 + 2\sqrt{3}i)^6$
37. $(12i - 5)^3$
38. $\left[4\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right)\right]^4$
39. $(\sqrt{3} - i)^3$
40. $(3 - 5i)^4$
41. $(2 + 4i)^4$
42. $(3 - 6i)^4$
43. $(2 + 3i)^2$
44. $\left[3\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)\right]^3$
45. $\left[2\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)\right]^4$

46. **التصميم** تعمل سهي لدى وكالة دعاية. وترغب في دمج تصميم يتكون من أشكال سداسية منتظمة ليكون العمل الفني لأحد مشاريعها المقترحة. وتستطيع سهي تحديد موقع رؤوس لأحد الأشكال السداسية المنتظمة المركزية بالتمثيل البياني لحلول $x^6 - 1 = 0$ في المستوى المركب. جـد رؤوس هذا الشكل السداسي. (المثال 7)



جـد جميع الجذور p المختلفة للعدد المركب. (المثالان 7 و8)

47. الجذر من الدرجة السادسة لـ i
48. الجذر من الدرجة الخامسة لـ $-i$
49. الجذر من الدرجة الرابعة لـ $4\sqrt{3} - 4i$
50. الجذر التكعيبي لـ $-117 + 44i$
51. الجذر من الدرجة الخامسة لـ $-1 + 11\sqrt{2}i$
52. الجذر التربيعي لـ $-3 - 4i$
53. جـد جذور الوحدة التربيعية
54. جـد جذور الوحدة من الدرجة الرابعة

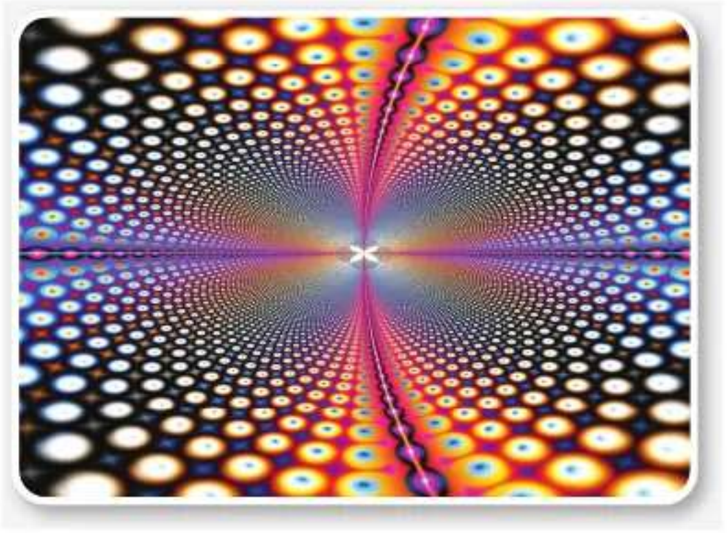
55. **الكهرباء** تبلغ المعاوقة في جزء من الدائرة لدائرة كهربائية موصلة على التوالي $5(\cos 0.9 + j \sin 0.9)$ أوم. وفي الجزء الثاني من الدائرة الكهربائية، تبلغ المعاوقة $8(\cos 0.4 + j \sin 0.4)$ أوم.
   - **a.** حوّل كل تعبير إلى الصورة الديكارتية.
   - **b.** اجمع إجاباتك التي توصلت إليها في الجزء a لإيجاد إجمالي نسبة المعاوقة في الدائرة.
   - **c.** حوّل إجمالي المعاوقة إلى الصورة القطبية ثانية.

جـد كل ناتج ضرب مما يلي. ثم كرر العملية بضرب الصور القطبية لكل زوج من الأعداد المركبة باستخدام قانون ناتج الضرب.

56. $(1 - i)(4 + 4i)$
57. $(3 + i)(3 - i)$
58. $(4 + i)(3 - i)$
59. $(-6 + 5i)(2 - 3i)$
60. $(\sqrt{2} + 2i)(1 + i)$
61. $(3 - 2i)(1 + \sqrt{3}i)$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

62. الأنماط الهندسية المتكررة يعتبر *النمط الهندسي* المتكرر هي أشكال هندسية تتكون من نمط متكرر بشكل لا نهائي على مقياس متسلسل أصغر كما هو موضح في الأسفل.



في هذه المسألة، ستنشئ نمطًا هندسيًا متكررًا من خلال تكرارية $f(z) = z^2$. افترض أن $z_0 = 0.8 + 0.5i$.

a. احسب z_1 وz_2 وz_3 وz_4 وz_5 وz_6 وz_7 حيث $z_1 = f(z_0)$ و $z_2 = f(z_1)$ وهكذا.

b. مثّل كلاً من الأعداد على المستوى المركب.

c. توقع مكان z_{100}. اشرح.

63. التحويلات يوجد بعض عمليات الأعداد المركبة والتي تقابل التحويلات الهندسية في المستوى المركب. اذكر التحويل المطبق على النقطة z للحصول على نقطة w في المستوى المركب لكل من العمليات التالية.

a. $w = z + (3 - 4i)$

b. w هو المرافق المركب لـ z.

c. $w = i \times z$

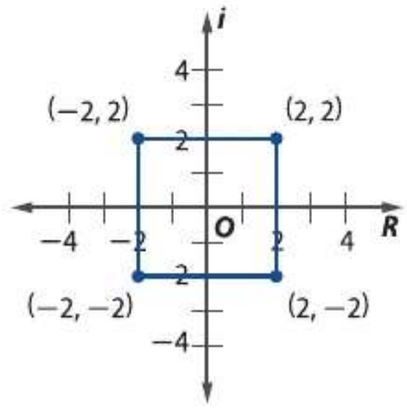
d. $w = 0.25z$

جد z والجذور p للنقطة z بافتراض كل مما يلي.

64. $p = 3$. هو أحد الجذور التكعيبية لـ $\frac{5}{2} - \frac{5\sqrt{3}}{2}i$

65. $p = 4$. هو أحد الجذور من الدرجة الرابعة لـ $-1 - i$

66. التمثيلات البيانية بتمثيل كل رأس بعدد مركب في الصورة القطبية. يوسّع المبرمج ويقوم بتدوير المربع أدناه بمقدار 45° عكس اتجاه عقارب الساعة بحيث تقع الإحداثيات الجديدة في نقطة منتصف أضلاع المربع الأصلي.



a. ما العدد المركب الذي ينبغي على المبرمج ضربه في كل عدد لينتج هذا التحويل؟

b. ماذا سيحدث إذا ضربت الأعداد الممثلة للرؤوس الأصلية في مربع إجابتك التي حصلت عليها في الجزء **a**؟

استخدم قانون الجذور المختلفة لإيجاد جميع الحلول لكل معادلة. عبّر عن الحلول في الصورة الديكارتية.

67. $x^3 = i$

68. $x^3 + 3 = 128$

69. $x^4 = 81i$

70. $x^5 - 1 = 1023$

71. $x^3 + 1 = i$

72. $x^4 - 2 + i = -1$

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

73. تحليل الخطأ تعمل كل من علياء وعبير على إيجاد قيمة $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^5$ وتستخدم علياء نظرية دي موافر وتحصل على النتيجة وتخبرها عبير أنها أكملت جزءًا واحدًا فقط من المسألة. فهل أيّ منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.

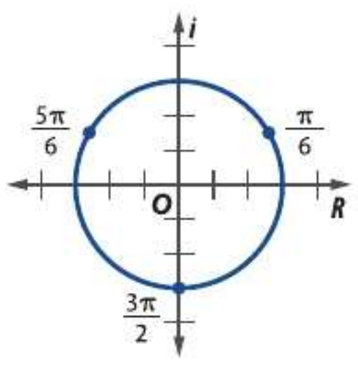
74. الاستنتاج افترض أن $z = a + bi$ هو الجذور من الدرجة 29 للعدد 1.

a. ما القيمة العظمى لـ a؟

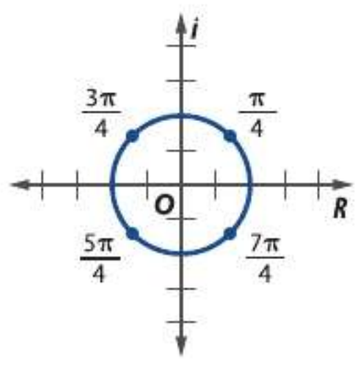
b. ما القيمة العظمى لـ b؟

تحدٍ جد الجذور الموضحة على كل تمثيل بياني واكتبها في الصورة القطبية. ثم حدد العدد المركب للجذور المذكورة.

75.



76.



77. البرهان بافتراض أن $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$ و $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$، حيث $r_2 \neq 0$. برهن أن

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos (\theta_1 - \theta_2) + i \sin (\theta_1 - \theta_2)]$$

التبرير حدد إذا ما كانت كل عبارة صحيحة ***أحيانًا*** أم ***دائمًا*** أو غير صحيحة ***على الإطلاق***. اشرح استنتاجك.

78. تقع الجذور p لعدد مركب z على مسافات متساوية حول الدائرة التي يقع مركزها عند نقطة الأصل ويبلغ نصف قطره $r^{\frac{1}{p}}$.

79. إن المرافق المركب لـ $z = a + bi$ هو $\bar{z} = a - bi$. لأي z يكون كل من $z, z + \bar{z}$ أعدادًا حقيقية.

80. مسألة غير محددة الإجابة جد عددين مركبين $a + bi$ بحيث يكون $a \neq 0$ و$b \neq 0$ بالقيمة المطلقة $\sqrt{17}$.

81. الكتابة في الرياضيات اشرح السبب في أن مجموع الأجزاء التخيلية لعدد p مختلف من الجذور p لأي عدد حقيقي موجب يجب أن يكون صفرًا. (إرشاد: الجذور هي رؤوس مضلع منتظم.)

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مراجعة شاملة

اكتب كل معادلة قطبية في الصورة الديكارتية.

82. $r = \frac{15}{1 + 4\cos\theta}$

83. $r = \frac{14}{2\cos\theta + 2}$

84. $r = \frac{-6}{\sin\theta - 2}$

حدد التمثيل البياني لكل معادلة الديكارتية. ثم اكتب المعادلة في الصورة القطبية. دعّم إجابتك بتمثيل الصورة القطبية للمعادلة بيانيًا.

85. $(x - 3)^2 + y^2 = 9$

86. $x^2 - y^2 = 1$

87. $x^2 + y^2 = 2y$

مثل بيانيًا القطع المخروط الممثل بكل معادلة.

88. $y = x^2 + 3x + 1$

89. $y^2 - 2x^2 - 16 = 0$

90. $x^2 + 4y^2 + 2x - 24y + 33 = 0$

جـد مركز وبؤرتا ورأسا كل قطع ناقص.

91. $\frac{(x + 8)^2}{9} + \frac{(y - 7)^2}{81} = 1$

92. $25x^2 + 4y^2 + 150x + 24y = -161$

93. $4x^2 + 9y^2 - 56x + 108y = -484$

حُـلّ كل نظام من المعادلات باستخدام حذف جاوس-جوردان.

94.
$x + y + z = 12$
$6x - 2y - z = 16$
$3x + 4y + 2z = 28$

95.
$9g + 7h = -30$
$8h + 5j = 11$
$-3g + 10j = 73$

96.
$2k - n = 2$
$3p = 21$
$4k + p = 19$

97. التعداد السكاني في بداية عام 2008، كان تعداد سكان العالم نحو 6.7 مليارات. إذا كان تعداد سكان العالم ينمو باستمرار بمعدل 2%، فيمكن توقع تعداد السكان المستقبلي P، بالمليارات، من خلال $P = 6.5e^{0.02t}$ ، حيث تمثل t الزمن بالأعوام منذ 2008.

a. وفقًا لهذا النموذج، كم سيكون تعداد سكان العالم في عام 2018؟

b. قدّر بعض الطلاب أن موارد الغذاء العالمية يمكنها دعم تعداد سكان من 18 مليارًا بحد علوي. وفقًا لهذا النموذج، كم عدد الأعوام التي ستستطيع موارد الغذاء العالمية فيها دعم الاتجاه في نمو تعداد سكان العالم؟

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

98. SAT/ACT إن التمثيل البياني على المستوى xy للدالة التربيعية g هو قطع مكافئ يقع رأسه عند $(3, -2)$. إذا كان، $g(0) = 0$، فأي مما يلي يجب أن يساوي 0؟

A $g(2)$
B $g(3)$
C $g(4)$
D $g(6)$
E $g(7)$

99. أي مما يلي يعبر عن العدد المركب $20 - 21i$ في الصورة القطبية؟

F $29(\cos 5.47 + i \sin 5.47)$
G $29(\cos 5.52 + i \sin 5.52)$
H $32(\cos 5.47 + i \sin 5.47)$
J $32(\cos 5.52 + i \sin 5.52)$

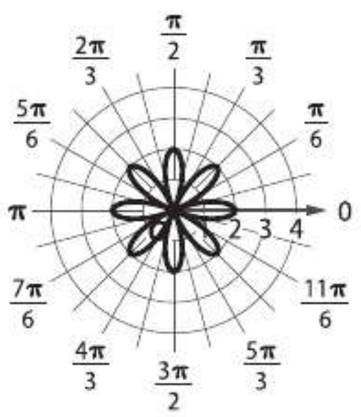
100. إجابة حرة راجع التمثيل البياني الموجود على اليسار.

a. اذكر معادلة محتملة للدالة.

b. اذكر تماثلات التمثيل البياني.

c. اذكر أصفار الدالة في المجال $0 \le \theta \le 2\pi$.

d. ما القيمة الصغرى لـ r في المجال $0 \le \theta \le 2\pi$؟



حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

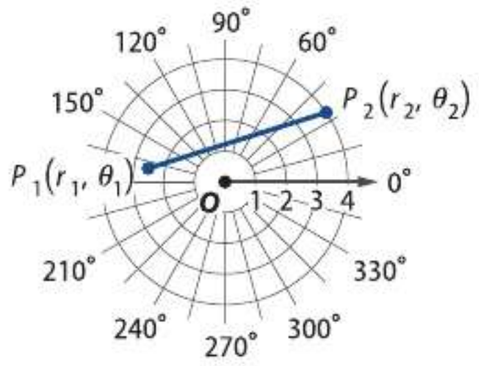
8 دليل الدراسة والمراجعة

ملخص الوحدة

المفاهيم الأساسية

الإحداثيات القطبية (الدرس 8-1)

- في النظام الإحداثي القطبي، يتم تحديد موقع النقطة (r, θ) باستخدام المسافة الموجهة r والزاوية الموجهة θ.
- المسافة بين $P_2(r_2, \theta_2)$ و $P_1(r_1, \theta_1)$ في المستوى القطبي $P_1P_2 = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)}$.



التمثيلات البيانية للمعادلات القطبية (الدرس 8-2)

- دائرة: $r = a \cos \theta$ أو $r = a \sin \theta$
- منحنى قلبي الشكل: $r = a \pm b \cos \theta$ أو $r = a \pm b \sin \theta$, $a > 0, b > 0$
- الوردة: $r = a \cos n\theta$ أو $r = a \sin n\theta$, $n \geq 2, n \in \mathbb{Z}$
- منحنى ذو عروتين: $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ أو $r^2 = a^2 \sin 2\theta$
- حلزون أرشميدس: $r = a\theta + b, \theta \geq 0$

الصور القطبية والديكارتية للمعادلات (الدرس 8-3)

- النقطة $P(r, \theta)$ لها الإحداثيات الديكارتية $(r \cos \theta, r \sin \theta)$.
- لتحويل النقطة $P(x, y)$ من الإحداثيات الديكارتية إلى الإحداثيات القطبية، استخدم المعادلة $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ و $\theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}$. حيث $x > 0$ أو $\theta = \tan^{-1} \frac{y}{x} + \pi$. حيث $x < 0$.

الصور القطبية للقطوع المخروطية (الدرس 8-4)

- تكون المعادلة القطبية للقطع المخروطي بالصورة $r = \frac{ed}{1 \pm e \sin \theta}$ أو $r = \frac{ed}{1 \pm e \cos \theta}$, حسب موقع واتجاه الدليل.

الأعداد المركبة ونظرية دي موافر (الدرس 8-5)

- الصيغة القطبية أو المثلثية للعدد المركب $a + bi$ هي $r(\cos \theta + i \sin \theta)$.
- صيغة ناتج ضرب العددين المركبين z_1 وz_2 هي $z_1z_2 = r_1r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]$.
- صيغة ناتج قسمة العددين المركبين z_1 وz_2 هي $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)]$، حيث z_2 و$r_2 \neq 0$.
- تنص نظرية دي موافر على أنه إذا كانت الصورة القطبية لعدد مركب هي $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$. إذًا $z^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$ للأعداد الصحيحة الموجبة n.

المفردات الأساسية

absolute value of a complex number	قيمة مطلقة لعدد مركب
Argand plane	مستوى أرجاند
Argand plane	فرضية
cardioid	قلبي الشكل
complex plane	مستوى مركب
imaginary axis	محور تخيلي
lemniscate	منحنى ذو عروتين
limaçon	منحنى قلبي الشكل
modulus	معامل
polar axis	المحور القطبي
polar coordinate system	نظام إحداثي قطبي
polar coordinates	الإحداثيات القطبية
polar equation	معادلة قطبية
polar form	صورة قطبية
polar graph	تمثيل بياني قطبي
pole	قطب
pth roots of unity	جذور الوحدة
real axis	محور حقيقي
rose	وردة
spiral of Archimedes	حلزون أرشميدس
trigonometric form	صيغة مثلثية

مراجعة المفردات

اختر المصطلح الصحيح من قائمة المفردات الواردة أعلاه لإكمال كل جملة.

1. _____ هي مجموعة كل النقاط التي لها الإحداثيات (r, θ) والتي تحقق معادلة قطبية مُعطاة.
2. المستوى الذي له محور للمركبة الحقيقية ومحور للمركبة التخيلية هو _____.
3. يتم تحديد موقع نقطة في _____ باستخدام المسافة الموجهة من نقطة ثابتة والزاوية من محور ثابت.
4. نوع خاص من المنحنى على شكل قلب معادلته بالصورة $r = a + b \cos \theta$ حيث $a = b$ يُسمى _____.
5. _____ هي الزاوية θ لعدد مركب مكتوب بالصورة $r(\cos \theta + i \sin \theta)$.
6. نقطة أصل نظام إحداثي قطبي تُسمى _____.
7. يُطلق على القيمة المطلقة لعدد مركب أيضًا _____.
8. _____ اسم آخر للمستوى المركب.
9. التمثيل البياني لمعادلة قطبية بالصورة $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ أو $r^2 = a^2 \sin 2\theta$ يُسمى _____.
10. _____ هو شعاع ابتداء من القطب، وهو في العادة أفقي وموجه لليمين.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مراجعة درس بدرس

8-1 الإحداثيات القطبية

مثّل كل نقطة بيانيًا على شبكة قطبية.

11. $W(-0.5, 210°)$
12. $X\left(1.5, \frac{7\pi}{4}\right)$
13. $Y(4, -120°)$
14. $Z\left(-3, \frac{5\pi}{6}\right)$

مثّل كل معادلة قطبية بيانيًا.

15. $\theta = -60°$
16. $r = \frac{9}{2}$
17. $r = 7$
18. $\theta = \frac{11\pi}{6}$

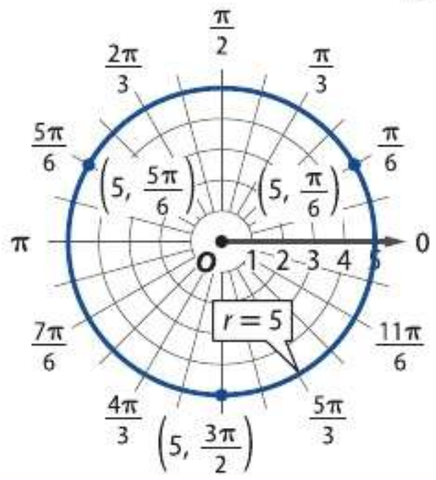
جـد المسافة بين كل زوجين من النقاط.

19. $\left(5, \frac{\pi}{2}\right), \left(2, -\frac{7\pi}{6}\right)$
20. $(-3, 60°), (4, 240°)$
21. $(-1, -45°), (6, 270°)$
22. $\left(7, \frac{5\pi}{6}\right), \left(2, \frac{4\pi}{3}\right)$

مثال 1

مثّل بيانيًا $r = 5$.

حلول $r = 5$ هما الزوجان المرتبان بالصورة $(5, \theta)$ حيث θ أي عدد حقيقي. يتكون التمثيل البياني من جميع النقاط التي تبعد 5 وحدات عن القطب، بحيث يكون التمثيل البياني دائرة مركزها عند القطب ونصف قطرها 5.



8-2 التمثيلات البيانية للمعادلات القطبية

استخدم التماثل والأصفار وقيم r العظمى لتمثيل كل دالة بيانيًا.

23. $r = \sin 3\theta$
24. $r = 2 \cos \theta$
25. $r = 5 \cos 2\theta$
26. $r = 4 \sin 4\theta$
27. $r = 2 + 2 \cos \theta$
28. $r = 1.5\theta, \theta \geq 0$

استخدم التماثل لتمثيل كل معادلة بيانيًا.

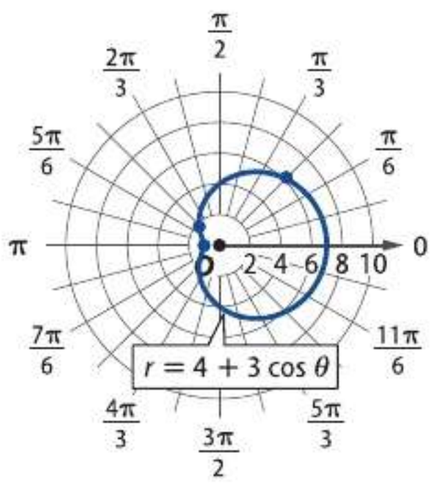
29. $r = 2 - \sin \theta$
30. $r = 1 + 5 \cos \theta$
31. $r = 3 - 2 \cos \theta$
32. $r = 3.5 + 4\text{in} \theta$
33. $r = -3 \sin \theta$
34. $r = -5 + 3 \cos \theta$

مثال 2

استخدم التماثل لتمثيل التالي بيانيًا $r = 4 + 3 \cos \theta$.

التعويض عن (r, θ) باستخدام $(r, -\theta)$ ينتج عنه $r = 4 + 3 \cos(-\theta)$. وأبسط صورة هي $r = 4 + 3 \cos \theta$ لأن جيب التمام زوجي. المعادلات متكافئة. إذًا التمثيل البياني لهذه المعادلة متماثل على المحور القطبي. ولذلك، يمكنك عمل جدول قيم لإيجاد قيم r المتناظرة مع θ في الفترة $[0, \pi]$.

θ	r
0	7
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{8 + 3\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	
$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{8 - 3\sqrt{2}}{2}$
π	1



بتحديد موضع هذه النقاط واستخدام التماثل على المحور القطبي، تحصل على التمثيل البياني الموضح.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

8–3 الصور القطبية والديكارتية

جد زوجين من الإحداثيات القطبية لكل نقطة من خلال الإحداثيات الديكارتية المعطاة إذا كان $2\pi \le \theta \le 0$. قرّب إلى أقرب جزء من مئة.

35. $(-1, 5)$

36. $(3, 7)$

37. $(2a, 0),\ a > 0$

38. $(4b, -6b),\ b > 0$

اكتب كل معادلة في الصورة الديكارتية ثم حدد تمثيلها البياني. ادعم إجابتك بتمثيل الصورة القطبية للمعادلة بيانيًا.

39. $r = 5$

40. $r = -4 \sin \theta$

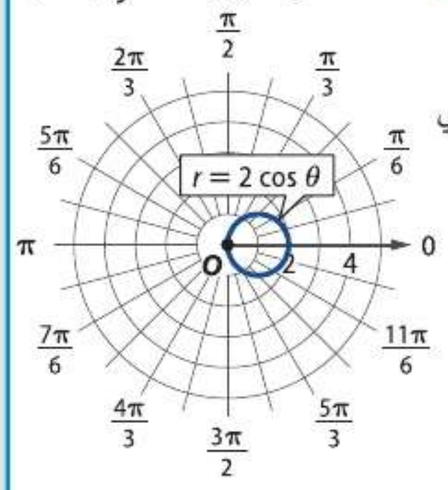
41. $r = 6 \sec \theta$

42. $r = \frac{1}{3} \csc \theta$

مثال 3

اكتب $r = 2 \cos \theta$ في الصورة الديكارتية ثم حدد تمثيلها البياني. ادعم إجابتك بتمثيل الصورة القطبية للمعادلة بيانيًا.

$r = 2 \cos \theta$	المعادلة الأصلية
$r^2 = 2r \cos \theta$	اضرب كل طرف في r.
$x^2 + y^2 = 2x$	$r^2 = x^2 + y^2$ و $x = r \cos \theta$
$x^2 + y^2 - 2x = 0$	اطرح $2x$ من كل طرف



في الصورة القياسية، $(x - 1)^2 + y^2 = 1$. يمكنك تحديد التمثيل البياني لهذه المعادلة كدائرة مركزها عند $(1, 0)$ ونصف قطرها 1. كما يدعم ذلك التمثيل البياني لـ $r = 2 \cos \theta$.

8–4 الصور القطبية للقطوع المخروطية

حدد الاختلاف المركزي ونوع المخروط ومعادلة الدليل لكل معادلة قطبية.

43. $r = \frac{3.5}{1 + \sin \theta}$

44. $r = \frac{1.2}{1 + 0.3 \cos \theta}$

45. $r = \frac{14}{1 - 2 \sin \theta}$

46. $r = \frac{6}{1 - \cos \theta}$

اكتب مع التمثيل البياني معادلة قطبية ودليلاً لمخروط بالخصائص المعطاة.

47. $e = 0.5$؛ الرأسان عند $(0, -2)$ و$(0, 6)$

48. $e = 1.5$؛ الدليل: $x = 5$

اكتب كل معادلة قطبية بالصورة الديكارتية.

49. $r = \frac{1.6}{1 - 0.2 \sin \theta}$

50. $r = \frac{5}{1 + \cos \theta}$

مثال 4

حدد الاختلاف المركزي ونوع المخروط ومعادلة الدليل لـ $r = \frac{7}{3.5 - 3.5 \cos \theta}$.

اكتب المعادلة بالصورة القياسية، $r = \frac{ed}{1 + e \cos \theta}$.

$r = \frac{7}{3.5 - 3.5 \cos \theta}$	المعادلة الأصلية
$r = \frac{3.5(2)}{3.5(1 - \cos \theta)}$	حلل البسط والمقام إلى العوامل
$r = \frac{2}{1 - \cos \theta}$	اقسم البسط والمقام على 3.5

في هذه الصورة، تدرك من المقام أن $e = 1$. إذًا المخروط قطع مكافئ. بالنسبة إلى المعادلات القطبية بهذه الصورة، معادلة الدليل هي $x = -d$. من البسط، نعلم أن إذًا، $ed = 1 = 2 \div 2 = d$. إذًا، معادلة الدليل هي $x = -2$.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

8-5 الأعداد المركبة ونظرية دي موافر

مثل كل عدد في المستوى المركب بيانيًا، وجـد قيمته المطلقة.

51. $z = 3 - i$
52. $z = 4i$
53. $z = -4 + 2i$
54. $z = 6 - 3i$

عبّر عن كل عدد مركب بالصورة القطبية.

55. $3 + \sqrt{2}i$
56. $-5 + 8i$
57. $-4 - \sqrt{3}i$
58. $\sqrt{2} + \sqrt{2}i$

مثّل كل عدد مركب بيانيًا على شبكة قطبية. ثم عبّر عنه بالصورة الديكارتية.

59. $z = 3\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right)$
60. $z = 5\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$
61. $z = -2\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)$
62. $z = 4\left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}\right)$

جـد كل ناتج ضرب أو ناتج قسمة وعبر عنه بالصورة الديكارتية.

63. $-2\left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}\right) \times -4\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$
64. $8(\cos 225° + i \sin 225°) \times \frac{1}{2}(\cos 120° + i \sin 120°)$
65. $5\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right) \div \frac{1}{3}\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)$
66. $6(\cos 210° + i \sin 210°) \div 3(\cos 150° + i \sin 150°)$

جـد كل أس، وعبر عنه بالصورة الديكارتية.

67. $(4 - i)^5$
68. $(\sqrt{2} + 3i)^4$

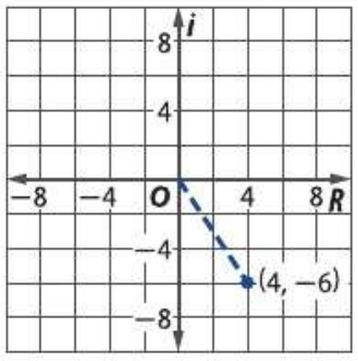
جـد جميع جذور p المختلفة للعدد المركب.

69. الجذور التكعيبية لـ $4i - 6$

70. جذور الدرجة الرابعة لـ $i + 1$

مثال 5

مثل بيانيًا $6i - 4$ في المستوى المركب وعبر عنه بالصورة القطبية.



جـد المعامل.

$r = \sqrt{a^2 + b^2}$ صيغة التحويل

$= \sqrt{4^2 + (-6)^2} = 2\sqrt{13}$ $a =$ و $b = -6$

جـد الفرضية.

$\theta = \tan^{-1}\frac{b}{a}$ صيغة التحويل

$= \tan^{-1}\left(-\frac{6}{4}\right)$ $a = 4$ و $b = -6$

$= -0.98$ بسّط

الصورة القطبية لـ $6i - 4$ هي تقريبًا $2\sqrt{13}\,[\cos(-0.98) + i \sin(-0.98)]$.

مثال 6

جـد $-3\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right) \times 5\left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6}\right)$ بالصورة القطبية.

ثم عبّر عن ناتج الضرب بالصورة الديكارتية.

$-3\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right) \times 5\left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6}\right)$ التعبير الأصلي

$= (-3 \times 5)\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{7\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{7\pi}{6}\right)\right]$ صيغة ناتج الضرب

$= -15\left[\cos\left(\frac{17\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{17\pi}{12}\right)\right]$ بسّط

والآن جـد الصورة الديكارتية لناتج الضرب.

$-15\left[\cos\left(\frac{17\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{17\pi}{12}\right)\right]$ الصورة القطبية

$= -15[-0.26 + i(-0.97)$ جـد القيمة

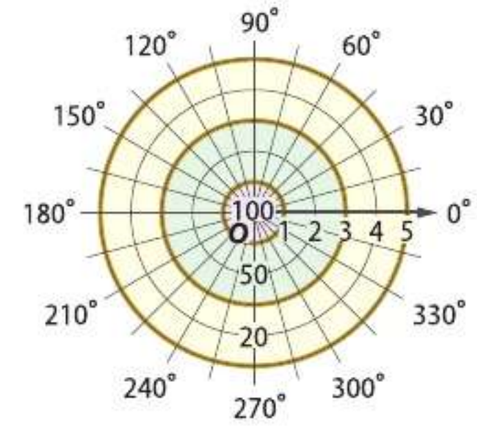
$= 3.9 + 14.5i$ خاصية التوزيع

الصورة القطبية لناتج الضرب هي $-15\left[\cos\left(\frac{17\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{17\pi}{12}\right)\right]$
الصورة الديكارتية لناتج الضرب هي $3.9 + 14.5i$.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التطبيقات وحل المسائل

71. الألعاب تتكون لعبة صالة ألعاب من دحرجة كرة لأعلى منحدر على هدف. تحدد منطقة سقوط الكرة عدد النقاط المكتسبة. يوضح النموذج قيم النقاط لكل منطقة. (الدرس 1-8)



a. إذا دحرج اللاعب الكرة في أحد الأدوار إلى النقطة $(3.5, 165°)$. فكم عدد النقاط التي سيحصل عليها؟

b. اذكر موقعين محتملين يحصل منهما اللاعب على 50 نقطة.

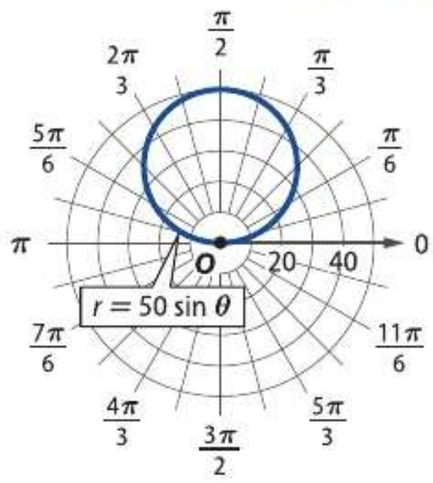
72. المناظر الطبيعية تستخدم إحدى شركات المناظر الطبيعية رشاش أعشاب يمكن تعديله ويمكنه الدوران بزاوية $360°$ وتغطية منطقة دائرية نصف قطرها 20 m. (الدرس 1-8)

a. مثل بيانيًا أبعاد المنطقة التي يمكن للرشاش تغطيتها على شبكة قطبية إذا تم ضبط الرشاش على الدوران بزاوية $360°$.

b. جد مساحة المنطقة التي يمكن للرشاش تغطيتها إذا تم ضبط الدوران على $-30° \le \theta \le 210°$.

73. الأحياء يمكن تمثيل نمط صدفة حلزون باستخدام $r = \frac{1}{3}\theta + \frac{1}{2}$, $\theta \ge 0$. حدد مع التمثيل البياني المنحنى الكلاسيكي الذي يمثل هذا النمط. (الدرس 2-8)

74. الأراجيح يمكن تمثيل مسار عجلة دوارة بواسطة $r = 50 \sin \theta$. حيث r بالمتر. (الدرس 3-8)



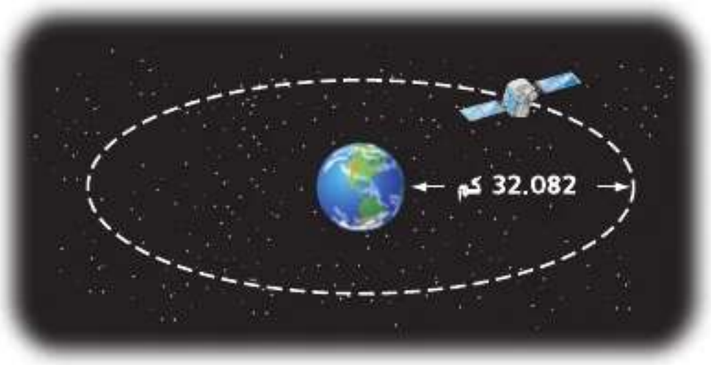
a. ما الإحداثيات القطبية لراكب يتواجد عند $\theta = \frac{\pi}{12}$؟ قرّب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.

b. ما الإحداثيات الديكارتية لموقع الراكب؟ قرّب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.

c. كم يرتفع الراكب عن الأرض إذا كان المحور القطبي يمثل الأرض؟

75. تحدٍ الاتجاه يتطلب تحديد الاتجاه من المشاركين شق طريقهم عبر منطقة باستخدام خريطة للتضاريس. ينطلق أحد المشاركين في تحديد الاتجاه من نقطة المراقبة A ويسير لمسافة 5000 m بزاوية $35°$ تم قياسها باتجاه عقارب الساعة من اتجاه الشرق. وينطلق مشارك آخر في تحديد الاتجاه من نقطة المراقبة A ويسير لمسافة 3000 m ثم 2000 m باتجاه الشمال.
بالتقريب لأقرب متر، كم يبعد المشاركان عن بعضهما؟ (الدرس 3-8)

76. القمر الصناعي الاختلاف المركزي لمدار قمر صناعي حول الأرض هو 0.05. والمسافة من رأس المسار إلى مركز الأرض هي 32,082 km. اكتب معادلة قطبية يمكن استخدامها لتمثيل مسار القمر الصناعي إذا كانت الأرض تقع عند بؤرته الأقرب إلى الرأس المعطى. (الدرس 4-8)

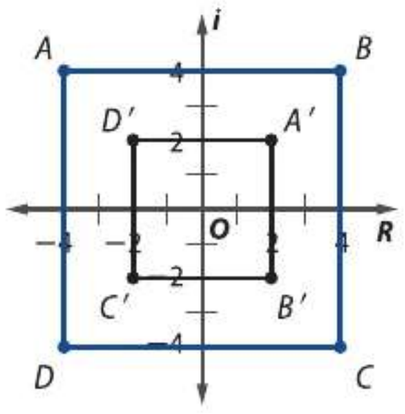


77. الكهرباء تم تصميم معظم الدوائر في أوروبا لاستيعاب 220 فولت. بالنسبة إلى الجزأين a وb، استخدم $E = I \times Z$. حيث يُقاس الجهد الكهربي E بالفولت، والمقاومة Z بالأوم، وشدة التيار I بالأمبير. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة. (الدرس 5-8)

a. إذا كانت شدة تيار الدائرة $5j + 2$ أمبير. فما المقاومة؟

b. إذا كانت مقاومة الدائرة $3j - 1$ أوم، فما التيار؟

78. رسومات الحاسوب يمكن تنفيذ التحويل الهندسي للأشكال باستخدام الأعداد المركبة. إذا بدأ المبرمج بالمربع $ABCD$؛ كما هو موضح أدناه، فيمكن تمثيل كل رأس بعدد مركب بالصورة القطبية. وحينها يمكن استخدام الضرب لتدوير المربع وتغيير أبعاده لإنتاج المربع $A'B'C'D'$. ما العدد المركب الذي ينبغي على المبرمج ضربه في كل عدد لينتج هذا التحويل؟ (الدرس 5-8)

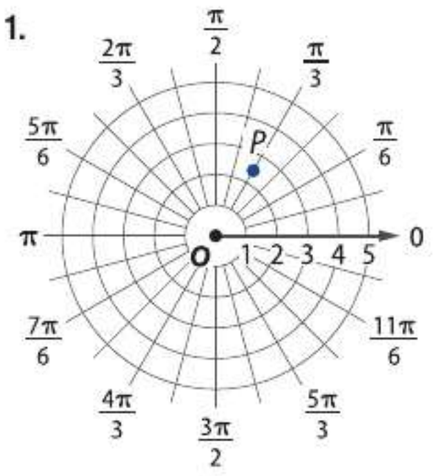


حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

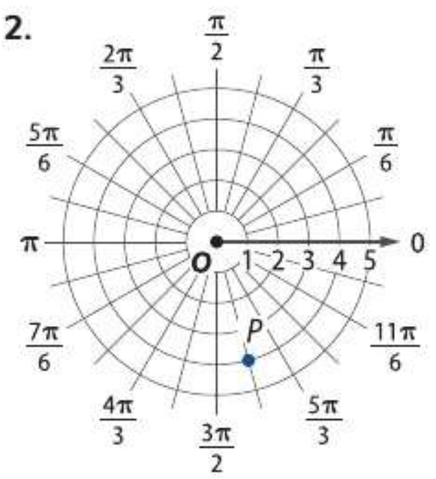
8 تدريب على الاختبار المعياري

جـــد أربعة أزواج مختلفة من الإحداثيات القطبية التي تعيّن النقطة P إذا كان $-2\pi \le \theta \le 2\pi$.

1.



2.



مـــثّـــل كل معادلة قطبية بيانيًا.

3. $\theta = 30°$

4. $r = 1$

5. $r = 2.5$

6. $\theta = \frac{5\pi}{3}$

7. $r = \frac{2}{3}\sin\theta$

8. $r = -\frac{1}{2}\sec\theta$

9. $r = -4\csc\theta$

10. $r = 2\cos\theta$

حدد كل منحنى كلاسيكي ومثله بيانيًا.

11. $r = 1.5 + 1.5\cos\theta$

12. $r^2 = 6.25\sin 2\theta$

13. الرادار يتتبع أحد مراقبي الحركة الجوية طائرة موقعها الحالي $(66, 115°)$. قيمة r بالكيلومترات.



a. ما الإحداثيات الديكارتية للطائرة؟ قرّب إلى أقرب جزء من عشرة من الكيلومتر.

b. إذا كانت هناك طائرة أخرى عند النقطة $(-75, 50)$. فما الإحداثيات القطبية للطائرة إذا علمت أن $0 \le \theta \le 360°$ و $r > 0$؟ قرّب إلى أقرب كيلومتر وأقرب جزء من عشرة من الدرجة إذا لزم الأمر.

c. ما المسافة بين الطائرتين؟ قرّب إلى أقرب كيلومتر.

حدد التمثيل البياني لكل معادلة ديكارتية. ثم اكتب المعادلة بالصورة القطبية. ادعم إجابتك بتمثيل الصورة القطبية للمعادلة بيانيًا.

14. $(x - 7)^2 + y^2 = 49$

15. $y = 3x^2$

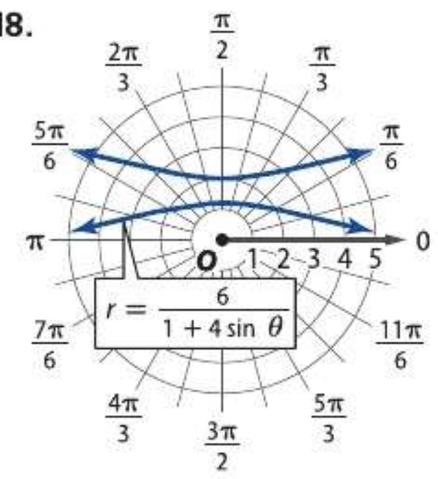
حدد الاختلاف المركزي ونوع المخروط ومعادلة الدليل لكل معادلة قطبية.

16. $r = \frac{2}{1 - 0.4\sin\theta}$

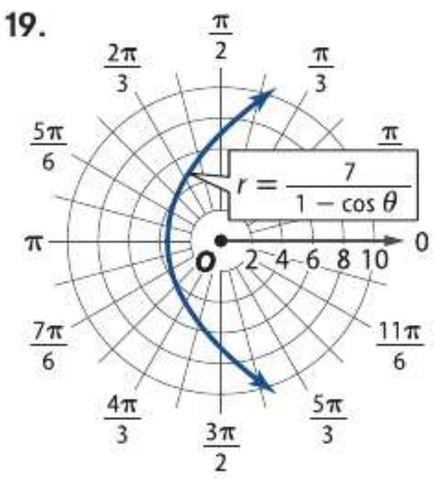
17. $r = \frac{6}{2\cos\theta + 1}$

اكتب معادلة كل تمثيل بياني قطبي بالصورة الديكارتية.

18.



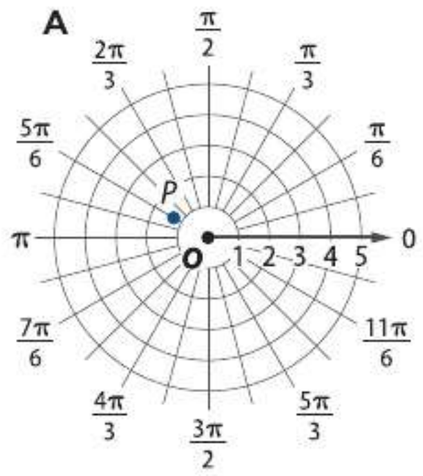
19.



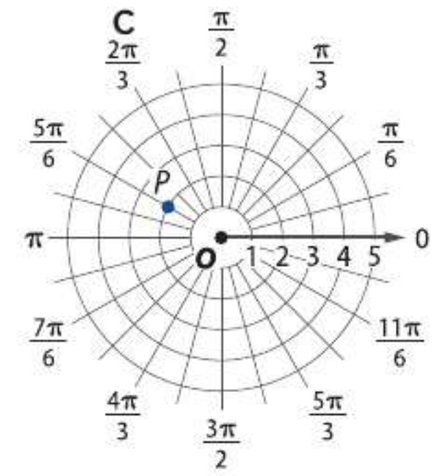
20. الكهرباء دائرة كهربائية يبلغ جهدها الكهربائي E 135 فولت وشدة تيارها I $4j - 3$ أمبير. جـــد المقاومة Z للدائرة بالأوم بالصورة الديكارتية. استخدم المعادلة $E = I \times Z$.

21. الاختيار من متعدد حدد التمثيل البياني للنقطة P ذات الإحداثيات المركبة $(-\sqrt{3}, -1)$ على المستوى الإحداثي القطبي.

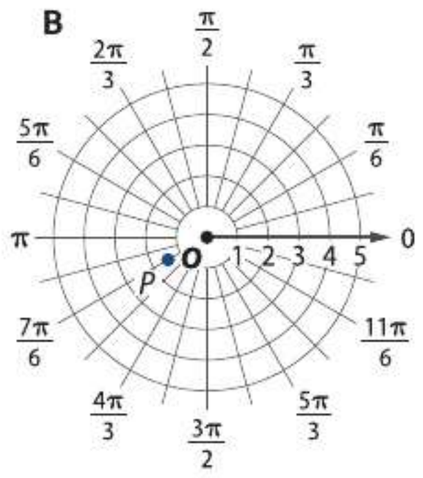
A



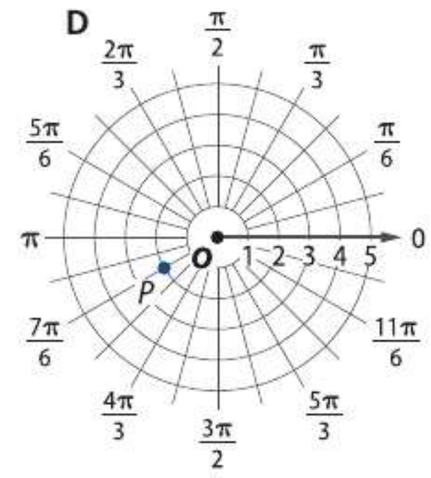
C



B



D



جـــد كل مقدار أسي، وعبر عنه بالصورة الديكارتية. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.

22. $(-1 + 4i)^3$

23. $(-7 - 3i)^5$

24. $(6 + i)^4$

25. $(2 - 5i)^6$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

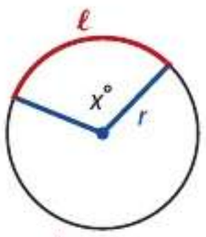
الوحدة 8

الربط مع حساب التفاضل والتكامل المتقدم
8 طول القوس

الهدف

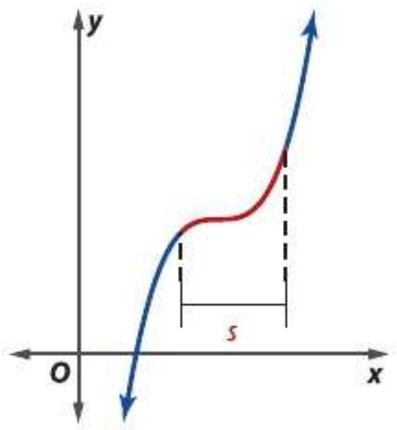
- تقريب طول قوس المنحنى.

يمكنك إيجاد طول القطعة المستقيمة باستخدام صيغة المسافة. يمكنك إيجاد طول أي قوس باستخدام الأجزاء. في حساب التفاضل والتكامل، ستحتاج إلى حساب عدد الأطوال التي لم يتم تمثيلها بالقطع المستقيمة أو أقسام الدائرة.

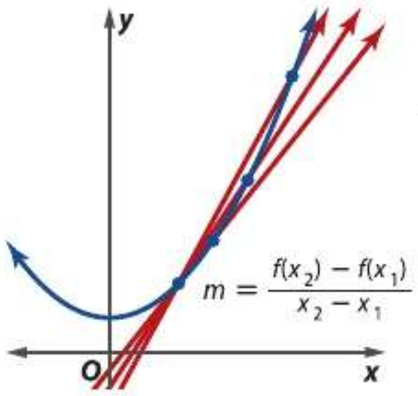


$$\frac{\ell}{2\pi r} = \frac{x}{360}$$

يركز *حساب التكامل* على المساحات والأحجام والأطوال. ويمكن استخدامه لإيجاد طول منحنى ليس له معادلة قياسية، مثل منحنى محدد بدالة تربيعية أو تكعيبية أو قطبية. وسوف تحتاج إلى *مجموع ريمان والتكامل المحدد*، مفهومان سوف تتعرف عليهما في الوحدات التالية، لحساب الطول الدقيق للمنحنى أو *طول القوس*، الذي يرمز إليه بالحرف *s*.



في هذا الدرس، سوف نقوم بتقريب طول قوس المنحنى باستخدام عملية شبيهة بالطريقة التي استخدمتها لتقريب معدل التغير عند نقطة ما. تذكر أنه في الوحدة 1 قمت بحساب ميل الخط القاطع لتقريب معدلات تغير التمثيلات البيانية عند نقطة محددة. وقد أدى تقليل المسافة بين نقطتين على الخط القاطع إلى زيادة دقة التقريب. مثلما هو موضح في التمثيل البياني على اليسار.



النشاط 1 تقريب طول القوس

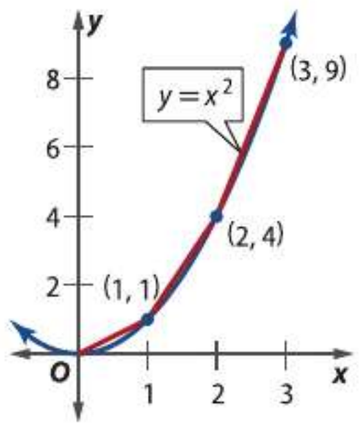
قرّب طول قوس التمثيل البياني $y = x^2$ عندما تكون $0 \le x \le 3$.

الخطوة 1 مثّل بيانيًا $y = x^2$ عندما تكون $0 \le x \le 3$ كما هو موضح.

الخطوة 2 مثل النقاط بيانيًا على المنحنى عندما تكون $x = 1$، و2، و3. وصّل النقاط باستخدام قطع مستقيمة كما هو موضح.

الخطوة 3 استخدم صيغة المسافة لإيجاد طول كل قطعة مستقيمة.

الخطوة 4 قرّب طول القوس بإيجاد مجموع أطوال القطع المستقيمة.

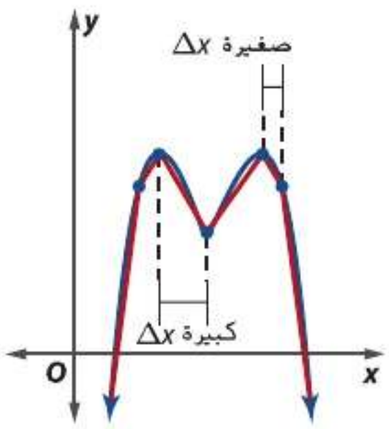


تحليل النتائج

1. هل التقريب الذي قمت به أكبر أم أقل من الطول الفعلي؟ اشرح استنتاجك.
2. قرّب طول القوس مرة ثانية باستخدام 6 قطع مستقيمة كونتها النقاط $x = 0$، و0.5، و1.0، و1.5، و2.0، و2.5، و3.0. وارسم تمثيلاً بيانيًا للتقريب الذي قمت به.
3. صف ما يحدث لتقريب طول القوس عند استخدام قطع مستقيمة أقصر.
4. بالنسبة لعمليتي التقريب، كانت نقاط النهاية للقطع المستقيمة تقع على مسافات متساوية على طول المحور x. فهل تعتقد أن ذلك سيؤدي دائمًا إلى أدق عملية تقريب؟ اشرح استنتاجك.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

لاحظ أنه في النشاط الأول كانت نقاط النهاية بالقطعة المستقيمة تقع على مسافات متساوية مقدارها 0.5 وحدة على طول المحور x. عند استخدام طرق حساب التفاضل والتكامل المتقدمة لإيجاد طول القوس *الدقيق*، يلزم وجود فارق ثابت بين نقطتي نهاية على طول المحور x. ويُرمز إلى هذا الفارق بـ Δx.



قد لا يكون التقريب الدقيق لطول القوس باستخدام Δx ثابت من أجل عمل قطع مستقيمة الطريقة الأكثر فعالية دائمًا.

سيحدد شكل القوس المسافة بين نقطتي النهاية، وبالتالي يعطي قيمًا مختلفة لـ Δx. على سبيل المثال، إذا أظهر تمثيل بياني زيادة أو انخفاضًا في فترة كبيرة من x، فقد تُستخدم قطعة مستقيمة كبيرة للتقريب. وإذا تضمن التمثيل البياني نقطة تحول، فمن الأفضل استخدام قطع مستقيمة صغيرة لحساب المنحنى في التمثيل البياني.

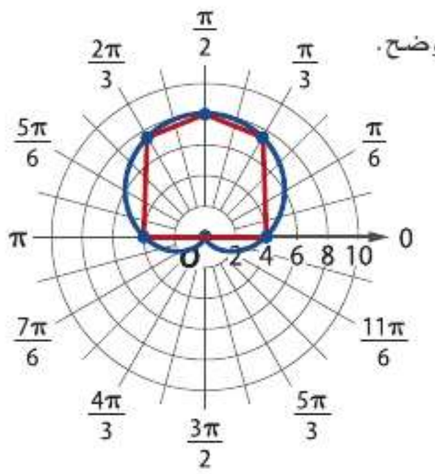
في السابق، تعلمت طريقة حساب المسافة بين الإحداثيات القطبية.
يمكن استخدام هذه الصيغة لتقريب طول قوس المنحنى الذي تمثله معادلة قطبية.

النشاط 2 تقريب طول القوس

قرّب طول قوس التمثيل البياني $r = 4 + 4 \sin \theta$ عندما تكون $0 \le x \le 2\pi$.

