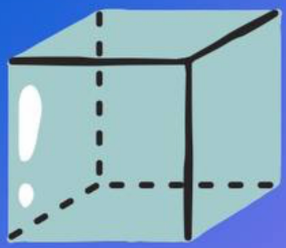
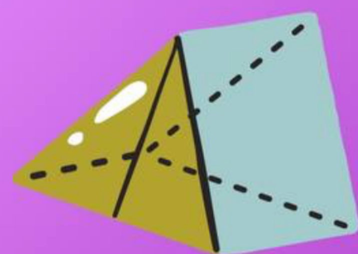


سر التفوق
في الرياضيات

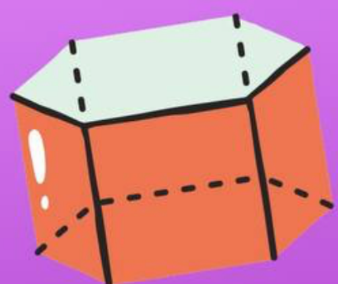
2024-2025

هندسة الفضاء



11 علمي

الفصل الدراسي الثاني



أ/ شكري الجميعي

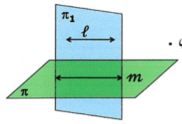
سر التفوق

أ/ الشكري

هندسة الفضاء

نظرية (1) تفيد في اثبات توازي مستقيم مع مستوي

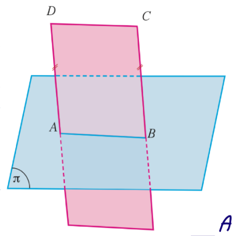
إذا وازي مستقيم خارج مستو مستقيما في المستوي فإنه يوازي المستوي .



$\left.\begin{array}{l}\overleftrightarrow{\ell} \parallel \overleftrightarrow{m} \\ ,\overleftrightarrow{m} \subset \pi\end{array}\right\} \overleftrightarrow{\ell} \parallel \pi$

في الشكل المقابل: $AD = BC$ ، $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BC}$ ، $\overleftrightarrow{AB} \subset \pi$

أثبت أن: $\overleftrightarrow{CD} \parallel \pi$



الحل

$\because \overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BC}$

$\therefore \overleftrightarrow{AD}$ و $\overleftrightarrow{BC}$ يعينان مستوى وحيد وليكن $ABCD$

$\left.\begin{array}{l}\because \overline{AD} \parallel \overline{CB} \\ \because AD = CB\end{array}\right\} \Rightarrow \therefore$ الشكل $ABCD$ متوازي أضلاع

$\therefore \overline{DC} \parallel \overline{AB}$ من خواص متوازي الأضلاع

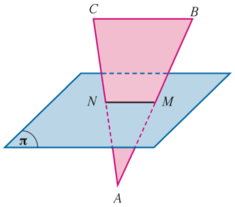
$\therefore \overleftrightarrow{DC} \parallel \overleftrightarrow{AB}$

$\left.\begin{array}{l}\because \overleftrightarrow{DC} \text{ خارج المستوى } \pi \\ \because \overleftrightarrow{DC} \parallel \overleftrightarrow{AB} \\ \because \overleftrightarrow{AB} \subset \pi\end{array}\right\} \Rightarrow \overleftrightarrow{DC} \parallel \pi$ نظرية ①

في الشكل المقابل: المثلث ABC فيه M منتصف $\overline{AB}$ ، N منتصف $\overline{AC}$ ،

M ، N تنتميان إلى المستوي π .

أثبت أن $\overleftrightarrow{BC} \parallel \pi$.



الحل

$\because M$ منتصف $\overline{AB}$ ، N منتصف $\overline{AC}$

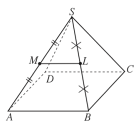
$\therefore \overline{MN} \parallel \overline{BC} \Rightarrow \overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{BC}$

$\left.\begin{array}{l}\because \overleftrightarrow{BC} \text{ خارج المستوى } \pi \\ \because \overleftrightarrow{MN} \subset \pi \\ \because \overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{CB}\end{array}\right\} \Rightarrow \overleftrightarrow{CB} \parallel \pi$ نظرية ①

$SABCD$ هرم قاعدته $ABCD$ مربعة الشكل.