الخطوة 1 مثّل بيانيًا $r = 4 + 4 \sin \theta$ عندما تكون $0 \le x \le 2\pi$ مثلما هو موضح.

الخطوة 2 ارسم 6 نقاط على المنحنى عند $\theta = 0, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \pi$.
وصّل النقاط باستخدام قطع مستقيمة كما هو موضح.



الخطوة 3 استخدم صيغة المسافة القطبية لإيجاد طول كل قطعة مستقيمة.

الخطوة 4 قرّب طول القوس بإيجاد مجموع أطوال القطع المستقيمة.

تحليل النتائج

5. اشرح كيف يمكن استخدام التماثل لتقليل عدد العمليات الحسابية في الخطوة 3.
6. قرّب طول القوس باستخدام 10 قطع على الأقل. وارسم التمثيل البياني.
7. افترض أن n هو عدد القطع المستقيمة المستخدمة في تقريب ما وأن $\Delta\theta$ هو الفارق الثابت في θ بين نقاط النهاية لقطعة مستقيمة. خمّن العلاقة بين n، وθ، وتقريب طول القوس.

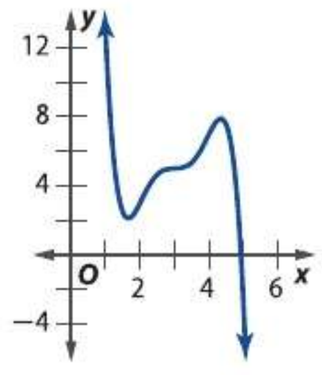
نصيحة دراسية

التمثيلات البيانية القطبية اصنع جدولاً بقيم r وθ عند حساب طول قوس التمثيل البياني القطبي. فهذا سوف يساعد على تقليل الأخطاء التي تنشأ عن الدوال التي تنتج قيمًا سالبة لـ r.

النموذج والتطبيق

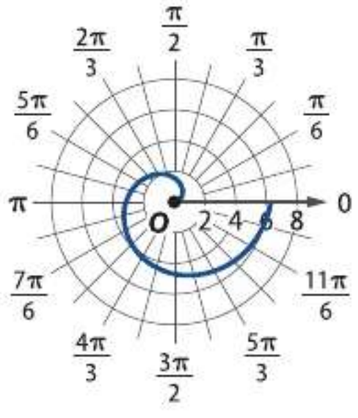
قرّب طول قوس كل تمثيل بياني. وارسم تمثيلك البياني.

8.



$y = -(x - 3)^5 + 3(x - 3)^3 + 5$
من أجل $1 \le x \le 5$

9.



$r = \theta$ من أجل $0 \le \theta \le 2\pi$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الوحدة

9 المتتاليات والمتسلسلات



Chapter sourced from Sequences and Series, from Algebra 2 Chapter 10 © 2014 & Sequences and Series, from Precalculus Chapter 10 © 2014 McGraw-Hill Education

السابق

- قمتَ بتحويل التعابير الجبرية لأبسط صورها وأوجدتَ قيمتها.

الحالي

- بعد دراستك لهذه الوحدة ستكون قادرًا على:
  - الربط بين المتتاليات والدوال
  - تمثيل وحساب مجموع المتسلسلات باستخدام الرمز سيجما.
  - استخدام المتتاليات والمتسلسلات الحسابية والهندسية.
  - استخدام المتتاليات الخاصة ودوال التكرار.

تفكيك الأسس باستخدام نظرية ذات الحدين.

برهنة العبارات باستخدام الاستقراء الرياضي.

لماذا؟ ▲

- **الاستدامة والبيئة** تظهر الرياضيات عبر المظاهر الطبيعية بطرق مذهلة. فتتجلى متتالية فيبوناتشي في البذور والأزهار ومخاريط الصنوبر والفاكهة والخضروات. كذلك، قد تساعدنا المتتاليات والمتسلسلات في الحفاظ على الموارد الطبيعية من خلال زيادة فعالية أنظمة تصفية المياه.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الاستعداد للوحدة

تدريب سريع

حُـلّ كل من المعادلات التالية.

1. $-6 = 7x + 78$
2. $768 = 3x^4$
3. $23 - 5x = 8$
4. $2x^3 + 4 = -50$
5. **النباتات** لدى ليلى 48 نباتًا في حديقتين خاصتين بها. وتزرع 12 نباتًا في الحديقة الصغيرة. أما في الحديقة الكبيرة، فتريد زراعة 4 نباتات في كل صف. ما عدد الصفوف التي ستكون لديها؟

مثّل كل دالة بيانيًا.

6. $\{(1, 3), (2, 5), (3, 7), (4, 9), (5, 11)\}$
7. $\{(1, -15), (2, -12), (3, -9), (4, -6), (5, -3)\}$
8. $\left\{(1, 27), (2, 9), (3, 3), (4, 1), \left(5, \frac{1}{3}\right)\right\}$
9. $\left\{(1, 1), (2, 2), \left(3, \frac{5}{2}\right), \left(4, \frac{11}{4}\right), \left(5, \frac{23}{8}\right)\right\}$
10. **الرعاية الصباحية** يتكلف مركز رعاية أطفال AED 450 في اليوم. ويتقاضون AED 150 عن كلّ طفل في اليوم. وتنتج الدالة $P(c) = 150c - 450$ المبلغ المالي الذي يجنيه المركز عند وجود عدد c من الأطفال. ما إجمالي الربح الذي سيجنيه المركز إذا كان يوجد به 8 أطفال؟

جـد قيمة كل تعبير في ضوء قيمة (قيَم) المتغير (المتغيرات).

11. $\frac{a}{3}(b + c)$ إذا كان $a = 9$، و $b = -2$، و $c = -8$
12. $r + (n - 2)t$ إذا كان $r = 15$، و $n = 5$، و $t = -1$
13. $x \cdot y^{z+1}$ إذا كان $x = -2$، و $y = \frac{1}{3}$، و $z = 5$
14. $\frac{a(1 - bc)^2}{1 - b}$ إذا كان $a = -3$، و $b = -4$، و $c = 1$

مراجعة سريعة

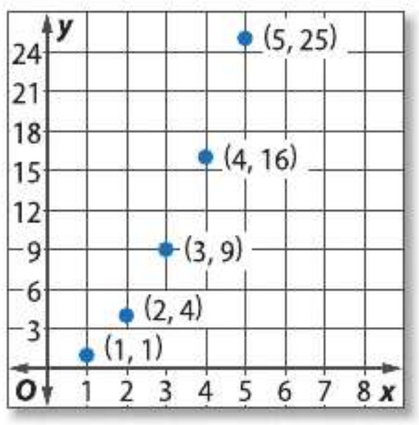
مثال 1

حُـلّ المعادلة: $25 = 3x^3 + 400$.

المعادلة الأصلية	$25 = 3x^3 + 400$
اطرح 400 من الطرفين.	$-375 = 3x^3$
اقسم الطرفين على 3.	$-125 = x^3$
جـد الجذر التكعيبي للطرفين.	$\sqrt[3]{-125} = \sqrt[3]{x^3}$
بسّط.	$-5 = x$

مثال 2

مثّل الدالة بيانيًا $\{(5, 25), (4, 16), (3, 9), (2, 4), (1, 1)\}$. حدد المدى والمجال.



مجال الدالة هو مجموعة جميع الاحتمالات لقيم x. إذًا، مجال هذه الدالة هو $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. مدى الدالة هو مجموعة جميع الاحتمالات لقيم y. إذًا مدى هذه الدالة هو $\{1, 4, 9, 16, 25\}$.

مثال 3

جـد قيمة $2 \cdot 3^{x+y}$ إذا كان $x = -2$ و $y = -3$.

عوّض.	$2 \cdot 3^{x+y} = 2 \cdot 3^{-2+(-3)}$
بسّط.	$= 2 \cdot 3^{-5}$
أعد الكتابة بأس موجب.	$= \frac{2}{3^5}$
جـد قيمة الأس.	$= \frac{2}{243}$

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

البدء في هذه الوحدة

ستتعلم عدة مفاهيم ومهاراتٍ ومفرداتٍ جديدة أثناء دراستك لهذه الوحدة . ولكي تستعد، حدّد المفردات المهمّة ونظّم مواردك.

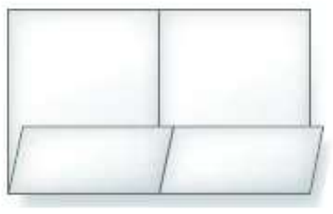
المطويات منظّم الدراسة

المتتاليات والمتسلسلات ابتكر المطوية التالية لمساعدتك في تنظيم ملاحظات على هذه الوحدة عن المتتاليات والمتسلسلات. وابدأ بورقة واحدة أبعادها $8\frac{1}{2}$ ″ في 11″.

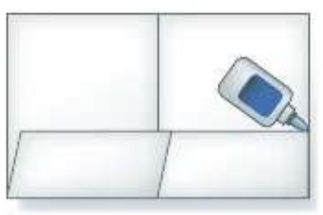
1 **اطوِ** الورقة إلى نصفين، مع مطابقة الأضلاع القصيرة.



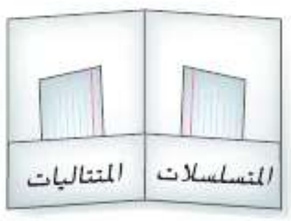
2 **افرد** واطوِ الضلع الأطول لأعلى لعمل جيب.



3 **دبّس** الحواف الخارجية أو ألصِقها لإكمال الجيب.



4 **اكتب** اسم كل ضلع كما هو موضح. استخدم بطاقة الفهرسة لتسجيل الملاحظات والأمثلة.

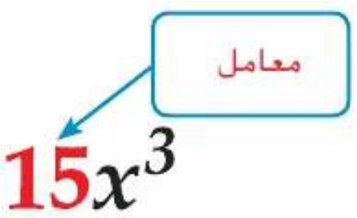


المفردات الجديدة

العربية	
متتالية	sequence
متتالية منتهية	finite sequence
متتالية غير منتهية	infinite sequence
متتالية حسابية	arithmetic sequence
فرق مشترك	common difference
متتالية هندسية	geometric sequence
نسبة مشتركة	common ratio
أوساط حسابية	arithmetic means
متسلسلة	series
متسلسلة حسابية	arithmetic series
المجموع الجزئي	partial sum
أوساط هندسية	geometric means
متسلسلة هندسية	geometric series
متسلسلة تقاربية	convergent series
متسلسلة تباعدية	divergent series
متتالية تكرارية	recursive sequence
الإعادة	iteration
الاستقراء الرياضي	mathematical induction
فرضية الاستقراء	induction hypothesis
متسلسلة القوة	power series
معاملات ذات الحدين	binomial coefficients

مراجعة المفردات

المعامل (coefficient) العامل العددي لذات الحد الواحد



الصيغة (formula) جملة رياضية تعبر عن العلاقة بين كميات بعينها

الدالة (function) علاقة يقترن فيها كل عنصر من المجال بعنصر واحد بالتحديد في المدى

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

9-1 المتتاليات كدوال



السابق

- قمتَ بتحليل الدوال الخطية والأسيّة.

الحالي

1. ربط المتتاليات الحسابية بالدوال الخطية.
2. ربط المتتاليات الهندسية بالدوال الأسية.

لماذا؟

- خلال الفرقة المدرسية، تتحرك مجموعة من الطلاب. ويتحرك مؤدٍّ واحد أمام الصف، ويوجد بالصف التالي ثلاثة طلاب، ويوجد خمسة طلاب بالصف التالي. ويستمر هذا النمط لبقية الصفوف.

المفردات الجديدة

- متتالية sequence
- حد term
- متتالية منتهية finite sequence
- متتالية غير منتهية infinite sequence
- متتالية حسابية arithmetic sequence
- فرق مشترك common difference
- متتالية هندسية geometric sequence
- نسبة مشتركة common ratio

ممارسات في الرياضيات

التفكير بطريقة تجريدية وكميّة.
محاولة إيجاد البنية واستخدامها.

1 متتاليات حسابية

المتتالية هي مجموعة من الأعداد تأخذ ترتيب أو نمط محدد. ويُطلق على كل عدد في المتتالية **حد**. وقد تكون المتتالية **متتالية منتهية** وتحتوي على أعداد محددة، مثل $\{-2, 0, 2, 4, 6\}$. أو قد تكون **متتالية غير منتهية** وتستمر دون نهاية مثل $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$. يُرمز إلى الحد الأول من المتتالية بالرمز a_1، ويُرمز إلى الحد الثاني بالرمز a_2، وهكذا.

المفهوم الأساسي المتتاليات في صورة دوال

الشرح المتتالية هي دالة يتكون مجالها من الأعداد الطبيعية أو مجموعة جزئية منها. ويتكون مداها من الاعداد الحقيقية.

الرموز

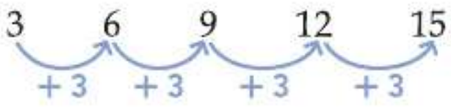
المجال:	n	...	3	2	1	رتبة الحد
المدى:	a_n	...	a_3	a_2	a_1	حدود المتتالية

أمثلة

متتالية منتهية	متتالية غير منتهية
$\{3, 6, 9, 12, 15\}$	$\{3, 6, 9, 12, 15, \ldots\}$
المجال: $\{1, 2, 3, 4, 5\}$	المجال: {جميع الأعداد الطبيعية}
المدى: $\{3, 6, 9, 12, 15\}$	المدى: $\{y \mid y$ هو أحد مضاعفات العدد 3. $y \geq 3\}$

في **المتتالية الحسابية**، يتحدد كل حد من خلال إضافة قيمة ثابتة إلى الحد السابق. ويُطلق على هذه القيمة الثابتة **الفرق المشترك**.

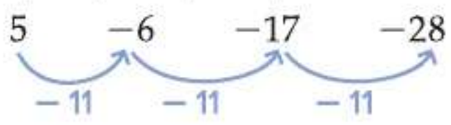
تأمل المتتالية 3, 6, 9, 12, 15. هذه المتتالية حسابية، وذلك لأن الحدود لها نفس الفرق المشترك. وكل حد يزيد عن الحد الذي يسبقه بمقدار 3 أضعاف.



مثال 1 تحديد المتتاليات الحسابية

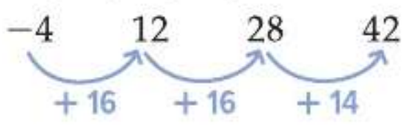
حدد ما إذا كانت كل متتالية حسابية.

a. 5, −6, −17, −28, ...



الفرق المشترك هو -11.
المتتالية حسابية.

b. −4, 12, 28, 42, ...



لا يوجد فرق مشترك.
هذه ليست متتالية حسابية.

تمرين موجّه

1A. 7, 12, 16, 20, ...

1B. −6, 3, 12, 21, ...

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

يُمكنك استخدام الفرق المشترك لإيجاد حدود المتتالية الحسابية.

مثال 2 تمثيل المتتالية الحسابية بيانيًا

فكّر في المتتالية الحسابية ... ,10 ,14 ,18.

a. جــد الحدود الأربعة التالية للمتتالية.

الخطوة 1 لتحديد الفرق المشترك، اطرح أي حد من الحد التالي له مباشرة. الفرق المشترك هو 14 − 10 أو 4−.

الخطوة 2 لإيجاد الحد التالي، أضِف 4− إلى الحد الأخير.

استمر في جمع 4− لإيجاد الحدود التالية.

10 → 6 → 2 → −2 → −6

+(−4) +(−4) +(−4) +(−4)

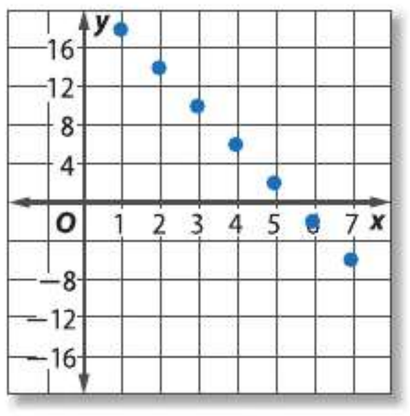
الحدود الأربعة التالية هي 6 و 2 و 2− و 6−.

b. مثّل الحدود السبعة الأولى من المتتالية بيانيًا.

يحتوي المجال على العناصر {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}

ويحتوي المدى على العناصر {6− ,2− ,2 ,6 ,10 ,14 ,18}.

وبذلك، مثّل الأزواج المرتبة المقابلة بيانيًا.



تمرين موجّه

2. جــد الحد الرابع في المتتالية الحسابية ... ,4 ,11 ,18. ثم مثّل الحدود السبعة الأولى بيانيًا.

لاحظ أن التمثيل البياني لحدود المتتالية الحسابية يقع على مستقيم واحد. وتعد المتتالية الحسابية دالة خطية يكون فيها رتبة الحد n هو المتغير المستقل، والحد a_n هو المتغير التابع، والفرق المشترك هو ميل المستقيم.

مثال 3 من الحياة اليومية إيجاد حد مُعين

الفرقة المدرسية **راجع بداية الدرس. بفرض أن مخرج العرض يريد تحديد عدد الطلاب المشاركين في الصف الرابع عشر خلال سير الفرقة.**
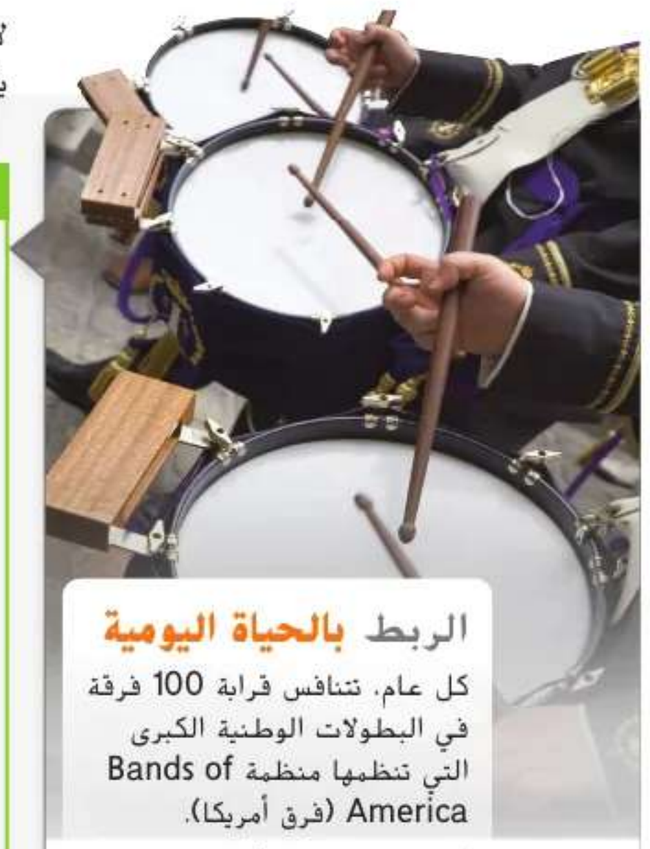
الاستيعاب نظرًا لأن الفرق بين أي صفين متتاليين هو 2، فإن الفرق المشترك للمتتالية هو 2.

التخطيط استخدم صيغة الميل والنقطة للمتتالية. افترض أن $m = 2$ و $(x_1, y_1) = (3, 5)$. ثم حُل لإيجاد قيمة $x = 14$.

الحل

$(y - y_1) = m(x - x_1)$	صيغة النقطة والميل
$(y - 5) = 2(x - 3)$	$m = 2$ و $(x_1, y_1) = (3, 5)$
$y - 5 = 2x - 6$	اضرب.
$y = 2x - 1$	أضف 5 إلى الطرفين.
$y = 2(14) - 1$	عوض عن x بالعدد 14.
$y = 28 - 1$ أو 27	بسّط.

التحقق يمكنك إيجاد حدود المتتالية عن طريق جمع 2، بدايةً من الصف 1، وحتى تصل إلى الصف 14.



الربط بالحياة اليومية

كل عام، تتنافس قرابة 100 فرقة في البطولات الوطنية الكبرى التي تنظمها منظمة Bands of America (فرق أمريكا).

المصدر: منظمة فرق أمريكا

تمرين موجّه

3. المال يعرض صاحب العمل على أسامة أجر بقيمة AED 33 لكل ساعة بالإضافة إلى AED 0.50 علاوة كل ثلاثة أشهر. ما إجمالي المبلغ الذي سيتقاضاه أسامة لكل ساعة بعد 3 أعوام؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

2 المتتالية الهندسية

تُعد المتتالية الهندسية نوعًا آخر من المتتاليات. في **المتتالية الهندسية** يتم تحديد كل حد من خلال ضرب ثابت غير صفري في الحد السابق. ويُطلق على هذا الثابت **النسبة المشتركة**.

تأمل المتتالية $\frac{1}{16}, \frac{1}{4}, 1, 4, 16$. هذه متتالية هندسية لأن الحدود لها نفس النسبة المشتركة. وكل حد أكبر من الحد السابق له بمقدار 4 مرات.

$$\frac{1}{16} \xrightarrow{\times 4} \frac{1}{4} \xrightarrow{\times 4} 1 \xrightarrow{\times 4} 4 \xrightarrow{\times 4} 16$$

مثال 4 تحديد المتتاليات الهندسية

حدد ما إذا كانت كل متتالية هندسية.

a. −2, 6, −18, 54, ...

جـد نسب الحدود المتتابعة.

$$\frac{6}{-2} = -3 \qquad \frac{-18}{6} = -3 \qquad \frac{54}{-18} = -3$$

النسب متماثلة، إذًا فالمتتالية هندسية.

b. 8, 16, 24, 32, ...

$$\frac{16}{8} = 2 \qquad \frac{24}{16} = 1.5 \qquad \frac{32}{24} = 1.\overline{3}$$

النسب ليست متماثلة، إذًا فالمتتالية ليست هندسية.

انتبه!

النسب إذا أوجدتَ نسبة حد إلى الحد السابق له، فأنشئ النسب المتبقية بالطريقة نفسها.

تمرين موجّه

4A. -8, 2, -0.5, 0.125, ...

4B. 1, 3, 7, 15, ...

عند منحك مجموعة من المعلومات، يمكنك إنشاء مسألة ترتبط بقصة.

مثال 5 تمثيل المتتالية الهندسية بيانيًا

فكّر في المتتالية الهندسية ... 2, 8, 32.

a. جـد الحدود الثلاثة التالية للمتتالية.

الخطوة 1 جـد قيمة النسبة المشتركة: $\frac{2}{8}$ أو $\frac{1}{4}$.

الخطوة 2 لإيجاد الحد التالي، اضرب الحد السابق في $\frac{1}{4}$.

استمر في الضرب في $\frac{1}{4}$ لإيجاد الحدود التالية.

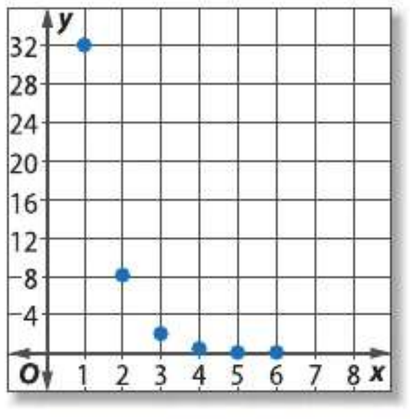
$$2 \xrightarrow{\times \frac{1}{4}} \frac{1}{2} \xrightarrow{\times \frac{1}{4}} \frac{1}{8} \xrightarrow{\times \frac{1}{4}} \frac{1}{32}$$

الحدود الثلاثة التالية هي $\frac{1}{2}$، و $\frac{1}{8}$، و $\frac{1}{32}$.

b. مـثّـل الحدود الستة الأولى للمتتالية بيانيًا.

المجال: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

المدى: $\left\{32, 8, 2, \frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \frac{1}{32}\right\}$



تمرين موجّه

5. جـد الحدين التاليين في ... 7, 21, 63. ثم مثّل الحدود السبعة الأولى بيانيًا.

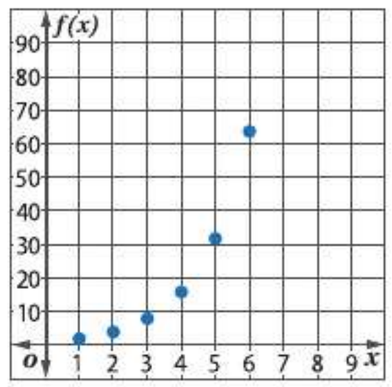
McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

مراجعة المفردات

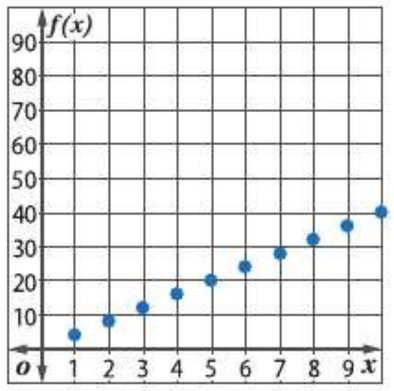
الدالة الأسية دالة على الصورة $f(x) = b^x$. حيث $b > 0$ و $b \neq 1$

من التمثيل البياني في المثال 5. تجد أن التمثيل البياني للمتتالية الحسابية يكون خطيًا. فإن التمثيل البياني للمتتالية الهندسية يكون أسيًا ويمكن تمثيله بواسطة $f(x) = r^x$. حيث r هي النسبة المشتركة. و $r > 0$. و $r \neq 1$.

هندسية



حسابية



x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	2	4	8	16	32	64

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(x)$	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40

المتتاليات الحسابية والهندسية هي دوال يكون فيها المجال مُعرفًا بواسطة عدد الحدود n وتتضمن مجموعة أو مجموعة فرعية لأعداد صحيحة موجبة. ويُمكن استخدام خواص المتتاليات الحسابية والهندسية لتصنيف المتتاليات.

مثال 5 تصنيف المتتاليات

حدد ما إذا كانت كل متتالية *حسابية* أم *هندسية* أم *غير ذلك*. اشرح استنتاجك.

a. 16, 24, 36, 54, ...

تحقق من وجود فرق مشترك.

$54 - 36 = 18$ $36 - 24 = 12$ ✗

تحقق من وجود نسبة مشتركة.

$\frac{54}{36} = \frac{3}{2}$ $\frac{36}{24} = \frac{3}{2}$ $\frac{24}{16} = \frac{3}{2}$ ✓

نظرًا لوجود نسبة مشتركة، فإن المتتالية هندسية.

b. 1, 4, 9, 16, ...

تحقق من وجود فرق مشترك.

$16 - 9 = 7$ $9 - 4 = 5$ ✗

تحقق من وجود نسبة مشتركة.

$\frac{16}{9} = 1.\overline{7}$ $\frac{9}{4} = 2.25$ ✗

نظرًا لعدم وجود فرق مشترك أو نسبة مشتركة، فإن المتتالية ليست حسابية ولا هندسية.

c. 23, 17, 11, 5, ...

تحقق من وجود فرق مشترك.

$5 - 11 = -6$ $11 - 17 = -6$ $17 - 23 = -6$ ✓

نظرًا لوجود فرق مشترك، فإن المتتالية حسابية.

تمرين موجّه

6A. $\frac{5}{3}, 2, \frac{7}{3}, \frac{8}{3}, \ldots$ **6B.** $2, -\frac{3}{2}, \frac{9}{8}, -\frac{27}{32}, \ldots$ **6C.** $-4, 4, 5, -5, \ldots$

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

التحقق من فهمك

مثال 1 **حدد ما إذا كانت كل متتالية حسابية أم لا. اكتب نعم أو لا.**

1. 8, −2, −12, −22,

2. −19, −12, −5, 2, 9

3. 1, 2, 4, 8, 16

4. 0.6, 0.9, 1.2, 1.8, ...

مثال 2 **جـد الحدود الأربعة التالية لكل متتالية حسابية. ثم مـثّـل المتتالية بيانيًا.**

5. 6, 18, 30, ...

6. 15, 6, −3, ...

7. −19, −11, −3, ...

8. −26, −33, −40, ...

مثال 3 **9. المعرفة المالية** تدخر ياسمين من أموالها لشراء سيارة. ولديها AED 950. لكنها تخطط لادخار AED 320 كل أسبوع من عملها في مجالسة الأطفال.

a. كم ستدخر ياسمين بعد 8 أسابيع؟

b. إذا كانت السيارة تكلف AED 7,350. فكم من الوقت ستستغرق لادخار مالٍ كافٍ لهذا السعر؟

مثال 4 **حدد ما إذا كانت المتتالية هندسية أم غير ذلك. اكتب نعم أو لا.**

10. −8, −5, −1, 4, ...

11. 4, 12, 36, 108, ...

12. 27, 9, 3, 1, ...

13. 7, 14, 21, 28, ...

مثال 5 **جـد الحدود الثلاثة التالية لكل متتالية هندسية. ثم مـثّـل المتتالية بيانيًا.**

14. 8, 12, 18, 27, ...

15. 8, 16, 32, 64, ...

16. 250, 50, 10, 2, ...

17. 9, −3, 1, $-\frac{1}{3}$, ...

مثال 6 **حدد ما إذا كانت كل متتالية *حسابية*، أم *هندسية*، أم*غير ذلك*. اشرح استنتاجك.**

18. 5, 1, 7, 3, 9, ...

19. 200, −100, 50, −25, ...

20. 12, 16, 20, 24, ...

التدريب وحل المسائل

مثال 1 **حدد ما إذا كانت كل متتالية حسابية أم لا. اكتب نعم أو لا.**

21. $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$

22. −9, −3, 0, 3, 9

23. 14, −5, −19, ...

24. $\frac{2}{9}, \frac{5}{9}, \frac{8}{9}, \frac{11}{9}, \ldots$

مثال 2 **جـد الحدود الأربعة التالية لكل متتالية حسابية. ثم مـثّـل المتتالية بيانيًا.**

25. −4, −1, 2, 5, ...

26. 10, 2, −6, −14, ...

27. −5, −11, −17, −23, ...

28. −19, −2, 15, ...

29. $\frac{1}{5}, \frac{4}{5}, \frac{7}{5}, \ldots$

30. $\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}$

مثال 3 **31. المسرح** هناك 28 مقعدًا في الصف الأول بالمسرح. وكل صف تالي يتضمن مقعدين أكثر من الصف السابق. إذا كان هناك 24 صفًا، فكم مقعدًا في الصف الأخير بالمسح؟

32. التبرير المنطقي بدأ إبراهيم برنامجًا تدريبيًا لرفع مستوى اللياقة البدنية. ويخطط للتجديف لمدة 5 دقائق على آلة التجديف الخاصة به في اليوم الأول، ثم يزيد فترة التجديف بمقدار دقيقة وثلاثين ثانية كل يوم.

a. ما المدة التي سيقضيها في التجديف خلال اليوم الثامن عشر؟

b. في أي يوم سيجدف جمال لمدة ساعة أو أكثر لأول مرة؟

c. هل من المعقول أن يستمر هذا النمط إلى ما لا نهاية؟ اشرح.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 4 **حدد ما إذا كانت المتتالية هندسية أم غير ذلك. اكتب نعم أو لا.**

33. 21, 14, 7, ...

34. 124, 186, 248, ...

35. $-27, 18, -12, \ldots$

36. 162, 108, 72, ...

37. $\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, 1, -\frac{1}{2}, \ldots$

38. $-4, -2, 0, 2, \ldots$

مثال 5 **جـد الحدود الثلاثة التالية للمتتالية. ثم مـثّـل المتتالية بيانيًا.**

39. 0.125, −0.5, 2, ...

40. 18, 12, 8, ...

41. 64, 48, 36, ...

42. 81, 108, 144, ...

43. $\frac{1}{3}$, 1, 3, 9, ...

44. 1, 0.1, 0.01, 0.001, ...

مثال 6 **حدد ما إذا كانت كل متتالية *حسابية*، أم *هندسية*، أم*غير ذلك*. اشرح استنتاجك.**

45. 3, 12, 27, 48, ...

46. 1, −2, −5, −8, ...

47. 12, 36, 108, 324, ...

48. $-\frac{2}{5}, -\frac{2}{25}, -\frac{2}{125}, -\frac{2}{625}, \ldots$

49. $\frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, 4, \ldots$

50. 6, 9, 14, 21, ...

51. القراءة قررت أسماء قراءة كتاب من 800 صفحة خلال العطلة. فإذا كانت قد وصلت بالفعل إلى الصفحة 112 وبقي من عطلتها 8 أيام، فما العدد الأدنى من الصفحات التي تحتاج إلى قراءتها كل يوم لتنتهي من قراءة الكتاب بنهاية عطلتها؟

52. الاستهلاك من المتوقع لسيارة أمنية أن تنخفض قيمتها بمعدل 15% كل عام. إذا كانت قيمة سيارتها في الوقت الراهن هي AED 88,200، فما ستكون قيمتها بعد 6 أعوام مع التقريب لأقرب درهم؟

53. الانتظام عند طي ورقة على نفسها، يتضاعف سمكها. إذا كانت هناك ورقة سمكها 0.1 mm ويُمكن طيها 37 مرة، فما السمك الذي ستصبح عليه حينها؟

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

54. التبرير اشرح السبب في أن المتتالية 8, 10, 13, 17, 22 ليست حسابية.

55. مسألة غير محددة الإجابة صِف موقفًا من الحياة اليومية يمكن تمثيله باستخدام متتالية حسابية بها فرق مشترك قيمته 8.

56. تحدٍ مجموع ثلاثة حدود متتالية لمتتالية حسابية يساوي 6. وناتج ضرب الحدود يساوي 42−. جـد هذه الحدود.

57. تحليل الخطأ يحدد بدر وسالم ما إذا كانت المتتالية ... 8, 8, 8, *حسابية*، أم *هندسية*، أم *غير ذلك*، أم *حسابية وهندسية*. هل أحدهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.

بدر

الفرق المشترك للمتتالية يساوي 0. والمتتالية حسابية.

سالم

النسبة المشتركة في المتتالية تساوي 1. والمتتالية هندسية.

58. مسألة غير محددة الإجابة جـد متتالية هندسية ومتتالية حسابية ومتتالية ليست هندسية ولا حسابية تبدأ على النحو ... 3, 9,.

59. التبرير إذا كان لدى متتالية هندسية النسبة r حيث إن $|r| < 1$. فماذا سيحدث للحدود عند زيادة n؟ وماذا سيحدث للحدود إذا كان $|r| \geq 1$؟

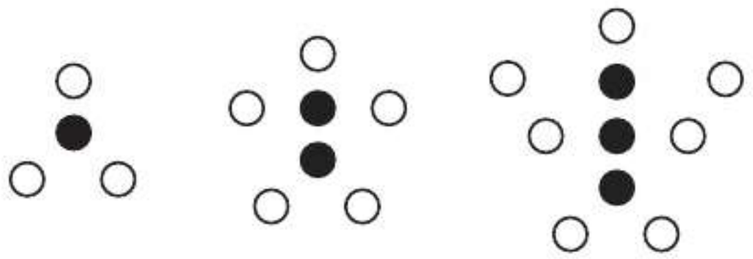
60. الكتابة في الرياضيات صِف ما سيحدث لحدود المتتالية الهندسية عند مضاعفة النسبة المشتركة. وماذا سيحدث عند نقصانها إلى النصف؟ اشرح استنتاجك.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

تدريب على الاختبار المعياري

61. الإجابة المختصرة يبلغ قياس حجرة نوم فوزية التي على شكل مستطيل 4.5 m في 3.5 m. وتريد شراء سجادة لغرفة النوم بتكلفة AED 108 لكل متر مربع شامل الضريبة. ما المبلغ الذي ستنفقه على فرش غرفة نومها بالسجاد؟

62. يمكن وصف نمط الدوائر المملوءة والدوائر البيضاء أدناه من خلال علاقة بين متغيرين.



أي علاقة تربط w. وهو عدد الدوائر البيضاء. بـ f. وهو عدد الدوائر الغامقة؟

A $w = 3f$

B $f = \frac{1}{2}w - 1$

C $w = 2f + 1$

D $f = \frac{1}{3}w$

63. SAT/ACT كانت تريد رانيا تحديد متوسط درجاتها في ستة اختبارات. وقد أدرجت الدرجات بشكل صحيح للحصول على T. ولكنها قامت بالقسمة على 7 بدلاً من 6. فكان المتوسط 12 درجة أقل من المتوسط الحقيقي. ما المعادلة التي يُمكن استخدامها لتحديد قيمة T؟

F $6T + 12 = 7T$

G $\frac{T}{7} = \frac{T - 12}{6}$

H $\frac{T}{7} + 12 = \frac{T}{6}$

J $\frac{T}{6} = \frac{T - 12}{7}$

K $\frac{T}{6} = 12 - \frac{T}{7}$

64. جـد الحد التالي في المتتالية الهندسية

$8, 6, \frac{9}{2}, \frac{27}{8}, \ldots$.

A $\frac{11}{8}$

B $\frac{27}{16}$

C $\frac{9}{4}$

D $\frac{81}{32}$

مراجعة شاملة

حُـلّ كل من أنظمة المعادلات الآتية.

65. $y = 5$
$y^2 = x^2 + 9$

66. $y - x = 1$
$x^2 + y^2 = 25$

67. $3x = 8y^2$
$8y^2 - 2x^2 = 16$

اكتب كل معادلة بالصيغة القياسية. وحدد ما إذا كان التمثيل البياني لها *قطعًا مكافئًا*، أم *دائرةً*، أم *قطعًا ناقصًا*، أم *قطعًا زائدًا*. ثم مثّل المعادلة بيانيًا.

68. $6x^2 + 6y^2 = 162$

69. $4y^2 - x^2 + 4 = 0$

70. $x^2 + y^2 + 6y + 13 = 40$

مـثّـل كل دالة بيانيًا.

71. $f(x) = \frac{6}{(x - 2)(x + 3)}$

72. $f(x) = \frac{-3}{(x - 2)^2}$

73. $f(x) = \frac{x^2 - 36}{x + 6}$

74. الصحة تمت إزالة دواء معين من مجرى الدم بمعدل ثابت. وانخفض معدل الدواء وفق الدالة $y = ae^{-0.1625t}$. حيث t بالساعات. جـد عمر النصف لهذه المادة.

مراجعة المهارات

اكتب معادلة المستقيم في كل من الحالات الآتية:.

75. يمر بالنقطة (6, 4)، و $m = 0.5$

76. يمر بالنقطة $\left(2, \frac{1}{2}\right)$، و $m = -\frac{3}{4}$

77. يمر بالنقطة (0, −6)، و $m = 3$

78. يمر بالنقطة (0, 4)، و $m = \frac{1}{4}$

79. يمر بالنقطتين (1, 3) و $\left(8, -\frac{1}{2}\right)$

80. يمر بالنقطتين (−5, 1) و (5, 16)

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

9-2 المتتاليات والمتسلسلات والرمز سيجما

السابق

- استخدمت الدوال في الحصول على أزواج مرتبة واستخدمت التمثيل البياني في تحليل السلوك الطرفي.

الحالي

1. استكشاف عدة أنواع مختلفة من المتتاليات.
2. استخدام الرمز سيجما في تمثيل وحساب مجموع المتسلسلات W.

لماذا؟

- قامت وفاء بتطوير موقع إلكتروني يمكن أن ينشر عليه طلاب مدرستها الثانوية صفحات التواصل الاجتماعي الخاصة بهم. وسيحصل طالب المدرسة الثانوية على صفحة مجانية إذا أحال خمسة من أصدقائه لاستخدام هذا الموقع الإلكتروني. يبدأ الموقع الإلكتروني بصفحة واحدة أنشأتها وفاء، والتي بدورها أحالت خمسًا من صديقاتها وأنشئت كل واحدة منهن صفحة خاصة بها. ثم أحالت كل واحدة من تلك الصديقات الخمس خمسة أشخاص آخرين للموقع، وقام كل منهم بإنشاء صفحة، وهكذا.



المفردات الجديدة

- متتالية sequence
- حد term
- متتالية منتهية finite sequence
- متتالية لانهائية infinite sequence
- متتاية تكرارية (ضمنية) recursive sequence
- متتالية صريحة explicit sequence
- متتالية فيبوناتشي Fibonacci sequence
- تقاربية converge
- تباعدية diverge
- متسلسلة series
- متسلسلة منتهية finite series
- المجموع الجزئي للحد النوني nth partial sum
- متسلسلة لانهائية infinite series
- الرمز سيجما sigma notation

1 المتتاليات في الرياضيات، **المتتالية** عبارة عن مجموعة من الأعداد المرتبة ترتيبًا معينًا ويُعرف كل عدد في المتتالية باسم **الحد**. تشتمل **المتتالية المنتهية**، مثل 1, 3, 5, 7, 9, 11، على عدد منتهٍ من الحدود. وتشتمل **المتتالية اللانهائية**، مثل 1, 3, 5, 7, ...، على عدد غير منتهٍ من الحدود.

كل حد في المتتالية عبارة عن دالة خاصة بموقعها. ومن ثم، فإن المتتالية اللانهائية هي دالة مجالها مجموعة الأعداد الطبيعية ويمكن كتابتها بالشكل التالي $f(1) = a_1, f(2) = a_2, f(3) = a_3, \ldots f(n) = a_n, \ldots$. حيث تشير a_n إلى الحد النوني. وإذا كان مجال الدالة هو الأعداد الطبيعية n الأولى فقط، فستكون المتتالية منتهية.

ويوجد عدد لا نهائي من المتتاليات التي لها نفس الحدود القليلة الأولى. ولتعريف متتالية بأنها وحيدة بدرجة كافية، يجب وضع صيغة للحد النوني أو يجب تقديم معلومات أخرى. وعند تعريفها بوضوح، تُعطي **الصيغة الصريحة** الحد النوني a_n في صورة دالة n.

مثال 1 إيجاد حدود المتتاليات

a. جـد الحدود الأربعة التالية للمتتالية ... 2, 7, 12, 17,.

الحد النوني لهذه المتتالية ليس معلومًا. ومن الأنماط المحتملة هنا أن يزيد كل حد بمقدار 5 عن الحد السابق له. ومن ثم، فالإجابة النموذجية للحدود الأربعة التالية هي 22 و27 و 32 و 37.

b. جـد الحدود الأربعة التالية في المتتالية ... 2, 5, 10, 17,.

الحد النوني لهذه المتتالية ليس معلومًا. إذا طرحنا كل حد من الحد الذي يليه، فسنبدأ في رؤية النمط المحتمل.

$a_4 - a_3 = 17 - 10 = 7 \qquad a_3 - a_2 = 10 - 5 = 5 \qquad a_2 - a_1 = 5 - 2 = 3$

من الواضح أن كل حد ينتج عن جمع العدد الفردي المتسلسل التالي. ولكن، عند النظر إلى النمط، فقد يتحدد أيضًا أن كل حد يزيد بمقدار 1 عن كل مربع مثالي، أو $a_n = n^2 + 1$. وباستخدام أي من النمطين، فالإجابة النموذجية للحدود الأربعة التالية هي 26 و 37 و 50 و 65.

c. جـد الحدود الأربعة الأولى للممتالية الناتجة عن $a_n = 2n(-1)^n$.

استخدم الصيغة الصريحة في إيجاد a_n في $n = 1$ و 2 و 3 و 4.

$a_1 = 2 \cdot 1 \cdot (-1)^1 = -2 \quad n = 1 \qquad a_2 = 2 \cdot 2 \cdot (-1)^2 = 4 \quad n = 2$

$a_3 = 2 \cdot 3 \cdot (-1)^3 = -6 \quad n = 3 \qquad a_4 = 2 \cdot 4 \cdot (-1)^4 = 8 \quad n = 4$

الحدود الأربعة الأولى في المتتالية هي -2 و -4 و 6 و 8.

تمرين موجّه

جـد الحدود الأربعة التالية في كل متتالية.

1A. 32, 16, 8, 4, ...

1B. 1, 2, 4, 7, 11, 16, 22, ...

1C. جـد الحدود الأربعة الأولى في المتتالية e الناتجة عن $a_n = n^3 - 10$.

McGraw-Hill Education مؤسسة لصالح والتأليف © محفوظة الطبع حقوق

يمكن أيضًا تعريف المتتالية بالتكرار. تنتج المتتاليات المعرفة بالتكرار حدًا واحدًا أو أكثر من الحدود القليلة الأولى، ثم تُعرّف الحدود التالية باستخدام تلك الحدود السابقة. تُسمى الصيغة التي تعرف الحد النوني في المتتالية باسم **الصيغة التكرارية أو الصيغة الضمنية** أو علاقة التكرار.

مثال 2 المتتالية المُعرفة بالتكرار

جـد الحد الخامس في المتتالية المُعرفة إذا كان $a_n = a_{n-1} + 2n - 1$ و $a_1 = 2$، حيث $n \geq 2$.

بما أن المتتالية تُعرف بالتكرار، فيجب أولاً إيجاد جميع الحدود قبل الحد الخامس. استخدم الحد الأول المعروف، $a_1 = 2$. والصيغة التكرارية (الضمنية) لـ a_n.

$a_2 = a_{2-1} + 2(2) - 1$ $\quad n = 2$

$= a_1 + 3$ $\quad$ بسّط.

$= 2 + 3 = 5$ $\quad a_1 = 2$

$a_3 = a_{3-1} + 2(3) - 1$ $\quad n = 3$

$= a_2 + 5 = 10$ $\quad a_2 = 5$

$a_4 = a_{4-1} + 2(4) - 1$ $\quad n = 4$

$= a_3 + 7 = 17$ $\quad a_3 = 10$

$a_5 = a_{5-1} + 2(5) - 1$ $\quad n = 5$

$= a_4 + 9 = 26$ $\quad a_4 = 17$

تمرين موجّه

جـد الحد السادس لكل متتالية فيما يلي:

2A. $a_1 = 3,\ a_n = (-2)a_{n-1},\ n \geq 2$

2B. $a_1 = 8,\ a_n = 2a_{n-1} - 7,\ n \geq 2$

نصيحة دراسية

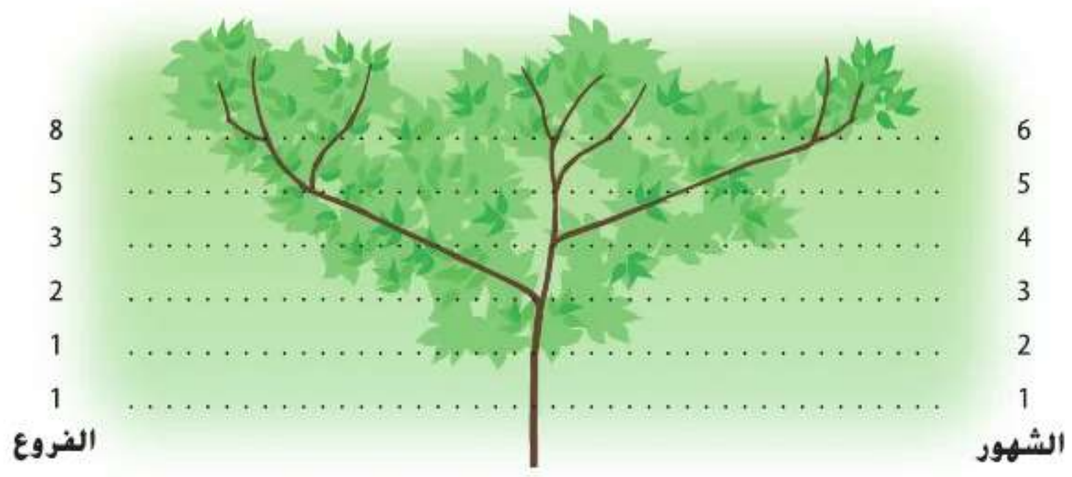
الرمز الحد المشار إليه بـ a_n يمثل الحد *النوني* في المتتالية. والحد المشار إليه بـ a_{n-1} يمثل الحد الواقع قبل a_n مباشرةً. يمثل الحد a_{n-2} الحد الذي يسبق a_n بحدّين.

تصف **متتالية فيبوناتشي** العديد من الأنماط الموجودة في الطبيعة، وغالبًا ما تُعرف بالتكرار.

مثال 3 من الحياة اليومية متتالية فيبوناتشي

الطبيعة على فرض أنه عندما بدأ النبات في النمو، ينبغي أن ينمو الجذر أولاً لمدة شهرين ليصبح قويًا بما يكفي لحمل الفروع. نبت فرع جديد في نهاية الشهر الثاني وسينبت فرع جديد كل شهر. ثم ينمو كل فرع من الفروع الجديدة لمدة شهرين ثم ينبت فرع جديد مع كل شهر. إذا استمر هذا النمط، فكم فرعًا سيكون في النبات بعد 10 شهور؟

سيكون هناك فرع واحد فقط والجذر خلال الشهرين الأولين. وفي نهاية الشهر الثاني، سينبت فرع جديد من الجذر. وبهذا يكون الإجمالي فرعين في الشهر الثالث. سينمو الفرع الجديد لمدة شهرين قبل أن ينبت منه فرع جديد، ولكن سينبت فرع جديد في كل شهر من الفرع الأصلي.





الربط بالحياة اليومية

توجد متتالية فيبوناتشي في بتلات الزهور وقواقع البحر والعظام في يد الإنسان، وتوجد أيضًا في القطع الفنية والموسيقى والشعر والمعمار.

المصدر: *Universal Principles of Design*

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

يبين الجدول التالي النمط.

الشهر	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
الفروع	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55

كل حد هو مجموع الحدّين السابقين. ويمكن كتابة هذا النمط في صورة صيغة تكرارية (ضمنية) $a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$ و $a_1 = 1, a_0 = 1$، حيث $n \geq 2$.

انتبه!

الرمز يُرمز للحد الأول في المتتالية أحيانًا بالرمز a_0. وعندما يحدث ذلك، فإن مجال الدالة الذي يصف المتتالية هو مجموعة الأعداد الكلية.

تمرين موجّه

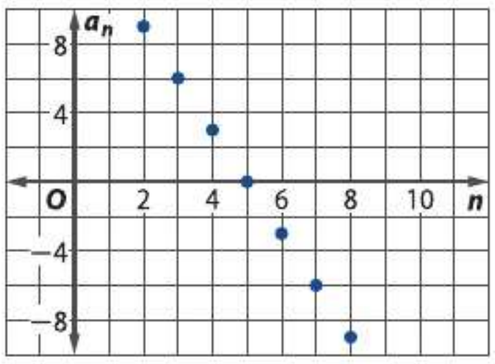
3. الطبيعة كم فرعًا سيكون في نبات مثل ذلك المذكور في المثال 3 بعد مرور 15 شهرًا إذا لم تتم إزالة أية فروع؟

في السابق لقد استكشفت في درس سابق، السلوك الطرفي للتمثيلات البيانية للدوال. وتعلمت أنه عندما يقترب مجال بعض الدوال من ∞، فإن المدى يقترب من عدد وحيد يُسمى النهاية. ومثل الدالة، يمكن أن يكون للمتتالية اللانهائية نهاية. وإذا كان للمتتالية نهاية بحيث تقترب الحدود من عدد وحيد، فستوصف المتتالية بأنها **تقاربية**. وإذا لم تكن كذلك، فستوصف المتتالية بأنها **تباعدية**.

مثال 4 المتتاليات التقاربية والتباعدية

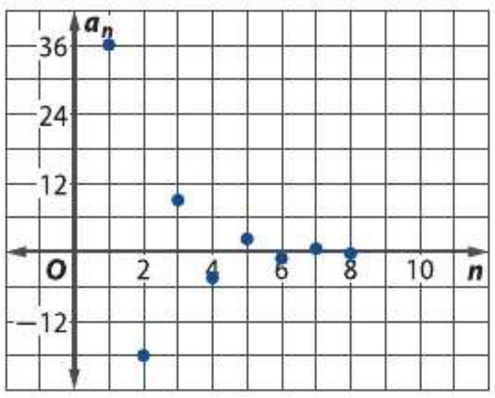
حدد ما إذا كانت كل متتالية مما يلي *تقاربية* أم *تباعدية*.

a. $a_n = -3n + 12$



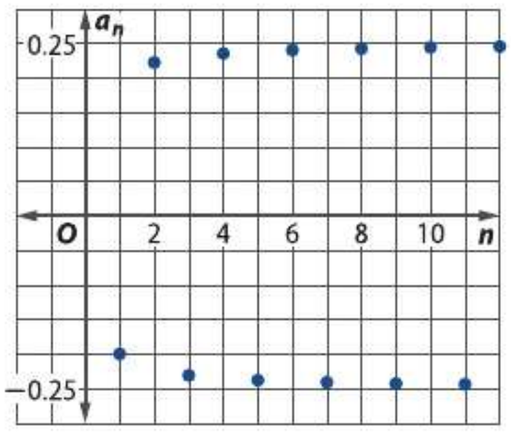
الحدود الثمانية الأولى في هذه المتتالية هي 12 و 9 و 6 و 3 و 0 و 3− و 6− و 9−. يمكنك أن ترى في التمثيل البياني الموضح يسارًا أن a_n لا تقترب من ∞. ومن ثم، فهذه المتتالية تباعدية.

b. $a_1 = 36, a_n = -\frac{1}{2}a_{n-1}, a \geq 2$



الحدود الثمانية الأولى في هذه المتتالية هي 36 و 18− و 9 و 4.5− و 2.25 و 1.125− و 0.5625، و 0.28125− و 0.140625. يمكنك أن ترى في التمثيل البياني الموضح يسارًا أن a_n تقترب من 0 مع زيادة n. فهذه المتتالية لها نهاية، ومن ثم فهي متتالية تقاربية.

c. $a_n = \frac{(-1)^n \cdot n}{4n + 1}$



فيما يلي الحدود الاثنا عشرة الأولى في هذه المتتالية، أو تقدير لها.

$a_1 = -0.2$ $\quad a_2 \approx 0.222$

$a_3 \approx -0.231$ $\quad a_4 \approx 0.235$

$a_5 \approx -0.238$ $\quad a_6 = 0.24$

$a_7 \approx -0.241$ $\quad a_8 \approx 0.242$

$a_9 \approx -0.243$ $\quad a_{10} \approx 0.244$

$a_{11} \approx -0.244$ $\quad a_{12} \approx 0.245$

يبدو أنه عندما تكون n عددًا فرديًا، فإن a_n يقترب من $-\frac{1}{4}$، وعندما يكون n عددًا زوجيًا، فإن a_n يقترب من $\frac{1}{4}$. بما أن a_n لا يقترب من قيمة معينة، فإن المتتالية بلا نهاية. ومن ثم، فالمتتالية متتالية تباعدية.

تلميح تقني

متتالية تقاربية أم تباعدية

إذا كانت الصيغة الصريحة للمتتالية معلومة، يمكنك إدخال الصيغة في قائمة Y= في حاسبة التمثيل البياني وتمثيل الدالة المرتبطة بذلك بيانيًا. ويمكن أن يساعدك تحليل السلوك الطرفي في تحديد ما إذا كانت المتتالية تباعدية أم تقاربية.

تمرين موجّه

4A. $a_n = \frac{64}{2n}$ **4B.** $a_1 = 9, a_n = a_{n-1} + 4$ **4C.** $a_n = 3(-1)^n$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

2 المتسلسلة

المتسلسلة هي مجموع جميع حدود المتتالية. وكالمتتالية، يمكن أن تكون المتسلسلة منتهية أو لانهائية. **المتسلسلة المنتهية** هي مجموع جميع حدود المتتالية المنتهية، بينما **المتسلسلة اللانهائية** هي مجموع جميع حدود المتتالية اللانهائية.

	متتالية	متسلسلة
منتهية	1, 3, 5, 7, 9	1 + 3 + 5 + 7 + 9
لانهائية	1, 3, 5, 7, 9, ...	1 + 3 + 5 + 7 + 9 + ...

يُسمى مجموع الحدود النونية الأولى في المتسلسلة بالمجموع الجزئي **النوني** ويُرمز إليه بـ S_n. ويمكن إيجاد المجموع الجزئي النوني لأي متسلسلة بحساب كل حد وصولاً إلى الحد النوني، ثم إيجاد مجموع تلك الحدود.

مثال 5 المجموع الجزئي للحد النوني

a. جد المجموع الجزئي الرابع لـ $a_n = (-2)^n + 3$.

جد الحدود الأربعة التالية.

$a_1 = (-2)^1 + 3 = 1$ $\quad n = 1$

$a_2 = (-2)^2 + 3 = 7$ $\quad n = 2$

$a_3 = (-2)^3 + 3 = -5$ $\quad n = 3$

$a_4 = (-2)^4 + 3 = 19$ $\quad n = 4$

المجموع الجزئي الرابع $S_4 = 1 + 7 + (-5) + 19 = 22$.

b. جد S_3 لـ $a_n = \frac{4}{10^n}$.

جد الحدود الثلاثة الأولى.

$a_1 = \frac{4}{10^1} = 0.4$ $\quad n = 1$

$a_2 = \frac{4}{10^2} = 0.04$ $\quad n = 2$

$a_3 = \frac{4}{10^3} = 0.004$ $\quad n = 3$

المجموع الجزئي الثالث يساوي $S_3 = 0.4 + 0.04 + 0.004 = 0.444$.

تمرين موجّه

5A. جد المجموع الجزئي السادس لـ $a_n = 0.5(a_{n-1})$ و $a_1 = 8$. حيث $n \geq 2$.

5B. جد المجموع الجزئي السابع لـ $a_n = 3\left(\frac{1}{10}\right)^n$.

نصيحة دراسية

المتتاليات اللانهائية التقاربية

في حين أنه ينبغي أن تقترب المتتالية اللانهائية من 0 ليكون للمتسلسلة اللانهائية المرتبطة بها مجموع، فإن هذا ليس كافيًا. فبعض المتتاليات اللانهائية تقترب من 0 وتظل المتسلسلات اللانهائية المرتبطة بها بلا مجاميع.

بما أن المتسلسلة اللانهائية ليس لها عدد نهائي من الحدود، فقد تفترض أن المتسلسلة اللانهائية ليس لها مجموع S. وهذا صحيح بالنسبة للمتسلسلة الموضحة أدناه.

متتالية لانهائية	متسلسلة لانهائية	متتالية المجاميع الجزئية الأربعة الأولى
1, 4, 7, 10, ...	1 + 4 + 7 + 10 + ...	1, 5, 12, 22, ...

لكن بعض المتسلسلات اللانهائية لها مجاميع. وليكون للمتسلسلة اللانهائية مجموع محدد S، يجب أن تقترب المتتالية اللانهائية المرتبطة بتلك المتسلسلة من 0. ولاحظ أنه يبدو أن متتالية المجاميع الجزئية في المتسلسلة اللانهائية الموضحة أدناه تقترب من مجموع $0.\overline{1}$ أو $\frac{1}{9}$.

متتالية لانهائية	متسلسلة لانهائية	متتالية المجاميع الجزئية الأربعة الأولى
0.1, 0.01, 0.001, ...	0.1 + 0.01 + 0.001 + ...	0.1, 0.11, 0.111, ...

سننظر عن كثب إلى مجاميع المتتاليات اللانهائية في الدرس 3-9.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

يتم غالبًا ترميز المتسلسلات باستخدام الحرف اليوناني الكبير سيجما Σ. ومن المعروف أن المتسلسلة المكتوبة باستخدام هذا الحرف يمكن التعبير عنها باستخدام رمز المجموع أو **الرمز سيجما**.

المفهوم الأساسي الرمز سيجما

في أي متتالية ... a_1, a_2, a_3, a_4، يرمز لمجموع الحدود k الأولى بـ

$$\sum_{n=1}^{k} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_k$$

حيث n هي مؤشر المجموع، و k هي الحد العلوي للمجموع و 1 هو الحد السفلي للمجموع.

قراءة في الرياضيات

الرمز سيجما $\sum_{n=1}^{k} a_n$ يُقرأ *المجموع من $n = 1$ إلى k من a إلى n.*

يشير الحد السفلي في هذا الرمز إلى موقع بدء تجميع حدود المتتالية، ويشير الحد العلوي إلى موقع انتهاء المجموع. وإذا أُعطي الحد العلوي بالشكل ∞، فإن الرمز سيجما يمثل متسلسلة لانهائية.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$$

مثال 6 المجموع في الرمز سيجما

جـد مجموع كل مما يلي.

a. $\sum_{n=1}^{5} (4n - 3)$

$$\sum_{n=1}^{5} (4n - 3) = [4(1) - 3] + [4(2) - 3] + [4(3) - 3] + [4(4) - 3] + [4(5) - 3]$$
$$= 1 + 5 + 9 + 13 + 17 = 45$$

b. $\sum_{n=3}^{7} \frac{6n - 3}{2}$

$$\sum_{n=3}^{7} \frac{6n - 3}{2} = \frac{6(3) - 3}{2} + \frac{6(4) - 3}{2} + \frac{6(5) - 3}{2} + \frac{6(6) - 3}{2} + \frac{6(7) - 3}{2}$$
$$= 7.5 + 10.5 + 13.5 + 16.5 + 19.5 = 67.5$$

c. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{10^n}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{10^n} = \frac{7}{10^1} + \frac{7}{10^2} + \frac{7}{10^3} + \frac{7}{10^4} + \frac{7}{10^5} + \ldots$$
$$= 0.7 + 0.07 + 0.007 + 0.0007 + 0.00007 + \ldots$$
$$= 0.77777\ldots = \frac{7}{9}$$

انتبه!

الاختلافات في الرمز سيجما

لا ينبغي بالضرورة أن يكون مؤشر المجموع الحرف n. بل يمكن تمثيله بأي متغير. على سبيل المثال، يمكن أيضًا كتابة المجموع في المثال 6a بالشكل التالي $\sum_{i=1}^{5} (4i - 3)$.

تمرين موجّه

6A. $\sum_{n=1}^{5} \frac{n^2 - 1}{2}$ **6B.** $\sum_{n=7}^{13} (n^3 - n^2)$ **6C.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{10^n}$

لاحظ أنه في حين أنه غالبًا ما يكون الحد السفلي في المجموع يساوي 1، يمكن أن يبدأ المجموع بأي حد p في المتتالية طالما أن $p < k$. في المثال 6b، يبدأ المجموع بالحد الثالث في المتتالية وينتهي بالحد السابع.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

التمارين

جـد الحدود الأربعة التالية في كل متتالية. (مثال 1)

1. $1, 8, 15, 22, \ldots$
2. $3, -6, 12, -24, \ldots$
3. $81, 27, 9, 3, \ldots$
4. $1, 3, 7, 13, \ldots$
5. $-2, -15, -28, -41 \ldots$
6. $1, 4, 10, 19, \ldots$

جـد الحدود الأربعة الأولى في كل متتالية. (مثال 1)

7. $a_n = n^2 - 1$
8. $a_n = -2^n + 7$
9. $a_n = \frac{n+7}{9-n}$
10. $a_n = (-1)^{n+1} + n$
11. **تأجير السيارات** تتضمن عقود التأجير غالبًا بنودًا تُقيد عدد الكيلومترات التي تقطعها السيارة سنويًا من خلال فرض رسوم على كل كيلومتر يزيد عن هذا القيد. بالنسبة للسيارة الموضحة أدناه، يقتضي عقد التأجير أن عدد الكيلومترات المقطوعة سنويًا يجب ألا يزيد عن 15,000. (المثال 2)



a. اكتب المتتالية التي تصف أقصى عدد مسموح به من الكيلومترات مع نهاية كل 12 شهرًا من فترة تأجير السيارة إذا كانت المسافة المقطوعة عند بداية التأجير هي 1350 km

b. اكتب الحدود الأربعة الأولى التي تعطي التكلفة التراكمية لإيجار شهر معين.

c. اكتب صيغة واضحة لتمثيل المتتالية في الجزء b.

d. حدد إجمالي المبلغ المدفوع في نهاية فترة الإيجار.

جـد الحد المحدد لكل متتالية. (المثال 2)

12. الحد الرابع، $a_1 = 5$، $a_n = -3a_{n-1} + 10$، $n \geq 2$
13. الحد السابع، $a_1 = 14$، $a_n = 0.5a_{n-1} + 3$، $n \geq 2$
14. الحد الرابع، $a_1 = 0$، $a_n = 3^{a_{n-1}}$، $n \geq 2$
15. الحد الثالث، $a_1 = 3$، $a_n = (a_{n-1})^2 - 5a_{n-1} + 4$، $n \geq 2$
16. **الموقع الإلكتروني** حققت وفاء، الطالبة المذكورة في المثال من بداية الدرس، نجاحًا كبيرًا في توسعة انتشار موقعها الإلكتروني. فقد قام كل طالب تسلم إحالة بتطوير صفحة ويب وإحالة خمسة طلاب آخرين إلى الموقع الإلكتروني الذي تملكه وفاء. (المثال 3)

a. اذكر الحدود الخمسة الأولى للمتتالية التي تمثل عدد صفحات الويب الجديدة التي أُنشئت من خلال الموقع الإلكتروني الذي تملكه وفاء.

b. على فرض أن المدرسة بها 1576 طالبًا، فبعد كم دورة من الإحالات سيكون لجميع الطلاب صفحة ويب على الموقع الإلكتروني؟

17. **النحل** تأتي أنثى النحل من بيضة مخصبة (من ذكر وأنثى)، بينما يأتي ذكر النحل من بيضة غير مخصبة (من ذكر فقط). (المثال 3)

a. ارسم شجرة عائلة تبين الأجيال الثلاثة السابقة لذكر النحل (الآباء فقط).

b. حدد عدد آباء النحل في الجيل الحادي عشر السابق لذكر النحل.

حدد ما إذا كانت كل متتالية مما يلي *تقاربية* أم *تباعدية*. (المثال 4)

18. $a_1 = 4, 1.5a_{n-1}, n \geq 2$
19. $a_n = \frac{5}{10^n}$
20. $a_n = -n^2 - 8n + 106$
21. $a_1 = -64, \frac{3}{4}a_{n-1}, n \geq 2$
22. $a_1 = 1, a_n = 4 - a_{n-1}, n \geq 2$
23. $a_n = n^2 - 3n + 1$
24. $a_n = \frac{n^2+4}{3+n}$
25. $a_1 = 9, a_n = \frac{a_{n-1}+3}{2}, n \geq 2$
26. $a_n = \frac{5n+6}{n}$
27. $a_n = \frac{5n}{5^n} + 1$

جـد المجموع المحدّد لكل متتالية . (المثال 5)

28. المجموع الجزئي الخامس لـ $a_n = n(n-4)(n-3)$
29. المجموع الجزئي السادس لـ $a_n = \frac{-5n+3}{n}$
30. S_8 من $a_1 = 1, a_n = a_{n-1} + (18 - n), n \geq 2$
31. S_4 من $a_1 = 64, a_n = -\frac{3}{4}a_{n-1}, n \geq 2$
32. المجموع الجزئي الحادي عشر لـ $a_1 = 4, a_n = (-1)^{n-1}(|a_{n-1}| + 3), n \geq 2$
33. S_9 من $a_1 = -35, a_n = a_{n-1} + 8, n \geq 2$
34. المجموع الجزئي الرابع لـ $a_1 = 3, a_n = (a_{n-1} - 2)^3, n \geq 2$
35. S_4 من $a_n = \frac{(-3)^n}{10}$

جـد مجموع كل مما يلي.. (المثال 6)

36. $\sum_{n=1}^{8} (6n - 11)$
37. $\sum_{n=4}^{11} (30 - 4n)$
38. $\sum_{n=1}^{7} [n^2(n-5)]$
39. $\sum_{n=2}^{7} (n^2 - 6n + 1)$
40. $\sum_{n=8}^{15} \left(\frac{n}{4} - 7\right)$
41. $\sum_{n=1}^{10} [(n-4)^2(n-5)]$
42. $\sum_{n=0}^{6} [(-2)^n - 9]$
43. $\sum_{n=1}^{3} 7\left(\frac{1}{10}\right)^{2n}$
44. $\sum_{n=1}^{\infty} 5\left(\frac{1}{10^n}\right)$
45. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{10^n}$

46. **المعرفة المالية** مبلغ الإيداع الأولي لحساب مازن المصرفي قيمته AED 380. ويحقق فائدة سنوية نسبتها 3.5%. وهذه نسبة مركبة سنويًا.

a. جـد قيمة الرصيد كل عام على مدار السنوات الخمس الأولى.

b. اكتب صيغة تكرارية (ضمنية) وصيغة صريحة لتحديد رصيد الحساب.

c. بالنسبة لقيم n الكبيرة جدًا، أي صيغة تعطي قيمة دقيقة للرصيد؟ فسّر.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

47. الاستثمار تستثمر هيام AED 200 كل 3 شهور. يدفع مشروعها الاستثماري نسبة مئوية 8% سنويًا، وهي فائدة مركبة فصلية. إذا دفعت هيام مع بداية كل فصل ويتم الإعلان عن الفائدة مع نهاية الفصل، فكم سيكون إجمالي قيمة الاستثمار بعد سنتين؟

48. الملاهي يبين الجدول عدد ركاب قطار الملاهي الخشبي سنويًا من عام 1998 إلى عام 2007. يمكن تقريب بيانات ركوب القطار باستخدام $a_n = -\frac{1}{20}n + 1.3$، حيث $n = 1$ تمثل عام 1998 و $n = 2$ تمثل عام 1999، وهكذا.

قطار الملاهي الخشبي			
العام	عدد الركاب (بالمليون)	العام	عدد الركاب (بالمليون)
1998	1.31	2003	0.99
1999	1.15	2004	0.95
2000	1.14	2005	0.89
2001	1.09	2006	0.81
2002	1.05	2007	0.82

المصدر: *Cedar Fair Entertainment Company*

a. صمم تمثيلاً بيانيًا لعدد الركاب من عام 1998 إلى عام 2007. وحدد بعدئذٍ ما إذا كانت المتتالية تبدو تقاربية أم تباعدية. هل هذا مفيد في سياق هذا الموقف؟ فسّر الاستنتاج.

b. استخدم الجدول في إيجاد إجمالي عدد الركاب من عام 1998 إلى عام 2005. واستخدم بعدئذٍ المتتالية الواضحة في إيجاد المجموع الجزئي الثامن لـ a_n. قارن بين النتائج.

c. إذا استمرت المتتالية، فجد قيمة a_{14}. ماذا يمثل هذا العدد؟

انسخ الجدول وأكمله.

	صيغة تكرارية	المتتالية	صيغة صريحة
.49		6, 8, 10, 12, ...	
.50	$a_1 = 15,\ a_n = a_{n-1} - 1,\ n \geq 2$		
.51		7, 21, 63, 189, ...	
.52			$a_n = 10(-2)^n$
.53			$a_n = 8n - 3$
.54	$a_1 = 2,\ a_n = 4a_{n-1},\ n \geq 2$		
.55	$a_1 = 3,\ a_n = a_{n-1} + 2n - 1,\ n \geq 2$		
.56			$a_n = n^2 + 1$

اكتب كل متسلسلة بالرمز سيجما، وستجد الحد السفلي مذكورًا.

57. $-2 - 1 + 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5;\ n = 1$

58. $\frac{1}{20} + \frac{1}{25} + \frac{1}{30} + \frac{1}{35} + \frac{1}{40} + \frac{1}{45};\ n = 4$

59. $8 + 27 + 64 + \cdots + 1000;\ n = 2$

60. $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{128};\ n = 1$

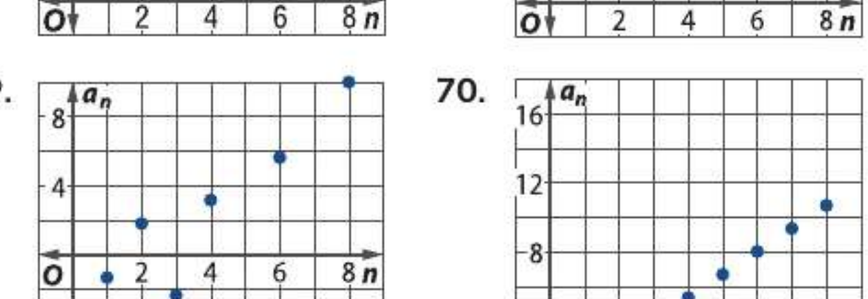
61. $-8 + 16 - 32 + 64 - 128 + 256 - 512;\ n = 3$

62. $8\left(-\frac{1}{3}\right) + 8\left(\frac{1}{9}\right) + 8\left(-\frac{1}{27}\right) + \cdots + 8\left(-\frac{1}{243}\right);\ n = 1$

حدد هل كل متتالية مما يلي *تقاربية* أم *تباعدية*. وجد بعدئذٍ المجموع الجزئي الخامس للمتتالية.

63. $a_n = \sin\frac{n\pi}{2}$ **64.** $a_n = n\cos\pi$ **65.** $a_n = e^{-\frac{n}{2}}\cos\pi n$

66. ضغط الماء يبلغ الضغط الواقع على جسد الإنسان على سطح البحر 101,353 نيوتن/متر مربع (N/m^2). ويزيد الضغط بمقدار 9,205 N/m^2 تقريبًا عن كل متر إضافي تحت سطح الماء مثلما هو موضح.



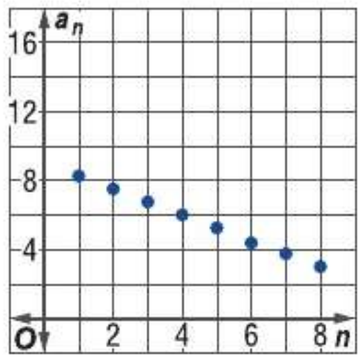
a. اكتب صيغة تكرارية (ضمنية) لتمثيل a_n، الضغط عند n متر تحت سطح البحر. (تلميح: افترض أن $a_0 = 14.7$.)

b. اكتب الحدود الثلاثة الأولى في المتتالية وصف ما تمثله.

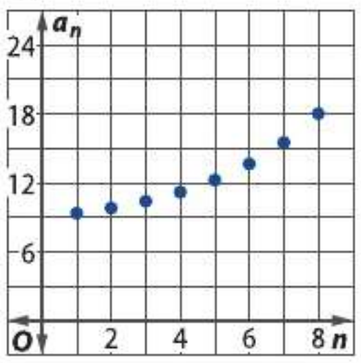
c. لا يستطيع الغطاسون الغطس لمسافة أعمق من 100 متر. اكتب صيغة واضحة تمثل a_n. واستخدم الصيغة بعدئذٍ في إيجاد ضغط الماء عند 100 متر تحت سطح الماء.

صل كل متتالية بتمثيلها البياني.

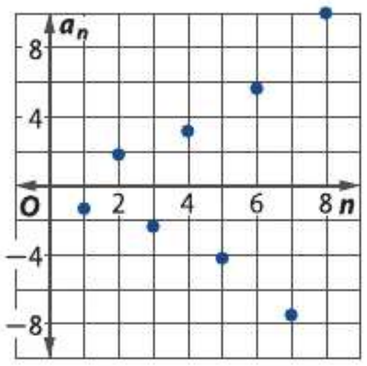
67.



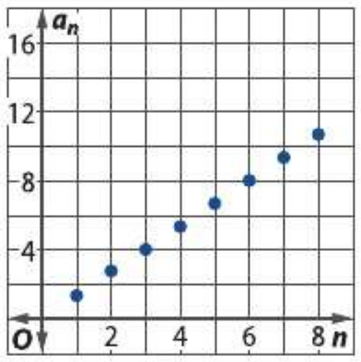
68.



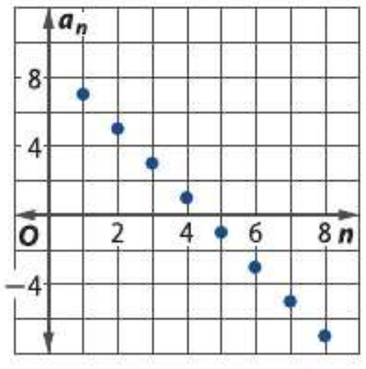
69.



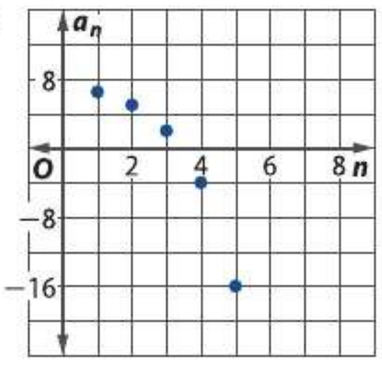
70.



71.



72.



a. $a_n = \frac{4}{3}n$

b. $a_n = -\frac{3}{4}n + 9$

c. $a_n = \left(-\frac{4}{3}\right)^n$

d. $a_n = 8 - \frac{3}{4}(2^n)$

e. $a_n = 9 - 2n$

f. $a_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n + 8$

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

73. النسبة الذهبية بالنسبة لمتتالية فيبوناتشي $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ ...، 3، 2، 1، 1.

a. جـد $\frac{a_n}{a_{n-1}}$ للحد الثاني إلى الحد الحادي عشر في متتالية فيبوناتشي.

b. صمم تمثيلاً بيانيًا للحدود الموجودة في الجزء **a**. افترض أن $n - 1$ هي الإحداثي x و $\frac{a_n}{a_{n-1}}$ هي الإحداثي y.

c. اعتمادًا على التمثيل البياني الموجود في الجزء **b**، هل تبدو هذه المتتالية تقاربية أم لا؟ إذا كانت كذلك، فصف الحد للمنازل العشرية الثلاثة. وإذا لم تكن كذلك، ففسر السبب.

d. في مستطيل ذهبي، تبلغ نسبة الطول إلى العرض 1.61803399 تقريبًا. وهذا ما يُسمى النسبة الذهبية. كيف تقارن بين حد المتتالية $\frac{a_n}{a_{n-1}}$ والنسبة الذهبية؟

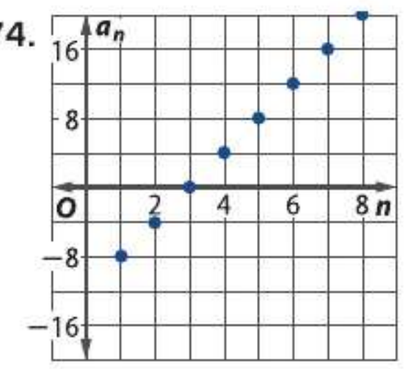
e. يشيع استخدام المستطيلات الذهبية في الفنون والمعمار. ومن أمثلة استخدام المستطيلات الذهبية في المعمار معبد بارثينون في اليونان.



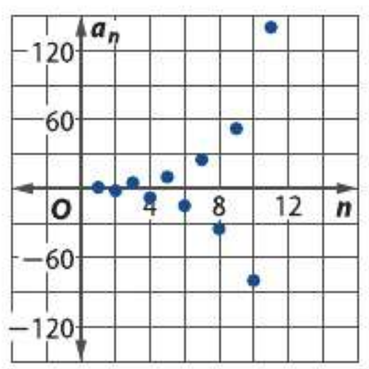
ابحث عن المستطيلات الذهبية واكتشف مثالين آخرين عن استخدام المستطيلات الذهبية في الفنون والمعمار.

حدد ما إذا كانت كل متتالية مما يلي *تقاربية* أم *تباعدية*.

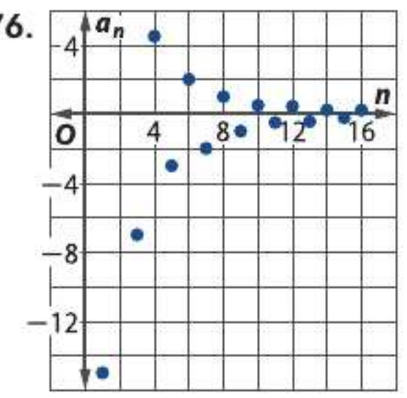
74.



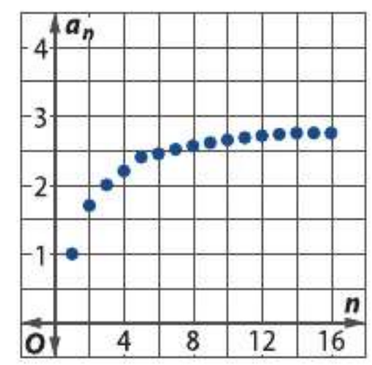
75.



76.



77.



اكتب صيغة واضحة لكل متتالية تُعرف بالتكرار.

78. $a_1 = 10;\ a_n = a_{n-1} + 5$

79. $a_1 = 1.25;\ a_n = a_{n-1} - 0.5$

80. $a_1 = 128;\ a_n = 0.5a_{n-1}$

81. التمثيلات المتعددة ستستكشف مجاميع المتسلسلات اللانهائية في هذه المسألة.

a. عدديًا احسب الحدود الخمسة الأولى في المتتالية اللانهائية $a_n = \frac{4}{10^n}$.

b. بيانيًا استخدم حاسبة التمثيل البياني لتمثيل $y = \frac{4}{10^x}$.

c. لفظيًا صف ما سيحدث لحدود متتالية مثل $n \to \infty$.

d. عدديًا جـد مجموع الحدود الخمسة الأولى، والحدود السبعة والحدود التسعة في المتسلسلة.

e. لفظيًا صف ما سيحدث للمجاميع الجزئية S_n عندما يزيد n.

f. لفظيًا صف مجموع الحدود n الأولى في المتسلسلة. فسّر استنتاجك.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

82. تحدٍ انظر في المتتالية التكرارية (الضمنية) أدناه.

$a_1 = 1, a_2 = 1, n \geq 3$ لـ $a_n = a_{n - a_{n-1}} + a_{n - a_{n-2}}$

a. جـد الحدود الثمانية الأولى في المتتالية.

b. صف أوجه التشابه والاختلاف بين هذه المتتالية والمتتاليات التكرارية (الضمنية) الأخرى في هذا الدرس.

83. مسألة غير محددة الإجابة اكتب متسلسلة تكرارية (الضمنية) أو صريحة تتميز بالخصائص التالية.

a. تقاربية إلى 0

b. تقاربية إلى 3

c. تباعدية

84. الكتابة في الرياضيات اذكر لماذا يجب ألا تكون المتتالية اللانهائية تقاربية فقط، بل تقاربية إلى 0 حتى يكون لها مجموع.

التبرير حدد ما إذا كانت كل عبارة من العبارات التالية صحيحة أم خطأ. اشرح استنتاجك.

85. $\sum_{n=1}^{5} (n^2 + 3n) = \sum_{n=1}^{5} n^2 + 3\sum_{n=1}^{5} n$

86. $\sum_{n=1}^{5} 3^n = \sum_{n=3}^{7} 3^{n-2}$

87. تحدٍ جـد مجموع الحدود الستين الأولى في المتتالية المذكورة أدناه. فسّر كيف حددت إجابتك.

...، 15، 17، 2، −15، −17،

حيث $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ لـ $n \geq 3$

88. الكتابة في الرياضيات صمم مخططًا يمكن استخدامه في وصف خطوات إيجاد المجموع الجزئي الثلاثمائة للمتتالية اللانهائية $a_n = 2n - 3$. ثم فسّر كيفية التعبير عن المجموع نفسه باستخدام الرمز سيجما.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مراجعة شاملة

مثّل كل عدد مركب بيانيًا على شبكة قطبية. ثم عبّر عنه في صورة متعامدة.

89. $2\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$

90. $2.5(\cos 1 + i\sin 1)$

91. $5(\cos 0 + i\sin 0)$

حدد الاختلاف المركزي ونوع القطع ومعادلة الدليل المعطاة من خلال كل معادلة قطبية.

92. $r = \frac{3}{2 - 0.5\cos\theta}$

93. $r = \frac{6}{1.2\sin\theta + 0.3}$

94. $r = \frac{1}{0.2 - 0.2\sin\theta}$

حدد ما إذا كانت النقاط واقعة على مستقيم واحد. واكتب نعم أو لا.

95. (−3, −1, 4), (3, 8, 1), (5, 12, 0)

96. (4, 8, 6), (0, 6, 12, (8, 10, 0)

97. (0, −4, 3), (8, −10, 5), (12, −13, 2)

98. (−7, 2, −1), (−9, 3, −4), (−5, 1, 2)

جـد طول القطعة المستقيمة ونقطة المنتصف لها باستخدام نقطتي طرفيها المبينتين.

99. (2, −15, 12), (1, −11, 15)

100. (−4, 2, 8), (9, 6, 0)

101. (7, 1, 5), (−2, −5, −11)

102. التوقيت يمكن تمثيل المسار الذي يتخذه طرف عقرب الساعات في ساعة حائط برسم دائرة باستخدام المعادلتين الوسيطيتين $x = 6\sin t$ و $y = 6\cos t$.

a. جـد فترة لـ t مقيسة بالراديان يمكن استخدامها في وصف حركة طرف العقرب بينما يتحرك من الساعة 12 ظهرًا إلى الساعة 12 ظهر اليوم التالي.

b. قم بمحاكاة الحركة الموصوفة في الجزء b من خلال تمثيل المعادلة في الوضع الوسيطي بيانيًا على حاسبة التمثيل البياني.

c. اكتب معادلة في صورة متعامدة تمثل حركة عقرب الساعات. جـد نصف قطر الدائرة التي يقطعها عقرب الساعات إذا كان x و y مقيسين بالسنتيمترات.



جـد القيمة الدقيقة لكل تعبير.

103. $\tan\frac{\pi}{12}$

104. $\sin 75^\circ$

105. $\cos 165^\circ$

جـد تحليل الكسر الجزئي لكل تعبير نسبي.

106. $\frac{10x^2 - 11x + 4}{2x^2 - 3x + 1}$

107. $\frac{1}{2x^2 + x}$

108. $\frac{x + 1}{x^3 + x}$

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

109. SAT/ACT الحد الأول من متتالية هو 5−. وكل حد تالٍ يأتي يكون أكبر بمقدار 6 من الحد السابق له مباشرة. فما قيمة الحد رقم 104؟

A 607
B 613
C 618
D 619
E 615

110. مراجعة جـد القيمة الدقيقة لـ $\cos 2\theta$ إذا كان $\sin\theta = -\frac{\sqrt{5}}{3}$ و $180^\circ < \theta < 270^\circ$.

F $-\frac{\sqrt{6}}{6}$
G $-\frac{4\sqrt{5}}{9}$
H $-\frac{\sqrt{30}}{6}$
J $-\frac{1}{9}$

111. الحدود الأربعة الأولى للمتتالية هي 144 و 72 و 36 و 18. فما الحد العاشر في المتتالية؟

A 0
B $\frac{9}{64}$
C $\frac{9}{32}$
D $\frac{9}{16}$

112. مراجعة ما عدد المكعبات بحجم 5 سم التي يمكن دسها داخل صندوق طوله 10 سنتيمترات، وعرضه 15 سنتيمترًا، وارتفاعه 5 سنتيمترات؟

F 5
G 6
H 15
J 20

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

9-3 المتتاليات والمتسلسلات الحسابية

السابق
- حددتَ ما إذا كانت المتتالية حسابية.

الحالي
1. إيجاد الحد النوني والأوساط الحسابية للمتتاليات الحسابية.
2. إيجاد مجاميع المتسلسلات الحسابية.

لماذا؟
- في القرن الثامن عشر، طلب معلم من فصل يضم طلابًا من المرحلة الابتدائية إيجاد مجموع أعداد العد من 1 إلى 100. وتوصل الطالب كارل جاوس إلى الإجابة الصحيحة في ثوانٍ معدودة مما أذهل المعلم. وعندما كبر جاوس، أصبح رياضيًا عظيمًا.

فقد حل هذه المسألة باستخدام المتسلسلات الحسابية.

المفردات الجديدة

أوساط حسابية
arithmetic means
متسلسلة series
متسلسلة حسابية
arithmetic series
مجموع جزئي partial sum
الرمز سيجما
sigma notation

ممارسات في الرياضيات

البحث عن التوافق في الاستنتاجات المتكررة والتعبير عن ذلك.









1 المتتاليات الحسابية في الدرس 9-1، استخدمت صيغة النقطة والميل لإيجاد حد معين لمتتالية حسابية. ومن الممكن وضع معادلة لأي حد لمتتالية حسابية باستخدام نفس العملية.

فكّر في المتتالية الحسابية $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ التي فيها الفرق المشترك هو d.

$(y - y_1) = m(x - x_1)$	صيغة النقطة والميل
$(a_n - a_1) = d(n - 1)$	$(x, y) = (n, a_n)$، $(x_1, y_1) = (1, a_1)$، و $m = d$
$a_n = a_1 + d(n - 1)$	أضف a_1 إلى الطرفين.

يمكنك استخدام هذه المعادلة لإيجاد أي حد في متتالية حسابية عند معرفتك للحد الأول والفرق المشترك.

المفهوم الأساسي الحد النوني لمتتالية حسابية

يتم الحصول على الحد نوني a_n لمتتالية حسابية، والتي يكون الحد الأول فيها هو a_1 والفرق المشترك هو d، من خلال الصيغة التالية، حيث n هو أي عدد طبيعي.

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

ستبرهن على هذه الصيغة في التدريب 80.

مثال 1 إيجاد الحد النوني

جـد الحد الثاني عشر للمتتالية الحسابية ... 9, 16, 23, 30,.

الخطوة 1 جـد الفرق المشترك.

$16 - 9 = 7$ $\quad 23 - 16 = 7$ $\quad 30 - 23 = 7$

إذًا، $d = 7$.

الخطوة 2 جـد الحد الثاني عشر.

$a_n = a_1 + (n - 1)d$	الحد *النوني* لمتتالية حسابية
$a_{12} = 9 + (12 - 1)(7)$	$a_1 = 9$، و $d = 7$، و $n = 12$
$= 9 + 77$ أو 86	بسّط.

تمرين موجّه

جـد الحد المشار إليه لكل متتالية حسابية.

1A. $a_1 = -4, d = 6, n = 9$

1B. a_{20} بالنسبة لـ $a_1 = 15, d = -8$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

إذا كان لديك بعض الحدود الخاصة بمتتالية حسابية ما، فيمكنك كتابة معادلة للحد النوني للمتتالية.

مثال 2 اكتب معادلات للحد النوني

اكتب معادلة للحد *النوني* لكل متتالية حسابية.

a. 5, −13, −31, ...

$d = -13 - 5$ أو -18؛ 5 هو الحد الأول.

$a_n = a_1 + (n-1)d$	الحد النوني لمتتالية حسابية
$a_n = 5 + (n-1)(-18)$	$a_1 = 5$ و $d = -18$
$a_n = 5 + (-18n + 18)$	خاصية التوزيع
$a_n = -18n + 23$	بسّط.

b. $a_5 = 19$, $d = 6$

أولاً، جد a_1.

$a_n = a_1 + (n-1)d$	الحد النوني لمتتالية حسابية
$19 = a_1 + (5-1)(6)$	$a_5 = 19$، و $n = 5$، و $d = 6$
$19 = a_1 + 24$	اضرب.
$-5 = a_1$	اطرح 24 من الطرفين.

ثم اكتب المعادلة.

$a_n = a_1 + (n-1)d$	الحد النوني لمتتالية حسابية
$a_n = -5 + (n-1)(6)$	$a_1 = -5$ و $d = 6$
$a_n = -5 + (6n - 6)$	خاصية التوزيع
$a_n = 6n - 11$	بسّط.

تمرين موجّه

2A. 12, 3, −6, ...

2B. $a_6 = 12$, $d = 8$

نصيحة دراسية

التحقق من الحلول تحقق من إجابتك مستخدمًا إياها لتحديد الحدود الثلاثة الأولى للمتتالية.

يكون لديك في بعض الأحيان حدين لمتتالية، لكنهما غير متتاليين في المتتالية. يُطلق على الحدود الواقعة بين أي حدين غير متتاليين **أوساط حسابية**. ويُمكن استخدامه لإيجاد الحدود المجهولة لمتتالية.

مثال 3 إيجاد الأوساط الحسابية

جد الأوساط الحسابية في المتتالية ... 22, ?, ?, ?, ?, ?, −8.

الخطوة 1 بما أن هناك أربعة حدود بين الحدين الأول والأخير المُعطيَين، فإن إجمالي الحدود يساوي 2 + 4 أو 6. إذًا $n = 6$.

الخطوة 2 جد قيمة d.

$a_n = a_1 + (n-1)d$	الحد النوني لمتتالية حسابية
$22 = -8 + (6-1)d$	$a_1 = -8$، و $a_6 = 22$، و $n = 6$
$30 = 5d$	خاصية التوزيع
$6 = d$	اقسم الطرفين على 5.

الخطوة 3 استخدم d لإيجاد الأوساط الحسابية الأربعة.

−8 (+6) **−2** (+6) **4** (+6) **10** (+6) **16** (+6) 22

الأوساط الحسابية هي 2−، و 4، و 10، و 16.

تمرين موجّه

3. جد الأوساط الحسابية الخمسة بين 18− و 36.

قراءة في الرياضيات

الوسط الحسابي متوسط عددين أو أكثر

الأوساط الحسابية الحدود الموجودة بين أي حدين غير متتابعين لمتتالية حسابية

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

2 المتسلسلة الحسابية

تتكوّن **المتسلسلة** عند جمع حدود متتالية. و **المتسلسلة الحسابية** هي عبارة عن مجموع حدود المتتالية الحسابية المرتبطة بها. ويُطلق على مجموع الحدود النونية **المجموع الجزئي** ويُرمز إليه بالرمز S_n.

المفهوم الأساسي المجموع الجزئي لمتسلسلة حسابية

الصيغة	معطى	مجموع S_n للحدود النونية الأولى يساوي:
عامة	a_1 و a_n	$S_n = n\left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right)$
بديلة	a_1 و d	$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$

يلزم أحيانًا تحديد a_1، أو a_n، أو n قبل إيجاد مجموع المتسلسلة الحسابية. وعند حدوث ذلك، استخدم صيغة الحد النوني.

مثال 4 استخدام صيغ المجموع

جـد مجموع $12 + 19 + 26 + \ldots + 180$.

الخطوة 1 $a_1 = 12$، و $a_n = 180$، و $d = 19 - 12$ أو 7.

يتعين إيجاد n قبل أن نتمكن من استخدام إحدى الصيغ.

$a_n = a_1 + (n-1)d$ الحد النوني لمتتالية حسابية

$180 = 12 + (n-1)(7)$ $a_n = 180$، و $a_1 = 12$، و $d = 7$

$168 = 7n - 7$ بسّط.

$25 = n$ جـد قيمة n.

الخطوة 2 استخدم أيًا من الصيغتين لإيجاد S_n.

$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$ صيغة المجموع

$S_{25} = \frac{25}{2}[2(12) + (25-1)(7)]$ $n = 25$، و $a_1 = 12$، و $d = 7$

$S_{25} = 12.5(192)$ or 2400 بسّط.

تمرين موجّه

جـد مجموع كل متسلسلة حسابية.

4A. $2 + 4 + 6 + \ldots + 100$

4B. $n = 16,\ a_n = 240,\ d = 8.$

يمكنك استخدام صيغة المجموع لإيجاد حدود المتسلسلات.

مثال 5 إيجاد الحدود الثلاثة الأولى

جـد الحدود الثلاثة الأولى للمتسلسلة الحسابية التي فيها $a_1 = 7$، و $a_n = 79$، و $S_n = 430$.

الخطوة 1 جـد n.

$S_n = n\left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right)$ صيغة المجموع

$430 = n\left(\frac{7 + 79}{2}\right)$ $S_n = 430$، و $a_1 = 7$، و $a_n = 79$

$430 = n(43)$ بسّط.

$10 = n$ اقسم الطرفين على 43.

انتبه!

الفرق المشترك احرص ألا يختلط عليك الأمر في علامة الفرق المشترك بالمتتالية الحسابية. تحقق أن القاعدة تنتج بالفعل حدود المتتالية.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

الخطوة 2 جـــد قيمة d.

$a_n = a_1 + (n-1)d$ الحد النوني لمتتالية حسابية

$79 = 7 + (10-1)d$ $a_n = 79$، و $a_1 = 7$، و $n = 10$

$72 = 9d$ اطرح 7 من الطرفين.

$8 = d$ اقسم الطرفين على 9.

الخطوة 3 استخدم d لتحديد a_2 و a_3.

$a_2 = 7 + 8$ أو 15 $a_3 = 15 + 8$ أو 23

الحدود الثلاثة الأولى هي 7 و 15 و 23.

تمرين موجّه

جـــد الحدود الثلاثة الأولى لكل متسلسلة حسابية.

5A. $S_n = 120,\ n = 8,\ a_n = 36$

5B. $a_1 = -24,\ a_n = 288,\ S_n = 5280$

يمكن كتابة مجموع المتسلسلة باختصار عن طريق استخدام **الرمز سيجما**.

المفهوم الأساسي الرمز سيجما

الرموز

$$\sum_{k=1}^{n} f(k)$$

$f(k)$: صيغة حدود المتسلسلة

$k = 1$: أول قيمة لـ k

n: آخر قيمة لـ k

مثال

$$\sum_{k=1}^{12}(4k+2) = [4(1)+2] + [4(2)+2] + [4(3)+2] + \cdots + [4(12)+2]$$
$$= 6 + 10 + 14 + \cdots + 50$$

قراءة في الرياضيات

الرمز سيجما يأتي الاسم من الحرف اليوناني سيجما، والذي يُستخدَم في الرمز.

مثال 6 على الاختبار المعياري استخدام الرمز سيجما

جـــد قيمة $\sum_{k=4}^{18}(6k-1)$.

A 846 **B** 910 **C** 975 **D** 1008

قراءة فقرة الاختبار

يتوجب عليك إيجاد مجموع المتسلسلات. جـــد قيمة a_1، و a_n، و n.

حُل فقرة الاختبار

هناك $18 - 4 + 1$ أو 15 حدًا. إذًا $n = 15$.

$a_1 = 6(4) - 1$ أو 23 $a_n = 6(18) - 1$ أو 107

جـــد المجموع.

$S_n = n\left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right)$ صيغة المجموع

$S_{15} = 15\left(\frac{23 + 107}{2}\right)$ $n = 15$، و $a_1 = 23$، و $a_n = 107$

$S_{15} = 15(65) = 975$ الإجابة الصحيحة هي C.

نصيحة عند حل الاختبار

المثابرة

أحيانًا يلزم تقسيم مسألة ما إلى أجزاء، وحل كل جزء منفردًا، ثم دمج حلول الأجزاء.

تمرين موجّه

6. جـــد قيمة $\sum_{m=9}^{21}(5m+6)$.

F 972 **G** 1053 **H** 1281 **J** 1701

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

التحقق من فهمك

مثال 1 **جـد الحد المشار إليه لكل متتالية حسابية.**

1. $a_1 = 14,\ d = 9,\ n = 11$

2. a_{18} بالنسبة لـ 12, 25, 38, ...

مثال 2 **اكتب معادلة للحد *النوني* لكل متتالية حسابية.**

3. 13, 19, 25, ...

4. $a_5 = -12,\ d = -4$

مثال 3 **جـد الأوساط الحسابية في كل متتالية.**

5. 6, ?, ?, ?, 42

6. −4, ?, ?, ?, 8

مثال 4 **جـد مجموع كل متسلسلة حسابية.**

7. الأعداد الطبيعية الخمسين الأولى

8. $4 + 8 + 12 + \cdots + 200$

9. $a_1 = 12,\ a_n = 188,\ d = 4$

10. $a_n = 145,\ d = 5,\ n = 21$

مثال 5 **جـد الحدود الثلاثة الأولى لكل متسلسلة حسابية.**

11. $a_1 = 8,\ a_n = 100,\ S_n = 1296$

12. $n = 18,\ a_n = 112,\ S_n = 1098$

مثال 6 **13. اختيار من متعدد** جـد قيمة $\sum_{k=1}^{12} (3k + 9)$.

A 45

B 78

C 342

D 410

التدريب وحل المسائل

مثال 1 **جـد الحد المشار إليه في كل متتالية حسابية.**

14. $a_1 = -18,\ d = 12,\ n = 16$

15. $a_1 = -12,\ n = 66,\ d = 4$

16. $a_1 = 9,\ n = 24,\ d = -6$

17. a_{15} بالنسبة لـ −5, −12, −19, ...

18. a_{10} بالنسبة لـ −1, 1, 3, ...

19. a_{24} بالنسبة لـ 8.25, 8.5, 8.75, ...

مثال 2 **اكتب معادلة للحد *النوني* لكل متتالية حسابية.**

20. 24, 35, 46, ...

21. 31, 17, 3, ...

22. $a_9 = 45,\ d = -3$

23. $a_7 = 21,\ d = 5$

24. $a_4 = 12,\ d = 0.25$

25. $a_5 = 1.5,\ d = 4.5$

26. 9, 2, −5, ...

27. $a_6 = 22,\ d = 9$

28. $a_8 = -8,\ d = -2$

29. $a_{15} = 7,\ d = \frac{2}{3}$

30. −12, −17, −22, ...

31. $a_3 = -\frac{4}{5},\ d = \frac{1}{2}$

32. البنية يبلغ متوسط إجمالي ما يحرزه جمال لكل مباراة في بطولة البولينج بهذا الموسم 123 قارورة. ولكنه يتلقى دروسًا في البولينج حتى يزيد متوسط ما يحرزه في كل موسم بمقدار 8 قارورات.

a. اكتب معادلة لتمثيل الحد النوني للمتتالية.

b. إذا استمر النمط هكذا، فخلال أي موسم سيحرز جمال متوسط 187 قارورة في المباراة؟

c. هل من المعقول أن يستمر هذا النمط إلى ما لا نهاية؟ اشرح.

مثال 3 **جـد الأوساط الحسابية في كل متتالية.**

33. 24, ?, ?, ?, ?, −1

34. −6, ?, ?, ?, ?, 49

35. −28, ?, ?, ?, ?, 7

36. 84, ?, ?, ?, ?, 39

37. −12, ?, ?, ?, ?, ?, −66

38. 182, ?, ?, ?, ?, ?, 104

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

مثال 4 **جــد مجموع كل متسلسلة حسابية.**

39. أول 100 عدد طبيعي زوجي

40. أول 200 عدد طبيعي فردي

41. أول 100 عدد طبيعي فردي

42. أول 300 عدد طبيعي زوجي

43. $-18 + (-15) + (-12) + \cdots + 66$

44. $-24 + (-18) + (-12) + \cdots + 72$

45. $a_1 = -16,\ d = 6,\ n = 24$

46. $n = 19,\ a_n = 154,\ d = 8$

47. المسابقات تبدأ الجوائز التي يتم منحها في مسابقة أسبوعية على الراديو بمبلغ قيمته AED 150 ويزداد بمقدار AED 50 لكل أسبوع يبقى فيه المتنافس. إذا استمرت المسابقة لمدة 11 أسبوعًا، فما إجمالي المبلغ الذي سيحصل عليه الرابح في النهاية؟

مثال 5 **جــد الحدود الثلاثة الأولى لكل متسلسلة حسابية.**

48. $n = 32,\ a_n = -86,\ S_n = 224$

49. $a_1 = 48,\ a_n = 180,\ S_n = 1368$

50. $a_1 = 3,\ a_n = 66,\ S_n = 759$

51. $n = 28,\ a_n = 228,\ S_n = 2982$

52. $a_1 = -72,\ a_n = 453,\ S_n = 6858$

53. $n = 30,\ a_n = 362,\ S_n = 4770$

54. $a_1 = 19,\ n = 44,\ S_n = 9350$

55. $a_1 = -33,\ n = 36,\ S_n = 6372$

56. الجوائز تمنح محطة راديو جائزة يصل الإجمالي فيها إلى AED 8500 نظير عشر ساعات. وتزيد الجائزة كل ساعة بمقدار AED 100. جــد قيمتي الجائزة الأولى والجائزة الأخيرة.

مثال 6 **جــد مجموع كل متسلسلة حسابية.**

57. $\sum_{k=1}^{16} (4k - 2)$

58. $\sum_{k=4}^{13} (4k + 1)$

59. $\sum_{k=5}^{16} (2k + 6)$

60. $\sum_{k=0}^{12} (-3k + 2)$

61. المعرفة المالية اقترضت نجلاء بعض المال من والديها. ووافقت على سداد AED 50 بنهاية الشهر الأول وإضافة AED 25 في كل شهر آخر لمدة 12 شهرًا. ما إجمالي المبلغ الذي ستكون قد سددته بعد مرور 12 شهرًا؟

62. الجاذبية إذا وقع جسم في سقوط حر مع إهمال مقاومة الهواء، فإنه يسقط بمعدل 16 m في الثانية الأولى، ويزيد بمقدار 48 m في الثانية التالية، و 80 m في الثانية الثالثة. ما إجمالي الأمتار التي سيقطعها هذا الجسم في سقوطه بعد مرور 10 ثوانٍ؟

استخدم المعلومات المعطاة لكتابة معادلة تمثل الحد *النوني* في كل متتالية حسابية

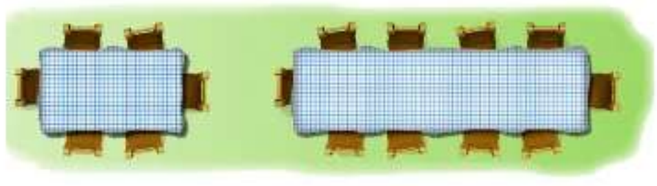
63. الحد رقم 100 في المتتالية هو 245. والفرق المشترك يساوي 13.

64. الحد الحادي عشر في المتتالية هو 78. والفرق المشترك يساوي 9−.

65. الحد السادس في المتتالية هو 34−. الحد رقم 23 في المتتالية هو 119.

66. الحد رقم 25 في المتتالية هو 121. الحد رقم 80 في المتتالية هو 506.

67. تمثيل النماذج غالبًا ما يتم وضع الطاولات المستطيلة في قاعة الاستقبال بلصق طرف كل طاولة بالأخرى. يوضّح الرسمان التخطيطيان التاليان عدد الأشخاص الذين يُمكنهم الجلوس في كل ترتيب للطاولات.



a. قم بإعداد رسومات لإيجاد الأعداد الثلاثة التالية عند إضافة الطاولات بمعدل واحدة في المرة إلى الطاولات المرتبة.

b. اكتب معادلة لتمثيل العدد *النوني* في هذا النمط.

c. هل من الممكن الحصول على مقاعد تكفي بالضبط 100 شخص في هذه الطاولات المرتبة؟ اشرح.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

68. الأداء هناك شركة ما تدفع لموظفيها وفقًا لمعدلات أدائهم. تقاضت بدرية سعرًا موحدًا يبلغ AED 800 لكل أسبوع بالإضافة إلى AED 96 نظير كل وحدة تنجزها. إذا تقاضت AED 2,048 في أسبوع واحد، فما عدد الوحدات التي أنجزتها؟

69. الراتب يتقاضى طارق في الوقت الراهن AED 112,000 في العام. إذا كان طارق يتوقع زيادة راتبه كل عام بقيمة AED 16,000، فبعد كم عام سيصبح راتبه AED 400,000 في العام؟

70. الألعاب الرياضية أثناء التدريب لخوض سباق الضاحية، تخطط سندية للجري 3 km يوميًا في الأسبوع الأول، ثم زيادة المسافة بمقدار0.5 km في كل من الأسابيع التالية.

a. اكتب معادلة لتمثيل الحد *النوني* للمتتالية.

b. إذا استمر النمط هكذا، فخلال أي أسبوع ستجري 10 km في اليوم؟

c. هل من المعقول أن يستمر هذا النمط إلى ما لا نهاية؟ اشرح.