M منتصف $\overline{SA}$ ، L منتصف $\overline{SB}$

أثبت أن: $\overleftrightarrow{ML} \parallel (ABCD)$



الحل

في $\triangle ABS$

$\because M$ منتصف $\overline{AS}$ ، L منتصف $\overline{BS}$

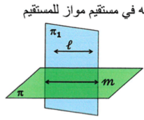
$\therefore \overline{ML} \parallel \overline{AB}$

$\left.\begin{array}{l}\because \overleftrightarrow{ML} \text{ خارج المستوى } ABCD \\ ، \overleftrightarrow{ML} \parallel \overleftrightarrow{AB} \\ ، \overleftrightarrow{AB} \subset \pi\end{array}\right\} \Rightarrow \overleftrightarrow{ML} \parallel (ABCD)$

نظرية (١)

نظرية (2) تفيد في اثبات توازي مستقيمين

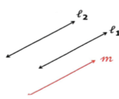
إذا وازى مستقيم مستويا، فكل مستو مار بالمستقيم و يقطع المستوي، يقطعه في مستقيم مواز للمستقيم المعلوم .



$\left.\begin{array}{l}\because \overleftrightarrow{\ell} \parallel \pi \\ \overleftrightarrow{\ell} \subset \pi_1 \\ \pi_1 \cap \pi = \overleftrightarrow{m}\end{array}\right\} \overleftrightarrow{\ell} \parallel \overleftrightarrow{m}$

نظرية (3) تفيد في اثبات توازي مستقيمين

المستقيمان الموازيان لمستقيم ثالث في الفضاء متوازيان.



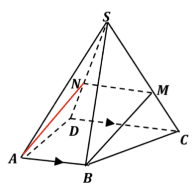
$\left.\begin{array}{l}\overleftrightarrow{\ell_1} \parallel \overleftrightarrow{m} \\ \overleftrightarrow{\ell_2} \parallel \overleftrightarrow{m}\end{array}\right\} \therefore \overleftrightarrow{\ell_1} \parallel \overleftrightarrow{\ell_2}$

$SABCD$ هرم قاعدته شبه المنحرف $ABCD$ حيث إن $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{DC}$

$M \in \overline{SC}$ ، المستوي ABM يقطع $\overleftrightarrow{SD}$ في N

(a) أثبت أن : $\overleftrightarrow{AB}$ يوازي المستوي SDC

(b) أثبت أن : $\overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{CD}$



$\left.\begin{array}{l}\overleftrightarrow{AB} \text{ خارج المستوى } SDC \\ \because \overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD} \\ \overleftrightarrow{CD} \subset (SDC)\end{array}\right\} \Rightarrow \overleftrightarrow{AB} \parallel (SDC)$ نظرية ①

$\left.\begin{array}{l}\because \overleftrightarrow{AB} \parallel (SDC) \\ ، \overleftrightarrow{AB} \subset (ABMN) \\ ، (ABMN) \cap (SDC) = \overleftrightarrow{MN}\end{array}\right\} \Rightarrow \overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{MN}$ نظرية ②

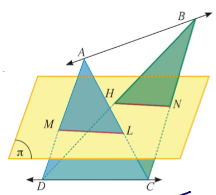
$\left.\begin{array}{l}\because \overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD} \\ ، \overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{MN}\end{array}\right\} \Rightarrow \overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ نظرية ③

في الشكل المقابل: إذا كان $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{CD}$ متخالفان، $\overleftrightarrow{CD} \parallel \pi$.

$\overleftrightarrow{AD}$ تقطع π في M، $\overleftrightarrow{AC}$ تقطع π في L .

$\overleftrightarrow{BD}$ تقطع π في H، $\overleftrightarrow{BC}$ تقطع π في N .

أثبت أن: $\overleftrightarrow{LM} \parallel \overleftrightarrow{NH}$



$\because \overleftrightarrow{DA}$ ، $\overleftrightarrow{CA}$ متقاطعان $\Leftarrow$ يعينان مستوى وحيد وليكن π_1

$\left.\begin{array}{l}\because \overleftrightarrow{DC} \parallel \pi \\ ، DC \subset \pi_1 \\ ، \pi_1 \cap \pi = \overleftrightarrow{ML}\end{array}\right\} \Rightarrow \overleftrightarrow{DC} \parallel \overleftrightarrow{ML} \longrightarrow ①$

$\because \overleftrightarrow{DB}$ ، $\overleftrightarrow{CB}$ متقاطعان $\Leftarrow$ يعينان مستوى وحيد وليكن π_2