71. التمثيلات المتعددة تأمل $\sum_{k=1}^{x}(2k+2)$.

a. جدوليًا اصنع جدولاً للمجاميع الجزئية للمتسلسلة بالنسبة لـ $1 \le k \le 10$.

b. بيانيًا مثّل بيانيًا (k، المجموع الجزئي).

c. بيانيًا مثّل بيانيًا $f(x) = x^2 + 3x$ على نفس الشبكة.

d. لفظيًا ماذا تلاحظ بشأن التمثيلين البيانيين؟

e. تحليليًا ما الاستنتاجات التي يمكنك التوصل إليها بشأن العلاقة بين الدوال التربيعية ومجموع المتسلسلة الحسابية؟

f. جبريًا جـد المتسلسلة الحسابية التي ترتبط بـ $g(x) = x^2 + 8x$.

جـد قيمة x.

72. $\sum_{k=3}^{x}(6k-5) = 928$

73. $\sum_{k=5}^{x}(8k+2) = 1032$

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

74. النقد يحدد عيسى وجاسم صيغة الحد *النوني* للمتتالية ... ,16 ,7 ,2− ,11−. هل أحدهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.

عيسى	جاسم
$d = 16 - 7$ or 9, $a_1 = -11$ $a_n = -11 + (n-1)9$ $= 9n - 20$	$d = 16 - 7$ or 9, $a_1 = -11$ $a_n = 9n - 11$

75. التبرير إذا كان a هو الحد الثالث في متتالية حسابية، و b هو الحد الخامس، و c هو الحد الحادي عشر. فعبّر عن c بدلالة a و b.

76. تحدٍ توجد ثلاثة أوساط حسابية بين a و b في متتالية حسابية. ومتوسط الأوساط الحسابية يساوي 16. ما متوسط a و b؟

77. تحدٍ جـد S_n حيث إن $(x+y) + (x+2y) + (x+3y) + \ldots$.

78. مسألة غير محددة الإجابة اكتب متسلسلة حسابية بها 8 حدود ومجموع يبلغ 324.

79. الكتابة في الرياضيات قارن وقارن بين المتتاليات والمتسلسلات الحسابية.

80. البرهان بَرهِن الصيغة المتعلقة بالحد *النوني* لمتتالية حسابية.

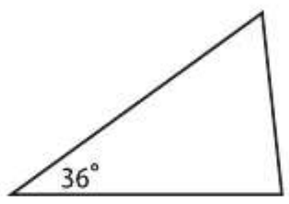
81. البرهان اشتق صيغة مجموع لا تشمل a_1.

82. البرهان اشتق صيغة المجموع البديلة باستخدام صيغة المجموع العامة.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

تدريب على الاختبار المعياري

83. SAT/ACT تُكوّن قياسات الزوايا الخاصة بأحد المثلثات متتالية حسابية. إذا كان قياس الزاوية الأصغر هو°36. فما قياس الزاوية الأكبر؟



A 54°
B 75°
C 84°
D 90°
E 97°

84. تبلغ مساحة مثلث ما $\frac{1}{2}q^2 - 8$ ويبلغ الارتفاع $q + 4$. أي تعبير يصف قاعدة المثلث على نحو أدق؟

F $(q + 1)$
G $(q + 2)$
H $(q - 3)$
J $(q - 4)$.

85. التعبير $1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$ يساوي

A $\sum_{k=1}^{3} k^{\frac{1}{k}}$
B $\sum_{k=1}^{3} k^{k}$
C $\sum_{k=1}^{3} k^{-k}$
D $\sum_{k=1}^{3} \sqrt{k}$

86. الإجابة المختصرة يستطيع أحمد كتابة مقال يتألف من 200 كلمة خلال 6 ساعات. ويُمكن لحسام كتابة نفس المقال خلال $4\frac{1}{2}$ ساعات. إذا عملا معًا، ما إجمالي عدد الساعات التي سيمضيانها في كتابة المقال؟

مراجعة شاملة

حدد ما إذا كانت كل متتالية حسابية أم لا. اكتب نعم أو لا. (الدرس 1-9)

87. $-6, 4, 14, 24, \ldots$

88. $2, \frac{7}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{5}, \ldots$

89. $10, 8, 5, 1, \ldots$

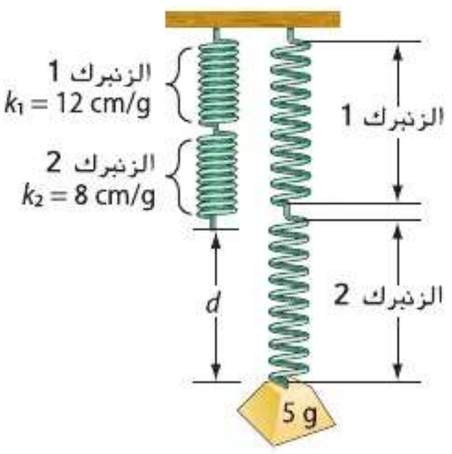
حُـلّ كل نظام من أنظمة المتباينات باستخدام التمثيل البياني.

90. $x + 2y > 1$
$x^2 + y^2 \leq 25$

91. $x + y \leq 2$
$4x^2 - y^2 \geq 4$

92. $x^2 + y^2 \geq 4$
$4y^2 + 9x^2 \leq 36$

93. الفيزياء ترتبط المسافة التي يتمددها الزنبرك بالكتلة المُعلقَّة به. وُرمز إلى ذلك بالمعادلة $d = km$، حيث d هو المسافة، و m هو الكتلة، و k هو ثابت الزنبرك. عند ربط زنبركين الثابتين الخاصين بهما هما k_1 و k_2 بسلسلة، فإنه يُمكن إيجاد ثابت الزنبرك k باستخدام المعادلة $\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$.



a. إذا كان هناك زنبرك بثابت يبلغ 12 cm لكل جرام معلق في سلسلة مع زنبرك آخر بثابت يبلغ 8 cm لكل جرام، فجـــد ثابت الزنبرك الناتج.

b. إذا كان هناك جسم يزن 5 g معلق بسلسلة الزنبركين، فلأي مدى سيتمدد الزنبركان؟ وهل هذه الإجابة معقولة في هذا السياق؟

مـثِّـل كل دالة بيانيًا. واذكر المجال والمدى.

94. $f(x) = \frac{2}{3}(2^x)$

95. $f(x) = 4^x + 3$

96. $f(x) = 2\left(\frac{1}{3}\right)^x - 1$

مراجعة المهارات

حُـلّ كل معادلة. قرّب لأقرب جزء من عشرة آلاف.

97. $5^x = 52$

98. $4^{3p} = 10$

99. $3^{n+2} = 14.5$

100. $16^{d-4} = 3^{3-d}$

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

9-4 المتتاليات والمتسلسلات الهندسية

السابق

- حددتَ ما إذا كانت المتتالية هندسية أم لا.

الحالي

1 إيجاد الحد النوني والأوساط الهندسية للمتتاليات الهندسية.

2 إيجاد مجاميع المتسلسلات الهندسية.

لماذا؟

- رأى حسن كتابًا جديدًا في المكتبة. وأرسل رسالة إلكترونية برابط للموقع الإلكتروني لمؤلف الكتاب إلى خمسة من أصدقائه. ثم أعاد أصدقاؤه توجيه الرابط بنفس النمط. كم عدد الأشخاص الذين سيتلقون الرابط في الجولة الثامنة من الرسائل الإلكترونية؟



المفردات الجديدة

أوساط هندسية
geometric means
متسلسلة هندسية
geometric series

ممارسات في الرياضيات

البحث عن التوافق في الاستنتاجات المتكررة والتعبير عن ذلك.

1 المتتاليات الهندسية كما هو الحال في المتتاليات الحسابية، هناك صيغة للحد *النوني* للمتتالية الهندسية. ويُمكن استخدام هذه الصيغة لتحديد أي حد من المتتالية.

المفهوم الأساسي *الحد النوني* لمتتالية هندسية

يتم الحصول على الحد *النوني* a_n لمتتالية هندسية يكون الحد الأول فيها هو a_1 والنسبة المشتركة هي r، من خلال الصيغة التالية، حيث n هو أي عدد طبيعي.

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

ستبرهن على هذه الصيغة في التدريب 68.

مثال 1 من الحياة اليومية إيجاد الحد النوني

الموسيقى **إذا استمر النمط، فكم عدد رسائل البريد الإلكتروني التي ستُرسل في الجولة الثامنة؟**

الاستيعاب نحتاج إلى تحديد عدد رسائل البريد الإلكتروني المعاد إرسالها في الجولة الثامنة. وتم إرسال خمسة رسائل بريد إلكتروني في الجولة الأولى. وكل مستلم من المستلمين الخمسة أرسل خمس رسائل في الجولة الثانية، وهكذا.

التخطيط هذه متتالية هندسية، والنسبة المشتركة هي 5. استخدم الصيغة للحد *النوني* للمتتالية الهندسية.

الحل

$a_n = a_1 r^{n-1}$	الحد النوني للمتتالية الهندسية
$a_8 = 5(5)^{8-1}$	$a_1 = 5$، و $r = 5$، و $n = 8$
$a_8 = 5(78{,}125)$ 390,625	$78{,}125 = 5^7$

التحقق اكتب أول ثمانية حدود من خلال الضرب في النسبة المشتركة.

5, 25, 125, 625, 3125, 15,625, 78,125, 390,625

سيكون هناك 390,625 رسالة بريد إلكتروني يتم إرسالها في الجولة الثامنة.

تمرين موجّه

1. **الرسائل الإلكترونية** استلمت سمية دعابة في رسالة بريد إلكتروني تطلب منها أن تعيد إرسالها إلى أربعة من أصدقائها. وبالفعل أعادت إرسالها، ثم أرسلتها كل صديقة من صديقاتها إلى أربعة آخرين من الأصدقاء، وهكذا. وإذا استمر هذا النمط، فكم عدد الأشخاص الذين سيستلمون هذه الرسالة الإلكترونية في الجولة التاسعة من إعادة الإرسال؟

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

إذا أعطيت بعض الحدود الخاصة بمتتالية هندسية ما، فيمكنك تحديد صيغة لإيجاد الحد *النوني* للمتتالية.

مثال 2 كتابة صيغة الحد النوني

اكتب صيغة الحد *النوني* لكل متتالية هندسية.

a. 0.5, 2, 8, 32, ...

$r = 8 \div 2$ أو 4؛ 0.5 هو الحد الأول.

$a_n = a_1 r^{n-1}$ الحد *النوني* لمتتالية هندسية

$a_n = 0.5(4)^{n-1}$ $r = 4$ و $a_1 = 0.5$

b. $a_4 = 5$ و $r = 6$

الخطوة 1 جـد a_1.

$a_n = a_1 r^{n-1}$ الحد *النوني* لمتتالية هندسية

$5 = a_1(6^{4-1})$ $n = 4$، و $r = 6$، و $a_n = 5$

$5 = a_1(216)$ جـد قيمة الأس.

$\frac{5}{216} = a_1$ اقسم الطرفين على 216.

الخطوة 2 اكتب الصيغة.

$a_n = a_1 r^{n-1}$ الحد *النوني* لمتتالية هندسية

$a_n = \frac{5}{216}(6)^{n-1}$ $r = 6$ و $a_1 = \frac{5}{216}$

تمرين موجّه

اكتب صيغة الحد *النوني* لكل متتالية هندسية.

2A. $-0.25, 2, -16, 128, \ldots$ **2B.** $a_3 = 16, r = 4$

الربط بتاريخ الرياضيات

أرخيتاس (347–428 قبل الميلاد.) تمت دراسة المتتاليات الهندسية أو المتعاقبات الهندسية لأول مرة بواسطة عالم الرياضيات اليوناني أرخيتاس. وجاءت دراساته لهذه المتتاليات بسبب شغفه بالموسيقى والأوكتافات الموسيقية.

كما هو الحال في الأوساط الحسابية، فإن **الأوساط الهندسية** هي الحدود الموجودة بين حدين غير متعاقبين لمتتالية هندسية. ويمكن استخدام النسبة المشتركة r لإيجاد الأوساط الهندسية.

مثال 3 إيجاد الأوساط الهندسية

جـد ثلاثة أوساط هندسية بين 2 و 1250.

الخطوة 1 بما أن هناك ثلاثة حدود بين الحد الأول والحد الأخير، فهناك $2 + 3$ أو 5 حدود إجمالية، إذًا $n = 5$.

الخطوة 2 جـد قيمة r.

$a_n = a_1 r^{n-1}$ الحد *النوني* لمتتالية هندسية

$1250 = 2r^{5-1}$ $n = 5$، و $a_1 = 2$، و $a_n = 1250$

$625 = r^4$ اقسم الطرفين على 2.

$\pm 5 = r$ جـد الجذر الرابع للطرفين.

الخطوة 3 استخدم r لإيجاد الأوساط الحسابية الأربعة.

2 $\xrightarrow{\times -5}$ -10 $\xrightarrow{\times -5}$ 50 $\xrightarrow{\times -5}$ -250 $\xrightarrow{\times -5}$ 1250 أو 2 $\xrightarrow{\times 5}$ 10 $\xrightarrow{\times 5}$ 50 $\xrightarrow{\times 5}$ 250 $\xrightarrow{\times 5}$ 1250

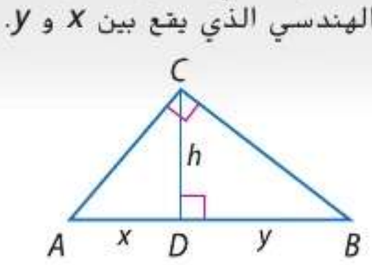
الأوساط الهندسية هي 10 و 50 و 250 أو -10 و 50 و -250.

تمرين موجّه

3. جـد الأوساط الهندسية الأربعة التي تقع بين 0.5 و 512.

قراءة في الرياضيات

الأوساط الهندسية يمكن تمثيل الوسط الهندسي بطريقة هندسية أيضًا. في الشكل التالي، يمثل h الوسيط الهندسي الذي يقع بين x و y.



حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

2 المتسلسلة الهندسية

المتسلسلة الهندسية هي مجموع حدود المتتالية الهندسية. وُرمز إلى مجموع الحدود *النونية* الأولى في المتسلسلة بالرمز S_n. يُمكنك استخدام الصيغ التالية لإيجاد المجموع الجزئي S_n للحدود *النونية* الأولى للمتسلسلة الهندسية.

المفهوم الأساسي المجموع الجزئي لمتسلسلة هندسية

المعطيات	مجموع S_n للحدود النونية الأولى يساوي:
a_1 و n	$S_n = \frac{a_1 - a_1 r^n}{1 - r}, r \neq 1$
a_1 و a_n	$S_n = \frac{a_1 - a_n r}{1 - r}, r \neq 1$

مثال 4 من الحياة اليومية إيجاد مجموع متسلسلة هندسية

موسيقى **راجع بداية الدرس. إذا استمر النمط، فما إجمالي عدد رسائل البريد الإلكتروني المرسلة في الجولات الثماني؟**

يتم إرسال خمس رسائل بريد إلكتروني في الجولة الأولى وهناك ثماني جولات من عملية إرسال رسائل البريد الإلكتروني.

إذًا $a_1 = 5$، و $r = 5$، و $n = 8$.

$S_n = \frac{a_1 - a_1 r^n}{1 - r}$ صيغة المجموع

$S_8 = \frac{5 - 5 \cdot 5^8}{1 - 5}$ $a_1 = 5$، و $r = 5$، و $n = 8$

$S_8 = \frac{-1{,}953{,}120}{-4}$ بسّط البسط والمقام.

$S_8 = 488{,}280$ اقسم.

سيكون هناك 488,280 رسالة بريد إلكتروني يتم إرسالها بعد الجولات الثماني.

تمرين موجّه

جـد مجموع كل متسلسلة هندسية.

4A. $a_1 = 2,\ n = 10,\ r = 3$

4B. $a_1 = 2000,\ a_n = 125,\ r = \frac{1}{2}$

كما هو الحال مع المتسلسلة الحسابية، يُمكن استخدام الرمز سيجما أيضًا لتمثيل المتسلسلة الهندسية.

مثال 5 المجموع في الرمز سيجما

جـد قيمة $\sum_{k=3}^{10} 4(2)^{k-1}$.

جـد قيم a_1، و r، و n. في الحد الأول، $k = 3$ و $a_1 = 4 \cdot 2^{3-1}$ أو 16. قاعدة الدالة الأسية هي r، إذًا $r = 2$. هناك $10 - 3 + 1$ أو 8 حدود، إذًا $n = 8$.

$S_n = \frac{a_1 - a_1 r^n}{1 - r}$ صيغة المجموع

$= \frac{16 - 16(2)^8}{1 - 2}$ $a_1 = 16$، و $r = 2$، و $n = 8$

$= 4080$ استخدم الحاسبة.

انتبه!

الرمز سيجما لاحظ أنه يُطلب منك في المثال 5 ايجاد قيمة المجموع من الحد الثالث إلى الحد العاشر.

تمرين موجّه

جـد مجموع كل مما يلي.

5A. $\sum_{k=4}^{12} \frac{1}{4} \cdot 3^{k-1}$

5B. $\sum_{k=2}^{9} \frac{2}{3} \cdot 4^{k-1}$

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

يمكن استخدام الصيغة المتعلقة بمجموع المتسلسلة الهندسية للمساعدة في إيجاد حد معين للمتسلسلة.

مثال 6 إيجاد الحد الأول للمتسلسلة

جـد قيمة a_1 في متسلسلة هندسية فيها $S_n = 13{,}116$، و $n = 7$، و $r = 3$.

$$S_n = \frac{a_1 - a_1 r^n}{1 - r}$$ صيغة المجموع

$$13{,}116 = \frac{a_1 - a_1(3^7)}{1 - 3}$$ $S_n = 13{,}116$، و $r = 3$، و $n = 7$

$$13{,}116 = \frac{a_1(1 - 3^7)}{1 - 3}$$ خاصية التوزيع

$$13{,}116 = \frac{-2186a_1}{-2}$$ اطرح.

$$13{,}116 = 1093a_1$$ بسّط.

$$12 = a_1$$ اقسم الطرفين على 1093.

تمرين موجّه

6. جـد قيمة a_1 في متسلسلة هندسية فيها $S_n = -26{,}240$، و $n = 8$، و $r = -3$.

التحقق من فهمك

مثال 1

1. الانتظام يرسم إسماعيل شجرة عائلة لجده. وقد تمكن من تتبع العديد من الأجيال. وإذا استطاع إسماعيل تتبع 10 أجيال سابقة من عائلته. بدءًا من والديه. فكم عدد الأسلاف الذين سيتمكن من تتبعهم؟

مثال 2 **اكتب صيغة للحد *النوني* لكل متتالية هندسية.**

2. 2, 4, 8, ...

3. 18, 6, 2, ...

4. $-4, 16, -64, \ldots$

5. $a_2 = 4, r = 3$

6. $a_6 = \frac{1}{8}, r = \frac{3}{4}$

7. $a_2 = -96, r = -8$

مثال 3 **جـد الأوساط الهندسية لكل متتالية.**

8. 0.25, ?, ?, ?, 64

9. 0.20, ?, ?, ?, 125

مثال 4

10. الألعاب ترتب منى بعض صفوف قطع الدومينو بحيث عندما تضرب أول قطعة منها، تتساقط كل قطعة على قطعتين أخريين عندما تسقط. وإذا كانت هناك عشرة صفوف، فكم عدد قطع الدومينو التي ستستخدمها منى؟

مثال 5 **جـد مجموع كل متسلسلة هندسية.**

11. $\sum_{k=1}^{6} 3(4)^{k-1}$

12. $\sum_{k=1}^{8} 4\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$

مثال 6 **جـد a_1 في كل متسلسلة هندسية موضحة.**

13. $S_n = 85\frac{5}{16}, r = 4, n = 6$

14. $S_n = 91\frac{1}{12}, r = 3, n = 7$

15. $S_n = 1020, a_n = 4, r = \frac{1}{2}$

16. $S_n = 121\frac{1}{3}, a_n = \frac{1}{3}, r = \frac{1}{3}$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التدريب وحل المسائل

يوجد تدريب إضافي في الصفحة R10.

مثال 1

17. الطقس تسببت الأمطار الغزيرة في مدينة بلال بارتفاع منسوب النهر. وقد ارتفع النهر □ cm في اليوم الأول، وكل يوم بعد ذلك كان يرتفع بمثلي مقدار اليوم السابق. فكم ارتفع منسوب النهر خلال خمسة أيام؟

جـد قيمة a_n لكل متتالية هندسية.

18. $a_1 = 2400, r = \frac{1}{4}, n = 7$

19. $a_1 = 800, r = \frac{1}{2}, n = 6$

20. $a_1 = \frac{2}{9}, r = 3, n = 7$

21. $a_1 = -4, r = -2, n = 8$

22. الأحياء تنمو بكتيريا محددة بمعدل 3 خلايا كل دقيقتين. وإذا كان هناك 260 خلية في بادئ الأمر، فكم سيكون عددها بعد 21 دقيقة؟

مثال 2

اكتب صيغة الحد *النوني* لكل متتالية هندسية.

23. $-3, 6, -12, \ldots$

24. $288, -96, 32, \ldots$

25. $-1, 1, -1, \ldots$

26. $\frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \frac{4}{27}, \ldots$

27. $8, 2, \frac{1}{2}, \ldots$

28. $12, -16, \frac{64}{3}, \ldots$

29. $a_3 = 28, r = 2$

30. $a_4 = -8, r = 0.5$

31. $a_6 = 0.5, r = 6$

32. $a_3 = 8, r = \frac{1}{2}$

33. $a_4 = 24, r = \frac{1}{3}$

34. $a_4 = 80, r = 4$

مثال 3

جـد الأوساط الهندسية لكل متتالية.

35. $810, \underline{?}, \underline{?}, \underline{?}, 10$

36. $640, \underline{?}, \underline{?}, \underline{?}, 2.5$

37. $\frac{7}{2}, \underline{?}, \underline{?}, \underline{?}, \frac{56}{81}$

38. $\frac{729}{64}, \underline{?}, \underline{?}, \underline{?}, \frac{324}{9}$

39. جـد وسطين هندسيين بين 3 و 375.

40. جـد وسطين هندسيين بين 16 و -2.

مثال 4

41. المثابرة يمكن لنظام ترشيح مياه أن يزيل 70% من الملوثات في كل مرة يتم تمرير عينة من المياه من خلاله. وإذا تم تمرير نفس كمية المياه عبر النظام أربع مرات، فكم النسبة المئوية للملوثات الأصلية التي ستُزال من عينة المياه؟

جـد مجموع كل متسلسلة هندسية.

42. $a_1 = 36, r = \frac{1}{3}, n = 8$

43. $a_1 = 16, r = \frac{1}{2}, n = 9$

44. $a_1 = 240, r = \frac{3}{4}, n = 7$

45. $a_1 = 360, r = \frac{4}{3}, n = 8$

46. المكانس الكهربائية يُقال إن المكنسة الكهربائية تلتقط 80% من الأتربة والأوساخ في كل مرة يتم تمريرها فوق السجاد. ومع افتراض صحة ذلك، فما النسبة المئوية للكمية الأصلية من الأوساخ التي سيتم التقاطها وإزالتها بعد تمرير المكنسة فوق السجاد سبع مرات؟

مثال 5

جـد مجموع كل متسلسلة هندسية.

47. $\sum_{k=1}^{7} 4(-3)^{k-1}$

48. $\sum_{k=1}^{8} (-3)(-2)^{k-1}$

49. $\sum_{k=1}^{9} (-1)(4)^{k-1}$

50. $\sum_{k=1}^{10} 5(-1)^{k-1}$

مثال 6

جـد قيمة a_1 في كل متسلسلة هندسية موضحة.

51. $S_n = -2912, r = 3, n = 6$

52. $S_n = -10{,}922, r = 4, n = 7$

53. $S_n = 1330, a_n = 486, r = \frac{3}{2}$

54. $S_n = 4118, a_n = 128, r = \frac{2}{3}$

55. $a_n = 1024, r = 8, n = 5$

56. $a_n = 1875, r = 5, n = 7$

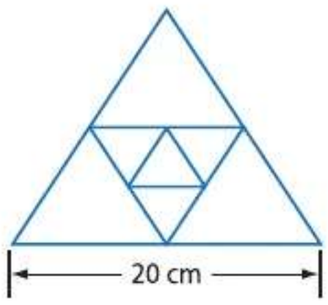
McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

57. **العلوم** ارتفع بالون ممتلئ بالغاز لمسافة 100 m بعد دقيقة من إطلاقه. وفي كل دقيقة بعد ذلك، يرتفع البالون 50% فقط من المسافة التي ارتفعها في الدقيقة السابقة. ما المسافة التي سيرتفع إليها بعد مرور 5 دقائق؟

58. **الكيمياء** يبلغ نصف عمر عنصر الرادون حوالي 4 أيام. وهذا يعني أنه كل 4 أيام تقريبًا، تتحلل نصف كتلة عنصر الرادون إلى عنصر آخر. فكم جرامًا من الرادون سيتبقى من 60 g موجودين من البداية بعد 4 أسابيع؟

59. **التبرير** ينتشر الفيروس في حاسوب مصيبًا الملفات. وإذا أُصيب ملف في بادئ الأمر مع تضاعف عدد الملفات المصابة كل دقيقة، فكم عدد الملفات التي ستصاب بعد 20 دقيقة؟

60. **الهندسة** في الشكل، تبلغ أضلاع كل مثلث متساوي الأضلاع ضعف حجم أضلاع المثلث المُحاط الخاص به. وإذا استمر النمط، فجد مجموع محيطات أول ثمانية مثلثات.



61. **البندول** تبلغ المسافة المقطوعة لحركة الأرجحة الأولى للبندول 30 cm. وإذا بلغت مسافة كل حركة أرجحة تالية 95% من حركة الأرجحة السابقة، فجد المسافة الكلية التي يقطعها البندول بعد الأرجحة الثلاثين.

62. **سلاسل الاتصالات** أنشأت إحدى المدارس سلسلة اتصالات بحيث يمكن لكل موظف الاتصال باثنين آخرين من الموظفين لإخبارهم بمواعيد إغلاق المدرسة بسبب أحوال الطقس. وبدأت الجولة الأولى من الاتصالات عندما اتصل المشرف بكلا مديري المدرسة. فإذا كان عدد الموظفين إجمالاً يبلغ 94 موظفًا بالمدرسة، فكم جولة من الاتصالات ستتم في هذا الخصوص؟

63. **أجهزة التلفاز** تعلن إحدى شركات الإلكترونيات الكبرى عن طرحها خطة تقسيط أسبوعية يمكن بموجبها شراء جهاز من علامة تجارية شهيرة من أجهزة التلفاز عالية الدقة. ويدفع المشتري AED 15 في نهاية الأسبوع الأول، و AED 16.50 في نهاية الأسبوع الثاني، و AED 18.15 في نهاية الأسبوع الثالث، وهكذا لمدة عام. (افترض أن عامًا واحدًا = 52 أسبوعًا.)

a. كم ستبلغ المدفوعات في نهاية الأسبوع العاشر والعشرين والأربعين؟

b. جد التكلفة الإجمالية لجهاز التلفاز.

c. لماذا تعتبر التكلفة الموجودة في الجزء b غير دقيقة كليًا؟

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

64. **البرهان** اشتق صيغة المجموع العامة باستخدام صيغة المجموع البديلة.

65. **البرهان** اشتق صيغة مجموع لا تشمل a_1.

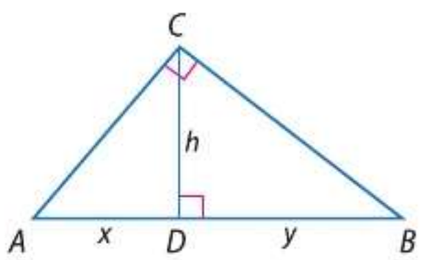
66. **مسألة غير محددة الإجابة** اكتب متسلسلة هندسية بحيث يكون $r = \frac{3}{4}$ و $n = 6$.

67. **التبرير** اشرح كيف أن $\sum_{k=1}^{10} 3(2)^{k-1}$ تحتاج إلى التغيير للإشارة إلى نفس المتسلسلة إذا تغير $k = 1$ إلى $k = 0$. اشرح استنتاجك.

68. **البرهان** برهن الصيغة المتعلقة بالحد *النوني* لمتتالية هندسية.

69. **تحدٍ** الحد الخامس لمتتالية هندسية هو الحد رقم $\frac{1}{27}$ للحد الثامن. إذا كان الحد التاسع يساوي 720، فما قيمة الحد الثامن؟

70. **تحدٍ** استخدم حقيقة أن h يمثل الوسط الهندسي x و y في الشكل الموجود على اليسار لإيجاد h^4 in بدلالة كلٍ من x و y.



71. **مسألة غير محددة الإجابة** اكتب متسلسلة هندسية بها 6 حدود ومجموع يساوي 252.

72. **الكتابة في الرياضيات** كيف يمكنك تصنيف متتالية؟ وضّح استنتاجك.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

تدريب على الاختبار المعياري

73. أيٍ من التالي يُعد الأقرب إلى $\sqrt[3]{7.32}$؟

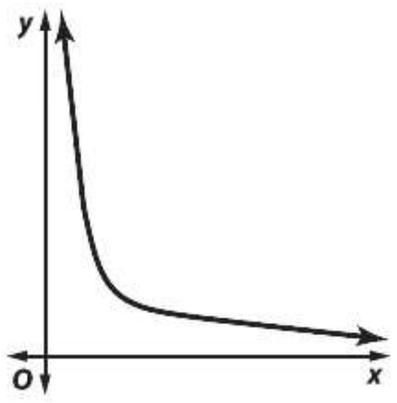
A 1.8
B 1.9
C 2.0
D 2.1

74. الحد الأول لمتسلسلة هندسية هو 5. والنسبة المشتركة هي -2. كم عدد الحدود في المتسلسلة إذا كان مجموعها يساوي -6825؟

F 5
G 9
H 10
J 12

75. الإجابة المختصرة لدى عائشة حساب ادخار خاص بها. وهي تسحب نصف محتويات الحساب كل عام. وبعد 4 أعوام، تبقى لديها AED 2000. فكم كان لديها في حساب الادخار في الأصل؟

76. SAT/ACT ما الدالة التي قد يكون المنحنى أدناه جزءًا من التمثيل البياني لها؟



A $y = \sqrt{x}$
B $y = x^2 - 5x + 4$
C $y = -x + 20$
D $y = \log x$
E $xy = 4$

مراجعة شاملة

77. المال اشترت منال جهاز تلفاز بتقنية LCD عالي الدقة من متجر الإلكترونيات. ودفعت AED 800 على الفور و AED 300 شهريًا لمدة عام ونصف. فكم دفعت منال إجمالاً مقابل التلفاز؟ (الدرس 2-9)

حدد ما إذا كانت كل متتالية *حسابية*، أم *هندسية*، أم *غير ذلك*. اشرح استنتاجك. (الدرس 1-9)

78. $\frac{1}{10}, \frac{3}{5}, \frac{7}{20}, \frac{17}{20}, \cdots$

79. $-\frac{7}{25}, -\frac{13}{50}, -\frac{6}{25}, -\frac{11}{50}, \cdots$

80. $-\frac{22}{3}, -\frac{68}{9}, -\frac{208}{27}, -\frac{632}{81}, \cdots$

جـد مركز ونصف قطر كل دائرة في ما يلي. ثم ارسم الدائرة بيانيًا.

81. $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 25$

82. $(x+3)^2 + (y+7)^2 = 81$

83. $(x-3)^2 + (y+7)^2 = 50$

84. افترض أن y تتغير بشكل مشترك مع x وz. جـد y عندما يكون $x = 9$ و $z = -5$. إذا كان $y = -90$ عندما يكون $z = 15$ و $x = -6$.

85. التسوق اكتشف متجر ما أن عدد العملاء الذين سيحضرون تخفيضات للبيع بأسعار يمكن تمثيلهم باستخدام $N = 125\sqrt[3]{100Pt}$. حيث N تمثّل العدد المتوقع للعملاء، و P النسبة المئوية للخصم، و t عدد ساعات سريان الخصم. جـد عدد العملاء الذين يتوقع المتجر حضورهم لهذه التخفيضات التي ستصل نسبتها إلى 50%. وستستمر لأربع ساعات.

مراجعة المهارات

إذا كان $a = -2$، و $b = \frac{1}{3}$، و $c = -12$. فجـد قيمة كل تعبير في ما يلي:

86. $\frac{3ab}{c}$

87. $\frac{a-c}{a+c}$

88. $\frac{a^3 - c}{b^2}$

89. $\frac{c+3}{ab}$

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

9 اختبار منتصف الوحدة
الدروس من 1-9 إلى 4-9

حدد ما إذا كانت كل متتالية حسابية، أم هندسية، أم غير ذلك. اشرح استنتاجك. (الدرس 1-9)

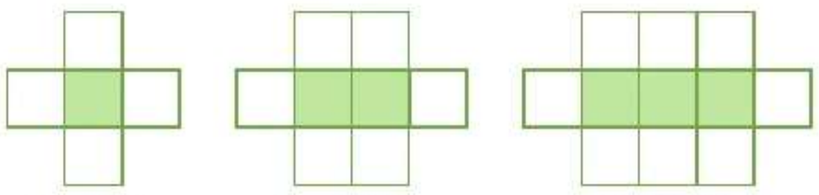
1. $5, -3, -12, -22, -33 \ldots$
2. $\frac{1}{5}, \frac{7}{10}, \frac{6}{5}, \frac{17}{10}, \frac{11}{5} \ldots$

3. **الإسكان** تعمل سهى وكيلة عقارات. ويجب عليها بيع 15 منزلاً خلال 6 أشهر. (الدرس 1-9)

   a. بنهاية أول شهرين، كانت قد باعت 4 منازل. إذا باعت منزلين كل شهر خلال ما تبقى من الستة أشهر، فهل ستبلغ الهدف المحدد لها؟ اشرح. انظر الهامش.

   b. إذا باعت 5 منازل بنهاية الشهر الأول، فما متوسط عدد المنازل التي عليها بيعها كل شهر تبلغ الهدف المحدد لها؟

4. **الهندسة** توضح الأشكال التالية نمطًا من المربعات المظللة والمربعات البيضاء. (الدرس 1-9)



الشكل 1 الشكل 2 الشكل 3

   a. اكتب معادلة تمثل العدد *النوني* في هذا النمط، حيث n هو عدد المربعات البيضاء.

   b. هل من الممكن الحصول على 84 مربعًا أبيض تمامًا في ترتيب ما؟ اشرح.

جـــد الحد الموضح لكل متتالية حسابية. (الدرس 2-9)

5. $a_1 = 10, d = -5, n = 9$
6. $a_1 = -8, d = 4, n = 99$

جـــد مجموع كل متسلسلة حسابية. (الدرس 2-9)

7. $-15 + (-11) + (-7) + \cdots + 53$
8. $a_1 = -12, d = 8, n = 22$
9. $\sum_{k=11}^{50} (-3k + 1)$

10. **الاختيار من متعدد** ما مجموع أول 50 عددًا فرديًا؟ (الدرس 2-9)

   A 2550

   B 2500

   C 2499

   D 2401

جـــد الحد الموضح لكل متتالية هندسية. (الدرس 3-9)

11. $a_2 = 8, r = 2, a_8 = ?$
12. $a_3 = 0.5, r = 8, a_{10} = ?$

13. **الاختيار من متعدد** ما الأوساط الهندسية للمتتالية الواردة أدناه؟ (الدرس 3-9)

   0.5, _____, _____, _____, 2048

   F 512.375, 1024.25, 1536.125

   G 683, 1365.5, 2048

   H 2, 8, 32

   J 4, 32, 256

14. **الدخل** يعمل فهد في شركة لتشييد المنازل لمدة 4 أشهر كل عام. وقد بدأ بتقاضي AED 9000 في الشهر. وفي نهاية كل شهر، يزداد راتبه بمقدار 5%. ما مقدار المال الذي سيتقاضاه خلال الأربعة أشهر؟ (الدرس 3-9)

جـــد قيمة مجموع كل متسلسلة هندسية. (الدرس 3-9)

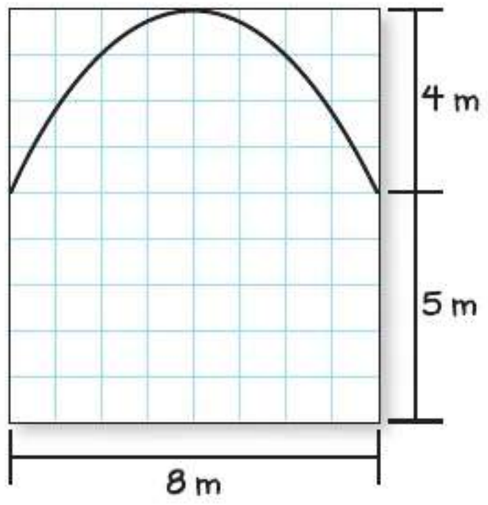
15. $\sum_{k=1}^{8} 3 \cdot 2^{k-1}$
16. $\sum_{k=1}^{9} 4 \cdot (-1)^{k-1}$
17. $\sum_{k=1}^{20} -2\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}$

جـــد مجموع كل دالة لانهائية، إن وجد. (الدرس 4-9)

18. $\sum_{n=1}^{\infty} 9 \cdot 2^{n-1}$
19. $\sum_{n=1}^{\infty} (4) \cdot (0.5)^{n-1}$
20. $\sum_{n=1}^{\infty} 12 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

9-5 مختبر الجبر
المساحة تحت المنحنى



يتم إعادة تصميم إستاد لكرة القدم بحيث يكون هناك ممر على شكل قوس في المدخل الرئيسي. وتم وضع مقياس رسم لهذا الممر بحيث يمثل كل خط على ورقة الرسم البياني متر واحد على الممر الحقيقي. وقام المصمم بتمثيل قمة الشكل باستخدام المعادلة التربيعية $y = -0.25x^2 + 3x$.

النشاط

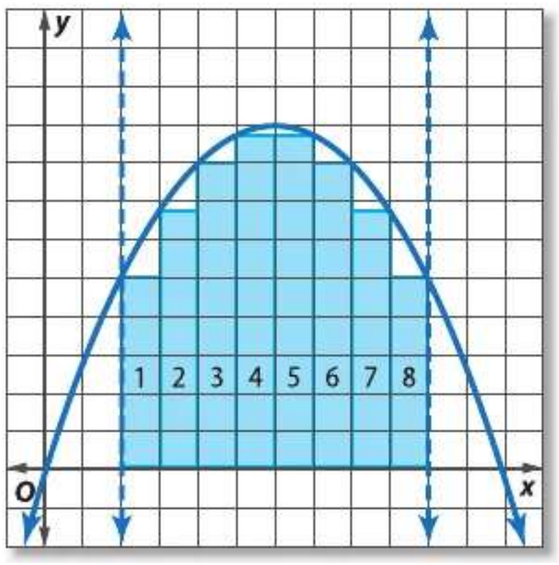
جِــد مساحة الفتحة تحت الممر القوسي.

الطريقة 1

الخطوة 1 أنشئ جدولاً لقيم $y = -0.25x^2 + 3x$. ثم مثّل المعادلة بيانيًا.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
y	0	2.75	5	6.75	8	8.75	9	8.75	8	6.75	5	2.75	0

الخطوة 2 قسّم الشكل إلى عدة مناطق.



لتقدير مساحة المنطقة الواقعة داخل الممر القوسي، يُمكنك قسمة القوس على المستطيلات كما هو موضح باللون الأزرق.

نظرًا لأن الطرفين الأيسر والأيمن للممر القوسي يقعان على ارتفاع 5 أمتار و $y = 5$ إذا كان $x = 2$ وإذا كان $x = 10$. فإن فتحة المدخل تمتد من $x = 2$ إلى $x = 10$.

الخطوة 3 جــد مساحة هذه المناطق.

المستطيل	1	2	3	4	5	6	7	8
العرض (m)	1	1	1	1	1	1	1	1
الارتفاع (m)	5	6.75	8	8.75	8.75	8	6.75	5
المساحة (m^2)	5	6.75	8	8.75	8.75	8	6.75	5

المساحة التقريبية للممر القوسي تساوي مجموع مساحات المستطيلات.

$$5 + 6.75 + 8 + 8.75 + 8.75 + 8 + 6.75 + 5 = 57 \text{ m}^2$$

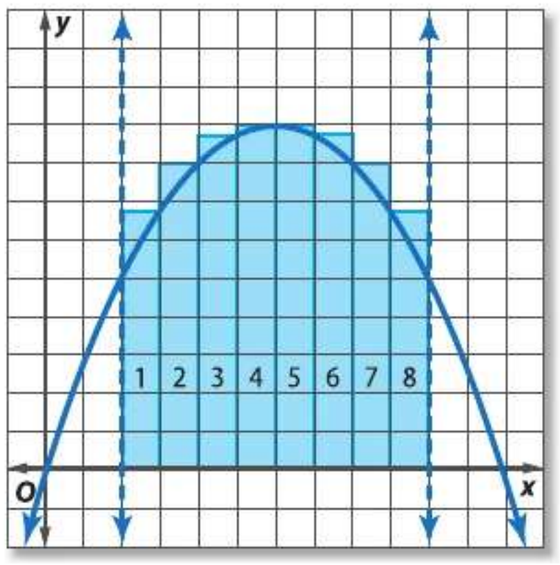
(يُتبع في الصفحة التالية)

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

المساحة تحت المنحنى تابع

الطريقة 2

الخطوة 1 ارسم التمثيل البياني الثاني للمعادلة واقسمه إلى مناطق.
اقسم الممر القوسي إلى مستطيلات كما هو موضح باللون الأزرق.



الخطوة 2 جـــد مساحة هذه المناطق.

المستطيل	1	2	3	4	5	6	7	8
العرض (m)	1	1	1	1	1	1	1	1
الارتفاع (m)	6.75	8	8.75	9	9	8.75	8	6.75
المساحة (m^2)	6.75	8	8.75	9	9	8.75	8	6.75

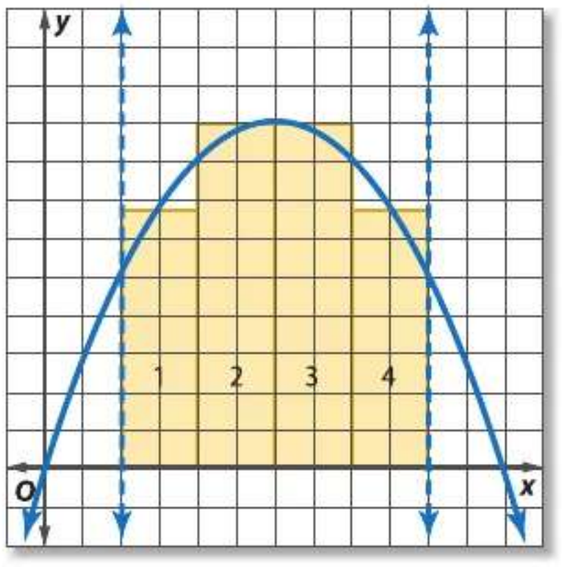
المساحة التقريبية للممر القوسي تساوي مجموع مساحات المستطيلات.

$$6.75 + 8 + 8.75 + 9 + 9 + 8.75 + 8 + 6.75 = 65\ m^2$$

توضح الطريقتان 1 و 2 كيفية تقريب المساحة الواقعة تحت منحنى وعلى فترة محددة.

تحليل النتائج

1. هل مساحة المناطق التي تم حسابها باستخدام الطريقة 1 أكبر أم أصغر من المساحة الحقيقية للمر القوسي؟ اشرح استنتاجك.
2. هل مساحة المناطق التي تم حسابها باستخدام الطريقة 2 أكبر أم أصغر من المساحة الحقيقية للمر القوسي؟ اشرح استنتاجك.
3. قارن بين تقديرات المساحات بالنسبة للطريقتين. كيف يُمكنك إيجاد أفضل تقدير للمساحة الواقعة داخل المر القوسي؟ اشرح استنتاجك.
4. يوضّح الرسم التخطيطي طريقة ثالثة لإيجاد تقدير لمساحة المر القوسي. هل هذا التقدير للمساحة أكبر أم أصغر من المساحة الفعلية؟ ما وضع هذا التقدير عند مقارنته بالتقديرين الآخرين للمساحة؟



التمارين

قدّر المساحة التي توصلت إليها كل طريقة. وأنشئ جدولاً بالقيم، وارسم تمثيلات بيانية بالمستطيلات، واستخدم الجدول لتسجيل قيم مساحات المستطيلات. قارن بين كل تقدير والمساحة الفعلية.

5. مساحة المنطقة الواقعة تحت المنحنى بالنسبة لـــ $y = -x^2 + 4$، من $x = -2$ إلى $x = 2$، وفوق المحور x
6. مساحة المنطقة الواقعة تحت المنحنى بالنسبة لـــ $y = x^3$، من $x = 0$ إلى $x = 4$، وفوق المحور x
7. مساحة المنطقة الواقعة تحت المنحنى بالنسبة لـــ $y = x^2$، من $x = -3$ إلى $x = 3$، وفوق المحور x

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

9-5 المتسلسلة الهندسية اللانهائية

السابق:
- لقد وجدت مجاميع المتسلسلات الهندسية المنتهية.

الحالي:
1. إيجاد مجاميع المتسلسلات الهندسية اللانهائية.
2. كتابة الكسور العشرية الدورية في صورة كسور.

لماذا؟
- في مباراة لكرة القدم الأمريكية، كان الخصم يقف على خط العشر ياردات، وتمت معاقبة الدفاع بنصف المسافة إلى إحراز الهدف، وكانت الكرة موضوعة على خط الخمس ياردات. إذا استمروا في تلقي المعاقبات بهذه الطريقة، فأين سيتم وضع الكرة في النهاية؟ وما إجمالي عدد ياردات المعاقبة التي سوف يتكبدها الدفاع؟ يُمكن الإجابة على هذين السؤالين من خلال الاطلاع على المتسلسلة الهندسية اللانهائية.



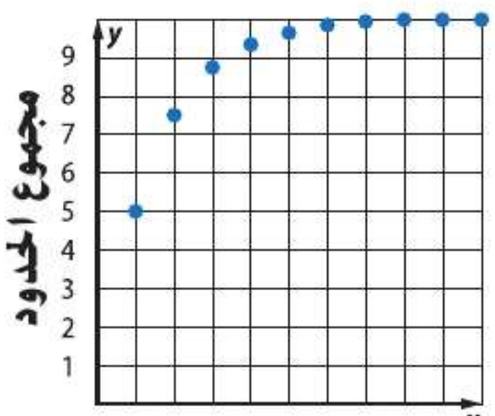
1 المتسلسلة الهندسية اللانهائية

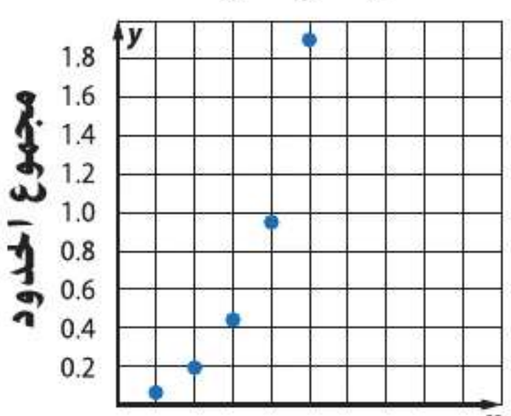
يوجد لدى **المتسلسلة الهندسية الانهائية** عدد لا يُحصى من الحدود. ويُطلق على المتسلسلة التي لها مجموع **متسلسلة تقاربية**، وذلك لأن مجموعها يقترب من قيمة محددة. أما المتسلسلة التي ليس لها مجموع، فيُطلق عليها **متسلسلة تباعدية**.

عندما تقوم بتقدير المجموع S_n لمتسلسلة هندسية لانهائية للحدود النونية الأولى، فأنت توجد المجموع الجزئي للمتسلسلة. ومن الممكن كذلك إيجاد مجموع متسلسلة كاملة. في التطبيق الوارد أعلاه، يبدو أن الكرة ستصل في النهاية خط إحراز الهدف، وسيكبد الدفاع عقوبة بإجمالي 10 ياردات. وهذه القيمة هي المجموع الفعلي للمتسلسلة اللانهائية $5 + 2.5 + 1.25 + \ldots$. موضح على اليمين أدناه التمثيل البياني لـ S_n حيث $1 \le n \le 10$. وكلما ازداد n، يقترب S_n من العدد 10.

المفهوم الأساسي المتسلسلات التقاربية والتباعدية

متسلسلة تقاربية	متسلسلة تباعدية
الشرح يقترب المجموع من قيمة نهائية.	**الشرح** لا يقترب المجموع من قيمة نهائية.
النسبة $\lvert r \rvert < 1$	**النسبة** $\lvert r \rvert \ge 1$
مثال $5 + 2.5 + 1.25 + \ldots$	**مثال** $\frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \ldots$





مثال 1 المتسلسلات التقاربية والتباعدية

حدد ما إذا كانت كل متسلسلة هندسية الانهائية تقاربية أم تباعدية.

a. $54 + 36 + 24 + \ldots$

جد قيمة r.

$r = \frac{36}{54}$ أو $\frac{2}{3}$؛ حيث إن $-1 < \frac{2}{3} < 1$. المتسلسلة تقاربية.

المفردات الجديدة

المتسلسلة الهندسية الانهائية	infinite geometric series
متسلسلة تقاربية	convergent series
متسلسلة تباعدية	divergent series
لانهاية	infinity

ممارسات في الرياضيات
مراعاة الدقة.
البحث عن التوافق في الاستنتاجات المتكررة والتعبير عن ذلك.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

b. $8 + 12 + 18 + \ldots$

$r = \frac{12}{8}$ أو 1.5؛ نظرًا لأن $1 < 1.5$، فإن المتسلسلة تباعدية.

تمرين موجّه

1A. $2 + 3 + 4.5 + \ldots$ **1B.** $100 + 50 + 25 + \ldots$

نصيحة دراسية

القيمة المطلقة تذكر أن $|r| < 1$ يعني أن $-1 < r < 1$.

عندما يكون $|r| < 1$، فإن قيمة r^n سوف تقترب من الصفر مع زيادة n. وبهذا ستقترب المجاميع الجزئية للمتسلسلات الهندسية اللانهائية من $\frac{a_1 - a_1(0)}{1 - r}$ أو $\frac{a_1}{1 - r}$.

المفهوم الأساسي مجموع المتسلسلات الهندسية اللانهائية

يُمكن إيجاد مجموع S لمتسلسلة هندسية لانهائية عند $|r| < 1$ باستخدام

$$S = \frac{a_1}{1 - r}.$$

إذا كان $|r| \geq 1$، فإن المتسلسلة لا يوجد لها مجموع.

عندما تكون المتسلسلة الهندسية اللانهائية **تباعدية**، فإن $|r| \geq 1$، ولا يكون للمتسلسلة أية مجموع. نظرًا لأن القيمة المطلقة لـ r^n سوف تزداد بشكل لانهائي بزيادة n.

يوضّح الجدول على اليسار المجاميع الجزئية للمتسلسلة التباعدية $4 + 16 + 64 + \ldots$. عندما تزداد قيمة n، فإن قيمة S_n تزداد بسرعة وإلى ما لا نهاية.

n	S_n
5	1364
10	1,398,100
15	1,431,655,764

مثال 2 مجموع متسلسلة هندسية لانهائية

جد مجموع كل متسلسلة لانهائية، إن وجد.

حدد ما إذا كانت كل متسلسلة هندسية لانهائية *تقاربية* أم *تباعدية*.

a. $\frac{2}{3} + \frac{6}{15} + \frac{18}{75} + \ldots$

الخطوة 1 جد قيمة r لتحديد ما إذا كان هناك مجموع.

اقسم الحدود المتتالية لتحديد النسبة المشتركة.

$r = \frac{6}{15} \div \frac{2}{3}$ أو $\frac{3}{5}$

نظرًا لأن $\left|\frac{3}{5}\right| < 1$، إذًا هناك مجموع.

الخطوة 2 استخدم الصيغة لإيجاد المجموع.

صيغة المجموع $S = \frac{a_1}{1 - r}$

$r = \frac{3}{5}$ و $a_1 = \frac{2}{3}$ $= \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{3}{5}}$

بسّط. $= \frac{2}{3} \div \frac{2}{5}$ أو $\frac{5}{3}$

b. $6 + 9 + 13.5 + 20.25 + \ldots$

$r = \frac{9}{6}$ أو 1.5؛ نظرًا لأن $|1.5| \geq 1$، فإن المتسلسلة تتباعد ولا يوجد مجموع.

نصيحة دراسية

التقارب والتباعد تتقارب المتسلسلة عندما تكون القيمة المطلقة للحد أصغر من القيمة المطلقة للحد السابق. وبذلك ستكون المتسلسلة الحسابية اللانهائية دائمًا تباعدية.

تمرين موجّه

2A. $4 - 2 + 1 - 0.5 + \ldots$ **2B.** $16 + 20 + 25 + \ldots$

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

يُمكن استخدام الرمز سيجما لتمثيل المتسلسلات اللانهائية. إذا كانت متتالية **لانهائية**. فإنها تستمر دون نهاية. ويوضع رمز اللانهاية ∞ فوق رمز $\sum$ لتوضيح أن المتسلسلة لانهائية.

مثال 3 المتسلسلة اللانهائية في الرمز سيجما

جـد قيمة $\sum_{k=1}^{\infty} 18\left(\frac{4}{5}\right)^{k-1}$.

$S = \frac{a_1}{1-r}$ صيغة المجموع

$= \frac{18}{1-\frac{4}{5}}$ $r = \frac{4}{5}$ و $a_1 = 18$

$= \frac{18}{\frac{1}{5}}$ أو 90 بسّط.

تمرين موجّه

3. جـد قيمة $\sum_{k=1}^{\infty} 12\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}$.

2 الكسور العشرية الدورية

الكسر العشري الدوري هو مجموع المتسلسلات الهندسية اللانهائية. على سبيل المثال، $0.\overline{45} = 0.454545...$ أو $0.45 + 0.0045 + 0.000045 + ...$. ويُمكن استخدام صيغة مجموع المتسلسلات اللانهائية هذه لتحويل الكسر العشري إلى كسر اعتيادي.

نصيحة في حل المسائل

الاستنتاج المنطقي في العديد من الحالات، يُمكن حل مسألة بأكثر من طريقة. استخدم الطريقة التي تشعر معها براحة أكبر.

مثال 4 اكتب كسرًا عشريًا دوريًا في صورة كسر اعتيادي

اكتب $0.\overline{63}$ في صورة كسر اعتيادي.

الطريقة 1 استخدم مجموع المتسلسلات اللانهائية.

$0.\overline{63} = 0.63 + 0.0063 + ...$

$= \frac{63}{100} + \frac{63}{10{,}000} + ...$

$S = \frac{a_1}{1-r}$ صيغة المجموع

$= \frac{\frac{63}{100}}{1-\frac{1}{100}}$ $r = \frac{1}{100}$ و $a_1 = \frac{63}{100}$

$= \frac{63}{99}$ أو $\frac{7}{11}$ بسّط.

الطريقة 2 استخدم الخواص الجبرية.

$x = 0.\overline{63}$ بفرض أن $x = 0.\overline{63}$.

$x = 0.636363...$ اكتب في صورة كسر عشري دوري.

$100x = 63.636363...$ اضرب الطرفين في 100.

$99x = 63$ اطرح x من $100x$ واطرح $0.\overline{63}$ من $63.\overline{63}$.

$x = \frac{63}{99}$ أو $\frac{7}{11}$ اقسم الطرفين على 99.

نصيحة دراسية

الكسور العشرية الدورية

كل كسر عشري دوري هو عبارة عن عدد نسبي ويُمكن كتابته في صورة كسر اعتيادي.

تمرين موجّه

4. اكتب $0.\overline{21}$ في صورة كسر اعتيادي.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التحقق من فهمك

مثال 1 **حدد ما إذا كانت كل متسلسلة هندسية لانهائية *تقاربية* أم *تباعدية*.**

1. $16 - 8 + 4 - \ldots$
2. $32 - 48 + 72 - \ldots$
3. $0.5 + 0.7 + 0.98 + \ldots$
4. $1 + 1 + 1 + \ldots$

مثال 2 **جـد مجموع كل متسلسلة لانهائية، إن وجد.**

5. $440 + 220 + 110 + \ldots$
6. $520 + 130 + 32.5 + \ldots$
7. $\frac{1}{4} + \frac{3}{8} + \frac{9}{16} + \ldots$
8. $\frac{32}{9} + \frac{16}{3} + 8 + \ldots$

9. **التبرير المنطقي** يبلغ عمر النصف لدواء معين 8 ساعات قبل تناول المريض له. ما النسبة المئوية للدواء الموجودة داخل جسم المريض بعد مرور 24 ساعة؟

مثال 3 **جـد مجموع كل متسلسلة لانهائية، إن وجد.**

10. $\sum_{k=1}^{\infty} 5 \cdot 4^{k-1}$
11. $\sum_{k=1}^{\infty} (-2) \cdot (0.5)^{k-1}$
12. $\sum_{k=1}^{\infty} 3 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{k-1}$
13. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}$

مثال 4 **اكتب كل كسر عشري دوري في صورة كسر اعتيادي.**

14. $0.\overline{35}$
15. $0.\overline{642}$

التدريب وحل المسائل

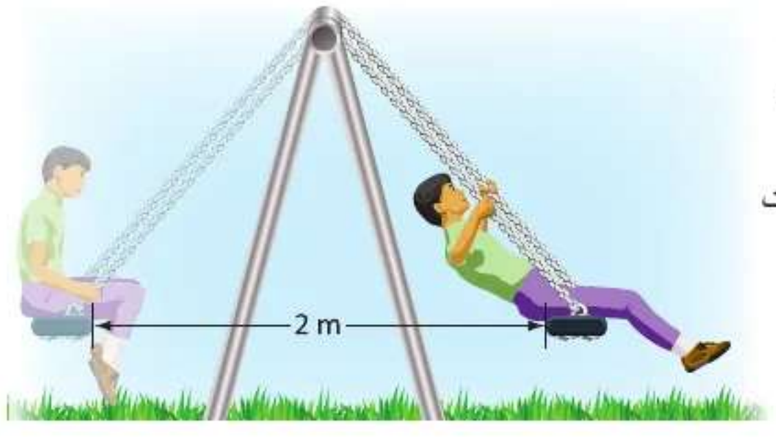
مثال 1 **حدد ما إذا كانت كل متسلسلة هندسية لانهائية *تقاربية* أم *تباعدية*.**

16. $21 + 63 + 189 + \ldots$
17. $480 + 360 + 270 + \ldots$
18. $\frac{3}{4} + \frac{9}{8} + \frac{27}{16} + \ldots$
19. $\frac{5}{6} + \frac{10}{9} + \frac{40}{27} + \ldots$
20. $0.1 + 0.01 + 0.001 + \ldots$
21. $0.008 + 0.08 + 0.8 + \ldots$

مثال 2 **جـد مجموع كل متسلسلة لانهائية، إن وجد.**

22. $18 + 21.6 + 25.92 + \ldots$
23. $-3 - 4.2 - 5.88 - \ldots$
24. $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{18} + \ldots$
25. $\frac{12}{5} + \frac{6}{5} + \frac{3}{5} + \ldots$
26. $21 + 14 + \frac{28}{3} + \ldots$
27. $32 + 40 + 50 + \ldots$

28. **أرجوحات** إذا لم يدفع حسن الأرجوحة مرة أخرى بعد الأرجحة الأولى، فإن المسافة التي تقطعها في الأرجحة الواحدة سوف تتناقص بمقدار 10% مع كل أرجحة. إذا كانت في الأرجحة الأولى قد قطعت مترين، فجـد إجمالي المسافة التي قطعتها الأرجوحة عند استقرارها.



McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

مثال 3 **جـد مجموع كل متسلسلة لانهائية، إن وجد.**

29. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^{k-1}$

30. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4} \cdot 3^{k-1}$

31. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5}{3} \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^{k-1}$

32. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{k-1}$

33. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{3} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}$

34. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{1}{12}\right)^{k-1-1}$

مثال 4 **اكتب كل كسر عشري دوري في صورة كسر اعتيادي.**

35. $00.3\overline{21}$

36. $0.1\overline{45}$

37. $2.\overline{18}$

38. $4.\overline{96}$

39. $0.12\overline{14}$

40. $0.43\overline{36}$

41. المراوح تدور مروحة بسرعة 10 دورات في الثانية. وبعد إيقاف تشغيلها، تتناقص سرعتها بمعدل 75% في الثانية. حدد عدد الدورات التي تكملها المروحة بعد إيقاف تشغيلها.

42. الدقة أودعت سالي مبلغًا قدره AED 5000 في حساب مصرفي في بداية العام. ويسدد المصرف لها 8% كل عام كنسبة مرابحة*.

a. ما مقدار المال الذي سيكون في الحساب بعد 20 عامًا؟ (*إرشاد:* افترض أن $5000(1 + 0.08)^1$ يمثل نهاية العام الأول.)

b. هل هذه المتسلسلة تقاربية أم تباعدية؟ اشرح.

43. بطاريات قابلة للشحن تم الترويج لنوع من البطاريات القابلة للشحن على أنها يُمكن شحنها بمقدار 99.9% من سعتها السابقة في كل شحنة. إذا كانت السعة الأصلية هي 8 ساعات من التشغيل، فما إجمالي الساعات التي يُمكن للبطارية أن تعملها حتى تنتهي؟

جـد مجموع كل متسلسلة لانهائية، إن وجد.

44. $\frac{7}{5} + \frac{21}{20} + \frac{63}{80} + \ldots$

45. $\frac{15}{4} + \frac{5}{2} + \frac{5}{3} + \ldots$

46. $-\frac{16}{9} + \frac{4}{3} - 1 + \ldots$

47. $\frac{15}{8} + \frac{5}{2} + \frac{10}{3} + \ldots$

48. $\frac{21}{16} + \frac{7}{4} + \frac{7}{3} + \ldots$

49. $-\frac{18}{7} + \frac{12}{7} - \frac{8}{7} + \ldots$

50. التمثيلات المتعددة في هذه المسألة، سوف تستخدم مربعًا من الورق يبلغ طول ضلعه 8 cm على الأقل.

a. عمليًا افترض أن المربع على وحدة واحدة. اقطع نصفًا واحدًا من المربع. وأطلق على هذه القطعة الحد 1. ثم اقطع نصفًا واحدًا من الجزء المتبقي من الورقة. وأطلق على هذه القطعة الحد 2. استمر في قطع الجزء المتبقي من الورقة إلى أنصاف وأطلق عليها عدد الحدود إلى أن تنتهي الورقة. ثم أدرج الكسور التي تمثلها هذه القطع في قائمة.

b. عدديًا إذا كنت تستطيع قطع المربعات بشكل لانهائي، فسيكون لديك متسلسلة لانهائية. جـد مجموع هذه المتسلسلة.

c. لفظيًا كيف يرتبط مجموع المتسلسلات بالورقة الأصلية المربعة؟

51. الفيزياء في تجربة فيزياء، تتم زيادة سرعة كرة معدنية على مسار مسطح، ثم تتدحرج بحرية. بعد الدقيقة الأولى، تدحرجت الكرة 120 m. وفي كل دقيقة تقطع الكرة 40% فقط من المسافة التي قطعتها خلال الدقيقة السابقة. ما المسافة التي تقطعها الكرة؟

52. البندول يقطع بندول 12 cm في الأرجحة الأولى و95% من المسافة التي قطعها في الأرجحة السابقة. جـد إجمالي المسافة التي قطعها البندول عند استقراره.

53. الألعاب إذا كانت هناك كرة مطاطية تستطيع القفز بمقدار 95% من الارتفاع الأصلي، فما إجمالي المسافة العمودية التي سوف تقطعها إذا سقطت على ارتفاع 30 m؟

54. السيارات خلال فحص صيانة لسيارة، تم نزع إطار وتدويره على آلة فحص. وعند إيقاف تشغيل الآلة، يكمل التدوير للإطار 20 دورة في الثانية الأولى، و98% من الدورات للثانية أخرى. كم عدد الدورات التي يُكملها الإطار قبل أن يتوقف عن الدوران؟

*يشير المصطلح نسبة المرابحة إلى مبلغ المال الذي يتم سداده أو تلقيه عند الإقراض أو الإيداع. إذا اقترض عميل مبلغًا ماليًا من المصرف، فإنه يسدد للمصرف نسبة مرابحة نظير استخدام المال من المصرف. وإذا ادخر عميل مبلغًا ماليًا في حساب مصرفي، فإن المصرف يدفع له نسبة مرابحة نظير استخدام مال العميل.

ويُطلق على المبلغ المالي الأصلي الذي تم إقراضه أو ادخاره رأس المال. وتمثل نسبة المرابحة نسبة مئوية للمبلغ الذي يتلقاه العميل أو يسدده خلال مُدة زمنية محددة. ونسبة المرابحة البسيطة هي مبلغ نسبة المرابحة الذي يتلقاه العميل أو يسدده بعد تطبيق نسبة المرابحة على رأس المال.

نسبة المرابحة البسيطة (I) هي ناتج ضرب ثلاث قيم: رأس المال (P)، ونسبة المرابحة المكتوبة في صورة كسر عشري (r)، والمُدة الزمنية (t): $I = P \times r \times t$

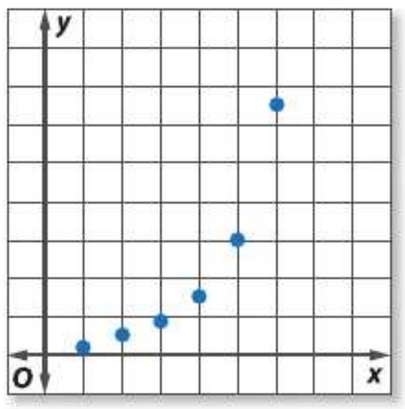
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

55. الاقتصاد قررت الحكومة تحفيز اقتصادها من خلال إعطاء كل شخص بالغ AED 500. وافترضت الحكومة أن كل فرد استلم هذا المبلغ سينفق 80% منه على سلع استهلاكية. وسينفق المنتجون في المقابل 80% على السلع الاستهلاكية. ما مقدار المبلغ الذي كسبه الاقتصاد نظير كل AED 500 قدمتها الحكومة؟

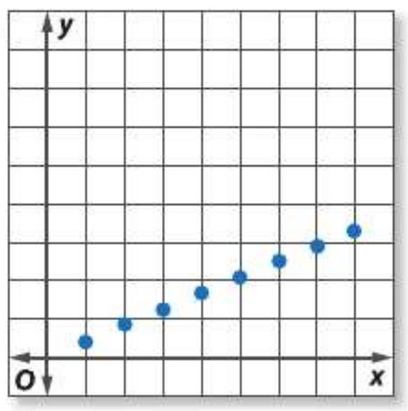
56. متحف العلوم يقدم معرض في متحف للعلوم فرصة للزوار باختبار حركة جسم ما على الزنبرك. سحب أحد الزوار الجسم لأسفل وأطلقه للحركة. فقطع الجسم مسافة 1.2 m لأعلى قبل الرجوع مرة أخرى للجهة المقابلة. وفي كل مرة يغير فيها الجسم اتجاهه، تقل المسافة التي يقطعها بمقدار 20% عند مقارنتها بالمسافة التي قطعها في الاتجاه السابق. جـد إجمالي المسافة التي قطعها الجسم؟

صِل كل تمثيل بياني بالوصف المقابل له.

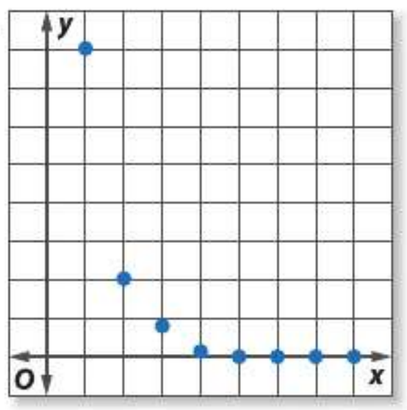
57.



58.



59.



a. متسلسلة هندسية تقاربية

b. متسلسلة هندسية تباعدية

c. متسلسلة حسابية تقاربية

d. متسلسلة حسابية تباعدية

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

60. تحليل الخطأ حاول محمود وفالح إيجاد مجموع ... $-1 + 1 - 1$.
هل أحدهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.

محمود

المجموع يساوي 0 نظرًا لأن مجموع كل زوج من حدود المتتالية يساوي 0.

فالح

لا يوجد مجموع نظرًا لأن $|r| \geq 1$. *والمتسلسلة تباعدية.*

61. البرهان اشتق صيغة لمجموع المتسلسلات الهندسية اللانهائية.

62. تحدٍ ما قيمة b التي تجعل للمتسلسلة ... $+ 81b^3 + 27b^2 + 9b + 3$ مجموعًا؟

63. التبرير متى يكون للمتسلسلة الهندسية اللانهائية مجموعًا؟ ومتى لا يكون لها مجموعًا؟ اشرح استنتاجك.

64. الفرضيات حدّد ما إذا كانت العبارة التالية صحيحةً أحيانًا أم دائمًا أم غير صحيحة على الإطلاق. اشرح استنتاجك.

إذا كانت القيمة المطلقة لحد في أي متسلسلة هندسية أكبر من القيمة المطلقة للحد السابق له، فإن المتسلسلة تكون تباعدية.

65. مسألة غير محددة الإجابة اكتب متسلسلة لانهائية بحيث يتقارب مجموعها من 9.

66. مسألة غير محددة الإجابة اكتب ... $3 - 6 + 12 -$ باستخدام الرمز سيجما بطريقتين مختلفتين.

67. الكتابة في الرياضيات اشرح لماذا تكون المتسلسلة الحسابية دائمًا تباعدية.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تدريب على الاختبار المعياري

68. SAT/ACT ما مجموع المتسلسلة الهندسية اللانهائية التي يبلغ حدها الأول 27 وتبلغ النسبة المشتركة الخاصة بها $\frac{2}{3}$؟

A 18
B 34
C 41
D 65
E 81

69. قام كلٌّ من حارب وحمد وحميد وحمدان بتبسيط نفس التعبير على اللوحة. وفيما يلي حل كل طالب منهم. وقال المعلم بأن اثنين منهما قد توصلا إلى الإجابة الصحيحة، بينما لا يوجد سوى طالب واحد توصل إلى الاستنتاج الصحيح باستخدام الخطوات الصحيحة.

حل حارب

$$x^2x^{-5} = \frac{x^2}{x^{-5}}$$
$$= x^7, x \neq 0$$

حل حميد

$$x^2x^{-5} = \frac{x^2}{x^5}$$
$$= \frac{1}{x^3}, x \neq 0$$

حل حمد

$$x^2x^{-5} = \frac{x^2}{x^{-5}}$$
$$= x^{-3}, x \neq 0$$

حل حمدان

$$x^2x^{-5} = \frac{x^2}{x^5}$$
$$= x^3, x \neq 0$$

أي حل يمثل التبسيط الدقيق بالكامل؟

F حل حارب
G حل حمد
H حل حميد
J حل حمدان

70. الإجابة الشبكية قدّر $\log_8 60$ إلى أقرب جزء من المئة.

71. الهندسة تم ضرب نصف قطر كرة كبيرة في العامل $\frac{1}{3}$ لإنتاج كرة أصغر.

القطر $= \frac{1}{3}r$ نصف القطر $= r$

ما حجم الكرة الصغيرة مقارنة بحجم الكرة الكبيرة؟

A يبلغ حجم الكرة الصغيرة $\frac{1}{9}$ من حجم الكرة الكبيرة.
B يبلغ حجم الكرة الصغيرة $\frac{1}{\pi^3}$ من حجم الكرة الكبيرة.
C يبلغ حجم الكرة الصغيرة $\frac{1}{27}$ من حجم الكرة الكبيرة.
D يبلغ حجم الكرة الصغيرة $\frac{1}{3}$ من حجم الكرة الكبيرة.

مراجعة شاملة

72. المسابقات تُعقد تجارب أداء لمسابقة تلفزيونية. وفي نهاية كل جولة، يتم استبعاد نصف المرشحين المحتملين من المسابقة. وفي يوم محدد، يبدأ 542 متسابقًا تجارب الأداء. (الدرس 3-9)

a. اكتب صيغة لإيجاد عدد المتسابقين المتبقيين بعد عدد n من الجولات.

b. باستخدام هذه الطريقة، هل عدد المتسابقين الذين سيتم استبعادهم سيكون دائمًا عبارة عن عدد كلي؟ اشرح.

73. النوادي يتكون نادٍ لخياطة اللحف من 9 أعضاء. كل أسبوع، يجب على كل عضو أن يحضر معه مربعًا من لحاف قد انتهى من خياطته. (الدرس 2-9)

a. جد الحدود الثمانية الأولى للمتتالية التي تصف إجمالي عدد اللحف المربعة التي تمت خياطتها بعد كل اجتماع.

b. هناك لحاف واحد تبلغ أبعاده 144 cm في 168 cm ويتم تصميمه باستخدام مربعات طول ضلعها 8 cm. بعد كم اجتماع سيتم الانتهاء من خياطة اللحاف؟

مراجعة المهارات

جد قيمة كل دالة.

74. $f(x) = 5x - 9, f(6)$

75. $g(x) = x^2 - x, g(4)$

76. $h(x) = x^2 - 2x - 1, h(3)$

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

9-5 مختبر تقنية التمثيل البياني
النهايات

قد تكون لاحظت أنه في بعض المتتاليات الهندسية، كلما اقترب حد المتتالية من النهاية، اقترب أكثر من الصفر. هناك طريقة أخرى لوصف هذا الأمر وهي أنه كلما زاد n، اقترب a_n من الصفر. وتقترب قيمة حد المتتالية في هذه الحالة من الصفر، ويُطلق عليه **حد** المتتالية. قد يكون هناك حدود لمتتاليات أخرى لانهائية. إذا كانت حدود متتالية لا تقترب من القيمة الفريدة، يُمكننا القول بأن حد المتتالية غير موجود.

يمكنك استخدام حاسبةٍ للتمثيل البياني من نوع TI-83/84 Plus لمساعدتك على إيجاد حدود المتتاليات اللانهائية.

النشاط

جـد نهاية المتتالية الهندسية $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \ldots$.

الخطوة 1 أدخل المتتالية.

صيغة المتتالية هي $a_n = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.

- ضع المؤشر على **L1** في شاشة **STAT EDIT 1: Edit...** وأدخل الصيغة **seq(N,N,1,10,1)**. وستظهر أمامك القيم 1, 2, ..., 10 للمؤشر **N**.

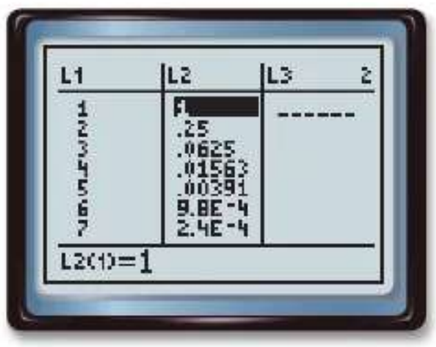
خطوات العملية على الحاسبة: [STAT] ▶ 5 X,T,θ,*n* , STAT ENTER ▲ 2nd

X,T,θ,*n* , 1 , 10 , 1) ENTER

- ضع المؤشر على **L2** وأدخل الصيغة **seq((1/4)^(N-1),N,1,10,1)**. وستظهر أمامك الحدود العشرة الأولى من المتتالية.

خطوات العملية على الحاسبة: ▶ ▲ 2nd [STAT] ▶ 5 (1 ÷ 4) ^ (X,T,θ,*n*

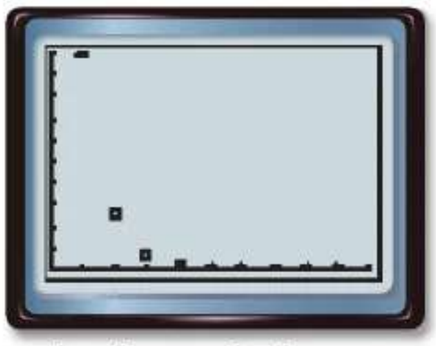
— 1) , X,T,θ,*n* , 1 , 10 , 1) ENTER



لاحظ أنه كلما ازداد n، تصبح حدود المتتالية المعطاة أقرب وأقرب إلى الصفر. وإذا قمت بالتمرير لأسفل، فسوف ترى أنه عندما يكون $n \geq 6$، تصبح الحدود أقرب ما تكون إلى الصفر بحيث تعبر عنها الحاسبة بالرموز العلمية. ويبرز هذا حد المتتالية على أنه يساوي 0.

الخطوة 2 مثّل المتتالية بيانيًا.

استخدم خيار **STAT PLOT** لتمثيل المتتالية بيانيًا. واستخدم **L1** على أنه **Xlist** و **L2** على أنه **Ylist**.


[0, 10] scl: 1 by [0, 1] scl: 0.1

يوضّح التمثيل البياني كذلك أنه كلما ازداد n، تقترب الحدود من الصفر. وفي الحقيقة بالنسبة لـ $n \geq 3$، يبدو أن العلامات تقع على المحور الأفقي. ويقترح هذا بشدة أن حد المتتالية يساوي 0.

التدريبات

جـد نهاية كل متتالية.

1. $a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$
2. $a_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n$
3. $a_n = 5^n$
4. $a_n = \frac{1}{n^2}$
5. $a_n = \frac{3^n}{3^n + 1}$
6. $a_n = \frac{n^2}{n + 2}$

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

9-6 التكرار والإعادة

السابق
- لقد قمت باستكشاف مكونات الدوال.

الحالي
1. التعرف على المتتاليات الخاصة واستخدامها.
2. التعرف على دوال التكرار.

لماذا؟
- تولد أنثى نحل العسل عندما تتزاوج الملكة مع ذكر نحل، ويكون للأنثى والدين وهما الأب والأم. إلا أن ذكر نحل العسل يولد من بيض الملكة غير المخصب، وبذلك يكون لديه والد واحد فقط وهو الأم. وتتبع شجرة عائلة نحل العسل متتالية خاصة.



الجيل	6	5	4	3	2	1
الآباء	8	5	3	2	1	1

1 المتتاليات الخاصة لاحظ أن كل حد موجود في قائمة الآباء يساوي مجموع الحدين السابقين. ويُطلق على هذه المتتالية الخاصة **متتالية فيبوناتشي**. وتوجد في العديد من الأمثلة في الطبيعة. وتُعد متتالية فيبوناتشي مثالاً على **المتتالية التكرارية**. في المتتالية التكرارية، يتم تحديد كل حد باستخدام حد واحد أو أكثر من الحدود السابقة.

تندرج الصيغ التي استخدمتها حتى الآن في المتتاليات تحت الصيغ الصريحة. تنتج **الصيغة الصريحة** a_n في صورة دالة لـ n، مثل $a_n = 3n + 1$. تُعد الصيغة التي تصف متتالية فيبوناتشي، $a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$، **صيغة تكرارية أو صيغة ضمنية**.

وهذا يعني أن كل حد سيتم تحديده باستخدام حد واحد أو أكثر من الحدود السابقة. ويجب أن نحصل على الحد الأولي في الصيغة التكرارية أو الضمنية.

المفهوم الأساسي الصيغ التكرارية / الضمنية للمتتاليات

المتتالية الحسابية	$a_n = a_{n-1} + d$، حيث d هو الفرق المشترك
المتتالية الهندسية	$a_n = r \cdot a_{n-1}$، حيث r هو النسبة المشتركة

مثال 1 استخدام صيغة تكرارية / ضمنية

جـد الحدود الخمسة الأولى للمتتالية التي فيها $a_1 = -3$ و $a_{n+1} = 4a_n - 2$، إذا كان $n \geq 1$.

$a_{n+1} = 4a_n - 2$	صيغة تكرارية
$a_{1+1} = 4a_1 - 2$	$n = 1$
$a_2 = 4(-3) - 2$ أو -14	$a_1 = -3$
$a_3 = 4(-14) - 2$ أو -58	$a_2 = -14$
$a_4 = 4(-58) - 2$ أو -234	$a_3 = -58$
$a_5 = 4(-234) - 2$ أو -938	$a_4 = -234$

الحدود الخمسة الأولى للمتتالية هي -3، و -14، و -58، و -234، و -938.

تمرين موجّه

1. جـد قيمة الحدود الخمسة للمتتالية التي يكون فيها $a_1 = 8$ و $a_{n+1} = -3a_n + 6$. إذا كان $n \geq 1$.

المفردات الجديدة

متتالية فيبوناتشي Fibonacci sequence
متتالية تكرارية recursive sequence
صيغة صريحة explicit formula
صيغة تكرارية/ضمنية recursive formula
التكرار iteration

ممارسات في الرياضيات
مراعاة الدقة.
البحث عن التوافق في الاستنتاجات المتكررة والتعبير عن ذلك.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

لإيجاد صيغة تكرارية، حدد أولاً الحد الأولي. ثم قيّم النمط لإيجاد الحدود التالية. ولا تشتمل الصيغة التكرارية التي تنتج متتالية على قيمة الحد الأولي.

مثال 2 كتابة الصيغ التكرارية/الضمنية

اكتب صيغةً تكراريةً لكل متتالية مما يلي.

a. 2, 10, 18, 26, 34, ...

الخطوة 1 حدد ما إذا كانت المتتالية حسابية أم هندسية. المتتالية حسابية لأنه يُمكن إيجاد كل حد يلي الحد الأول من خلال جمع فرق مشترك.

الخطوة 2 جـــد الفرق المشترك.

$d = 10 - 2$ أو 8

الخطوة 3 اكتب الصيغة التكرارية.

$a_n = a_{n-1} + d$	صيغة تكرارية للمتتالية الحسابية
$a_n = a_{n-1} + 8$	$d = 8$

الصيغة التكرارية للمتتالية هي $a_n = a_{n-1} + 8,\ a_1 = 2$.

b. 16, 56, 196, 686, 2401, ...

الخطوة 1 حدد ما إذا كانت المتتالية حسابية أم هندسية. المتتالية هندسية لأنه يُمكن إيجاد كل حد يلي الحد الأول بعد الضرب في النسبة المشتركة.

الخطوة 2 جـــد النسبة المشتركة.

$r = \frac{56}{16}$ أو 3.5

الخطوة 3 اكتب الصيغة التكرارية.

$a_n = r \cdot a_{n-1}$	صيغة تكرارية للمتتالية الهندسية
$a_n = 3.5\ a_{n-1}$	$r = 3.5$

الصيغة التكرارية للمتتالية هي $a_n = 3.5\ a_{n-1},\ a_1 = 16$.

c. $r = 3$ و $a_4 = 108$

الخطوة 1 حدد ما إذا كانت المتتالية حسابية أم هندسية. نظرًا لأن r مُعطى، فإن المتتالية هندسية.

الخطوة 2 اكتب الصيغة التكرارية.

$a_n = r \cdot a_{n-1}$	صيغة تكرارية للمتتالية الهندسية
$a_n = 3\ a_{n-1}$	$r = 3$

الصيغة التكرارية للمتتالية هي $a_n = 3\ a_{n-1},\ a_1 = 4$.

نصيحة دراسية

المتتاليات والصيغ التكرارية كما هو الحال في المتتاليات الهندسية، فإن الصيغ التكرارية تحدد الدوال التي يكون فيها المجال عبارة عن مجموعة من الأعداد الصحيحة الموجبة، ويُشار إليها بعدد الحدود n.

تمرين موجّه

اكتب صيغةً تكراريةً لكل متتالية مما يلي.

2A. 8, 20, 50, 125, 312.5, ... **2B.** 8, 17, 26, 35, 44, ... **2C.** $r = 4$ و $a_3 = 16$

McGraw-Hill Education مؤسسة لصالح محفوظة © والتأليف الطبع حقوق



الربط بالحياة اليومية

في عام 2008، بلغ متوسط مديونية البطاقات الائتمانية لطلاب الكليات حوالي AED 3173.

المصدر: صحيفة *USA Today*

مثال 3 من الحياة اليومية استخدام صيغة تكرارية

المعرفة المالية **كان لدى ناصر AED 15,000 في مديونية البطاقة الائتمانية عندما تخرج من الكلية. وقد ازداد الرصيد بمقدار 2% كل شهر بفعل نسبة المرابحة، ولا يُمكن لناصر أن يسدد سوى AED 400 كل شهر. اكتب صيغة تكرارية لرصيد حسابه لكل شهر. ثم حدد الرصيد بعد مرور خمسة أشهر.**

الخطوة 1 اكتب الصيغة التكرارية.

بفرض أن a_n تمثل رصيد الحساب في عدد n من الشهور. ويبلغ الرصيد الأولي a_1 AED 15,000. بعد شهر واحد **تمت إضافة نسبة المرابحة** و**تم السداد**.

الرصيد الأولي		الرصيد في 2%		مبلغ السداد الشهري
$a_2 =$	a_1	$+ (a_1 \times 0.02)$	$-$	400

$$a_2 = 1.02\, a_1 - 400$$

الصيغة هي $a_n = 1.02a_{n-1} - 400$.

الخطوة 2 جـد الحدود الخمسة التالية.

صيغة تكرارية	
$a_n = 1.02\, a_{n-1} - 400$	
$a_2 = (15{,}000 \times 1.02) - 400$	أو 14,900
$a_3 = (14{,}900 \times 1.02) - 400$	أو 14,798
$a_4 = (14{,}798 \times 1.02) - 400$	أو 14,693.96
$a_5 = (14{,}693.96 \times 1.02) - 400$	أو 14,587.84
$a_6 = (14{,}587.84 \times 1.02) - 400$	أو 14,479.60

	صيغة تكرارية
$a_1 = 15{,}000$	
$a_2 = 14{,}900$	
$a_3 = 14{,}798$	
$a_4 = 14{,}693.96$	
$a_5 = 14{,}587.84$	

بعد الشهر الخامس، سيصبح الرصيد AED 14,479.60.

تمرين موجّه

3. اكتب صيغة تكرارية لدين يبلغ AED 10,000، ونسبة المرابحة بقيمة 2.5% كل شهر، مع سداد مبلغ AED 600 كل شهر. ثم جـد المبالغ الخمس الأولى التي كانت متوفرة في الرصيد.

مراجعة المفردات

تركيب الدوال

يتم تنفيذ دالة، ثم يتم تنفيذ دالة أخرى على ناتج الدالة الأولى.

2 الإعادة

الإعادة هي عملية تكوين دالة بشكل متكرر من نفسها. تأمل الدالة x_0. الإعادة الأولى هي $f(x_0)$، والإعادة الثانية هي $f(f(x_0))$، والإعادة الثالثة هي $f(f(f(x_0)))$، وهكذا.

يُمكن استخدام الإعادة في إنتاج متتالية بشكل تكراري. ابدأ بالقيمة الأولية x_0. افترض أن $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(f(x_0))$، وهكذا.

مثال 4 إعادة الدالة

جـد الإعادات الثلاثة الأولى x_1، و x_2، و x_3 للدالة $f(x) = 5x + 4$ للقيمة الأولية التي تبلغ $x_0 = 2$.

$x_1 = f(x_0)$	أعد الدالة.
$= 5(2) + 4 = 14$	$x_0 = 2$
$x_2 = f(x_1)$	أعد الدالة.
$= 5(14) + 4 = 74$	$x_1 = 14$
$x_3 = f(x_2)$	أعد الدالة.
$= 5(74) + 4 = 374$	$x_2 = 74$

الإعادات الثلاثة الأولى هي 14 و 74 و 374.

تمرين موجّه

4. جـد الإعادات الثلاثة الأولى x_1، و x_2، و x_3 للدالة $f(x) = -3x + 8$ للقيمة الأولية التي تبلغ $x_0 = 6$.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التحقق من فهمك

مثال 1 **جــد الحدود الخمسة الأولى لكل متتالية موضحة.**

1. $a_1 = 16, a_{n+1} = a_n + 4$

2. $a_1 = -3, a_{n+1} = a_n + 8$

3. $a_1 = 5, a_{n+1} = 3a_n + 2$

4. $a_1 = -4, a_{n+1} = 2a_n - 6$

مثال 2 **اكتب صيغة تكرارية لكل متتالية.**

5. 3, 8, 18, 38, 78, ...

6. 5, 14, 41, 122, 365, ...

مثال 3

7. التمويل اشترى فارس آلة تجديف بقيمة AED 1500 لمساعدته على التدريب في فريق التجديف بالجامعة. ويستطيع سداد AED 100 فقط في الشهر، وتزداد الفاتورة بمقدار 1% بفعل نسبة المرابحة في نهاية كل شهر.

a. اكتب صيغة تكرارية للمبلغ الذي يدين به فارس في نهاية كل شهر.

b. جــد المبلغ الذي يدين به فارس بعد مرور الأربعة شهور الأولى.

c. ما مقدار نسبة المرابحة التي تراكمت بعد مرور الستة أشهر الأولى؟

مثال 4 **جــد التكرارات الثلاثة الأولى لكل دالة بالنسبة للقيمة الأولية المعطاة.**

8. $f(x) = 5x + 2, x_0 = 8$

9. $f(x) = -4x + 2, x_0 = 5$

10. $f(x) = 6x + 3, x_0 = -4$

11. $f(x) = 8x - 4, x_0 = -6$

التدريب وحل المسائل

مثال 1 **المثابرة** **جــد الحدود الخمسة الأولى من كل متتالية موضحة.**

12. $a_1 = 10, a_{n+1} = 4a_n + 1$

13. $a_1 = -9, a_{n+1} = 2a_n + 8$

14. $a_1 = 12, a_{n+1} = a_n + n$

15. $a_1 = -4, a_{n+1} = 2a_n + n$

16. $a_1 = 6, a_{n+1} = 3a_n - n$

17. $a_1 = -2, a_{n+1} = 5a_n + 2n$

18. $a_1 = 7, a_2 = 10, a_{n+2} = 2a_n + a_{n+1}$

19. $a_1 = 4, a_2 = 5, a_{n+2} = 4a_n - 2a_{n+1}$

20. $a_1 = 4, a_2 = 3x, a_n = a_{n-1} + 4a_{n-2}$

21. $a_1 = 3, a_2 = 2x, a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-2}$

22. $a_1 = 2, a_2 = x + 3, a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2}$

23. $a_1 = 1, a_2 = x, a_n = 3a_{n-1} + 6a_{n-2}$

مثال 2 **اكتب صيغة تكرارية لكل متتالية.**

24. 16, 10, 7, 5.5, 4.75, ...

25. 32, 12, 7, 5.75, ...

26. 4, 15, 224, 50,175, ...

27. 1, 2, 9, 730, ...

28. 9, 33, 129, 513, ...

29. 480, 128, 40, 18, ...

30. 393, 132, 45, 16, ...

31. 68, 104, 176, 320, ...

مثال 3

32. المعرفة المالية يودع السيد عدنان وشركته AED 20,000 في حساب تقاعده بنهاية كل عام. ويكسب الحساب 8% كنسبة مرابحة قبل كل إيداع.

a. اكتب صيغة تكرارية لرصيد الحساب عند نهاية كل عام.

b. حدد المبلغ الموجود في الحساب عند نهاية كل عام على مدار الأعوام الثمانية الأولى.

مثال 4 **جــد التكرارات الثلاثة الأولى لكل دالة بالنسبة للقيمة الأولية المعطاة.**

33. $f(x) = 12x + 8, x_0 = 4$

34. $f(x) = -9x + 1, x_0 = -6$

35. $f(x) = -6x + 3, x_0 = 8$

36. $f(x) = 8x + 3, x_0 = -4$

37. $f(x) = -3x^2 + 9, x_0 = 2$

38. $f(x) = 4x^2 + 5, x_0 = -2$

39. $f(x) = 2x^2 - 5x + 1, x_0 = 6$

40. $f(x) = -0.25x^2 + x + 6, x_0 = 8$

41. $f(x) = x^2 + 2x + 3, x_0 = \frac{1}{2}$

42. $f(x) = 2x^2 + x + 1, x_0 = -\frac{1}{2}$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education



43. الأنماط الهندسية المتكررة تأمل الأشكال الموجودة على اليسار. يزداد عدد المثلثات الزرقاء وفق نمط معين.

a. اكتب صيغة تكرارية لعدد المثلثات الزرقاء في متتالية الأشكال.

b. كم عدد المثلثات الزرقاء التي ستكون في الشكل السادس؟

44. المعرفة المالية يبلغ قسط قرض عامر الشهري AED 234.85. وتصف الصيغة التكرارية $b_n = 1.005b_{n-1} - 234.85$ الرصيد المتبقي في القرض بعد سداد عدد n من الأقساط. جد رصيد قرض يبلغ AED 10,000 بعد سداد كل قسط من الأقساط الثمانية الأولى.

45. المحافظة على البيئة افترض أن بحيرة يوجد بها 10,000 سمكة. وبعد عام، كانت نسبة السمك الذي نفق أوتم اصطياده 80%. ولكن تم تجديد الحياة بالبحيرة بالدفع بمجموعة من 10,000 سمكة. إذا استمر هذا النمط، هل سينفد السمك من البحيرة؟ إذا كانت الإجابة لا، فهل سيقترب عدد الأسماك في البحيرة إلى أي قيمة محددة؟ اشرح.



46. الهندسة تأمل الرسم البياني الموجود على اليسار.

a. اكتب متتالية لإجمالي عدد المثلثات الموجودة في الأشكال الستة الأولى.

b. اكتب صيغة تكرارية لعدد المثلثات.

c. كم عدد المثلثات التي ستكون في الشكل العاشر؟

47. أوراق البيانات تأمل المتتالية التي فيها $x_0 = 20{,}000$ و $f(x) = 0.3x + 5000$.

a. أدخل x_0 في الخلية A1 بورقة البيانات الخاصة بك. وأدخل "(0.3)*(A1) + 5000 =" في الخلية A2. ما النتيجة التي توصلت إليها؟

b. انسخ الخلية A2، وظلل الخلايا من A3 إلى A70، والصق الخلية التي نسختها. ماذا تلاحظ بشأن المتتالية؟

c. كيف يساعد ورق البيانات على تحليل المتتاليات التكرارية؟

48. ألعاب الفيديو لدى الوحش الأخير في لعبة هداية 100 نقطة طاقة. وخلال المعركة الأخيرة، يكتسب الوحش 10% من نقاط الطاقة لنفسه بعد مرور كل 10 ثوانٍ. إذا استطاعت هداية إلحاق الضرر بالوحش بخفض 10 نقاط من نقاط الطاقة لديه كل 10 ثوانٍ دون إلحاق الضرر بنفسها، فهل يُمكنها قتل الوحش بهذه الطريقة؟ إذا كانت الإجابة نعم، فمتى سيُمكنها ذلك؟

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

49. النقد يوجد كلٌّ من سلطان وسعيد التكرارات الثلاثة الأولى للدالة $f(x) = 5x - 3$ للقيمة الأولية لـ $x_0 = 4$. هل أحدهما على صواب؟ اشرح.

سلطان	سعيد
17 أو $f(4) = 5(4) - 3$	17 أو $f(4) = 5(4) - 3$
82 أو $f(17) = 5(17) - 3$	82 أو $f(17) = 5(17) - 3$
التكرارات الثلاثة الأولى هي 4 و 17 و 82.	407 أو $f(82) = 5(82) - 3$
	التكرارات الثلاثة الأولى هي 17 و 82 و 407.

50. تحدٍ جد الصيغة التكرارية لـ ... ,5, 23, 98, 401.

51. الاستنتاج هل العبارة "إذا كانت الحدود الثلاثة الأولى لمتتالية هي نفسها، فإن المتتالية ليست تكرارية" صحيحة أحيانًا، أم دائمًا، أم غير صحيحة دائمًا؟

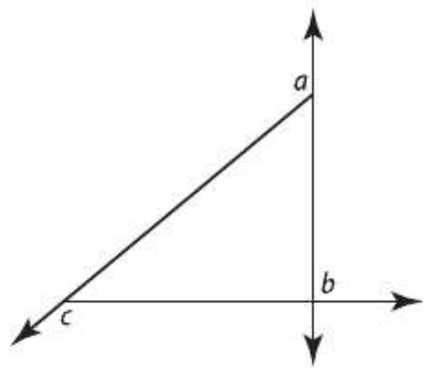
52. مسألة غير محددة الإجابة اكتب دالة تكون التكرارات الثلاثة الأولى فيها هي 9، و 19، و 39.

53. الكتابة في الرياضيات لماذا من المفيد تمثيل متتالية بصيغة صريحة أو تكرارية؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تدريب على الاختبار المعياري

54. الهندسة في الشكل الموضح.



$a + b + c = ?$

A 180°
B 270°
C 360°
D 450°

55. الإجابة الموسعة أطلق عمر نموذجًا لصاروخ على مستوى الأرض. ويُمكن إيجاد ارتفاع الصاروخ h بالمتر باستخدام المعادلة $h = -4.9t^2 + 56t$. حيث t يمثل الزمن بالثانية بعد الإطلاق.

a. ما أقصى ارتفاع سيصل إليه الصاروخ؟

b. ما الفترة التي سيقضيها الصاروخ بعد إطلاقه حتى يصل إلى أعلى ارتفاع له؟ قرّب إلى أقرب جزء من العشرة للثانية.

c. ما الفترة التي سيقضيها الصاروخ بعد إطلاقه حتى يهبط؟ قرّب إلى أقرب جزء من العشرة للثانية.

56. أي مما يلي صحيح بشأن التمثيلان البيانيان لـ $y = 3(x - 4)^2 + 5$ و $y = 3(x + 4)^2 + 5$

F الرؤوس في الحدود القصوى.

G التمثيلان البيانيان لهما الشكل نفسه مع اختلاف الرؤوس.

H التمثيلان البيانيان لهما شكلان مختلفان ورؤوس مختلفة.

J رأس أحد التمثيلين البيانيين في الحد الأقصى، بينما الآخر رأسه في الحد الأدنى.

57. ما العامل الذي قد يمثل الطول في العرض؟

$A = 16x^4 - 25y^2$

A $(4x - 5y)(4x - 5y)$
B $(4x + 5y)(4x - 5y)$
C $(4x^2 - 5y)(4x^2 + 5y)$
D $(4x^2 + 5y)(4x^2 + 5y)$

مراجعة شاملة

اكتب الكسر العشري الدوري في صورة كسر اعتيادي. (الدرس 4-9)

58. $0.\overline{7}$ **59.** $5.\overline{126}$ **60.** $6.\overline{259}$

61. الرياضة يتدرب عبيدة لماراثون بطول حوالي 26 km. وبدأ بركض كيلومترين. ثم عندما يركض كل يوم آخر، فإنه يركض مسافة مقدارها واحد ونصف من المسافة التي ركضها اليوم السابق. (الدرس 3-9)

a. اكتب الحدود الخمسة الأولى لمتتالية توضّح جدول التدريب الخاص به.

b. متى سيتخطى 26 km. في مسافة ركض واحدة؟

c. متى سيكون قد ركض مسافة 100 km.في المجمل؟

حدد ما إذا كانت الأحداث *مستقلة* أم *غير مستقلة*.

62. إلقاء قطعة نقد نقدية ورمي مكعب أعداد

63. اختيار المركزين الأول والثاني في مسابقة أكاديمية

مراجعة المهارات

جـد كل ناتج الضرب في كل مما يلي.

64. $(y + 4)(y + 3)$ **65.** $(x - 2)(x + 6)$ **66.** $(a - 8)(a + 5)$

67. $(4h + 5)(h + 7)$ **68.** $(9p - 1)(3p - 2)$ **69.** $(2g + 7)(5g - 8)$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

9-6 مختبر ورقة البيانات
تسديد القروض على أقساط

عند تسديد أقساط قرض، يُستخدم جزء لتسديد نسبة المرابحة التي تراكمت منذ آخر سداد. ويُستخدم الباقي لتقليل *رأس المال*، أو مبلغ القرض الأصلي. ويُطلق على هذه العملية *التسديد على أقساط*. يُمكنك استخدام ورقة بيانات لتحليل أقساط السداد، ونسبة المرابحة، والرصيد بالنسبة لقرض ما. ويُطلق على الجدول الذي يوضّح مثل هذا النوع من المعلومات جدول *الأقساط*.

ممارسات في الرياضيات
استخدام الأدوات الملائمة بطريقة إستراتيجية.

مثال

القروض اشترت نجلاء هاتفًا ذكيًا جديدًا مقابل AED 695. ويُتيح لها المصرف السداد على هيئة أقساط شهرية بقيمة AED 60.78 مع إضافة نسبة مرابحة بقيمة 9% لكل عام. ما المبلغ الذي ستكون مدينة به للمتجر بعد مرور ستة أشهر؟

كل شهر، ستكون نسبة المرابحة على الرصيد المتبقي $\frac{9\%}{12}$ أو 0.75%. ويُمكنك إيجاد الرصيد بعد السداد من خلال ضرب الرصيد بعد القسط السابق في 0.0075 + 1 أو 1.0075 ثم اطرح 60.78.

في ورقة البيانات، يمثل عمود الأعداد عدد الأقساط، ويوضّح العمود B الرصيد. أدخل نسبة المرابحة في القسط الشهري في الخلايا بالعمود A بحيث يُمكن تحديثها بسهولة إذا تم تغيير المعلومات.

توضح ورقة البيانات على اليسار الصيغ الخاصة بالرصيد بعد سداد كل قسط لمدة الستة شهور الأولى. وبعد مرور ستة أشهر، ما زالت تدين نجلاء بمبلغ AED 355.28.

قرض الهاتف الذكي

◇	A	B	C
1	نسبة المرابحة	=695*(1+A2)−A5	
2	0.0075	=B1*(1+A2)−A5	
3		=B2*(1+A2)−A5	
4	القسط الشهري	=B3*(1+A2)−A5	
5	60.78	=B4*(1+A2)−A5	
6		=B5*(1+A2)−A5	
7			

ورقة 1 | ورقة 2 | ورقة 3

النموذج والتحليل

1. افترض أن b_n هو الرصيد المتبقي من قرض نجلاء بعد مرور عدد n من الشهور. اكتب معادلة تربط بين b_n و b_{n+1}.
2. يتم تخصيص أجزاء كبيرة من أقساط السداد لنسبة المرابحة في بداية السداد، وذلك في مقابل تخصيص أجزاء أقل لآخر فترة في السداد. ما النسبة المئوية التي سيتبقى على نجلاء سدادها بعد مرور نصف عام؟
3. قم بالتوسع في ورقة البيانات لتغطية العام بأكمله. كم يبلغ الرصيد بعد مرور 12 قسطًا من السداد؟ ولماذا لم يصل إلى 0؟
4. افترض أن نجلاء قررت سداد AED 70 كل شهر. ما المدة التي ستستغرقها لسداد القرض؟
5. افترض أنه وفق المبلغ الذي يُمكن لنجلاء تحمل سداده، سوف تسدد مبلغًا مختلفًا كل شهر بالإضافة إلى AED 60.78. اشرح مدى المرونة التي تتمتع بها ورقة البيانات ويُمكن استخدامها لتتوافق مع هذا الموقف.
6. أخذ أمير قرضًا لشراء دراجة بمبلغ AED 12,000 لمدة ثلاثة أعوام. وتبلغ نسبة المرابحة السنوية 6%. ويبلغ القسط السنوي AED 365.06. وبعد الشهر الخامس، حصل على ميراث، ويريد استخدامه في سداد هذا الدين. ما إجمالي المبلغ الذي يدين به إلى المصرف في هذا الوقت؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

7-9 نظرية ذات الحدين

السابق

- لقد استخدمتَ التوافيق.

الحالي

1. استخدام مثلث باسكال لكتابة التعابير ذات الحدين.
2. استخدام نظرية ذات الحدين لتفكيك أسس ذوات الحدين.

لماذا؟

- يخطط مدير لترقية ثمانية من الموظفين. ولرغبته في ألا يبدو متحيزًا، يرغب المدير في ترقية مجموعة من الموظفين الكبار والصغار في صورة توفيق يحظى بفرصة للحدوث عشوائيًا نسبتها 10% على الأقل. فإذا كان هناك عدد متساوٍ من الموظفين الكبار والصغار المتقدمين، فهل احتمال توظيف 6 من كبار الموظفين و 2 من صغار الموظفين بشكل عشوائي أقل من 10%؟



المفردات الجديدة

مثلث باسكال
Pascal's triangle

ممارسات في الرياضيات

استخدام نماذج الرياضيات.

1 مثلث باسكال

في القرن الثالث عشر، اكتشف الصينيون نمطًا من الأعداد سيشار إليه لاحقًا باسم **مثلث باسكال**. ويمكن استخدام هذا النمط لتحديد معامِلات ذات حدين مفككة $(a + b)^n$.

$(a + b)^0$					1					
$(a + b)^1$				1		1				
$(a + b)^2$			1		2		1			
$(a + b)^3$		1		3		3		1		
$(a + b)^4$	1		4		6		4		1	
$(a + b)^5$	**1**		**5**		**10**		**10**		**5**		**1**

فعلى سبيل المثال، الصيغة المفككة لـ $(a + b)^5$ هي $(a + b)^5 = \mathbf{1}a^5 + \mathbf{5}a^4b + \mathbf{10}a^3b^2 + \mathbf{10}a^2b^3 + \mathbf{5}ab^4 + \mathbf{1}b^5$.

مثال 1 من الحياة اليومية استخدام مثلث باسكال

جد احتمال ترقية 6 من كبار الموظفين و 2 من صغار الموظفين من خلال توسيع $(m + f)^8$.

اكتب ثلاثة صفوف إضافية من مثلث باسكال واستخدم النمط لكتابة المفكوك.

5				1		5		10		10		5		1		
6			1		6		15		20		15		6		1	
7		1		7		21		35		35		21		7		1
8	1		8		28		56		70		56		28		8		1

$(m + f)^8 = m^8 + 8m^7f + 28m^6f^2 + 56m^5f^3 + 70m^4f^4 + 56m^3f^5 + 28m^2f^6 + 8mf^7 + f^8$

عن طريق جمع معاملات كثيرة الحدود، نحدد وجود 256 توفيقًا من كبار وصغار الموظفين الذين يمكن ترقيتهم.

$28m^6f^2$ يمثل عدد التوفيقات لترقية 6 من كبار الموظفين و 2 من صغار الموظفين.

إذًا، هناك $\frac{28}{256}$ أو حوالي فرصة بنسبة 11% لترقية 6 من كبار الموظفين و 2 من صغار الموظفين بشكل عشوائي.

تمرين موجّه

1. فكّك $(c + d)^9$.

2 نظرية ذات الحدين

بدلاً من كتابة صف بعد صف من مثلث باسكال، يُمكنك استخدام **نظرية ذات الحدين** لتوسيع ذات حدين. تذكر أن ${}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

المفهوم الأساسي نظرية ذات الحدين

إذا كان n عددًا طبيعيًا، فإن $(a + b)^n =$

$$ {}_nC_0\, a^n b^0 + {}_nC_1\, a^{n-1} b^1 + {}_nC_2\, a^{n-2} b^2 + \cdots + {}_nC_n\, a^0 b^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}\, a^{n-k} b^k $$

نصيحة دراسية

التوافيق تذكر أن كلاً من ${}_nC_0$ و ${}_nC_n$ يساوي 1.

لاستخدام النظرية، عوّض عن n بقيمة الأس. ولاحظ كيف ستتبع الحدود نمط مثلث باسكال، وستكون العوامل متناظرة.

مثال 2 استخدام نظرية ذات الحدين

فكّك $(a + b)^7$.

الخطوة 1 استخدم التوافيق.

عوّض عن n بالعدد 7 في نظرية ذات الحدين.

$$ (a + b)^7 = {}_7C_0\, a^7 + {}_7C_1\, a^6 b + {}_7C_2\, a^5 b^2 + {}_7C_3\, a^4 b^3 + {}_7C_4\, a^3 b^4 + {}_7C_5\, a^2 b^5 + {}_7C_6\, a b^6 + {}_7C_7\, b^7 $$

$$ = a^7 + \frac{7!}{6!}\, a^6 b + \frac{7!}{2!5!}\, a^5 b^2 + \frac{7!}{3!4!}\, a^4 b^3 + \frac{7!}{4!3!}\, a^3 b^4 + \frac{7!}{5!2!}\, a^2 b^5 + \frac{7!}{6!}\, a b^6 + b^7 $$

$$ = a^7 + 7a^6 b + 21a^5 b^2 + 35a^4 b^3 + 35a^3 b^4 + 21a^2 b^5 + 7ab^6 + b^7 $$

الخطوة 2 استخدام مثلث باسكال.

استخدم نظرية ذات الحدين لتحديد الأسس. ولكن بدلاً من إيجاد المعاملات باستخدام التوافيق. يمكنك النظر إلى الصف السابع من مثلث باسكال.

6 1 6 15 20 15 6 1
7 1 7 21 35 35 21 7 1
8 1 8 28 56 70 56 28 8 1

$$ (a + b)^7 = a^7 + 7a^6 b + 21a^5 b^2 + 35a^4 b^3 + 35a^3 b^4 + 21a^2 b^5 + 7ab^6 + b^7 $$

تمرين موجّه

2. فكّك $(x + y)^{10}$.

عندما تحتوي ذات الحدين التي سيتم تفكيكها على معاملات بخلاف 1. لن تكون المعاملات متماثلة بعد ذلك. وفي هذه الحالات، ربما ترغب في استخدام نظرية ذات الحدين.

مثال 3 معاملات بخلاف 1

فكّك $(5a - 4b)^4$.

$$ (5a - 4b)^4 $$

$$ = {}_4C_0\,(5a)^4 + {}_4C_1\,(5a)^3(-4b) + {}_4C_2\,(5a)^2(-4b)^2 + {}_4C_3\,(5a)(-4b)^3 + {}_4C_4\,(-4b)^4 $$

$$ = 625a^4 + \frac{4!}{3!}\,(125a^3)(-4b) + \frac{4!}{2!2!}\,(25a^2)(16b^2) + \frac{4!}{3!}\,(5a)(-64b^3) + 256b^4 $$

$$ = 625a^4 - 2000a^3 b + 2400a^2 b^2 - 1280ab^3 + 256b^4 $$

نصيحة دراسية

حاسبة التمثيل البياني

يمكنك حساب ${}_nC_r$ باستخدام حاسبة التمثيل البياني.

اضغط على MATH واختر PRB 3.

تمرين موجّه

3. فكّك $(3x + 2y)^5$.

وقد تحتاج أحيانًا إلى إيجاد حد واحد فقط في مفكوك ذات الحدين. ولفعل ذلك، يُمكنك استخدام صيغة حاصل الجمع من أجل نظرية ذات الحدين. $\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}\, a^{n-k} b^k$.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

مثال 4 تحديد حد واحد

جـد الحد الخامس من $(y + z)^{11}$.

الخطوة 1 استخدم نظرية ذات الحدين لكتابة المفكوك في الرمز سيجما.

$$(y + z)^{11} = \sum_{k=0}^{11} \frac{11!}{k!(11-k)!} y^{11-k} z^k$$

الخطوة 2 بالنسبة للحد الخامس، $k = 4$.

$$\frac{11!}{k!(11-k)!} y^{11-k} z^k = \frac{11!}{4!(11-4)!} y^{11-4} z^4$$

$C(11, 4) = 330$

$$= 330y^7z^4$$

تمرين موجّه

4. جـد الحد السادس $(c + d)^{10}$.

ملخص المفهوم نظرية ذات الحدين

في مفكوك ذات الحدين لـ $(a + b)^n$.

- يوجد $n + 1$ من الحدود
- n هو أس a في الحد الأول وأس b في الحد الأخير.
- في الحدود المتتابعة، يتناقص أس a بمقدار 1. ويتزايد أس b بمقدار 1.
- مجموع الأسس في كل حد يساوي n.
- المعاملات متماثلة.

التحقق من فهمك

الأمثلة 3–1 **فكّك كل ذات حدين.**

1. $(c + d)^5$ **2.** $(g + h)^7$ **3.** $(x - 4)^6$

4. $(2y - z)^5$ **5.** $(x + 3)^5$ **6.** $(y - 4z)^4$

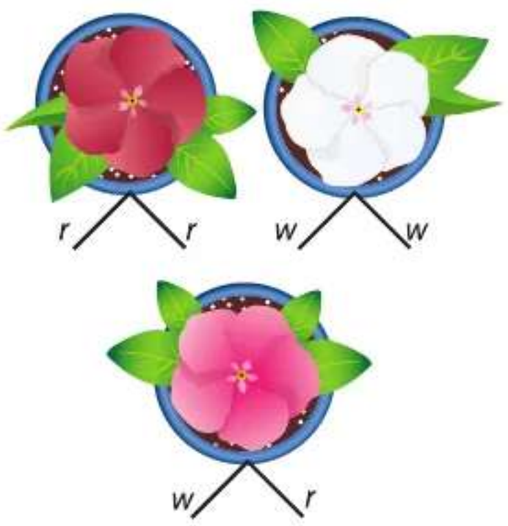
7. علم الوراثة إذا كانت فرصة أن تُرزق امرأة بولد أو ببنت متساوية، فاستخدم مفكوك ذات الحدين لتحديد احتمال أن تُرزق بخمس بنات من إجمالي أطفالها الستة. ولا تضع التوائم المتماثلة في الاعتبار.

مثال 4 **جـد الحد المشار إليه لكل تعبير.**

8. الحد الرابع لـ $(b + c)^9$ **9.** الحد الخامس لـ $(x + 3y)^8$ **10.** الحد الثالث لـ $(a - 4b)^6$

11. الحد السادس لـ $(2c - 3d)^8$ **12.** الحد الأخير لـ $(5x + y)^5$ **13.** الحد الأول لـ $(3a + 8b)^5$

14. تمثيل النماذج يتم تحديد لون زهرة معينة باستخدام توفيق جينين يُطلق عليهما أليلات . وإذا احتوت الزهرة على أليلين أحمرين r، فستكون الزهرة حمراء. وإذا احتوت الزهرة على أليلين أبيضين w، فستكون الزهرة بيضاء. وإذا احتوت الزهرة على أليل واحد من كل لون، فستكون الزهرة وردية اللون. وفي مختبر، يتم تلقيح زهرتين ورديتين وتنتجان في النهاية 1000 من سلالتيهما. فكم من سلالة الـ 1000 زهرة ستكون وردية اللون؟



حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التدريب وحل المسائل

يوجد التدريب الإضافي في الصفحة R10.

الأمثلة 3–1 **فكّك كل ذات حدين.**

15. $(a - b)^6$ **16.** $(c - d)^7$ **17.** $(x + 6)^6$

18. $(y - 5)^7$ **19.** $(2a + 4b)^4$ **20.** $(3a - 4b)^5$

21. اللجان إذا تقدم عددٌ متساوٍ من حديثي السن وكبار السن ليصبحوا ضمن لجنة الرياضة المدرسية واللجنة تحتاج إلى 10 أشخاص في المجمل. فجد احتمال أن يكون 7 من أعضائها من صغار السن. افترض أنه سيتم اختيار أعضاء اللجنة عشوائيًا.

22. البيسبول إذا كان من المحتمل أن يلقي الرامي الكرة ليحرز رمية ناجحة. فجد احتمال أن تكون 11 من أول 12 رمية له رميات ناجحة.

مثال 4 **جد الحد المشار إليه لكل تعبير.**

23. الحد الثالث لـ $(x + 2z)^7$

24. الحد الرابع لـ $(y - 3x)^6$

25. الحد السابع لـ $(2a - 2b)^8$

26. الحد السادس لـ $(4x + 5y)^6$

27. الحد الخامس لـ $(x - 4)^9$

28. الحد الرابع لـ $(c + 6)^8$

فكّك كل ذات حدين.

29. $\left(x + \frac{1}{2}\right)^5$ **30.** $\left(x - \frac{1}{3}\right)^4$

31. $\left(2b + \frac{1}{4}\right)^5$ **32.** $\left(3c + \frac{1}{3}\right)^5$

33. التبرير المنطقي في $\frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}$، افترض أن p يمثل احتمال النجاح و q يمثل احتمال الفشل.

a. إذا أحرز لاعب 70% من ركلات الجزاء التي لعبها، فجد احتمال أن يحرز 9 ركلات جزاء من المحاولات العشر التالية.

b. إذا أكمل لاعب وسط 60% من تمريراته، جد احتمال أن يكمل 8 محاولات من العشر محاولات التالية.

c. إذا نجح فريق في إحراز 30% من الركلات الحرة، فجد احتمال أن يحرز ركلتين من الخمس ركلات الحرة التالية.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

34. تحدٍ جد الحد السادس لمفكوك $\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^{12}$. اشرح استنتاجك.

35. التبرير اشرح مدى تشابه واختلاف حدود $(x + y)^n$ و $(x - y)^n$.

36. التبرير حدد ما إذا كان العبارة التالية صحيحة أم خاطئة. اشرح استنتاجك.

الحدان الثامن والثاني عشر لـ $(x + y)^{20}$ لهما نفس المعاملات.

37. مسألة غير محددة الإجابة اكتب أسًا لذات حدين بحيث يكون الحد الثاني للمفكوك هو $6x^4y$.

38. الكتابة في الرياضيات اشرح كيفية كتابة حدود مثلث باسكال.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تدريب على الاختبار المعياري

39. الاحتمالات يحتوي درج مكتب على 7 أقلام رصاص حمراء مسنونة، و 5 أقلام رصاص صفراء مسنونة، و 3 أقلام رصاص حمراء غير مسنونة، و 5 أقلام رصاص صفراء غير مسنونة. فإذا تم سحب قلم رصاص من الدرج عشوائيًا، فما احتمال أن يكون أصفر، مع افتراض أن يكون أحد أقلام الرصاص المسنونة؟

A $\frac{5}{12}$

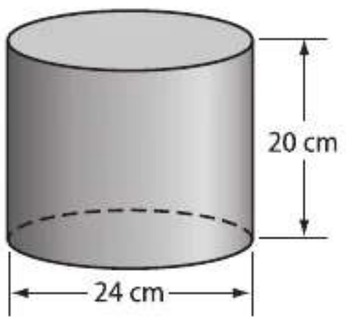
B $\frac{7}{20}$

C $\frac{5}{8}$

D $\frac{1}{5}$

40. الإجابة الشبكية يبعد شخصان 17.5 km عن بعضهما. وبدآ في السير نحو بعضهما بامتداد خط مستقيم في الوقت نفسه. وأحدهما يسير بمعدل 4 km/h، والآخر يسير بمعدل 3 km/h. فخلال كم ساعة سيلتقيان؟

41. الهندسة لدى سهى قالب أسطواني تحتاج إلى طلائه من أجل مشروع فني.



ما مساحة سطح الأسطوانة بالسنتيمترات المربعة مقربة إلى أقرب سنتيمتر مربع؟

F 1960
G 2413
H 5127
J 6635

42. أي مما يلي يمثّل دالة خطية؟

A $y = \frac{x+3}{x+2}$

B $y = (3x+2)^2$

C $y = \frac{x+3}{2}$

D $y = |3x| + 2$

مراجعة شاملة

جـد الحدود الخمسة الأولى لكل متتالية. (الدرس 5-9)

43. $a_1 = -2,\ a_{n+1} = a_n + 5$

44. $a_1 = 3,\ a_{n+1} = 4a_n - 10$

45. $a_1 = 4,\ a_{n+1} = 3a_n - 6$

جـد مجموع كل دالة هندسية لانهائية، إن أمكن. (الدرس 4-9)

46. $-6 + 3 - \frac{3}{2} + \ldots$

47. $\frac{3}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12} + \ldots$

48. $\sqrt{3} + 3 + \sqrt{27} + \ldots$

49. السفر تستغرق الرحلة بين مدينتين 4 ساعات في ظل ظروف مثالية. ويتم قطع الكيلومترات الأولى البالغ عددها 150 من الرحلة على طريق سريع بين الإمارات، بينما يتم قطع الكيلومترات الأخيرة البالغ عددها 130 km على طريق عام سريع بحد سرعة أقل بمقدار 10 km/h عن السرعة على الطريق السريع بين الإمارات.

a. إذا كان x يمثل حد السرعة على الطريق السريع بين الإمارات، فاكتب تعابير للوقت المنقضي بهذه السرعة وللوقت المنقضي على الطريق العام السريع الآخر.

b. اكتب معادلة وجـد حلها لإيجاد حدود السرعة على الطريقين السريعين.

مراجعة المهارات

حدد ما إذا كانت كل عبارة صحيحة أم *خاطئة* عند $n = 1$. اشرح.

50. $\frac{(n+1)(n+1)}{2} = 2$

51. $3n + 5$ هو عدد زوجي.

52. $n^2 - 1$ هو عدد فردي.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مختبر الجبر
التوافيق ومثلث باسكال

تذكّر أن تنظيم الأشياء أو تحديدها بأسلوب لا يهتم بالترتيب يُسمى *التوافيق*. فعلى سبيل المثال، يعد تحديد وجبتين خفيفتين من ستة اختيارات توفيقًا لعدد 6 أشياء مأخوذ منها 2 في كل مرة ويمكن كتابته في صورة ${}_6C_2$ أو $C(6, 2)$.

النشاط

أمام أحد المتسابقين في برنامج ألعاب فرصة لربح حتى خمس جوائز، بحيث يحصل على كل جائزة عن كل خمس جولات من اللعبة. وإذا فاز متسابق بجولة، فيمكنه اختيار جائزة. حدد عدد الطرق التي يمكن من خلالها اختيار الجوائز.

الخطوة 1 إذا لم يفز أي متسابق بأي جولة، فلن يحصل على أية جائزة. هذا يمثل 5 عناصر مأخوذة لعدد 0 من المرات.

$${}_nC_r = \frac{n!}{(n-r)!\,r!} \qquad \text{تعريف التوافيق}$$

$${}_5C_0 = \frac{5!}{(5-0)!\,0!} \qquad n = 5 \text{ و } r = 0$$

$$= \frac{120}{120(1)} \text{ أو } 1 \qquad 5! = 120 \text{ و } 0! = 1$$

هناك طريقة واحدة للحصول على 0 من الجوائز.

إذا فاز متسابق بجولة واحدة، فيُمكنه اختيار أي جائزة واحدة. وإذا فاز متسابق بجولتين، فيُمكنه اختيار جائزتين. وإذا فاز بثلاث جولات، فيُمكنه اختيار ثلاث جوائز. بأي عدد من الطرق يُمكن اختيار جائزة واحدة؟ وجائزتين؟ و 3 و 4 و 5 جوائز؟ هل يُمكننا تحديد هذه الإجابات من خلال فحص مثلث باسكال.

الخطوة 2 فحص مثلث باسكال.

ضع قائمة بالصفوف من 0 حتى 5 من مثلث باسكال.

الصف 0			1			
الصف 1		1		1		
الصف 2		1		2		1
الصف 3	1		3		3		1
الصف 4	1		4		6		4		1
الصف 5	1	5		10		10		5		1

يمكن تحديد عدد الطرق التي يمكن من خلالها اختيار جائزة واحدة من 5 من خلال النظر إلى الصف 5. ويمثل الرقم الأول في الصف 5 عدد طرق اختيار 0 من الجوائز، بينما يمثل الرقم الثاني عدد طرق اختيار جائزة واحدة، وهكذا.

تحليل النتائج

1. أجرِ تخمينًا بشأن كيف يمكن استخدام الأعداد الموجودة في أحد الصفوف لإيجاد عدد الطرق التي يمكن من خلالها تحديد عدد n من بين عدد n آخر من الأشياء. 0, 1, 2, 3, 4, ..., n
2. افترض أن قواعد اللعبة قد تغيرت بحيث أصبح هناك 6 جولات و 6 جوائز يمكن الاختيار من بينها. جد عدد الطرق التي يمكن من خلالها اختيار عدد 0 أو 1 أو 2 أو 3 أو 4 أو 5 أو 6 جوائز. وأي صف من صفوف مثلث باسكال يمكن استخدامه لإيجاد الإجابات؟
3. مثلث باسكال لإيجاد ${}_8C_0$ و ${}_8C_1$ و ${}_8C_2$ و ${}_8C_3$ و ${}_8C_4$ و ${}_8C_5$ و ${}_8C_6$ و ${}_8C_7$ و ${}_8C_8$. وحدد رقم الصف الذي استخدمته لإيجاد الإجابات.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

8-9 البرهان بالاستقراء الرياضي

السابق

- قمتَ ببرهنة مجموع متسلسلة حسابية.

الحالي

1 برهنة العبارات باستخدام الاستقراء الرياضي.

2 دحض عبارات عبر إيجاد مثال مضاد.

لماذا؟

- عندما تُرتَّب قطع الدومينو بالقرب من بعضها ويتم إسقاط القطعة الأولى أرضًا، فإنه سرعان ما ستتساقط بقية قطع الدومينو. وكل ما نحتاج إليه مع هذه البنية هو سقوط قطعة الدومينو الأولى، وستتبعها بقية القطع. وينطبق الأمر نفسه مع الاستقراء الرياضي.



المفردات الجديدة

الاستقراء الرياضي
mathematical induction
فرضية الاستقراء
induction hypothesis

ممارسات في الرياضيات

فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها.
بناء فرضيات عملية والتعليق على طريقة استنتاج الآخرين.

1 الاستقراء الرياضي **الاستقراء الرياضي** هو طريقة لبرهنة العبارات التي تتضمن أعدادًا طبيعية.

المفهوم الأساسي الاستقراء الرياضي

لبرهنة أن إحدى العبارات صحيحة بالنسبة لجميع الأعداد الطبيعية n.

الخطوة 1 وضّح أن العبارة صحيحة بالنسبة إلى $n = 1$.

الخطوة 2 افترض أن العبارة صحيحة بالنسبة للعدد الطبيعي k. ويُطلق على هذا الادعاء **فرضية الاستقراء**.

الخطوة 3 وضّح أن العبارة صحيحة بالنسبة للعدد الطبيعي التالي $k + 1$.

مثال 1 برهنة حاصل الجمع

برهن على أن $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

الخطوة 1 عندما يكون $n = 1$، فإن الطرف الأيسر من المعادلة يكون 1^3 أو 1.

الطرف الأيمن يساوي $\frac{2(1+1)1^2}{4}$ أو 1. إذًا، العبارة صحيحة بالنسبة لـ $n = 1$.

الخطوة 2 افترض أن $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}$ بالنسبة للعدد الطبيعي k.

الخطوة 3 وضّح أن العبارة المعطاة صحيحة بالنسبة إلى $n = k + 1$.

$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}$ فرضية الاستقراء

$1^3 + 2^3 + \cdots + k^3 + (k+1)^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3$ اجمع $(k+1)^3$ للطرفين.

$= \frac{k^2(k+1)^2 + 4(k+1)^3}{4}$ المقام المشترك الأصغر يساوي 4.

$= \frac{(k+1)^2[k^2 + 4(k+1)]}{4}$ حلل إلى العوامل.

$= \frac{(k+1)^2(k^2 + 4k + 4)}{4}$ بسّط.

$= \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$ حلل إلى العوامل.

التعبير الأخير هو العبارة المطلوب برهنتها، حيث تم التعويض عن n بالتعبير $k + 1$. وهذا يبرهن التخمين.

تمرين موجّه

1. برهن على أن $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

بالإضافة إلى استخدام الاستقراء الرياضي للبرهنة على حاصل الجمع، يمكن استخدامه أيضًا للبرهنة على قابلية القسمة.

مثال 2 برهنة قابلية القسمة

برهن على أن $8^n - 1$ يقبل القسمة على 7 لجميع الأعداد الطبيعية n.

الخطوة 1 عندما يكون $n = 1$، فإن $8^n - 1 = 8^1 - 1$ أو 7. حيث إن العدد 7 يقبل القسمة على 7. فإن العبارة صحيحة بالنسبة لـ $n = 1$.

الخطوة 2 افترض أن $8^k - 1$ يقبل القسمة على 7 بالنسبة لبعض الأعداد الطبيعية k. هذا يعني أن هناك الرقم الطبيعي r حيث إن $8^k - 1 = 7r$.

الخطوة 3 وضّح أن العبارة صحيحة بالنسبة إلى $n = k + 1$.

$8^k - 1 = 7r$	فرضية الاستقراء
$8^k = 7r + 1$	اجمع 1 إلى الطرفين.
$8(8^k) = 8(7r + 1)$	اضرب الطرفين في 8.
$8^{k+1} = 56r + 8$	بسّط.
$8^{k+1} - 1 = 56r + 7$	اطرح 1 من الطرفين.
$8^{k+1} - 1 = 7(8r + 1)$	حلل إلى العوامل.

بما أن r هو عدد طبيعي، فإن $8r + 1$ هو عدد طبيعي و 7 يقبل القسمة على 7. إذًا، $(8r + 1)$ يقبل القسمة على 7. إذًا، $8^{k+1} - 1$ يقبل القسمة على 7.

وهذا يبرهن على أن $8^n - 1$ يقبل القسمة على 7 بالنسبة إلى جميع الأعداد الطبيعية n.

تمرين موجّه

2. برهن على أن $7^n - 1$ يقبل القسمة على 6 لجميع الأعداد الطبيعية n.

نصيحة دراسية

الانتظام r هو عدد كلي يُستخدم في توضيح قابلية القسمة في البرهان. عندما تساوي قيمة $4r$، يجب أن تقبل القسمة على 4.

2 الأمثلة المضادة

يمكن البرهنة على خطأ العبارات باستخدام الاستقراء الرياضي. وهناك طريقة أسهل من خلال إيجاد مثال مضاد، وهو عبارة عن حالة معينة تكون فيها العبارة خاطئة.

مثال 3 استخدام مثال مضاد للدحض

جـد مثالاً مضادًا لتفنيد العبارة التي تشير إلى أن $2^n + 2n^2$ يقبل القسمة على 4 بالنسبة إلى أي عدد طبيعي n.

القيم المختلفة لـ n.

n	$2^n + 2n^2$	هل يقبل القسمة على 4؟
1	$2^1 + 2(1)^2 = 2 + 2$ أو 4	نعم
2	$2^2 + 2(2)^2 = 4 + 8$ أو 12	نعم
3	$2^3 + 2(3)^2 = 8 + 18$ أو 26	لا

تُمثل قيمة $n = 3$ مثالاً مضادًا للعبارة.

تمرين موجّه

3. جـد مثالاً مضادًا لتفنيد $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(3n - 1)}{2}$.

مراجعة المفردات

المثال المضاد أحد مرادفات كلمة مضاد هو متناقض. لذا فالمثال المضاد هو مثال متناقض مع إحدى الفرضيات.

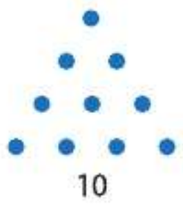
McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

التحقق من فهمك

مثال 1 **بَرهِن أن كل عبارة صحيحة بالنسبة لكل الأعداد الطبيعية.**

1. $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$

2. $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n + 1)}{2}$



3. **نظرية الأعداد** يكون العدد مثلثيًا إذا كان يُمكن تمثيله بصريًا باستخدام مصفوفة مثلثية .

a. العدد المثلثي الأول هو 1. جـد الأعداد المثلثية الخمسة التالية.

b. اكتب صيغة للعدد المثلثي n.

c. برهِن أن مجموع الأعداد المثلثية n الأولى تساوي $\frac{n(n + 1)(n + 2)}{6}$.

مثال 2 **بَرهِن أن كل عبارة صحيحة بالنسبة لكل الأعداد الطبيعية.**

4. $10^n - 1$ يقبل القسمة على 9.

5. $4^n - 1$ يقبل القسمة على 3.

مثال 3 **جـد مثالاً مضادًا لدحض كل عبارة.**

6. $3^n + 1$ يقبل القسمة على 4.

7. $2^n + 3^n$ يقبل القسمة على 4.

التدريب وحل المسائل

مثال 1 **فرضيات** **بَرهِن أن كل عبارة صحيحة بالنسبة لجميع الأعداد الطبيعية.**

8. $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$

9. $2 + 5 + 8 + \cdots + (3n - 1) = \frac{n(3n + 1)}{2}$

10. $1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1$

11. $1 + 5 + 9 + \cdots + (4n - 3) = n(2n - 1)$

12. $1 + 4 + 7 + \cdots + (3n - 2) = \frac{n(3n - 1)}{2}$

13. $3 + 7 + 11 + \cdots + (4n - 1) = 2n^2 + n$

14. $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \cdots + \frac{1}{n(n + 1)} = \frac{n}{n + 1}$

15. $1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n - 1)^2 = \frac{n(2n - 1)(2n + 1)}{3}$



16. **الهندسة** وفقًا لصيغة مجموع الزوايا الداخلية، إذا كان لمضلع محدب عدد n من الأضلاع، فإن مجموع قياسات الزوايا الداخلية للمضلع يساوي $180(n - 2)$. برهن أن الصيغة الخاصة بـ $n \geq 3$ باستخدام الاستقراء الرياضي والهندسة.

مثال 2 **بَرهِن أن كل عبارة صحيحة بالنسبة لكل الأعداد الطبيعية.**

17. $5^n + 3$ يقبل القسمة على 4.

18. $9^n - 1$ يقبل القسمة على 8.

19. $12^n + 10$ يقبل القسمة على 11.

20. $13^n + 11$ يقبل القسمة على 12.

مثال 3 **جـد مثالاً مضادًا لدحض كل عبارة.**

21. $n = n^2 + \cdots + 3 + 2 + 1$

22. $n^3 = (2n + 2)^2 + \cdots + 27 + 8 + 1$

23. $n^2 - n + 15$ هو عدد أولي.

24. $n^2 + n + 23$ هو عدد أولي.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

25. الطبيعة توجد حدود متتالية فيبوناتشي في أماكن كثيرة في الطبيعة. ويعد عدد الأشكال الحلزونية من البذور في زهور دوار الشمس من أعداد فيبوناتشي، وكذلك عدد الأشكال الحلزونية على قشور كوز الصنوبر. وتبدأ متتالية فيبوناتشي على النحو ..., 1, 1, 2, 3, 5, 8, ويتم إيجاد كل عنصر بعد أول عنصرين عن طريق جمع الحدين السابقين. إذا كان f_n يشير إلى عدد فيبوناتشي n، أثبت أن $f_1 + f_2 + \ldots + f_n = f_{n+2} - 1$.

بَرهِن أن كل عبارة صحيحة بالنسبة لكل الأعداد الطبيعية أو جـد مثالاً مضادًا.

26. $7^n + 5$ يقبل القسمة على 6.

27. $18^n - 1$ يقبل القسمة على 17.

28. $n^2 + 21n + 7$ هو عدد أولي.

29. $n^2 + 3n + 3$ هو عدد أولي.

30. $500 + 100 + 20 + \cdots + 4 \cdot 5^{4-n} = 625\left(1 - \frac{1}{5^n}\right)$

31. $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$

32. المثابرة راجع الأشكال أدناه.



a. هناك إجمالي 5 مربعات في الشكل الثاني. كم مربعًا في الشكل الثالث؟

b. اكتب متتالية للأشكال الخمسة الأولى.

c. كم مربعًا في رقعة الشطرنج التي تبلغ أبعادها 8×8؟

d. اكتب صيغة لتمثيل عدد المربعات في شبكة $n \times n$.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

33. تحدٍ اقترح صيغة لتمثيل $2 + 4 + 6 + \cdots + 2n$. وبَرهن على فرضيتك باستخدام الاستقراء الرياضي.

التبرير حدد ما إذا كانت العبارات التالية ***صحيحة*** أم ***خاطئة***. اشرح.

34. إذا تعذر عليك إيجاد مثال مضاد لعبارةٍ ما، فحينها تكون هذه العبارة صحيحة.

35. إذا كانت عبارة صحيحة بالنسبة إلى $n = k$ و $n = k + 1$. فحينها تكون أيضًا صحيحة بالنسبة إلى $n = 1$.

36. تحدٍ برهن على أن $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

37. التبرير جـد مثالاً مضادًا لـ $x^3 + 30 > x^2 + 20x$.

38. مسألة غير محددة الإجابة اكتب متتالية، والصيغة التي تنتجها، وحدد صيغة مجموع حدود المتتالية. ثم برهن صيغة الاستقراء الرياضي.

39. الكتابة في الرياضيات اشرح كيف يمكن لمفهوم قطع الدومينو أن يساعدك على فهم قوة الاستقراء الرياضي.

40. الكتابة في الرياضيات قدّم مثالاً من الحياة اليومية بدلاً من قطع الدومينو يصف الاستقراء الرياضي.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تدريب على الاختبار المعياري

41. أيٌّ مما يلي يعد مثالاً مضادًا للعبارة أدناه؟

$n^2 + n - 11$ هو عدد أولي.

A $n = -6$ **C** $n = 5$

B $n = 4$ **D** $n = 6$

42. الاحتمالات ترغب موزة في إنشاء كلمة مرور من 7 رموز. وهي ترغب في استخدام ترتيب للأحرف الثلاثة (lat)، متبوعًا بترتيب للأرقام الأربعة في العام 1986، وهو عام ميلادها. فكم العدد المحتمل لكلمات المرور التي يمكنها إنشاؤها بهذه الطريقة؟

F 72 **H** 288

G 144 **J** 576

43. الإجابة الشبكية ترس قطره 8 cm يدير ترسًا أصغر قطره 3 cm . فإذا كان الترس الأكبر يدور 36 دورة، فكم عدد الدورات التي سيدورها الترس الأصغر في هذه الحالة؟

44. الإجابة المختصرة اكتب معادلة لمستقيم n. ووضّح كيف تتوافق مع النمط لكل مستقيم معطى في القائمة.

المستقيم 1: $1 - 1 = 1 \times 0$

المستقيم 2: $2 - 2 = 4 \times 1$

المستقيم 3: $3 - 3 = 9 \times 2$

المستقيم 4: $4 - 4 = 16 \times 3$

المستقيم 5: $5 - 5 = 25 \times 4$

مراجعة شاملة

جــد الحد المُعين لكل مقدار. (الدرس 6-9)

45. الحد الرابع لـــ $(x + 2y)^6$

46. الحد الخامس لـــ $(a + b)^6$

47. الحد الرابع لـــ $(x - y)^9$

48. الأحياء في غابة ما، يهتم العلماء بمدى تغير تعداد الذئاب التي تعيش هناك بعد مرور العامين المقبلين. ويُعد نموذج فيرهلست أحد النماذج التي توضح تعداد الحيوانات التي تعيش في مكان ما. $p_{n+1} = p_n + rp_n(1 - p_n)$، حيث يمثل n عدد الفترات الزمنية التي مرت، ويمثل p_n النسبة المئوية للحد الأقصى للتعداد المناسب من الحيوانات التي تعيش في الفترة الزمنية n، بينما يمثل r عامل النمو. (الدرس 5-9)

a. لإيجاد تعداد الذئاب بعد مرور عام واحد، جــد قيمة $p_1 = 0.45 + 1.5(0.45)(1 - 0.45)$.

b. وضّح ما يمثله كل عدد في التعبير بالجزء **a**.

c. يبلغ تعداد الذئاب حاليًا 165. جــد التعداد الجديد للذئاب بضرب 165 في قيمة الجزء **a**.

جــد الحل (الحلول) الدقيقة لكل نظام من المعادلات.

49. $x^2 + y^2 - 18x + 24y + 200 = 0$
$4x + 3y = 0$

50. $4x^2 + y^2 = 16$
$x^2 + 2y^2 = 4$

مراجعة المهارات

جــد قيمة كل تعبيرٍ مما يلي.

51. $P(8, 2)$

52. $P(9, 1)$

53. $P(12, 6)$

54. $C(5, 2)$

55. $C(8, 4)$

56. $C(20, 17)$

57. $P(12, 2)$

58. $P(7, 2)$

59. $C(8, 6)$

60. $C(9, 4) \cdot C(5, 3)$

61. $C(6, 1) \cdot C(4, 1)$

62. $C(10, 5) \cdot C(8, 4)$

McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف

9-9 الدوال في صورة متسلسلة لانهائية

السابق
- وجدت الحد *النوني* لمتسلسلة لانهائية باستخدام رمز سيجما.

الحالي
1. استخدام متسلسلة قوة لتمثيل دالة نسبية.
2. استخدام تمثيلات متسلسلة القوة لتقريب قيم الدوال المتسامية.

لماذا؟
- قام فنان أولاً بعزف الموسيقى التي تستمع إليها على مشغل صوتي رقمي. ثم تم تحليل الشكل الموجي لكل صوت في الأداء إلى الأجواء المكونة له وتخزينه رقميًا. ثم تم استرجاع هذه الأجزاء ودمجها معًا لإعادة إنتاج كل مقطع صوتي أصلي من الأداء. ويعتبر التحليل لكل متسلسلة خاصة عنصرًا أساسيًا في هذه العملية.



المفردات الجديدة

متسلسلة القوة
power series
متسلسلة أسيّة
exponential series
صيغة أويلر
Euler's Formula

1 متسلسلة القوة قبل ذلك في هذه الوحدة، رأيتَ كيف يمكن التعبير عن متسلسلات الأعداد في صورة دوال. وفي هذا الدرس، سترى أن بعض الدوال يمكن تحليلها إلى متسلسلات لانهائية من دوال المركبات.

تعلمت أن مجموع المتسلسلات الهندسية اللانهائية.

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^n + \cdots,\ a_1 = 1$$

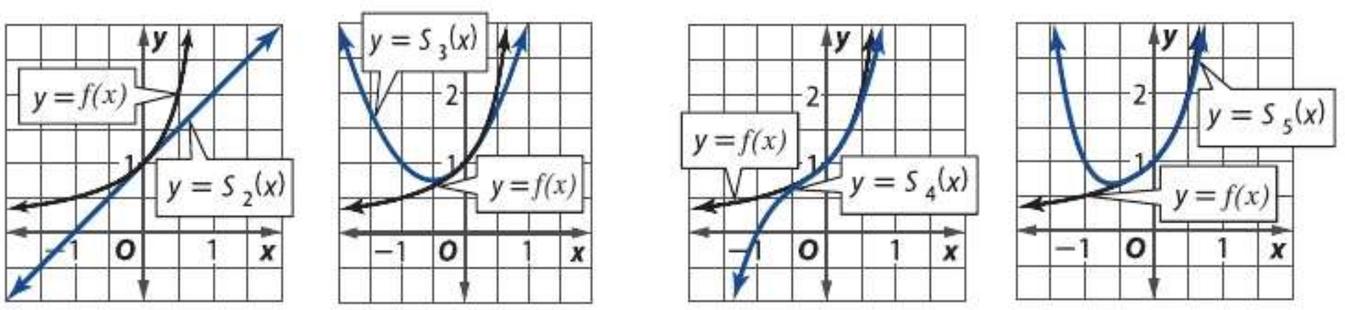
ذات النسبة المشتركة r، تقترب من المجموع $\frac{a_1}{1-r}$ إذا كان $|r| < 1$. بالتعويض عن r باستخدام x.

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1-x}$$ حيث $|x| < 1$.

ويترتب على ذلك أنه يمكن التعبير عن $f(x) = \frac{1}{1-x}$ في صورة متسلسلة لانهائية. أي أن،

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$ أو $1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$ حيث $|x| < 1$.

وتوضح الأشكال أدناه التمثيل البياني لـ $f(x) = \frac{1}{1-x}$ والمجاميع الجزئية من الثاني إلى الخامس $S_n(x)$ للمتسلسلة:
$S_2(x) = 1 + x,\ S_3(x) = 1 + x + x^2,\ S_4(x) = 1 + x + x^2 + x^3$ و $S_5(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$



لاحظ أنه بينما تزداد قيمة n، يبدو أن التمثيل البياني لـ $S_n(x)$ يقترب أكثر فأكثر من التمثيل البياني لـ $f(x)$ في الفترة $(-1, 1)$ أو $|x| < 1$. ولاحظ أيضًا أن كل مجموع من المجاميع الجزئية للمتسلسلة هو دالة كثيرة الحدود، إذًا يمكن النظر إلى المتسلسلة باعتبارها كثيرة حدود لانهائية. والمتسلسلة اللانهائية من هذا النوع تُسمى **متسلسلة القوة**.

المفهوم الأساسي متسلسلة القوة

في المتسلسلة اللانهائية التي في الصورة

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots,$$

يمكن أن تساوي x و a_n أي قيم نظرًا لأن $n = 0, 1, 2, \ldots$. وتُسمى متسلسلة قوة في x.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

إذا عرفت تمثيل متسلسلة القوة الأسيّة لدالة واحدة، فيمكنك استخدامه لإيجاد تمثيلات متسلسلة القوة الأسيّة للدوال الأخرى ذات الصلة.

مثال 1 تمثيل متسلسلة القوة للدالة النسبية

استخدم $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ لإيجاد تمثيل متسلسلة القوة $g(x) = \frac{1}{3-x}$. ووضح فترة تقارب المتسلسلة. واستخدم حاسبة التمثيل البياني للتمثيل البياني لـ $g(x)$ والمجموع الجزئي السادس من متسلسلة القوة.

لإيجاد التحويل الذي يربط $f(x)$ بـ $g(x)$، استخدم التعويض بـ u. عوض بـ u عن x في f، ساوِ بين الدالتين وجد الحل بإيجاد قيمة u كما هو مبين.

$$g(x) = f(u)$$
$$\frac{1}{3-x} = \frac{1}{1-u}$$
$$1 - u = 3 - x$$
$$-u = 2 - x$$
$$u = x - 2$$

إذًا، $g(x) = f(x-2)$. بالتعويض عن x باستخدام $x - 2$ في $f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ ينتج $|x| < 1$ حيث

$$f(x-2) = \sum_{n=0}^{\infty} (x-2)^n \text{ حيث } |x-2| < 1.$$

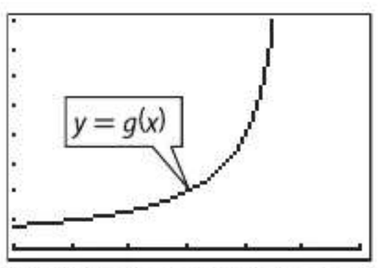
إذًا، يمكن تمثيل $g(x) = \frac{1}{3-x}$ بواسطة متسلسلة القوة $\sum_{n=0}^{\infty} (x-2)^n$.

وتتقارب هذه المتسلسلة حيث $|x-2| < 1$، بما يكافئ $1 < x < 3$ أو $-1 < x - 2 < 1$.

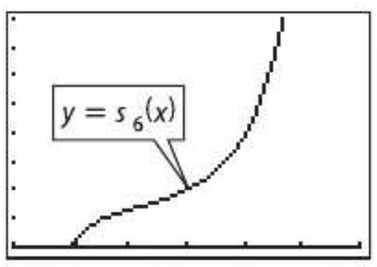
الحل الجزئي السادس $S_6(x)$ لهذه المتسلسلة هو

$$1 + (x-2) + (x-2)^2 + (x-2)^3 + (x-2)^4 + (x-2)^5 \text{ أو } \sum_{n=0}^{5} (x-2)^n.$$

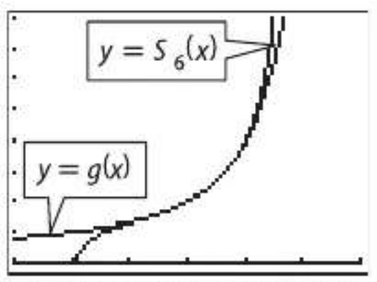
يتم توضيح التمثيل البياني لـ $g(x) = \frac{1}{3-x}$ و $S_6(x) = 1 + (x-2) + (x-2)^2 + (x-2)^3 + (x-2)^4 + (x-2)^5$ لاحظ أنه في الفترة $(1, 3)$، يقترب التمثيل البياني لـ $S_6(x)$ من التمثيل البياني لـ $g(x)$.



[0.5, 3.5] scl: 0.5 by [0, 4] scl: 0.5



[0.5, 3.5] scl: 0.5 by [0, 4] scl: 0.5



[0.5, 3.5] scl: 0.5 by [0, 4] scl: 0.5

تمرين موجّه

استخدم $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ لإيجاد تمثيل متسلسلة القوة لـ $g(x)$. ووضح فترة تقارب المتسلسلة. واستخدم حاسبة التمثيل البياني للتمثيل البياني لـ $g(x)$ والمجموع الجزئي السادس من متسلسلة القوة.

1A. $g(x) = \frac{1}{1-2x}$

1B. $g(x) = \frac{2}{1-x}$

في حساب التفاضل والتكامل، كثيرًا ما تكون تمثيلات الدالة الأسيّة أسهل استخدامًا في الحسابات من التمثيلات الأخرى للدوال عند تحديد الدوال التي يُطلق عليها *المشتقات والتكاملات*. ويمكن الاطلاع على تطبيق فعلي من خلال استعراض تمثيلات متسلسلة القوة للدوال المتسامية مثل $f(x) = e^x$ و $f(x) = \sin x$ و $f(x) = \cos x$.

قراءة في الرياضيات

عدد أويلر قام عالم الرياضيات السويدي ليونارد أويلر بنشر كتاب طور فيه هذا العدد غير النسبي الذي يُسمى e، عدد أويلر.

نصيحة دراسية

تحديد e تقدم المتسلسلة الأسية طريقة أخرى لتحديد e. عندما $x = 1$، يكون $e^1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1^n}{n!}$ أو $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

2 الدوال المتسامية في صورة متسلسلة قوة

في السابق، تعلمت أنه يتم الحصول على العدد المتسامي e من خلال $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. إذًا، $e^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx}$. ويمكننا استخدام هذا التعريف ونظرية ذات الحدّين لاشتقاق تمثيل متسلسلة قوة لـ $f(x)=e^x$.

قراءة في الرياضيات

عدد أويلر قام عالم الرياضيات السويدي ليونارد أويلر بنشر كتاب طور فيه هذا العدد غير النسبي الذي يُسمى e. عدد أويلر.

إذا افترضنا أن $u=\frac{1}{n}$ و $k=nx$. فإن $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx}$ تصبح $(1+u)^k$. وبتطبيق نظرية ذات الحدّين.

$$(1+u)^k={}_kC_0\,(1)^k u^0+{}_kC_1\,(1)^{k-1}u+{}_kC_2\,(1)^{k-2}u^2+{}_kC_3\,(1)^{k-3}u^3+\cdots$$

$$=\frac{k!}{(k-0)!\,0!}(1)+\frac{k!}{(k-1)!\,1!}(1)u+\frac{k!}{(k-2)!\,2!}(1)u^2+\frac{k!}{(k-3)!\,3!}(1)u^3+\cdots$$

$$=1+\frac{k(k-1)!}{(k-1)!}u+\frac{k(k-1)(k-2)!}{(k-2)!\,2!}u^2+\frac{k(k-1)(k-2)(k-3)!}{(k-3)!\,3!}u^3+\cdots$$

$$=1+ku+\frac{k(k-1)}{2!}u^2+\frac{k(k-1)(k-2)}{3!}u^3+\cdots$$

والآن استبدل u بـ $\frac{1}{n}$ واستبدل k بـ nx وجد الحد بينما تقترب n من اللانهائية. استخدم الحقيقة أنه بينما تقترب n من اللانهائية، تستمر قيمة $\frac{1}{n}$ في التضاؤل. إذًا $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx}=1+(nx)\frac{1}{n}+\frac{nx(nx-1)}{2!}\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{nx(nx-1)(nx-2)}{3!}\left(\frac{1}{n}\right)^3+\cdots$$

$$=1+x+\frac{x\left(x-\frac{1}{n}\right)}{2!}+\frac{x\left(x-\frac{1}{n}\right)\left(x-\frac{2}{n}\right)}{3!}+\cdots$$

$$=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$$

كثيرًا ما تُسمى هذه المتسلسلة **المتسلسلة الأسيّة**.

نصيحة دراسية

تحديد e تقدم المتسلسلة الأسية طريقة أخرى لتحديد e. عندما $x=1$، يكون $e^1=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1^n}{n!}$، أو $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$.

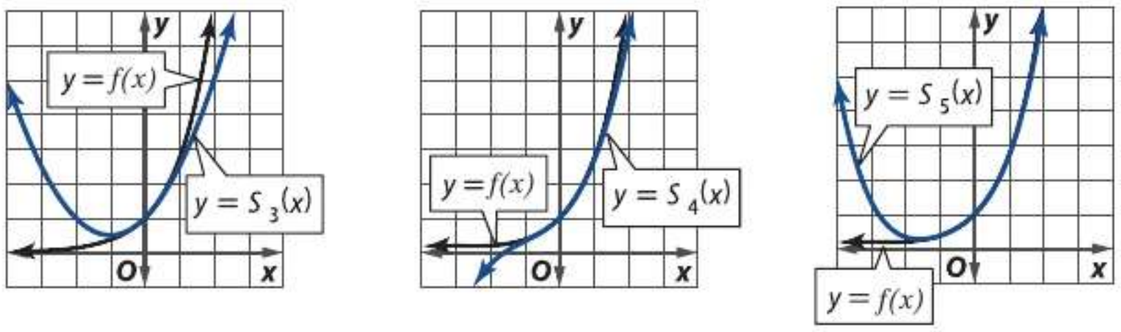
المفهوم الأساسي المتسلسلة الأسيّة

متسلسلة القوة الأسيّة التي تمثل e^x تُسمى المتسلسلة الأسيّة وهي مقدمة بالعلاقة

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots,$$

وهي مقاربة لجميع x.

تم أدناه عرض التمثيل البياني لـ $f(x)=e^x$ والمجاميع الجزئية $S_3(x)$، و $S_4(x)$ و $S_5(x)$ للمتسلسلة الأسيّة.



يمكنك من التمثيلات البيانية أن ترى أن المجاميع الجزئية للمتسلسلة الأسيّة تقترب من التمثيل البياني لـ $f(x)=e^x$ بفترة متزايدة التوسع من المجال للقيم المتزايدة لـ n.

لاحظ أن الحسابات المتضمنة في المتسلسلة الأسيّة أبسط نسبيًا: عمليات الضرب (للقوى والمضروبات) والقسمة والجمع. ولذلك، تُستخدم المتسلسلة الأسيّة في الحاسبات وبرامج الكمبيوتر لإيجاد قيمة e^x بالدرجات المطلوبة من الدقة.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

مثال 2 المتسلسلة الأسيّة

استخدم المجموع الجزئي الخامس للمتسلسلة الأسيّة لتقريب قيمة $e^{1.5}$.
قرب إلى أقرب ثلاث منازل عشرية.

$$e^x \approx \sum_{n=0}^{4} \frac{x^n}{n!}$$

$$e^{1.5} \approx 1 + 1.5 + \frac{1.5^2}{2!} + \frac{1.5^3}{3!} + \frac{1.5^4}{4!} \qquad x = 1.5$$

$$\approx 4.398 \qquad \text{بسّط.}$$

التحقق تُظهر حاسبة، باستخدام المجموع الجزئي للمتسلسلة الأسيّة التي بها عددًا كبيرًا من الحدود، تقريبًا للعدد 4.48 لـــ $e^{1.5}$. إذًا، فإن التقريب لـــ 4.398 يكون منطقيًا. ✔

انتبه!

إيجاد قيمة e^x يقدم المموع الجزئي الخامس للمتسلسلة الأسيّة فقط تقريبات صحيحة منطقيًا لـــ e^x من أجل x في $[-1.5, 2.5]$. وتكون المجاميع الجزئية التالية، مثل المجموع الجزئي السادس والسابع، أكثر دقة للفترات الأوسع لقيم x.

تمرين موجّه

استخدم المجموع الجزئي الخامس للمتسلسلة الأسيّة لتقريب كل قيمة إلى أقرب ثلاث منازل عشرية.

2A. $e^{-0.75}$ **2B.** $e^{0.25}$

يكون للدوال المتسامية الأخرى تمثيلات المتسلسلات الأسيّة أيضًا. وتستخدم الحاسبات وأجهزة الكمبيوتر **المتسلسلات الأسيّة** لتقريب قيم دوال **cosine** و **sine**.

المفهوم الأساسي المتسلسلة القوة لكل من Cosine و Sine

يمكن الحصول على تمثيلات المتسلسلات الأسيّة لكل من $\cos x$ و $\sin x$ من خلال

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots,$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots,$$

وهي مقاربة لجميع x.

باستبدال x بأي قيمة قياس زاوية بالراديان وإجراء الحسابات، يمكن إيجاد القيم التقريبية لدوال **cosine** و **sine** بأي درجة منشودة من الدقة.



الربط بتاريخ الرياضيات

مادهافا السنغماري
(1340–1425)

عالم رياضيات هندي ولد بالقرب من كوتشين، وقد اكتشف مادهافا المتسلسلة المكافئة لتوسيعات $\sin x$ و $\cos x$ و $\arctan x$ في عام 1400 تقريبًا، أي قبل 200 عام من اكتشافها في أوروبا.

مثال 3 المتسلسلة المثلثية

a. استخدم المجموع الجزئي الخامس لمتسلسلة القوة لـــ cosine لتقريب قيمة $\cos\frac{\pi}{7}$
قرّب إلى أقرب ثلاث منازل عشرية.

$$\cos x \approx \sum_{n=0}^{4} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\cos\frac{\pi}{7} \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} \qquad x = \frac{\pi}{7} \text{ أو حوالي } 0.449$$

$$\approx 0.901 \qquad \text{بسّط.}$$

التحقق تُظهر حاسبة، باستخدام المجموع الجزئي للمتسلسلة القوة لـــ cosine بها عددًا كبيرًا من الحدود، تقريبًا للعدد 0.901، مقربًا إلى أقرب ثلاث منازل عشرية، لـــ $\cos\frac{\pi}{7}$. إذًا، فإن التقريب لـــ 0.901 يكون منطقيًا. ✔

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

b. استخدم المجموع الجزئي الخامس لمتسلسلة القوة لـ sine لتقريب قيمة $\sin \frac{\pi}{5}$ إلى أقرب ثلاث منازل عشرية.

$$\sin x \approx \sum_{n=0}^{5} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!}$$

$x = \frac{\pi}{5}$ أو حوالي 0.628

$$\sin \frac{\pi}{5} \approx 0.628 - \frac{(0.628)^3}{3!} + \frac{(0.628)^5}{5!} - \frac{(0.628)^7}{7!} + \frac{(0.628)}{9!}$$

بسّط.

$$\approx 0.588$$

التحقق باستخدام حاسبة، $\sin \frac{\pi}{5} \approx 0.588$. إذًا، تقريب 0.588 مقبول. ✔

نصيحة دراسية

المجموع الجزئي الخامس بينما توفر المجاميع الجزئية الإضافية تقريبًا أفضل، عادة ما يتسم المجموع الجزئي بالدقة إلى أقرب ثلاث منازل عشرية.

تمرين موجّه

استخدم المجموع الجزئي الخامس لمتسلسلة القوة لـ cosine أو sine لتقريب كل قيمة. قرّب إلى أقرب ثلاث منازل عشرية.

3A. $\sin \frac{\pi}{11}$

3B. $\cos \frac{2\pi}{17}$

ربما لاحظتَ أوجه التشابه في تمثيلات المتسلسلة الأسيّة لـ $f(x) = e^x$ وتمثيلات المتسلسلة القوة لـ $f(x) = \sin x$ و $f(x) = \cos x$. ويتم اشتقاق علاقة من خلال التعويض عن x باستخدام $i\theta$ في المتسلسلة الأسيّة، حيث i هي الوحدة التخيلية و θ مقياس زاوية بالراديان.

$$e^{i\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!}$$

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \frac{(i\theta)^6}{6!} + \frac{(i\theta)^7}{7!} + \cdots$$

$i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1,$
$i^5 = i, i^6 = -1, i^7 = -i$

$$= 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - i\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + i\frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^6}{6!} - i\frac{\theta^7}{7!} + \cdots$$

جمّع الحدود الحقيقية والتخيلية.

$$= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \cdots\right) + \left(i\theta - i\frac{\theta^3}{3!} + i\frac{\theta^5}{5!} - i\frac{\theta^7}{7!} + \cdots\right)$$

$$= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \cdots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \cdots\right)$$

خاصية التوزيع

$$= \cos \theta + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \cdots\right)$$

$$\cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \cdots$$

$$\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \frac{\theta^9}{9!} - \cdots$$

$$= \cos \theta + i \sin \theta$$

هذه العلاقة تُسمى **صيغة أويلر**.

المفهوم الأساسي صيغة أويلر

لأي عدد حقيقي θ، $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$.

من المفترض أن تتعرف على الطرف الأيمن من هذه المعادلة كجزء من الصورة القطبية لعدد مركب. وبتطبيق صيغة أويلر على الصورة القطبية لعدد مركب ينتج ما يلي.

$$a + bi = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$ الصورة القطبية لعدد مركب

$$= re^{i\theta}$$ صيغة أويلر

إذًا، تمنحنا صيغة أويلر طريقة للتعبير عن عدد مركب بالصورة الأسيّة.

المفهوم الأساسي الصورة الأسيّة لعدد مركب

الصورة الأسيّة لعدد مركب $a + bi$ مقدمة بالعلاقة

$$a + bi = re^{i\theta},$$

حيث $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ و $\theta = \tan^{-1}\frac{b}{a}$ إذا كان $a > 0$ و $\theta = \tan^{-1}\frac{b}{a} + \pi$ إذا كان $a < 0$.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

مثال 4 كتابة عدد مركب بالصورة الأسّية

اكتب $-\sqrt{3}+i$ في الصورة الأسيّة.

اكتب الصورة القطبية لـ $-\sqrt{3}+i$. في هذا التعبير، $a=-\sqrt{3}$ و $b=1$ و $a<0$. جـد r.

$r=\sqrt{(-\sqrt{3})^2+1^2}$ $\quad r=\sqrt{a^2+b^2}$

$=\sqrt{4}=2$ $\quad$ بسّط.

الآن جـد θ.

$\theta=\tan^{-1}\frac{1}{-\sqrt{3}}+\pi$ $\quad \theta=\tan^{-1}\frac{b}{a}+\pi$ حيث $a<0$

$=-\frac{\pi}{6}+\pi=\frac{5\pi}{6}$ $\quad$ بسّط.

إذًا، لأن $a+bi=re^{i\theta}$، فإن الصيغة الأسيّة لـ $-\sqrt{3}+i$ هي $2e^{i\frac{5\pi}{6}}$.

تمرين موجّه

اكتب كل عدد مركب بالصورة الأسّية.

4A. $1+\sqrt{3}i$

4B. $\sqrt{2}+\sqrt{2}i$

من دراستك للوغاريتمات، تعلم أنه لا يمكن لعدد حقيقي أن يكون لوغاريتم عدد سالب. ويمكن استخدام صيغة أويلر لتوضيح أن اللوغاريتم الطبيعي لعدد سالب لا يتواجد في نظام العدد *المركب*.

$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ $\quad$ صيغة أويلر

$e^{i\pi}=\cos\pi+i\sin\pi$ $\quad$ افترض أن $\theta=\pi$.

$e^{i\pi}=-1+i(0)$ $\quad \cos\pi=-1$ و $\sin\pi=0$

$e^{i\pi}=-1$ $\quad$ بسّط.

$\ln e^{i\pi}=\ln(-1)$ $\quad$ احسب اللوغاريتم الطبيعي لكل طرف.

$i\pi=\ln(-1)$ $\quad$ خاصية القوى للوغاريتمات

تشير هذه النتيجة إلى أن اللوغاريتم الطبيعي لـ -1 موجود وهو العدد المركب $i\pi$. ويمكنك استخدام هذه النتيجة لإيجاد اللوغاريتم الطبيعي لأي عدد سالب $-k$، حيث $k>0$.

$\ln(-k)=\ln[(-1)k]$ $\quad -k=(-1)k$

$=\ln(-1)+\ln k$ $\quad$ خاصية ناتج الضرب للوغاريتمات

$=i\pi+\ln k$ $\quad \ln(-1)=i\pi$

$=\ln k+i\pi$ $\quad$ اكتب بالصورة $a+bi$.

مثال 5 اللوغاريتم الطبيعي لعدد سالب

جـد قيمة $\ln(-5)$ في نظام الأعداد المركبة.

$\ln(-5)=\ln 5+i\pi$ $\quad \ln(-k)=\ln k+i\pi$

$\approx 1.609+i\pi$ $\quad$ استخدم الحاسبة لحساب $\ln 5$.

تمرين موجّه

جـد قيمة كل لوغاريتم طبيعي في نظام الأعداد المركبة.

5A. $\ln(-8)$

5B. $\ln(-6.24)$

تلميح تقني

الأعداد المركبة يمكنك استخدام حاسبتك لإيجاد قيمة اللوغاريتم الطبيعي لعدد سالب بالتغيير من REAL إلى $a+bi$ تحت MODE.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التمارين

استخدم $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ لإيجاد تمثيل متسلسلة القوة لـ $g(x)$.

بيّن فترة تقارب المتسلسلة. واستخدم حاسبة التمثيل البياني للتمثيل البياني لـ $g(x)$ ومجموعها الجزئي السادس لمتسلسلة القوة. (المثال 1)

1. $g(x) = \frac{4}{1-x}$
2. $g(x) = \frac{3}{1-2x}$
3. $g(x) = \frac{2}{1-x^2}$
4. $g(x) = \frac{3}{2-x}$
5. $g(x) = \frac{2}{5-3x}$
6. $g(x) = \frac{4}{3-2x^2}$

استخدم المجموع الجزئي الخامس لمتسلسلة أسيّة لتقريب كل قيمة. قرّب إلى أقرب ثلاث منازل عشرية. (المثال 2)

7. $e^{0.5}$
8. $e^{-0.25}$
9. $e^{-2.5}$
10. $e^{0.8}$
11. $e^{-0.3}$
12. $e^{3.5}$

13. **النظام البيئي** يمكن تمثيل كثافة أعداد P بلح البحر المخطط في كل متر مربع من أعالي نهر المسيسبي بـ $P = 3.5e^{0.08t}$. حيث تقاس t بالأسبوع. استخدم المجموع الجزئي الخامس للمتسلسلة الأسيّة لتقدير كثافة أعداد بلح البحر المخطط بعد 4 أسابيع و 12 أسبوعًا وعام. (مثال 2)

استخدم المجموع الجزئي الخامس لمتسلسلة أسيّة لـ cosine أو sine لتقريب كل قيمة. قرّب إلى أقرب ثلاث منازل عشرية. (مثال 3)

14. $\sin \frac{\pi}{9}$
15. $\cos \frac{2\pi}{13}$
16. $\sin \frac{5\pi}{13}$
17. $\cos \frac{3\pi}{10}$
18. $\cos \frac{2\pi}{9}$
19. $\sin \frac{3\pi}{19}$

20. **مدينة الملاهي** توجد لعبة في مدينة ملاهٍ على شكل بندول عملاق يتأرجح فيه الركاب ذهابًا وإيابًا في قوس بزاوية 240° إلى ارتفاع أقصى يبلغ 41 m. ويدعم البندول برجًا طوله 26 m. ويهبط البندول أسفل مستوى سطح الأرض في حفرة عند التأرجح أسفل البرج. استخدم المجموع الجزئي الخامس لمتسلسلة القوة لـ cosine أو sine لتقريب طول البندول. (مثال 3)



اكتب كل عدد مركب بصورة الأسيّة. (مثال 4)

21. $\sqrt{3} + i$
22. $\sqrt{3} - i$
23. $\sqrt{2} - \sqrt{2}i$
24. $-\sqrt{3} - i$
25. $1 - \sqrt{3}i$
26. $-1 + \sqrt{3}i$
27. $-\sqrt{2} + \sqrt{2}i$
28. $-1 - \sqrt{3}i$

جـد قيمة كل لوغاريتم طبيعي في نظام الأعداد المركبة. (مثال 5)

29. $\ln(-6)$
30. $\ln(-3.5)$
31. $\ln(-2.45)$
32. $\ln(-7)$
33. $\ln(-4.36)$
34. $\ln(-9.12)$

35. **متسلسلة القوة** استخدم تمثيلات متسلسلة القوة لـ $\sin x$ و $\cos x$ للإجابة عن كل سؤال مما يلي.
   a. مثّل بيانيًا $f(x) = \sin x$ والمجموع الجزئي الثالث لمتسلسلة القوة التي تمثل $\sin x$. وكرر العملية مع المجموع الجزئي الرابع والخامس. صف فترة التقارب لكل منها.
   b. كرر الجزء a مع $f(x) = \cos x$ و المجموع الجزئي الثالث والرابع والخامس لمتسلسلة القوة التي تمثل $\cos x$. صف فترة التقارب لكل منها.
   c. صف تغير فترة التقارب مع تزايد n. ثم خمّن العلاقة بين كل دالة مثلثية ومتسلسلة القوة المرتبطة بها حيث $n \to \infty$.

حل لإيجاد قيمة z عبر الأعداد المركبة. قرّب إلى أقرب ثلاث منازل عشرية.

36. $2e^z + 5 = 0$
37. $e^{2z} + 12 = 0$
38. $4e^{2z} + 7 = 6$
39. $3(e^z - 1) + 5 = -2$
40. $e^{2z} - e^z = 2$
41. $10e^{2z} + 17e^z = -3$

42. **الاقتصاد** القيمة الإجمالية للاستثمار يبلغ P من الدراهم مركّب بشكل مستمر مع نسبة مرابحة سنوية r خلال t من الأعوام هو Pe^{rt}. استخدم الحدود الخمسة الأولى من متسلسلة أسيّة لتقدير قيمة استثمار يبلغ AED 10,000 مركّب بشكل مستمر مع نسبة مرابحة سنوية 25.5% لمدة 5 أعوام.

43. **الخطأ النسبي** *الخطأ النسبي* هو الخطأ المطلق في تقدير كمية مقسومة على قيمتها الحقيقية. الخطأ النسبي في تقريب a للكمية b موضح بالعلاقة $\frac{|b-a|}{b}$. جـد الخطأ النسبي في تقريب $e^{2.1}$ باستخدام حدّين وثلاثة وستة حدود من المتسلسلة الأسيّة.

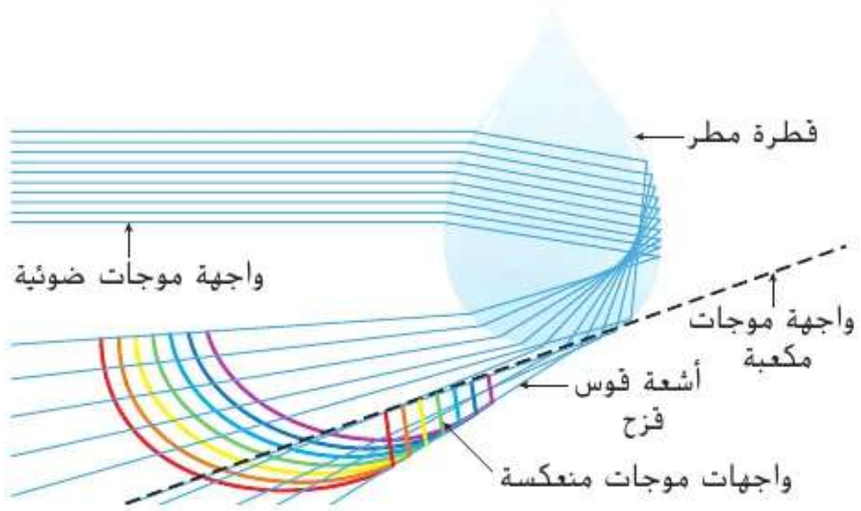
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

قرّب قيمة كل تعبير باستخدام الحدود الأربعة الأولى من متسلسلة القوة لـ sine و cosine. ثم جـد القيمة المتوقعة للكل.

44. $\sin^2 \frac{1}{2} + \cos^2 \frac{1}{2}$

45. $\sec^2 1 - \tan^2 1$

46. قوس قزح *معادلة إيري*، تُستخدم في الفيزياء لتمثيل حيود الضوء، يمكن استخدامها أيضًا لتفسير كيفية تحويل واجهة موجات ضوئية إلى واجهة موجات منحنية في تكوين قوس قزح.

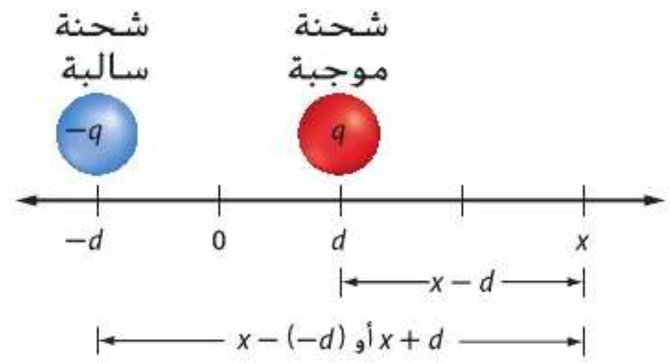


يمكن تمثيل هذه المعادلة باستخدام متسلسلة القوة الأسيّة الموضحة أدناه.

$$f(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{3k}}{(2 \cdot 3)(5 \cdot 6) \cdots [(3k-1) \cdot (3k)]}$$

استخدم المجموع الجزئي الخامس للمتسلسلة لإيجاد $f(3)$ مع تقريب كل قيمة إلى أقرب جزء من مئة.

47. الكهرباء عندما تكون الشحنة الكهربائية مصحوبة بشحنة أخرى مساوية ومعاكسة في الجوار، مثل هذا الجسم يُسمى *القطب الثنائي الكهربائي*. ويتكون من الشحنة q عند النقطة $x = d$ والشحنة $-q$ عند $x = -d$. كما هو موضح أدناه.



على طول المحور x، تكون قوة المجال الكهربائي عند x هي مجموع المجالات الكهربائية من كل من الشحنتين. ويوضح هذا بالعلاقة $E(x)$. جـد متسلسلة قوة أسيّة تمثل $E(x)$ إذا علمتَ أن k ثابت وأن $d = 1$. $E(x) = \frac{kq}{(x-d)^2} - \frac{kq}{(x+d)^2}$

48. الصوت *متسلسلة* فوريه تمثل دالة دورية زمنية $f(t)$ كمجموع لموجات sine و cosine بترددات تبدأ عند 0 وتتزايد بمضاعفات عدد صحيح. وتمثل المتسلسلة أدناه موجة صوتية من البيانات الرقمية الصادرة من قرص مدمج إلى مشغّل أقراص مدمجة.

$$f(t) = 0.7 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{n} \cos 270.6nt + \frac{1}{2n-1} \sin 270.6nt \right)$$

مثّل بيانيًا المتسلسلة حيث $n = 4$. ثم حلل التمثيل البياني.

المتطابقات استخدم تمثيلات متسلسلة القوة من هذا الدرس للتحقق من كل متطابقة مثلثية.

49. $\sin(-x) = -\sin x$

50. $\cos(-x) = \cos x$

51. التقريبات المتسلسلة اللانهائية لدالة معكوس ظل الزاوية $f(x) = \tan^{-1} x$، مقدمة بالعلاقة $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}$.

على الرغم من ذلك، هذه المتسلسلة صالحة فقط لقيم x في الفترة $(-1, 1)$.

a. اكتب الحدود الخمسة الأولى من تمثيل المتسلسلة اللانهائية لـ $f(x) = \tan^{-1} x$.

b. استخدم الحدود الخمسة الأولى من تمثيل المتسلسلة لتقريب $\tan^{-1} 0.1$.

c. في المستوى الإحداثي ذاته، مثّل بيانيًا $f(x) = \tan^{-1} x$ والمجموع الجزئي الثالث من متسلسلة القوة التي تمثل $f(x) = \tan^{-1} x$. في مستوى إحداثي آخر، مثّل بيانيًا $f(x)$ والمجموع الجزئي الرابع. ثم مثّل بيانيًا $f(x)$ والمجموع الجزئي الخامس.

d. صف ما يحدث في الفترة $(-1, 1)$ وفي المنطقتين $x \geq 1$ أو $x \leq -1$.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

52. الكتابة في الرياضيات صف تأثير استخدام حدود إضافية في متسلسلة التقريب لـ e^x على الناتج.

53. التبرير استخدم متسلسلة القوة لـ sine لشرح أنه بالنسبة إلى قيم x في الفترة $[-0.1, 0.1]$، التقريب الدقيق لـ $\sin x$ هو x.

54. تحدٍ أثبت أن $2 \sin \theta \cos \theta = \frac{e^{2\theta i} - e^{-2\theta i}}{2i}$

55. التبرير لأي قيم α و β تكون $e^{i\alpha} = e^{i\beta}$؟ اشرح.

البرهان أثبت أنه لجميع الأعداد الحقيقية x، العبارات التالية صحيحة.

56. $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$

57. $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$

58. تحدٍ دوال sine و cosine الزائدية تماثل الدوال المثلثية. تمامًا كما تشكّل النقاط $(\cos x, \sin x)$ دائرة وحدة، تشكّل النقاط $(\cosh t, \sinh t)$ النصف الأيمن من قطع زائد متساوي الأضلاع. والقطع الزائد متساوي الأضلاع يحتوي على خطوط مقاربة متعامدة. ودوال sine (sinh) و cosine (cosh) الزائدية معرفة أدناه. جـد تمثيلات متسلسلة القوة لهذه الدوال.

$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مراجعة شاملة

استخدم مثلث باسكال لتفكيك كل ذات حدّين مما يلي.

59. $\left(3m + \sqrt{2}\right)^4$

60. $\left(\frac{1}{2}n + 2\right)^5$

61. $(p^2 + q)^8$

62. أثبت أن $4 + 7 + 10 + \cdots + (3n + 1) = \frac{n(3n + 5)}{2}$ لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n.

جــد كل قوة، وعبّر عنها بالصورة المتعامدة.

63. $(-2 + 2i)^3$

64. $\left(1 + \sqrt{3}i\right)^4$

65. $\left(\sqrt{2} + \sqrt{2}i\right)^{-2}$

66. إذا علمت أن $v = \langle 2, 5, -6\rangle$, $u = \langle 8, -4, 3\rangle$, $t = \langle -9, -3, c\rangle$. وأن حجم متوازي المستطيلات بحواف متجاورة t و u و v هو 93 وحدة مكعبة. فجــد c.

استخدم المصفوفة العكسية لحل كل نظام معادلات، إن أمكن.

67. $x - 8y = -7$
$2x + 5y = 28$

68. $4x + 7y = 22$
$-9x + 11y = 4$

69. $w + 2x + 3y = 18$
$4w - 8x + 7y = 41$
$-w + 9x - 2y = -4$

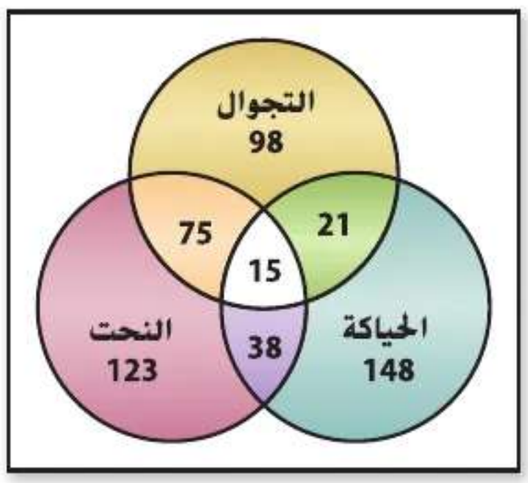
حدد إذا كانت المصفوفة A والمصفوفة B مصفوفتين متعاكستين.

70. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 7 & -6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -6 & 2 \\ -7 & 1 \end{bmatrix}$

71. $A = \begin{bmatrix} -11 & -5 \\ 9 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -9 & -11 \end{bmatrix}$

72. $A = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -3 & -5 \end{bmatrix}$

73. مؤتمر ترعى جامعة أحد المؤتمرات لعدد 680 من النساء. ويوضح مخطط فن عدد المشاركات في ثلاثة من الأنشطة المقدمة. افترض اختيار الحاضرات عشوائيًا لاستطلاع رأي.

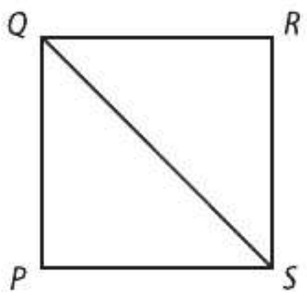


a. ما احتمال مشاركة إحدى من وقع عليهن الاختيار في التجوال أو النحت؟

b. صف مجموعة من المشاركات بحيث يكون احتمال اختيارهن تقريبًا 0.39.

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

74. SAT/ACT $PQRS$ هو مربع. ما نسبة طول القطر $\overline{QS}$ إلى طول الضلع $\overline{RS}$؟

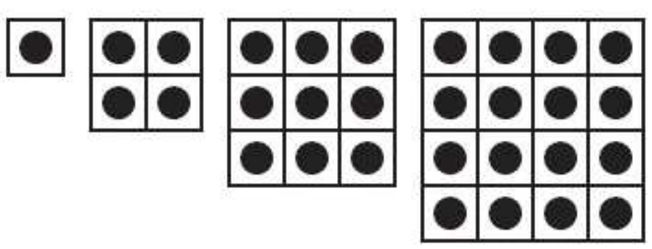


A 2
B $\sqrt{2}$
C 1
D $\frac{\sqrt{2}}{2}$
E $\frac{\sqrt{3}}{2}$

75. مراجعة ما مجموع المتسلسلة الهندسية اللانهائية $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24} + \cdots$؟

F $\frac{2}{3}$
G 1
H $1\frac{1}{3}$
J $1\frac{2}{3}$

76. إجابة حرة فكر في نمط النقاط الموضح.



a. ارسم الشكل التالي في هذه المتتالية.

b. اكتب المتتالية، بدءًا من 1 والتي تمثل عدد النقاط الواجب إضافتها لكل شكل في المتتالية للحصول على عدد النقاط في الشكل التالي.

c. اكتب تعبير الحد رقم n للمتتالية الموضحة بالجزء b.

d. جــد تعبير عدد النقاط في الشكل رقم n في المتتالية الأصلية.

e. أثبت باستخدام الاستقراء الرياضي أن مجموع المتتالية المذكورة في الجزء b يساوي التعبير المذكور في الجزء d.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

9-9 مختبر ورقة البيانات
اكتشاف الأنماط في البيانات

الهدف

- ترتيب وعرض البيانات باستخدام ورق البيانات لاكتشاف الأنماط والتحول عن الأنماط.

في الوحدة 9، تعلمت كيفية اكتشاف الأنماط في المتتالية ووصفها باستخدام الدوال.

الأنماط في متتالية البيانات	الأنماط في التمثيل البياني لمتتالية البيانات	نوع المتتالية	الدوال التي تصف المتتالية
الفروق المشتركة الأولى	البيانات في النمط الخطي	حسابية	خطية
نسبة مشتركة	البيانات في النمط الأسي	هندسية	أسية

في هذا المختبر، ستستخدم ورق البيانات لترتيب وعرض البيانات الثنائية من أجل البحث عن هذه الأنماط.

النشاط 1 اكتشاف الأنماط

الخراف تبلغ كتلة أحد الخراف 1.45 kg عند الميلاد. ويوضح الجدول كتلة الخراف في الأيام الـ 70 الأولى من نموها. استخدم ورق البيانات لإيجاد نمط البيانات.

عدد الأيام بعد الميلاد	10	20	30	40	50	60	70
الكتلة (kg)	1.91	2.46	3.17	4.1	5.22	6.81	8.63

الخطوة 1 أدخل البيانات في ورق البيانات.

الخطوة 2 لتحديد إذا كنت متتالية الكتلة حسابية أم لا، أدخل الصيغة في العمود التالي لإيجاد متوسط معدل التغيير اليومي في كتلة الخروف.

الخطوة 3 لتحديد إذا كنت المتتالية هندسية أم لا، أدخل الصيغة الموضحة في العمود التالي لإيجاد متوسط معدل التغيير في كتلة الخروف يوميًا.

◇	A	B	C	D
1	عدد الأيام بعد الميلاد	الكتلة (kg)	متوسط معدل التغيير	متوسط نسبة التغيير
2	0	1.45		
3	10	1.91	=(B3-B2)/(A3-A2)	=(B3/B2)^(1/(A3-A2))-1
4	20	2.46		
5	30	3.17		
6	40	4.1		
7	50	5.22		
8	60	6.81		
9	70	8.63		

Sheet 1 Sheet 2 Sheet 3

تحليل النتائج

1. فسر الصيغ المستخدمة في ورق البيانات.
2. صف أي أنماط تراها في البيانات. ما نوع المتتالية التي تقرّب البيانات؟ فسر ذلك.
3. استخدم أداة المخطط لإنشاء مخطط انتشار للبيانات. هل يدعم هذا التمثيل البياني إجابتك على التمرين 2؟ فسر ذلك.
4. اكتب معادلة تقرب كتلة الخراف y بعد x أيام
5. استخدم معادلتك لتوقع كتلة الخراف بعد 25 يومًا من الميلاد و365 يومًا من الميلاد. هل هذه التوقعات منطقية؟ فسر ذلك؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

يمكنك أيضًا استخدام ورق البيانات لاكتشاف وتحليل التحول عن الأنماط.

النشاط 2 اكتشاف التحول في الأنماط

واجب منزلي **سجل عمر عدد مسائل التفاضل والتكامل والزمن الذي استغرقه في حلها لمدة ثماني ليال. ابحث عن النمط في البيانات وأي تحول عن هذا النمط.**

عدد المسائل	15	10	9	8	6	5	3	0
الزمن (min)	140	95	82	72	70	44	27	0

الخطوة 1 أدخل البيانات في ورق البيانات.

الخطوة 2 أدخل الصيغ في الأعمدة المجاورة لاكتشاف إن كانت المتتالية حسابية أم هندسية. ثم انسخ هذه الصيغ في الخلايا أدناه.

الخطوة 3 ابحث عن الأنماط. لاحظ أن جميع معدلات التغيير تتجمع حول 9 ما عدا اثنين.

	A	B	C
1	عدد المسائل	الوقت (min)	متوسط معدل التغيير
2	0	0	
3	3	27	9.00
4	5	44	8.50
5	6	70	26.00
6	8	72	1.00
7	9	81	9.00
8	10	89	8.00
9	15	136	9.40

Sheet 1 Sheet 2 Sheet 3

نصيحة دراسية

متسلسلة البيانات لاستكشاف المتسلسلة في البيانات، استخدم أداة Auto Sum. وللنشاط 2، أدخل =B2 في الخلية D2 و =SUM(B2,B3) في الخلية D3. انسخ الصيغة الثانية في الخلايا المتبقية في العمود لإنشاء متتالية المجاميع الجزئية.

تحليل النتائج

6. أين يقع التحول في النمط؟
7. اكتب صيغة ورق البيانات التي يمكنها تمثيل هذه البيانات إذا تم إزالة قيمة البيانات.
8. أنشئ مخطط انتشار يبين البيانات الفعلية ونموذج هذه البيانات. هل يدعم هذا التمثيل البياني إجابتك على التمرين 7؟ فسّر ذلك.
9. استخدم الصيغة من التمرين 7 لتوقع كم سيستغرق عمر من الوقت لإكمال 12 مسألة و20 مسألة؟ هل هذه التوقعات منطقية؟ فسّر ذلك.

التمارين

استخدم ورق البيانات لترتيب وتحديد النمط أو التحول في النمط في كل مجموعة بيانات. ثم استخدم حاسبة لكتابة معادلة لتمثيل البيانات.

10. **الإنترنت** يوضح الجدول عدد المرات التي تمت فيها قراءة الصفحة الأساسية لمدونة شهيرة (عدد مرات زيارتها) كل شهر.

الشهر	20	15	12	10	8	6	4	2
عدد مرات الزيارة	4017	1405	732	479	368	266	171	83

11. **الكلية** يوضح الجدول النتائج المركبة الاختبار التجريبي للقبول الجامعي ACT ومتوسط الدرجات (GPA) لعدد 20 طالبًا بعد الفصل الدراسي الأول لهم في الكلية. (*تلميح:* استخدم أولاً أداة الفرز تصاعديًا لترتيب البيانات.)

درجة الاختبار التجريبي للقبول الجامعي	25	21	20	22	15	16	27
متوسط درجات الكلية	3.1	3.4	3.2	3.6	2.7	2.9	3.9
درجة الاختبار التجريبي للقبول الجامعي	17	28	29	19	23	18	26
متوسط درجات الكلية	3.0	3.9	4.0	2.6	3.6	3.1	4.0

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

9 دليل الدراسة والمراجعة

دليل الدراسة

المفاهيم الأساسية

المتتاليات والمتسلسلات الحسابية (الدرسان 9-1 و 9-2)

- الحد النوني في a_n من المتتالية الحسابية ذات الحد الأول a_1 والفرق المشترك d يتم الحصول عليه بواسطة $a_n = a_1 + (n-1)d$. حيث يشير n إلى أي عدد صحيح موجب.
- مجموع S_n للحدود n الأولى في متسلسلة حسابية يتم الحصول عليه بواسطة $S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$ أو $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$.

المتتاليات والمتسلسلات الهندسية (الدرسان 9-3 و 9-4)

- الحد *النوني* a_n من المتتالية الهندسية ذات الحد الأول a_1 والنسبة المشتركة r يتم الحصول عليه بواسطة $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$. حيث يكون n هو أي عدد صحيح موجب.
- مجموع S_n للحدود n الأولى في متتالية هندسية يتم الحصول عليه بواسطة $S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$ أو $S_n = \frac{a_1 - a_1 r^n}{1-r}$. حيث يكون $r \neq 1$.
- مجموع S لمتسلسلة هندسية لانهائية ذات $-1 < r < 1$ يتم الحصول عليه بواسطة $S_n = \frac{a_1}{1-r}$.

التكرار والإعادة (الدرس 9-6)

- في الصيغة التكرارية، تتم صياغة كل حد من حد واحد أو أكثر من الحدود السابقة.

نظرية ذات الحدين (الدرس 9-7)

- نظرية ذات الحدين:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!\,k!} a^{n-k} b^k$$

الاستقراء الرياضي (الدرس 9-8)

- الاستقراء الرياضي هو طريقة برهانية تستخدم للبرهنة على عبارات حول الأعداد الصحيحة الموجبة.

الدوال في صورة متسلسلة لانهائية (الدرس 9-9)

- متسلسلة القوة في x هي متسلسلة لا نهائية بالصورة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.
- تنص صيغة أويلر على أنه لأي عدد حقيقي θ، $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

المفردات الأساسية

أوساط حسابية arithmetic means
متتالية حسابية arithmetic sequence
متسلسلة حسابية arithmetic series
فرق مشترك common difference
نسبة مشتركة common ratio
متسلسلة تقاربية convergent series
متسلسلة تباعدية divergent series
صيغة صريحة explicit formula
متتالية فيبوناتشي Fibonacci sequence
متتالية منتهية finite sequence
أوساط هندسية geometric means
متتالية هندسية geometric sequence
متسلسلة هندسية geometric series
نظرية ذات الحدين Binomial theorm
صيغة أويلر Uulr's Formula
متسلسلة أسيّة Exponantioal Series
فرضية الاستقراء induction hypothesis
المتسلسلة الهندسية اللانهائية infinite geometric series
متتالية غير منتهية infinite sequence
لانهاية infinity
الإعادة iteration
الاستقراء الرياضي mathematical induction
مجموع جزئي partial sum
مثلث باسكال Pascal's triangle
صيغة تكرارية/ضمنية recursive formula
متتالية تكرارية recursive sequence
متتالية sequence
متسلسلة series
الرمز سيجما sigma notation
حد term
متسلسلة قوة Power Series

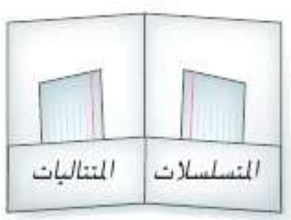
مراجعة المفردات

حدد ما إذا كانت كل جملة مما يلي صحيحة أم *خاطئة*. وإذا كانت *خاطئة*، فاستبدل المصطلح الموجود تحته خطّ لجعل الجملة صحيحة.

1. يُطلق على المتسلسلة الهندسية اللانهائية التي لها مجموع متسلسلة تقاربية.
2. الاستقراء الرياضي هو عملية تكوين دالة بشكل متكرر من نفسها.
3. الأوساط الحسابية لمتتالية هي الحدود التي تقع بين أي حدين غير متتاليين في متتالية حسابية.
4. الحد هو قائمة أعداد بترتيب معين.
5. يُطلق على مجموع حدود n الأولى لمتسلسلة المجموع الجزئي.
6. الصيغة $a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$ هي صيغة تكرارية.
7. المتتالية الهندسية هي متتالية يتحدد كل حد فيها من خلال جمع قيمة ثابتة إلى الحد السابق.
8. يُطلق على المتسلسلة الهندسية اللانهائية التي لا تتضمن مجموعًا المجموع الجزئي.
9. أحد عشر و 17 هما وسطان هندسيان بين 5 و 23 في المتتالية 5, 11, 17, 23.
10. باستخدام نظرية ذات الحدين. $(x-2)^4$ يُمكن تفكيك إلى $x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16$.

المطويات منظّم الدراسة

تأكد من تدوين المفاهيم الأساسية في المطوية.



McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

مراجعة درس بدرس

9-1 المتتاليات كدوال

جـد الحد المشار إليه لكل متتالية حسابية.

11. $a_1 = 9,\ d = 3,\ n = 14$
12. $a_1 = -3,\ d = 6,\ n = 22$
13. $a_1 = 10,\ d = -4,\ n = 9$
14. $a_1 = -1,\ d = -5,\ n = 18$

مثال 1

جـد الحد الخامس والعشرين لمتتالية حسابية إذا كان $a_1 = -15$ و $d = 6$.

$a_n = a_1 + (n - 1)d$ صيغة للحد n

$a_{11} = -15 + (11 - 1)6$ $n = 11,\ a_1 = -15,\ d = 6$

$a_{11} = 45$ بسّط.

9-2 المتتاليات والمتسلسلات والرمز سيجما

جـد الحدود الأربعة التالية لكل متتالية.

11. 1, 9, 17, 25, ...
12. $-1, 2, 7, 14, \ldots$

جـد المجموع المشار إليه لكل متتالية.

13. المجموع الجزئي الرابع لـ $a_n = 2n - 10$
14. S_7 لـ $a_n = -n^3$

جـد مجموع كل مما يلي.

15. $\sum_{n=2}^{9} \frac{4n - 6}{3}$
16. $\sum_{n=1}^{6} 7n - 4$

مثال 1

جـد مجموع $\sum_{n=1}^{4} n^2 - 5$.

جـد قيم a_n حيث $n = 1$ و 2 و 3 و 4.

$a_1 = (1)^2 - 5 = -4$ $n = 1$

$a_2 = (2)^2 - 5 = -1$ $n = 2$

$a_3 = (3)^2 - 5 = 4$ $n = 3$

$a_4 = (4)^2 - 5 = 11$ $n = 4$

إذًا، $\sum_{n=1}^{4} n^2 - 5 = -4 + (-1) + 4 + 11$ أو 10.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

9-3 المتتاليات والمتسلسلات الحسابية

جـد الأوساط الحسابية في كل متتالية.

15. $-12, \_, \_, \_, 8$

16. $15, \_, \_, 29$

17. $12, \_, \_, \_, \_, -8$

18. $72, \_, \_, \_, 24$

19. **الأعمال المصرفية** يدخر زايد 150 AED كل شهرين. إذا ادخر بهذا المعدل لمدة عامين، فكم سيكون لديه بنهاية عامين؟

جـد S_n لكل متتالية حسابية.

20. $a_1 = 16, a_n = 48, n = 6$

21. $a_1 = 8, a_n = 96, n = 20$

22. $9 + 14 + 19 + \cdots + 74$

23. $16 + 7 + -2 + \cdots + -65$

24. **الدراما** لدى ليلى أداء مسرحي بعد 12 يومًا. وتخطط للتدريب على الأجزاء الخاصة بها كل ليلة. وفي أول ليلة، تدربت على الأجزاء الخاصة بها مرتين. وفي الليلة التالية، تدربت 4 مرات. وفي الليلة الثالثة، تدربت 6 مرات. في الليلة الحادية عشر، كم مرت تدربت على الأجزاء الخاصة بها؟

جـد مجموع كل متسلسلة حسابية.

25. $\sum_{k=5}^{21}(3k-2)$

26. $\sum_{k=0}^{10}(6k-1)$

27. $\sum_{k=4}^{12}(-2k+5)$

مثال 2

جـد الوسطين الحسابيين بين 3 و 39.

$a_n = a_1 + (n-1)d$ صيغة للحد n

$a_4 = 3 + (4-1)d$ $n = 4, a_1 = 3$

$39 = 3 + 3d$ $a_4 = 39$

$12 = d$ بسّط.

الوسطان الحسابيان هما $12 + 3$ أو 15 و $12 + 15$ أو 27.

مثال 3

جـد S_n للمتسلسلة الحسابية ذات $a_1 = 18$ و $a_n = 56$ و $n = 8$.

$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ صيغة المجموع

$S_8 = \frac{8}{2}(18 + 56)$ $n = 8, a_1 = 18, a_n = 56$

$= 296$ بسّط.

مثال 4

جـد قيمة $\sum_{k=3}^{15} 5k + 1$.

استخدم الصيغة $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$. يوجد 13 حدًا.

$a_1 = 5(3) + 1$ أو 16 و $a_{13} = 5(15) + 1$ أو 76.

$S_{13} = \frac{13}{2}(16 + 76)$

$= 598$

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

جـــد الحد المشار إليه لكل متتالية هندسية.

28. $a_1 = 5,\ r = 2,\ n = 7$

29. $a_1 = 11,\ r = 3,\ n = 3$

30. $a_1 = 128,\ r = -\frac{1}{2},\ n = 5$

31. a_8 بالنسبة إلى $\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{9}{8}, \ldots$

جـــد الأوساط الهندسية في كل متتالية.

32. 6, __, __, 162

33. 8, __, __, __, 648

34. −4, __, __, 108

35. المدخرات لدى نجاة حساب ادخار يبلغ الرصيد به حاليًا AED 1500. كم سيبلغ رصيد نجاة بعد 4 أعوام إذا حصل على نسبة مرابحة بقيمة 5% سنويًا؟

جـــد S_n لكل متتالية هندسية.

36. $a_1 = 15,\ r = 2,\ n = 4$

37. $a_1 = 9,\ r = 4,\ n = 6$

38. $5 - 10 + 20 - \ldots$ إلى 7 حدود

39. $243 + 81 + 27 + \ldots$ إلى 5 حدود

جـــد قيمة مجموع كل متسلسلة هندسية.

40. $\sum_{k=1}^{7} 3 \cdot (-2)^{k-1}$

41. $\sum_{k=1}^{8} -1\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}$

42. الإعلان تسلّم نبيلة منشورات دعائية للترويج لاجتماع مجلس الطلاب التالي. وتسلّم المنشورات لأربعة أشخاص. ثم يُسلّم هؤلاء الأشخاص الأربعة المنشورات إلى 4 أشخاص آخرين. ومن ثم يسلّم هؤلاء الأشخاص الأربعة المنشورات الأربعة إلى 4 أشخاص جدد. إذا اعتبرنا أن نبيلة هي الجولة الأولى، كم عدد الأشخاص الذين حصلوا على منشورات حتى الجولة الرابعة؟

مثال 5

جـــد الحد السادس لمتتالية هندسية، والتي فيها $a_1 = 9$ و $r = 4$.

$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$ صيغة للحد n

$a_6 = 9 \cdot 4^{6-1}$ $n = 6,\ a_1 = 9,\ r = 4$

$a_6 = 9216$

الحد السادس هو 9216.

مثال 6

جـــد وسطين هندسيين بين 1 و 27.

$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$ صيغة الحد النوني

$a_4 = 1 \cdot r^{4-1}$ $n = 4$ و $a_1 = 1$

$27 = r^3$ $a_4 = 27$

$3 = r$ بسّط.

الوسطان الهندسيان هما 1(3) أو 3 و 3(3) أو 9.

مثال 7

جـــد مجموع المتسلسلات الهندسية التي يكون فيها $a_1 = 3$ و $r = 5$ و $n = 11$.

$S_n = \frac{a_1 - a_1 r^n}{1 - r}$ صيغة المجموع

$S_{11} = \frac{3 - 3 \cdot 5^{11}}{1 - 5}$ $n = 11,\ a_1 = 3,\ r = 5$

$S_{11} = 36{,}621{,}093$ استخدم الآلة الحاسبة.

مثال 8

جـــد قيمة $\sum_{k=1}^{6} 2 \cdot (4)^{k-1}$.

$S_6 = \frac{2 - 2 \cdot 4^6}{1 - 4}$ $n = 6,\ a_1 = 2,\ r = 4$

$= \frac{-8190}{-3}$ بسّط.

$= 2730$ بسّط.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

9-5 المتسلسلة الهندسية اللانهائية

جـــد مجموع كل متسلسلة لانهائية، إن وُجد.

43. $a_1 = 8, r = \frac{3}{4}$

44. $\frac{5}{6} - \frac{20}{18} + \frac{80}{54} - \frac{320}{162} + \ldots$

45. $\sum_{k=1}^{\infty} 3\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$

46. **العلوم الفيزيائية** أسقطت ميسون كرة من أعلى مبنى يصل ارتفاعه 20 مترًا. وفي كل مرة تقفز فيها الكرة، ترتد مرة أخرى إلى $\frac{2}{3}$ من الارتفاع السابق. إذا استمرت الكرة في اتباع هذا النمطـــ، ما إجمالي المسافة التي قطعتها الكرة؟

مثال 9

جـــد مجموع المتسلسلات الهندسية اللانهائية التي فيها $a_1 = 15$ و $r = \frac{1}{3}$.

$S = \frac{a_1}{1 - r}$ صيغة المجموع

$= \frac{15}{1 - \frac{1}{3}}$ $a_1 = 15, r = \frac{1}{3}$

$= \frac{15}{\frac{2}{3}}$ أو 22.5 بسّط.

9-6 التكرار والإعادة

جـــد الحدود الخمسة الأولى من كل متتالية.

47. $a_1 = -3, a_{n+1} = a_n + 4$

48. $a_1 = 5, a_{n+1} = 2a_n - 5$

49. $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + 5$

50. **المدخرات** لدى شيخة حساب ادخار يحتوي على رصيد بقيمة AED 12,000. وتتم إضافة نسبة مرابحة بقيمة 5% كل شهر. وتضيف شيخة كل شهر AED 500 إلى الرصيد. وتصف الصيغة التكرارية $b_n = 1.05b_{n-1} + 500$ الرصيد في حساب شيخة الادخاري بعد مرور عدد n من الشهور. جـــد الرصيد الموجود في حساب شيخة بعد مرور 3 أشهر. قرّب إجابتك إلى أقرب فلس.

جـــد التكرارات الثلاثة الأولى لكل دالة بالنسبة للقيمة الأولية المعطاة.

51. $f(x) = 2x + 1, x_0 = 3$

52. $f(x) = 5x - 4, x_0 = 1$

53. $f(x) = 6x - 1, x_0 = 2$

54. $f(x) = 3x + 1, x_0 = 4$

مثال 10

جـــد أول خمسة حدود في المتتالية، حيث $a_1 = 1$، و $a_{n+1} = 3a_n + 2$.

$a_{n+1} = 3a_n + 2$ صيغة تكرارية

$a_{1+1} = 3a_1 + 2$ $n = 1$

$a_2 = 3(1) + 2$ أو 5 $a_1 = 1$

$a_{2+1} = 3a_2 + 2$ $n = 2$

$a_3 = 3(5) + 2$ أو 17 $a_2 = 5$

$a_{3+1} = 3a_3 + 2$ $n = 3$

$a_4 = 3(17) + 2$ أو 53 $a_3 = 17$

$a_{4+1} = 3a_4 + 2$ $n = 4$

$a_5 = 3(53) + 2$ أو 161 $a_4 = 53$

الحدود الخمسة الأولى للمتتالية هي 1 و 5 و 17 و 53 و 161.

مثال 11

جـــد التكرارات الثلاثة الأولى للدالة $f(x) = 3x - 2$ بالنسبة للقيمة الأولية لـــ $x_0 = 2$.

$x_1 = f(x_0)$ $x_2 = f(x_1)$ $x_3 = f(x_2)$

$= f(2)$ $= f(4)$ $= f(10)$

$= 3(2) - 2$ $= 3(4) - 2$ $= 3(10) - 2$

$= 4$ $= 10$ $= 28$

التكرارات الثلاثة الأولى هي 4 و 10 و 28.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

9-7 نظرية ذات الحدين

فكّك كل ذات حدين.

55. $(a + b)^3$

56. $(y - 3)^7$

57. $(3 - 2z)^5$

58. $(4a - 3b)^4$

59. $\left(x - \frac{1}{4}\right)^5$

جـد الحد المشار إليه لكل تعبير.

60. الحد الثالث لـ $(a + 2b)^8$

61. الحد السادس لـ $(3x + 4y)^7$

62. الحد الثاني لـ $(4x - 5)^{10}$

مثال 12

فكّك $(x - 3y)^4$.

$$(x - 3y)^4$$
$$= x^4 + {}_4C_1x^3(-3y) + {}_4C_2x^2(-3y)^2 + {}_4C_3(-3y)^4 + {}_4C_4(-3y)^4$$
$$= x^4 + \frac{4!}{3!}x^3(-3y) + \frac{4!}{2!2!}x^2(9y^2) + \frac{4!}{3!}x(-27y^3) + 81y^4$$
$$= x^4 + -12x^3y + 54x^2y^2 + -108xy^3 + 81y^4$$

مثال 13

جـد الحد الرابع لـ $(x + y)^8$.

استخدم نظرية ذات الحدين لكتابة المفكوك في الرمز سيجما.

$$(x + y)^8 = \sum_{k=0}^{8} \frac{8!}{k!(8-k)!}x^{8-k}y^k$$

بالنسبة للحد الرابع. $k = 3$.

$$\frac{8!}{k!(8-k)!}x^{8-k}y^k = \frac{8!}{3!(8-3)!}x^{8-3}y^3$$
$$= 56x^5y^3$$

9-8 البرهان بالاستقراء الرياضي

برهِن صحة كلٍ من العبارات التالية بالنسبة لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة.

63. $2 + 6 + 12 + \cdots + n(n + 1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

64. $7^n - 1$ يقبل القسمة على 6.

65. $5^n - 1$ يقبل القسمة على 4.

جـد مثالاً مضادًا لكل عبارة.

66. $8^n + 3$ يقبل القسمة على 11.

67. $6^{n+1} - 2$ يقبل القسمة على 17.

68. $n^2 + 2n + 4$ هو عدد أولي.

69. $n + 19$ هو عدد أولي.

مثال 14

بَرهِن أن $9^n + 3$ يقبل القسمة على 4.

الخطوة 1 عندما يكون $n = 1$، فإن $9^1 + 3 = 9^n + 3$ أو 12. حيث إن العدد 12 عند قسمته على 4 يصبح 3، فإن العبارة صحيحة بالنسبة لـ $n = 1$.

الخطوة 2 افترض أن $9^k + 3$ يقبل القسمة على 4 بالنسبة إلى العدد الصحيح الموجب k. هذا يعني أن $9^k + 3 = 4r$ بالنسبة إلى العدد الصحيح r.

الخطوة 3

$$9^k + 3 = 4r$$
$$9^k = 4r - 3$$
$$9^{k+1} = 36r - 27$$
$$9^{k+1} + 3 = 36r - 27 + 3$$
$$9^{k+1} + 3 = 36r - 24$$
$$9^{k+1} + 3 = 4(9r - 6)$$

بما أن r عدد كلي، فإن $9r - 6$ عدد كلي. لذلك، $9^{k+1} + 3$ يقبل القسمة على 4. إذًا العبارة صحيحة بالنسبة إلى $n = k + 1$.

ولهذا، فإن $9^n + 3$ يقبل القسمة على 4 بالنسبة لكل الأعداد الصحيحة الموجبة n.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

9-9 الدوال في صورة متسلسلة لانهائية

استخدم $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ لإيجاد تمثيل متسلسلة قوة لـ $g(x)$. وضح فترة تقارب المتسلسلة. واستخدم حاسبة التمثيل البياني للتمثيل البياني لـ $g(x)$ والمجموع الجزئي السادس من متسلسلة القوة.

42. $g(x) = \frac{1}{1-5x}$

43. $g(x) = \frac{3}{1-2x}$

استخدم المجموع الجزئي الخامس للمتسلسلة الأسيّة لتقريب كل قيمة إلى أقرب ثلاث منازل عشرية.

44. $e^{\frac{1}{4}}$

45. $e^{-1.5}$

جـــد قيمة كل لوغاريتم طبيعي في نظام الأعداد المركبة.

46. $\ln(-4)$

47. $\ln(-7.15)$

مثال 6

استخدم $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ لإيجاد تمثيل متسلسلة قوة لـ $g(x) = \frac{4}{1-x}$. وضح فترة تقارب المتسلسلة.

متسلسلة هندسية تتقارب إلى $f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ حيث $|x| < 1$.

عوض عن x باستخدام $\frac{x+3}{4}$ حيث $g(x)$ هي تحويل لـ $f(x)$

و: $g(x) = f\left(\frac{x+3}{4}\right)$. النتيجة هي $f\left(\frac{x+3}{4}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x+3}{4}\right)^n$ حيث $\left|\frac{x+3}{4}\right| < 1$.

إذًا، $g(x) = \frac{4}{1-x}$ يمكن تمثيلها بواسطة $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x+3}{4}\right)^n$. هذه المتسلسلة تقاربية حيث $\left|\frac{x+3}{4}\right| < 1$. بما يكافئ $-1 < \frac{x+3}{4} < 1$ أو $-7 < x < 1$.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

9 تدريب على الاختبار المعيارى

1. جـد الحدود الأربعة التالية للمتتالية الحسابية ... ,63 ,72 ,81.

2. جـد الحد الخامس والعشرين لمتتالية حسابية فيها $a_1 = 9$ و $d = 5$.

3. **الاختيار من متعدد** ما الحد الثامن في المتتالية الحسابية التي تبدأ بـ ... ,20.2 ,22.4 ,24.6 ,18؟

A 26.8

B 29

C 31.2

D 33.4

4. جـد الأوساط الحسابية الأربعة بين -9 و 11.

5. جـد مجموع المتسلسلة الحسابية التي فيها $a_1 = 11$ و $n = 14$ و $a_n = 22$.

6. **الاختيار من متعدد** ما هو الحد التالي في المتتالية الهندسية التالية؟

$$10, \frac{5}{2}, \frac{5}{8}, \frac{5}{32} \ldots$$

F $\frac{5}{8}$

G $\frac{5}{32}$

H $\frac{5}{128}$

J $\frac{5}{256}$

7. جـد الأوساط الهندسية الثلاثة التي تقع بين 6 و 1536.

8. جـد مجموع المتسلسلات الهندسية التي فيها $a_1 = 15$ و $r = \frac{2}{3}$ و $n = 5$.

جـد مجموع كل متسلسلة، إن وُجد.

9. $\sum_{k=2}^{12}(3k-1)$

10. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2}(3^k)$

11. $45 + 37 + 29 + \cdots + -11$

12. $\frac{1}{8} + \frac{2}{24} + \frac{4}{72} + \cdots$

13. اكتب $0.\overline{65}$ في صورة كسر اعتيادي.

جـد الحدود الخمسة الأولى من كل متتالية.

14. $a_1 = -1,\ a_{n+1} = 3a_n + 5$

15. $a_1 = 4,\ a_{n+1} = a_n + n$

16. **الاختيار من متعدد** ما التكرارات الثلاثة الأولى للدالة $f(x) = -5x + 4$ بالنسبة للقيمة الأولية $x_0 = 3$؟

A 3, −11, 59

B −11, 59, −291

C −1, −6, −11

D 59, −291, 1459

17. فكّك $(2a - 3b)^4$.

18. ما معامل الحد الخامس لـ $(m + 3n)^6$؟

19. جـد الحد الرابع لمفكوك $(c + d)^9$.

برهن على أن كل عبارة صحيحة بالنسبة لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة.

20. $1 + 6 + 36 + \cdots + 6^{n-1} = \frac{1}{5}(6^n - 1)$.

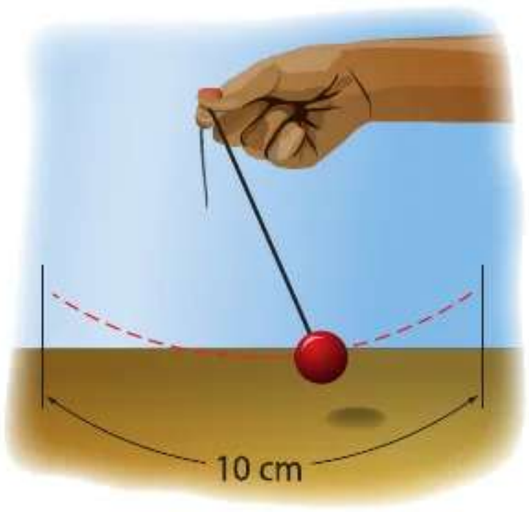
21. $11^n - 1$ يقبل القسمة على 10.

22. جـد مثالاً مضادًا للعبارة التالية.

$2^n + 4^n$ *يقبل القسمة على* 4.

23. **المدرسة** يوجد في صف الأستاذ خالد لتدريس العلوم عددًا متساويًا من الطلاب الذين تبلغ أعمارهم 15 عامًا والطلاب الذين تبلغ أعمارهم 16 عامًا. ويريد اختيار 8 طلاب لتمثيل الفصل في معرض العلوم. ما احتمال اختياره 5 طلاب من الذين يبلغون 15 عامًا؟

24. **البندول** تأرجح ليلى البندول. وتتناقص المسافة التي يقطعها البندول بمقدار 15% مع كل أرجحة. إذا قطع البندول في البداية 10 cm. فجـد إجمالي المسافة التي سيكون البندول قد قطعها عندما يستقر.



McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

9 التحضير للاختبارات المعيارية

البحث عن نمط

تتمثل إحدى أكثر إستراتيجيات حل المسائل شيوعًا في البحث عن نمط. فالقدرة على التعرف على الأنماط، وتمثيلها جبريًا، وتوسعتها تعد أداة قيّمة لحل المسائل.



إستراتيجيات البحث عن نمط

الخطوة 1

حدد النمط.

- قارن بين الأعداد أو الأشكال أو التمثيلات البيانية في النمط.
- **اسأل نفسك:** ما مدى الصلة بين حدود النمط؟
- **اسأل نفسك:** هل هناك أي عمليات مشتركة تؤدي إلى الانتقال من أحد الحدود إلى الحد التالي؟

الخطوة 2

عمّم النمط.

- اكتب قاعدة باستخدام الكلمات لوصف كيفية إنتاج حدود النمط.
- عيّن المتغيرات واكتب تعبيرًا جبريًا لتمثيل النمط إن أمكن.

الخطوة 3

جـد الحدود المفقودة، ووسّع النمط، وجـد حل المسألة.

- استخدم النمط الخاص بك أو قاعدتك لإيجاد الحدود المفقودة و/أو وسّع النمط لحل المسألة.
- تحقق من إجابتك للتأكد من صحتها.

مثال على الاختبار المعياري

اقرأ المسألة وحدد ما تحتاج لمعرفته، ثم استخدم المعلومات المعطاة بالمسألة لحلها.

استخدم متتالية المربعات الموضحة. كم عدد المربعات اللازمة لعمل الشكل التاسع في المتتالية؟



A 55
B 65
C 74
D 82

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

اقرأ المسألة بعناية. يتم إعطاؤك ثلاثة أشكال من متتالية ويُطلب منك إيجاد عدد المربعات اللازمة لعمل الشكل التاسع.

ابحث عن نمط في أشكال المربعات. وعد المربعات في كل شكل.



الشكل 1 الشكل 2 الشكل 3

اكتب تعبيرًا لتمثيل هذا النمط.

الشرح عدد المربعات يساوي مربع رقم الشكل زائد واحد.

المتغير لنفترض أن n تمثل رقم الشكل.

المعادلة $a_n = n^2 + 1$

استخدم التعبير الذي كتبته لتوسعة النمط وإيجاد عدد المربعات في الشكل التاسع.

$$a_9 = 9^2 + 1 = 82$$

إذًا، سيتضمن الشكل التاسع 82 مربعًا. الإجابة الصحيحة هي D.

التدريبات

اقرأ المسألة. واستخدم النمط في حلها.

1. الأعداد أدناه تُشكّل متتالية رياضية شهيرة من الأعداد تُعرف باسم متتالية فيبوناتشي. ما عدد فيبوناتشي التالي في المتتالية؟

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

A 36

B 34

C 31

D 29

2. ما العدد المجهول في الجدول؟

n	a_n
1	0
2	2
3	6
4	12
5	??
6	30

F 17

G 18

H 20

J 21

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

9 تدريب على الاختبار المعياري
تراكمي

الاختيار من متعدّد

اقرأ كل سؤال، ثم اكتب الإجابة الصحيحة في ورقة الإجابة التي يقدمها لك معلمك أو في أي ورقة أخرى.

1. جـد الحد التالي للمتتالية الحسابية.

7, 13, 19, 25, 31, ...

A 36 **C** 38

B 37 **D** 39

2. تحصل مها على تكبير لصورة بمقدار 10 cm في 15 cm. بحيث تكون الصورة الجديدة ذات أبعاد أكبر 4 مرات من أصلها. فما مساحة التكبير مقارنةً بمساحة الصورة الأصلية؟

F المساحة أكبر بمرتين.

G المساحة أكبر بأربع مرات.

H المساحة أكبر بثماني مرات.

J المساحة أكبر بست عشرة مرة.

3. جـد قيمة $\sum_{k=1}^{15}(8k-1)$.

A 119 **C** 945

B 826 **D** 1072

4. ما ذا يحدث للتمثيل البياني للمعادلة $y = 3x^2$ عند تغييرها إلى $y = 2x^2$؟

F التمثيل البياني للمعادلة $y = 2x^2$ هو انعكاسٌ للتمثيل البياني للمعادلة $y = 3x^2$ بالنسبة للمحور الأفقي y.

G يدور التمثيل البياني بمقدار 90 درجةً حول نقطة الأصل.

H يقل عرض التمثيل البياني.

J يزيد عرض التمثيل البياني.

5. اكتب الصيغة الخاصة بالحد النوني للمتتالية الهندسية الموضحة بالجدول.

n	a_n
1	5
2	10
3	20
4	40
5	80

A $a_n = (5)^n$

B $a_n = 5(2)^{n-1}$

C $a_n = 2(5)^{n-1}$

D $a_n = 5(2)^n$

6. يبين الجدول أبعاد خيمة مربعة الشكل وعدد الأشخاص الذين يمكن أن تتسع لهم الخيمة.

طول الخيمة (بالمتر)	عدد الأشخاص
2	7
5	28
6	39
8	67
12	147

بفرض أن ℓ يمثل طول الخيمة، ويمثل n عدد الأشخاص الذين يُمكن أن تتسع لهم الخيمة. حدد المعادلة التي تصف على أفضل نحو العلاقة بين طول الخيمة وعدد الأشخاص الذين تتسع لهم.

F $\ell = n^2 + 3$

G $n = \ell^2 + 3$

H $\ell = 3n + 1$

J $n = 3\ell + 1$

7. يُقال أن مرشح هواء معين يزيل 90% من الملوثات الموجودة في الهواء في كل مرة يمر فيها بالمرشح. فإذا تم تدوير نفس كمية الهواء عبر المرشح ثلاث مرات، فما النسبة المئوية للملوثات الأصلية التي ستُزال من الهواء؟

A 0.01% **B** 0.1% **C** 99.0% **D** 99.9%

8. في دار السينما، تبلغ تكلفة علبتين من الفُشار ومشروب غازي AED 34.50. وتبلغ تكلفة 3 علب من الفُشار و 4 مشروبات غازية AED 81.75. فأي زوج من المعادلات يمكن استخدامه لتحديد p وهو تكلفة علبة الفُشار، و s، وهو تكلفة المشروب الغازي؟

F $2p + s = 81.75$
$3p + 4s = 34.50$

G $2p - s = 34.50$
$3p - 4s = 81.75$

H $2p + s = 34.50$
$3p + 4s = 81.75$

J $p + s = 34.50$
$p + 4 = 81.75$

9. أي من المتسلسلات الهندسية التالية لا يقارب من المجموع؟

A $\sum_{k=1}^{\infty} 4 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^{k-1}$

B $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}$

C $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{7}{6} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$

D $\sum_{k=1}^{\infty} (-2) \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}$

نصيحة عند حل الاختبار

السؤال 9 استوعب الحدود المُستخدمة في الجبر. وكيفية تطبيقها. تكون المتسلسلة الهندسية تقاربية إذا كان لدى النسبة المشتركة r قيمة مطلقة أقل من 1.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

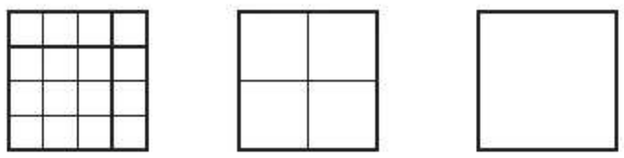
الإجابة القصيرة/الإجابة الشبكية

اكتب الإجابات في ورقة الإجابة التي قدمها إليك المعلم أو ورقة أخرى.

10. ما أبعاد المصفوفة التي تنتج عن عملية الضرب الموضحة؟

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \\ j & k & l \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

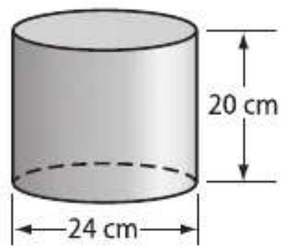
11. الإجابة الشبكية تأمل النمط أدناه. إلى كم قطعة سيتم تقسيم الشكل السادس في النمط؟



الشكل 1: قطعة واحدة
الشكل 2: 4 قطع
الشكل 3: 16 قطعة

12. استخدم نظرية ذات الحدين لتفكيك التعبير $(c + d)^6$.

13. الإجابة الشبكية تمتلك سهيلة وعاءً أسطوانيًا تحتاج إلى ملئه بالتربة حتى تتمكن من زرع بعض الزهور.



ما حجم الأسطوانة بالسنتيمترات المكعبة مقربًا إلى أقرب سنتيمتر مكعب؟

14. في مزرعة بكتيريا، تنمو البكتيريا بمعدل أسي مع مرور الوقت، كما هو موضح بالجدول.

الساعات	عدد البكتيريا
0	1000
1	2000
2	4000

اكتب معادلة للتعبير عن عدد البكتيريا، y، بالنسبة للزمن، t.

15. الإجابة الشبكية ما قيمة $f[g(6)]$ إذا كان $f(x) = 2x + 4$ و $g(x) = x^2 + 5$؟

الإجابة الموسعة

دوّن إجاباتك على ورقة. واكتب الحل هنا.

16. برهِن على أن مجموع أي عددين صحيحين فرديين هو عدد زوجي.

17. النقطتان الطرفيتان لقطر دائرة يكونان عند النقطتين $(0, -1)$ و $(-8, 5)$.

a. ما إحداثيات مركز الدائرة؟ اشرح طريقتك في إيجاد الإجابة.

b. جد نصف قطر الدائرة. اشرح طريقتك في إيجاد الإجابة.

c. اكتب معادلة للدائرة.

18. تقطع دراجة المسافة من دبي إلى الشارقة خلال ساعتين ونصف. إذا زادت من سرعتها، فيُمكنها قطع نفس المسافة خلال ساعتين.

a. هل يمثل هذا الموقف تغيرًا طرديًا أم تغيرًا عكسيًا؟ اشرح استنتاجك.

b. إذا كانت الرحلة من دبي إلى الشارقة تستغرق ساعتين ونصف عند السير بسرعة 12 km/h. ما السرعة التي ينبغي التغيير إليها لقطع نفس المسافة خلال ساعتين؟

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

كتيب الطالب

الرموز والصيغ والمفاهيم الأساسية

الرموز EM-1

القياسات EM-2

العمليات والعلاقات الحسابية EM-3

الصيغ والمفاهيم الجبرية EM-3

الصيغ والمفاهيم الهندسية EM-5

الدوال والمتطابقات المثلثية EM-6

الدوال الأصلية والعمليات الحسابية على الدوال EM-7

النهايات والتفاضل والتكامل EM-7

الصيغ والمفاهيم الاحصائية EM-8

جداول الإحصاء

الجدول A: التوزيع الطبيعي المعياري EM-9

الجدول B: توزيع ستيودنت (توزيع t) EM-11

الجدول C: توزيع كاي تربيع (توزيع χ^2) EM-12

McGraw-Hill Education مؤسسة حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح

الرموز

الجبر

$\neq$	لا يساوي
$\approx$	تقريبًا يساوي
$\sim$	يشابه
$>, \geq$	أكبر من، أكبر من أو يساوي
$<, \leq$	أصغر من، أصغر من أو يساوي
$-a$	معكوس a أو المعكوس الجمعي لـ a
$\lvert a \rvert$	القيمة المطلقة لـ a
$\sqrt{a}$	الجذر التربيعي الأساسي لـ a
$a : b$	نسبة a إلى b
(x, y)	زوج مرتّب
(x, y, z)	مجموعة مرتبة ثلاثية العناصر (ثلاثي مُرتّب)
i	الوحدة التخيلية
$b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{b}$	الجذر النوني لـ b
$\mathbb{Q}$	الأعداد النسبية
$\mathbb{I}$	الأعداد غير النسبية
$\mathbb{Z}$	الأعداد الصحيحة
$\mathbb{W}$	الأعداد الكاملة
$\mathbb{N}$	الأعداد الطبيعية
∞	ما لا نهاية
$-\infty$	سالب ما لا نهاية
$[\,]$	تتضمن الأطراف
$(\,)$	لا تتضمن الأطراف
$\log_b x$	لوغاريتم x للأساس b
$\log x$	اللوغاريتم العادي لـ x
$\ln x$	اللوغاريتم الطبيعي لـ x
ω	أوميجا، السرعة الزاويّة
α	ألفا، قياس الزاوية
β	بيتا، قياس الزاوية
γ	جاما، قياس الزاوية
θ	ثيتا، قياس الزاوية
λ	لامدا، طول الموجة
ϕ	فاي، قياس الزاوية
$\mathbf{a}$	متجه a
$\lvert \mathbf{a} \rvert$	طول المتجه a

المجموعات والمنطق

$\in$	ينتمي إلى
$\subset$	مجموعة جزئية من
$\cap$	تقاطع
$\cup$	اتحاد
$\varnothing$	المجموعة الخالية
$\sim p$	نفي p، ليس p
$p \wedge q$	ربط p و q
$p \vee q$	فصل p أو q
$p \longrightarrow q$	العبارة الشرطية، إذا كان p فإن q
$p \longleftrightarrow q$	العبارة ثنائية الشرط، p إذا وفقط إذا q

الهندسة

$\angle$	زاوية
$\triangle$	مثلث
$^\circ$	درجة
π	باي pi
$\measuredangle$	درجات
$m\angle A$	قياس $\angle A$
$\overleftrightarrow{AB}$	مستقيم يحتوي على النقطتين A و B
$\overline{AB}$	مستقيم نقطتاه الطرفيتان A و B
$\overrightarrow{AB}$	الشعاع من النقطة A الى النقطة B
AB	قياس $\overline{AB}$، المسافة بين A و B
$\parallel$	يوازي
$\nparallel$	لا يوازي
$\perp$	متعامد على
$\triangle$	مثلث
$\square$	متوازي أضلاع
n-gon	مضلع عدد أضلاعه n
$\vec{a}$	متجه a
$\overrightarrow{AB}$	المتجه من A إلى B
$\lvert \overrightarrow{AB} \rvert$	مقدار متجه من A إلى B
A'	صورة الصورة الأصلية A
$\rightarrow$	موضوع على
$\odot A$	دائرة مركزها A
$\overset{\frown}{AB}$	قوس أصغر نقطتاه الطرفيتان A و B
$\overset{\frown}{ABC}$	قوس أكبر نقطتاه الطرفيتان A و C
$m\overset{\frown}{AB}$	قياس درجة القوس AB

حساب المثلثات

$\sin x$	جيب الزاوية x
$\cos x$	جيب تمام الزاوية x
$\tan x$	ظل الزاوية x
$\sin^{-1} x$	Arcsin x
$\cos^{-1} x$	Arccos x
$\tan^{-1} x$	Arctan x

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الرموز

الدوال

$f(x)$	f لـ x، قيمة f لـ x
$f(x) = \begin{cases} \end{cases}$	دالة متعددة التعريف
$f(x) = \lvert x \rvert$	دالة القيمة المطلقة
$f(x) = [\![x]\!]$	دالة أكبر عدد صحيح ليس أكبر من x
$f(x, y)$	f لـ x و y، دالة متغيراها x وy
$[f \circ g](x)$	f لـ g لـ x، تركيب الدالتين f وg
$f^{-1}(x)$	معكوس $f(x)$

النهايات والتفاضل والتكامل

$\lim_{x \to c}$	النهاية عندما تقترب x من c
m_{sec}	ميل القاطع
$f'(x)$	مشتقة الدالة $f(x)$
Δ	دلتا، أو مقدار التغيير
$\int$	تكامل غير محدود
$\int_a^b$	تكامل محدود
$F(x)$	مشتقة عكسية للدالة $f(x)$

الاحصاء والاحتمالات

$P(a)$	احتمال a
$P(n, r)$ أو ${}_nP_r$	تباديل n من العناصر مأخوذ منها r عنصر في كل مرة
$C(n, r)$ أو ${}_nC_r$	توافيق n من العناصر مأخوذ منها r عنصر في كل مرة
$P(A)$	احتمال A
$P(A\|B)$	احتمال A إذا علمت أن B حدث بالفعل
$n!$	مضروب العدد n (حيث n عدد طبيعي)
$\sum$	سيجما، رمز المجموع
μ	متوسط مجتمع إحصائي
σ	الانحراف المعياري لمجتمع إحصائي
σ^2	تباين المجتمع الإحصائي
s	الانحراف المعياري لعينة
s_k^2	تباين العينة
$\sum_{n=1}^{k}$	مجموع من n = 1 إلى k
$\overline{x}$	متوسط x ، متوسط العينة
H_0	فرضية العدم
H_a	الفرضية البديلة

القياسات

متري	عُرفي
الطول	
1 كيلومتر (km) = 1000 متر (m)	1 ميل (mi) = 1760 ياردة (yd)
1 متر = 100 سنتيمتر (cm)	1 ميل = 5280 قدمًا (ft)
1 سنتيمتر = 10 ملليمتر (mm)	1 ياردة = 3 أقدام
	1 قدم = 12 بوصة (in)
	1 ياردة = 36 بوصة
الحجم والسعة	
1 لتر (L) = 1000 ملليلتر (mL)	1 جالون (gal) = 4 أرباع (qt)
1 كيلولتر (kL) = 1000 لتر	1 جالون = 128 أونصة سائلة (fl oz)
	1 كوارت = 2 باينت (pt)
	1 باينت = 2 كوب (c)
	1 كوب = 8 أونصات سائلة
الوزن والكتلة	
1 كيلوجرام (kg) = 1000 جرام (g)	1 طن (T) = 2000 رطل (lb)
1 جرام = 1000 ملليجرام (mg)	1 رطل = 16 أونصة (oz)
1 طن متري (t) = 1000 كيلوجرام	

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

العمليات والعلاقات الحسابية

المحايد	لأي عدد a، يكون $a + 0 = 0 + a = a$ و $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.
التعويض (=)	إذا كان $a = b$، يمكن التعويض عن a باستخدام b.
الانعكاس (=)	$a = a$
التماثل (=)	إذا كان $a = b$، فإن $b = a$.
التعدي (=)	إذا كان $a = b$ و $b = c$، فإن $a = c$.
التبديل	لأي عددين a و b، $a + b = b + a$ و $a \cdot b = b \cdot a$.
التجميع	لأي أعداد a و b و c، $(a + b) + c = a + (b + c)$ و $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
التوزيع	لأي أعداد a و b و c، $a(b + c) = ab + ac$ و $a(b - c) = ab - ac$.
المعكوس الجمعي	لأي عدد a، يوجد عدد واحد فقط $-a$ بحيث $a + (-a) = 0$.
المعكوس الضربي	لأي عدد $\frac{a}{b}$، حيث $a \neq 0$ و $b \neq 0$، يوجد عدد واحد فقط $\frac{b}{a}$ بحيث $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$.
الضرب (0)	لأي عدد a، يكون $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$.
الجمع (=)	لأي أعداد a و b و c، إذا كان $a = b$، فإن $a + c = b + c$.
الطرح (=)	لأي أعداد a و b و c، إذا كان $a = b$، فإن $a - c = b - c$.
الضرب والقسمة (=)	لأي أعداد a و b و c، حيث $c \neq 0$، إذا كان $a = b$، فإن $ac = bc$ و $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$.
الجمع (>)*	لأي أعداد a و b و c،إذا كان $a > b$، فإن $a + c > b + c$.
الطرح (>)*	لأي أعداد a و b و c، إذا كان $a > b$، فإن $a - c > b - c$.
الضرب والقسمة (>)*	لأي أعداد a و b و c. 1. إذا كان $a > b$ و $c > 0$، فإن $ac > bc$ و $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$. 2. إذا كان $a > b$ و $c < 0$، فإن $ac < bc$ و $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$.
ناتج الضرب الصفري	لأي عددين حقيقيين a و b، إذا كان $ab = 0$، فإن $a = 0$ أو $b = 0$ أو a و b كلاهما 0.

* *تنطبق هذه الخواص كذلك على* $>$ و $\geq$ و $\leq$.

الصيغ والمفاهيم الجبرية

المصفوفات

الجمع	$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix}$	**الضرب في كمية عددية**	$k\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix}$
الطرح	$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-e & b-f \\ c-g & d-h \end{bmatrix}$	**الضرب**	$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{bmatrix}$

كثيرات الحدود

القانون العام	$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, a \neq 0$	**مربع فرق**	$(a - b)^2 = (a - b)(a - b)$ $= a^2 - 2ab + b^2$
مربع مجموع	$(a + b)^2 = (a + b)(a + b)$ $= a^2 + 2ab + b^2$	**ناتج ضرب مجموع وفرق**	$(a + b)(a - b) = (a - b)(a + b)$ $= a^2 - b^2$

اللوغاريتمات

خاصية الضرب	$\log_x ab = \log_x a + \log_x b$	**خاصية الأس الثابت**	$\log_b m^p = p \log_b m$
خاصية القسمة	$\log_x \frac{a}{b} = \log_x a - \log_x b, b \neq 0$	**تغيير الأساس**	$\log_a n = \frac{\log_b n}{\log_b a}$

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

الصيغ والمفاهيم الجبرية

الدوال الأسيّة واللوغاريتمية

المرابحة المركبة	$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$	**النمو أو الاضمحلال الأسيّ**	$N = N_0(1 + r)^t$
النمو المركب المستمر	$A = Pe^{rt}$	**النمو أو الاضمحلال الأسيّ المستمر**	$N = N_0e^{kt}$
خاصية الضرب	$\log_b xy = \log_b x + \log_b y$	**خاصية القوة**	$\log_b x^p = p \log_b x$
خاصية القسمة	$\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$	**خاصية تغيير الاساس**	$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$

المتتاليات والمتسلسلات

الحد النوني لمتتالية حسابية	$a_n = a_1 + (n - 1)d$	**الحد النوني لمتتالية هندسية**	$a_n = a_1r^{n-1}$
مجموع متسلسلة حسابية	$S_n = n\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)$ أو $S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n - 1)d]$	**مجموع متسلسلة هندسية**	$S_n = \frac{a_1 - a_1r^n}{1 - r}$ أو $S_n = \frac{a_1 - a_nr}{1 - r}, r \neq 1$
مجموع متسلسلة هندسية لانهائية	$S = \frac{a_1}{1 - r}, \lvert r \rvert < 1$	**صيغة أويلر**	$e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$
متسلسلة القوة	$\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots$	**المتسلسلة الأسيّة**	$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$
نظرية ذات الحدين	$(a + b)^n = {}_nC_0\, a^nb^0 + {}_nC_1\, a^{n-1}b^1 + {}_nC_2\, a^{n-2}b^2 + \cdots + {}_nC_r\, a^{n-r}b^r + \cdots + {}_nC_n\, a^0b^n$		
متسلسلة القوة للجيب وجيب وجيب التمام	$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$ $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$		

المتجهات

الجمع في المستوى	$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2 \rangle$	**الجمع في الفضاء**	$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3 \rangle$
الطرح في المستوى	$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2 \rangle$	**الطرح في الفضاء**	$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$ $= \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3 \rangle$
الضرب القياسي في المستوى	$k\mathbf{a} = \langle ka_1, ka_2 \rangle$	**الضرب القياسي في الفضاء**	$k\mathbf{a} = \langle ka_1, ka_2, ka_3 \rangle$
الضرب النقطي في المستوى	$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2$	**الضرب النقطي في الفضاء**	$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$
الزاوية بين متجهين	$\cos\theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\lvert\mathbf{a}\rvert\lvert\mathbf{b}\rvert}$	**مسقط u على v**	$\text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\lvert\mathbf{v}\rvert^2}\right)\mathbf{v}$
طول المتجه	$\lvert\mathbf{v}\rvert = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$	**الضرب القياسي لثلاثة متجهات**	$\mathbf{t} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \begin{vmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$

معادلة المستقيم في المستوى الإحداثي

صيغة الميل والمقطع	$y = mx + b$
صيغة النقطة والميل	$y - y_1 = m(x - x_1)$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الصيغ والمفاهيم الجبرية

القطوع المخروطيّة

قطع مكافئ	$(x-h)^2 = 4p(y-k)$ أو $(y-k)^2 = 4p(x-h)$	**دائرة**	$x^2 + y^2 = r^2$ أو $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$
قطع ناقص	$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ أو $\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$	**قطع زائد**	$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ أو $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$
الدوران المحوري للقطوع المخروطيّة	$x' = x\cos\theta + y\sin\theta$ و $y' = y\cos\theta - x\sin\theta$		

المعادلات الوسيطيّة

الموقع العمودي	$y = tv_0\sin\theta - \frac{1}{2}gt^2 + h_0$	**المسافة الأفقية**	$x = tv_0\cos\theta$

الاعداد المُركبة

صيغة الضرب	$z_1z_2 = r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + \boldsymbol{i}\sin(\theta_1+\theta_2)]$	**صيغة القسمة**	$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2) + \boldsymbol{i}\sin(\theta_1-\theta_2)]$
صيغة الجذور المختلفة	$r^{\frac{1}{p}}\left(\cos\frac{\theta+2n\pi}{p} + \boldsymbol{i}\sin\frac{\theta+2n\pi}{p}\right)$	**نظرية ديموافر**	$z^n = [r(\cos\theta + \boldsymbol{i}\sin\theta)]^n$ أو $r^n(\cos n\theta + \boldsymbol{i}\sin n\theta)$

الصيغ والمفاهيم الهندسية

الهندسة الإحداثية

الميل	$m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}, x_2 \neq x_1$	**المسافة على خط الأعداد**	$d = \lvert a-b\rvert$
المسافة بين نقطتين في المستوى	$d = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$	**طول القوس**	$\ell = \frac{x}{360}\cdot 2\pi r$
نقطة المنتصف في المستوى الاحداثي	$M = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$	**نقطة المنتصف على خط الأعداد**	$M = \frac{a+b}{2}$
نقطة المنتصف في الفضاء	$M = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$	**نظرية فيثاغورس**	$a^2 + b^2 = c^2$

المحيط

مربع	$P = 4s$	**مستطيل**	$P = 2\ell + 2w$	**دائرة**	$C = \pi d$ أو $C = 2\pi r$

مساحة السطح الجانبية

منشور	$L = Ph$	**هرم**	$L = \frac{1}{2}P\ell$
إسطوانة	$L = 2\pi rh$	**مخروط**	$L = \pi r\ell$

مساحة السطح الكلية

منشور	$S = Ph + 2B$	**مخروط**	$S = \pi r\ell + \pi r^2$	**إسطوانة**	$S = 2\pi rh + 2\pi r^2$
هرم	$S = \frac{1}{2}P\ell + B$	**كرة**	$S = 4\pi r^2$	**مكعب**	$S = 6s^2$

الحجم

منشور	$V = Bh$	**مخروط**	$V = \frac{1}{3}\pi r^2h^2$	**إسطوانة**	$V = \pi r^2h$
هرم	$V = \frac{1}{3}Bh$	**كرة**	$V = \frac{4}{3}\pi r^3$	**مكعب**	$V = s^3$
متوازي مستطيلات	$V = \ell wh$				

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

الدوال والمتطابقات المثلثية

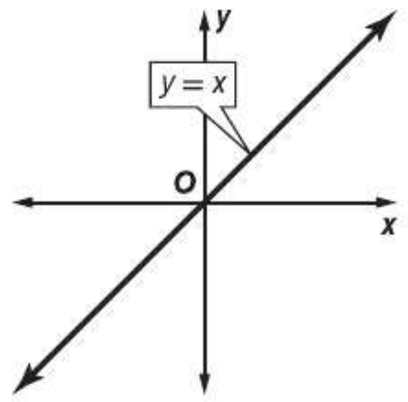
الدوال المثلثية			
النسب المثلثية	$\sin\theta = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}}$	$\cos\theta = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}}$	$\tan\theta = \frac{\text{opp}}{\text{adj}} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$
	$\sec\theta = \frac{\text{hyp}}{\text{adj}} = \frac{1}{\cos\theta}$	$\csc\theta = \frac{\text{hyp}}{\text{opp}} = \frac{1}{\sin\theta}$	$\cot\theta = \frac{\text{adj}}{\text{opp}} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$
قانون جيوب التمام	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$	$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$	$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$
قانون الجيوب	$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$	**صيغة هيرون**	$\text{Area} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$
السرعة الخطية	$v = \frac{s}{t}$	**السرعة الزاويّة**	$\omega = \frac{\theta}{t}$
المتطابقات المثلثية			
متطابقات المقلوب	$\sin\theta = \frac{1}{\csc\theta}$	$\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta}$	$\tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}$
	$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$	$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$	$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$
متطابقات فيثاغورس	$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$	$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$	$\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$
متطابقات المتممات	$\sin\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$	$\tan\theta = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$	$\sec\theta = \csc\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$
	$\cos\theta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$	$\cot\theta = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$	$\csc\theta = \sec\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$
متطابقات الفردي والزوجي	$\sin(-\theta) = -\sin\theta$	$\cos(-\theta) = \cos\theta$	$\tan(-\theta) = -\tan\theta$
	$\csc(-\theta) = -\csc\theta$	$\sec(-\theta) = \sec\theta$	$\cot(-\theta) = -\cot\theta$
متطابقات المجموع والفرق	$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$		$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$
	$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$		$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$
	$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$		$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$
متطابقات ضعف الزاوية	$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$	$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$	$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$
	$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$	$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}$	
متطابقات تخفيض الأس	$\sin^2\theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$	$\cos^2\theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$	$\tan^2\theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{1 + \cos 2\theta}$
متطابقات نصف الزاوية	$\sin\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\theta}{2}}$	$\cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos\theta}{2}}$	
	$\tan\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta}}$	$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos\theta}{\sin\theta}$	$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{\sin\theta}{1 + \cos\theta}$
متطابقات تحويل الضرب إلى مجموع أو فرق	$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$		$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]$
	$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)]$		$\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)]$
متطابقات تحويل المجموع أو الفرق إلى ضرب	$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$		$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$
	$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$		$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

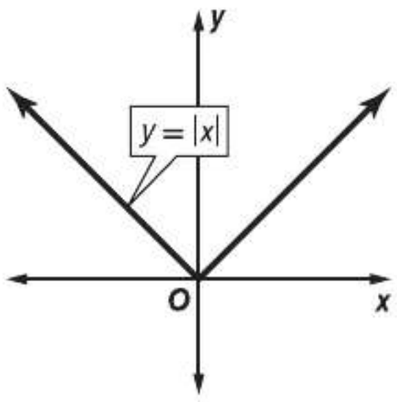
الدوال الأصلية والعمليات الحسابية على الدوال

الدوال الأصلية

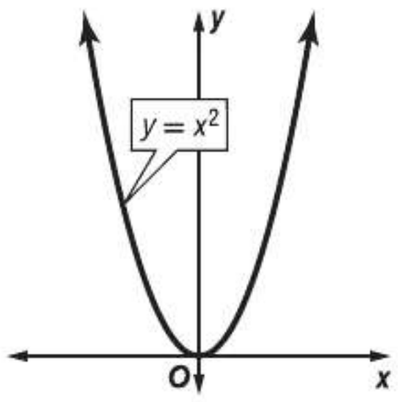
الدوال الخطية



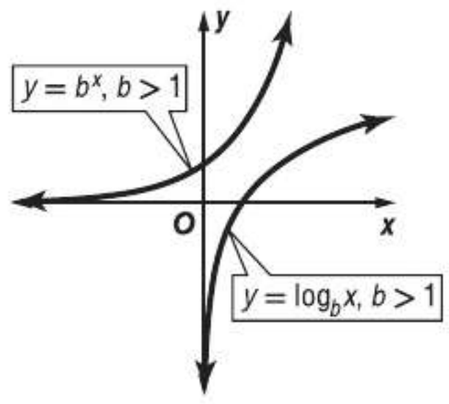
دوال القيمة المطلقة



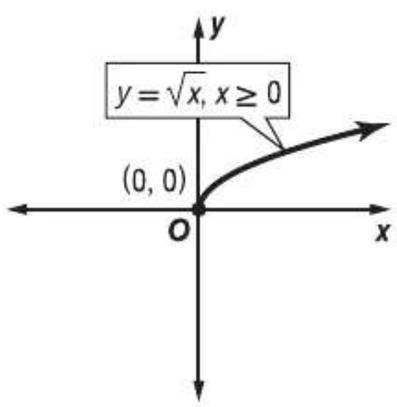
الدوال التربيعية



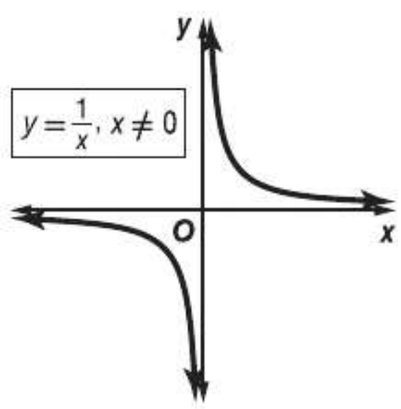
الدوال الأسيّة واللوغاريتمية



دوال الجذر التربيعي



الدوال العكسية والنسبية



العمليات الحسابية على الدوال

الجمع	$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$	**الضرب**	$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
الطرح	$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$	**القسمة**	$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)},\ g(x) \neq 0$

النهايات والتفاضل والتكامل

النهايات

نهاية مجموع دالتين	$\lim_{x\to c}[f(x)+g(x)] = \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x)$	**نهاية طرح دالتين**	$\lim_{x\to c}[f(x)-g(x)] = \lim_{x\to c} f(x) - \lim_{x\to c} g(x)$
نهاية قسمة دالتين	$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)}$. إذا كان $\lim_{x\to c} g(x) \neq 0$	**نهاية دالة مرفوعة لأس**	$\lim\ x\to c\,[f(x)^n] = \left[\lim_{x\to c} f(x)\right]^n$
السرعة	**اللحظيّة** $v(t) = \lim_{h\to 0}\frac{f(t+h)-f(t}{h}$ **المتوسطة** $v_{avg} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$	**نهاية الجذر النوني لدالة**	$\lim_{x\to c}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to c} f(x)}$. إذا كان $\lim_{x\to c} f(x) > 0$ و n عدد زوجي

التفاضل

قاعدة القوة	إذا كان $f(x) = x^n$ فإن $f'(x) = nx^{n-1}$	**المجموع أو الفرق**	إذا كان $f(x) = g(x) \pm h(x)$ فإن $f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$
قاعدة الضرب	$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$	**قاعدة القسمة**	$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$

التكامل

التكامل غير المحدود	$\int f(x)\,dx = F(x) + C$	**النظرية الاساسيّة في التفاضل والتكامل**	$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

الصيغ والمفاهيم الاحصائية

قيمة z لمتوسط العينة	$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma_{\bar{x}}}$	قيمة z	$z = \frac{X - \mu}{\sigma}$
الحد الأقصى لقيمة التوقع	$E = z \cdot \sigma_{\bar{x}}$ or $z \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	خاصية ذات الحدين	$P(X) = {}_nC_x\, p^x q^{n-x} = \frac{n!}{(n-x)!\,x!}\, p^x q^{n-x}$
فترة الثقة في توزيع t	$CI = \bar{x} \pm t \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$	فترة الثقة، في توزيع طبيعي	$CI = \bar{x} \pm E \text{ or } \bar{x} \pm z \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
معامل الارتباط لاختبار t	$t = r\sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}}$ ، درجات الحرية: $n - 2$	معامل الارتباط	$r = \frac{1}{n-1}\sum\left(\frac{x_i - \bar{x}}{s_x}\right)\left(\frac{y_i - \bar{y}}{s_y}\right)$

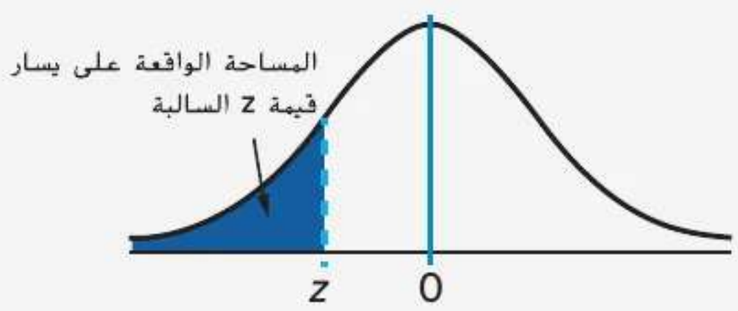
McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

الجدول A التوزيع الطبيعي المعياري

التوزيع الطبيعي المعياري التراكمي

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
−3.4	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0002
−3.3	.0005	.0005	.0005	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0003
−3.2	.0007	.0007	.0006	.0006	.0006	.0006	.0006	.0005	.0005	.0005
−3.1	.0010	.0009	.0009	.0009	.0008	.0008	.0008	.0008	.0007	.0007
−3.0	.0013	.0013	.0013	.0012	.0012	.0011	.0011	.0011	.0010	.0010
−2.9	.0019	.0018	.0018	.0017	.0016	.0016	.0015	.0015	.0014	.0014
−2.8	.0026	.0025	.0024	.0023	.0023	.0022	.0021	.0021	.0020	.0019
−2.7	.0035	.0034	.0033	.0032	.0031	.0030	.0029	.0028	.0027	.0026
−2.6	.0047	.0045	.0044	.0043	.0041	.0040	.0039	.0038	.0037	.0036
−2.5	.0062	.0060	.0059	.0057	.0055	.0054	.0052	.0051	.0049	.0048
−2.4	.0082	.0080	.0078	.0075	.0073	.0071	.0069	.0068	.0066	.0064
−2.3	.0107	.0104	.0102	.0099	.0096	.0094	.0091	.0089	.0087	.0084
−2.2	.0139	.0136	.0132	.0129	.0125	.0122	.0119	.0116	.0113	.0110
−2.1	.0179	.0174	.0170	.0166	.0162	.0158	.0154	.0150	.0146	.0143
−2.0	.0228	.0222	.0217	.0212	.0207	.0202	.0197	.0192	.0188	.0183
−1.9	.0287	.0281	.0274	.0268	.0262	.0256	.0250	.0244	.0239	.0233
−1.8	.0359	.0351	.0344	.0336	.0329	.0322	.0314	.0307	.0301	.0294
−1.7	.0446	.0436	.0427	.0418	.0409	.0401	.0392	.0384	.0375	.0367
−1.6	.0548	.0537	.0526	.0516	.0505	.0495	.0485	.0475	.0465	.0455
−1.5	.0668	.0655	.0643	.0630	.0618	.0606	.0594	.0582	.0571	.0559
−1.4	.0808	.0793	.0778	.0764	.0749	.0735	.0721	.0708	.0694	.0681
−1.3	.0968	.0951	.0934	.0918	.0901	.0885	.0869	.0853	.0838	.0823
−1.2	.1151	.1131	.1112	.1093	.1075	.1056	.1038	.1020	.1003	.0985
−1.1	.1357	.1335	.1314	.1292	.1271	.1251	.1230	.1210	.1190	.1170
−1.0	.1587	.1562	.1539	.1515	.1492	.1469	.1446	.1423	.1401	.1379
−0.9	.1841	.1814	.1788	.1762	.1736	.1711	.1685	.1660	.1635	.1611
−0.8	.2119	.2090	.2061	.2033	.2005	.1977	.1949	.1922	.1894	.1867
−0.7	.2420	.2389	.2358	.2327	.2296	.2266	.2236	.2206	.2177	.2148
−0.6	.2743	.2709	.2676	.2643	.2611	.2578	.2546	.2514	.2483	.2451
−0.5	.3085	.3050	.3015	.2981	.2946	.2912	.2877	.2843	.2810	.2776
−0.4	.3446	.3409	.3372	.3336	.3300	.3264	.3228	.3192	.3156	.3121
−0.3	.3821	.3783	.3745	.3707	.3669	.3632	.3594	.3557	.3520	.3483
−0.2	.4207	.4168	.4129	.4090	.4052	.4013	.3974	.3936	.3897	.3859
−0.1	.4602	.4562	.4522	.4483	.4443	.4404	.4364	.4325	.4286	.4247
−0.0	.5000	.4960	.4920	.4880	.4840	.4801	.4761	.4721	.4681	.4641

لقيم z التي تقل عن 3.49− استخدم 0.0001



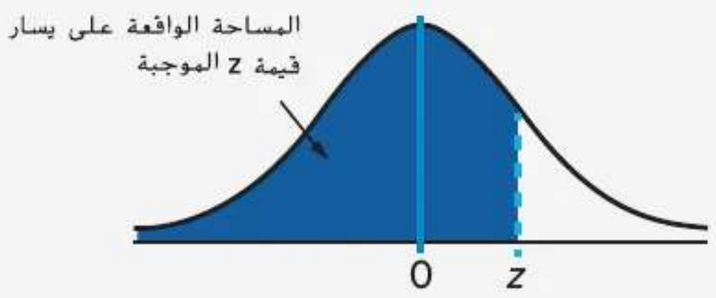
McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

الجدول A (تابع)

التوزيع الطبيعي المعياري التراكمي

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

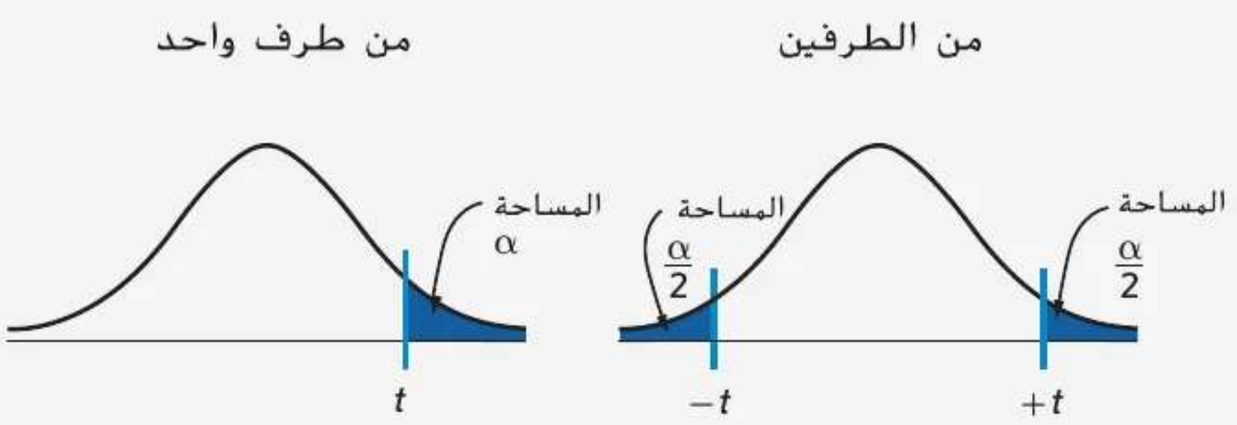
لقيم z التي تزيد عن 3.49 استخدم 0.9999



McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

الجدول B توزيع ستيودنت (توزيع t)

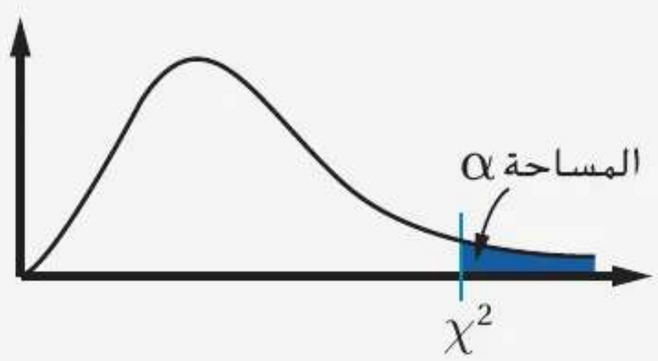
درجات الحرية	فترات الثقة	80%	90%	95%	98%	99%
	α . من طرف واحد	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005
	α . من الطرفين	0.20	0.10	0.05	0.02	0.01
1		3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2		1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3		1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4		1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5		1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6		1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7		1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8		1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9		1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10		1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11		1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12		1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13		1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14		1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15		1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16		1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17		1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18		1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19		1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20		1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21		1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22		1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23		1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24		1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25		1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
26		1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
27		1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28		1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
29		1.311	1.699	2.045	2.462	2.756
30		1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
32		1.309	1.694	2.037	2.449	2.738
34		1.307	1.691	2.032	2.441	2.728
36		1.306	1.688	2.028	2.434	2.719
38		1.304	1.686	2.024	2.429	2.712
40		1.303	1.684	2.021	2.423	2.704
45		1.301	1.679	2.014	2.412	2.690
50		1.299	1.676	2.009	2.403	2.678
55		1.297	1.673	2.004	2.396	2.668
60		1.296	1.671	2.000	2.390	2.660
65		1.295	1.669	1.997	2.385	2.654
70		1.294	1.667	1.994	2.381	2.648
75		1.293	1.665	1.992	2.377	2.643
80		1.292	1.664	1.990	2.374	2.639
90		1.291	1.662	1.987	2.368	2.632
100		1.290	1.660	1.984	2.364	2.626
500		1.283	1.648	1.965	2.334	2.586
1000		1.282	1.646	1.962	2.330	2.581
$(z)\ \infty$		1.282	1.645	1.960	2.326	2.576



حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الجدول C توزيع كاي تربيع (توزيع χ^2)

درجات الحرية	0.995	0.99	0.975	0.95	0.90	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005
1	—	—	0.001	0.004	0.016	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879
2	0.010	0.020	0.051	0.103	0.211	4.605	5.991	7.378	9.210	10.597
3	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	6.251	7.815	9.348	11.345	12.838
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	7.779	9.488	11.143	13.277	14.860
5	0.412	0.554	0.831	1.145	1.610	9.236	11.071	12.833	15.086	16.750
6	0.676	0.872	1.237	1.635	2.204	10.645	12.592	14.449	16.812	18.548
7	0.989	1.239	1.690	2.167	2.833	12.017	14.067	16.013	18.475	20.278
8	1.344	1.646	2.180	2.733	3.490	13.362	15.507	17.535	20.090	21.955
9	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	14.684	16.919	19.023	21.666	23.589
10	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	15.987	18.307	20.483	23.209	25.188
11	2.603	3.053	3.816	4.575	5.578	17.275	19.675	21.920	24.725	26.757
12	3.074	3.571	4.404	5.226	6.304	18.549	21.026	23.337	26.217	28.299
13	3.565	4.107	5.009	5.892	7.042	19.812	22.362	24.736	27.688	29.819
14	4.075	4.660	5.629	6.571	7.790	21.064	23.685	26.119	29.141	31.319
15	4.601	5.229	6.262	7.261	8.547	22.307	24.996	27.488	30.578	32.801
16	5.142	5.812	6.908	7.962	9.312	23.542	26.296	28.845	32.000	34.267
17	5.697	6.408	7.564	8.672	10.085	24.769	27.587	30.191	33.409	35.718
18	6.265	7.015	8.231	9.390	10.865	25.989	28.869	31.526	34.805	37.156
19	6.844	7.633	8.907	10.117	11.651	27.204	30.144	32.852	36.191	38.582
20	7.434	8.260	9.591	10.851	12.443	28.412	31.410	34.170	37.566	39.997
21	8.034	8.897	10.283	11.591	13.240	29.615	32.671	35.479	38.932	41.401
22	8.643	9.542	10.982	12.338	14.042	30.813	33.924	36.781	40.289	42.796
23	9.262	10.196	11.689	13.091	14.848	32.007	35.172	38.076	41.638	44.181
24	9.886	10.856	12.401	13.848	15.659	33.196	36.415	39.364	42.980	45.559
25	10.520	11.524	13.120	14.611	16.473	34.382	37.652	40.646	44.314	46.928
26	11.160	12.198	13.844	15.379	17.292	35.563	38.885	41.923	45.642	48.290
27	11.808	12.879	14.573	16.151	18.114	36.741	40.113	43.194	46.963	49.645
28	12.461	13.565	15.308	16.928	18.939	37.916	41.337	44.461	48.278	50.993
29	13.121	14.257	16.047	17.708	19.768	39.087	42.557	45.722	49.588	52.336
30	13.787	14.954	16.791	18.493	20.599	40.256	43.773	46.979	50.892	53.672
40	20.707	22.164	24.433	26.509	29.051	51.805	55.758	59.342	63.691	66.766
50	27.991	29.707	32.357	34.764	37.689	63.167	67.505	71.420	76.154	79.490
60	35.534	37.485	40.482	43.188	46.459	74.397	79.082	83.298	88.379	91.952
70	43.275	45.442	48.758	51.739	55.329	85.527	90.531	95.023	100.425	104.215
80	51.172	53.540	57.153	60.391	64.278	96.578	101.879	106.629	112.329	116.321
90	59.196	61.754	65.647	69.126	73.291	107.565	113.145	118.136	124.116	128.299
100	67.328	70.065	74.222	77.929	82.358	118.498	124.342	129.561	135.807	140.169



حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

شكر وتقدير

نسخة الطلاب

Photo: v Ingram Publishing/SuperStock; vi Bikeriderlondon/Shutterstock.328 Stocktrek Images/ Superstock; 331 Sean Russell/Getty Images; 334 Doug Sherman/Geofile; 338 moodboard/Cultura/ Getty Images; 339 Le Club Symphonie/Ian Nolan/ Photodisc/Getty Images; 346 Ed-Imaging; 349 McGraw-Hill Education; 350 StockTrek/Getty Images; 352 James Houck/JHP Travel/Alamy Images; 359 StockTrek/Photodisc/Getty Images; 376 Vytautas Kielaitis/Shutterstock; 381 ©Tony Cordoza/Alamy Stock Photo; 388 Design Pics/Kelly Redinger; 404 pm/Alamy; 408 Ingram Publishing/ SuperStock; 410 McGraw-Hill Education; 415 Tetra Images/Getty Images; 420 A. T. Willett/ Alamy; 422 Hulton Archive/Getty Images; 428 Vuk Vukmirovic/123RF; 438 Stocktrek/agefotostock; 439 Ammit Jack/Shutterstock.com; 446 Dave and Les Jacobs/Blend Images LLC; 448 ColorBlind Images/Blend Images LLC; 470 Natursports/ Shutterstock; 482 Bikeriderlondon/Shutterstock; 484 Kuttly/Shutterstock; 487 GL Archive/Alamy Images; 492 Jason O. Watson/Alamy Images; 494 Imagestockdesign/Shutterstock.com; 498 (l)Fabrice Bettex/Alamy, (r)Kevin Schafer/Getty Images; 501 catwalker/Shutterstock.com; 504 Fotosearch/age fotostock; 510 Mi.Ti./Shutterstock.com; 511 NASA/ JPL-Caltech; 519 ©Jim Mires/Alamy Stock Photo; 523 (tr)Dmitry Kalinovsky/Shutterstock; 528 George Pappas/Shutterstock; 538 I. Rozenbaum & F. Cirou/ PhotoAlto; 541 ThinkStock/SuperStock; 542 Pixtal/ SuperStock; 548 ESB Professional/Shutterstock; 549 Nacivet/Taxi/Getty Images; 555 DAJ/Getty Images; 566 ZouZou/Shutterstock; 577 Darrin Klimek/Digital Vision/Getty Images; 586 Kostiantyn Kravchenko/ Shutterstock.com; 588 ©Corbis Premium/Alamy; 593 Africa Studio/Shutterstock.com; 599 Comstock Images/Alamy Images; 604 McGraw-Hill Education; 610 Ilene MacDonald/Alamy Stock Photo; 624 Digital Vision/Getty Images.

ملاحظات الطالب

ملاحظات الطالب

ملاحظات الطالب

ملاحظات الطالب

دلائـــل رمـــوز الغلاف

لون الحلقة الثالثة



يدل الرمز على نوع الكتاب
(**مثال كتاب طالب**)

الرقم 3 المضلل يرمز الى رقم
المجلد **من كتاب الطالب**

الرقم 9 يرمز الى الصف

يرمز المسار التعليمي

- كتاب الطالب
- كتاب النشاط (التمارين)
- كتاب القراءة (اللغة العربية، الدراسات الاجتماعية)
- دليل الطالب التفاعلي (الرياضيات)
- دليل الأنشطة المختبرية (العلوم)
- دليل المعلم

مركز اتصال وزارة التربية والتعليم

اقتراح - استفسار - شكوى

80051115

www.moe.gov.ae

Info@moe.gov.ae