$\left.\begin{array}{l}\because \overleftrightarrow{DC} \parallel \pi \\ ، \overleftrightarrow{DC} \subset \pi_2 \\ ، \pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{NH}\end{array}\right\} \Rightarrow \overleftrightarrow{DC} \parallel \overleftrightarrow{NH} \longrightarrow ②$

نظرية ②

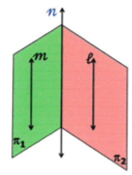
$\therefore$ من ① ، ②

$\left.\begin{array}{l}\overleftrightarrow{DC} \parallel \overleftrightarrow{ML} \\ \overleftrightarrow{DC} \parallel \overleftrightarrow{HN}\end{array}\right\} \Rightarrow \overleftrightarrow{ML} \parallel \overleftrightarrow{HN}$

نظرية ③

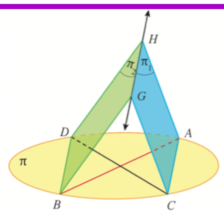
نتيجة (1) — تفيد في اثبات توازي مستقيمين

إذا توازى مستقيمان و مر بهما مستويان متقاطعان ، فإن تقاطعهما هو مستقيم يوازي كلا من هذين المستقيمين .



$\overleftrightarrow{\ell} \parallel \overleftrightarrow{m}$,
$\overleftrightarrow{m} \subset \pi_1$,
$\overleftrightarrow{\ell} \subset \pi_2$
$\pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{n}$
$\Rightarrow \overleftrightarrow{\ell} \parallel \overleftrightarrow{m} \parallel \overleftrightarrow{n}$

في الشكل المقابل: $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ قطران في مستوي الدائرة π.
$\pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{GH}$
أثبت أن مستوي الدائرة π يوازي $\overleftrightarrow{GH}$.



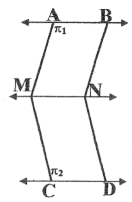
الحل

∵ $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ قطران في الدائرة
∴ متساويان وينصف كل منهما الآخر
∴ الشكل $ACBD$ مستطيل
من خواص المستطيل $\overline{AC} \parallel \overline{DB}$

∵ $\overleftrightarrow{AC} \subset \pi_1$, $\overleftrightarrow{DB} \subset \pi_2$, $\pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{GH}$ $\Rightarrow \overleftrightarrow{AC} \parallel \overleftrightarrow{GH} \parallel \overleftrightarrow{DB}$ نتيجة ①

∵ $\overleftrightarrow{GH} \parallel \overleftrightarrow{AC}$, و $\overleftrightarrow{AC} \subset \pi$ $\Rightarrow$ ∴ $\overleftrightarrow{GH} \parallel \pi$ نظرية ①

ليكن π_1 , π_2 مستويان متقاطعان في $\overleftrightarrow{MN}$ حيث:
$\overleftrightarrow{AB} \subset \pi_1$ ، $\overleftrightarrow{AB} \parallel \pi_2$
$\overleftrightarrow{CD} \subset \pi_2$ ، $\overleftrightarrow{CD} \parallel \pi_1$
أثبت أن: $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$



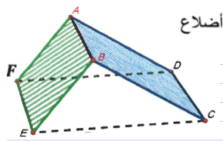
الحل

∵ $\overleftrightarrow{AB} \parallel \pi_2$ ، $\overleftrightarrow{AB} \subset \pi_1$ ، $\pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{MN}$ $\Rightarrow \overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{MN}$ نظرية (٢)

∵ $\overleftrightarrow{CD} \parallel \pi_1$ ، $\overleftrightarrow{CD} \subset \pi_2$ ، $\pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{MN}$ $\Rightarrow \overleftrightarrow{CD} \parallel \overleftrightarrow{MN}$ نظرية (٢)

∵ $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{MN}$ ، $\overleftrightarrow{CD} \parallel \overleftrightarrow{MN}$ $\Rightarrow \overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ نظرية (3)

$ABEF$, $ABCD$ متوازيا اضلاع غير مستويين معاً
ويتقاطعان في $\overline{AB}$ أثبت أن $CDFE$ متوازي أضلاع



الحل

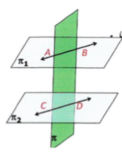
$\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ متوازي أضلاع $ABCD$
$\overline{AB} \parallel \overline{FE}$ متوازي أضلاع $ABEF$
$\Rightarrow \overline{DC} \parallel \overline{FE} \rightarrow ①$

$AB = DC$
$AB = FE$
$\Rightarrow DC = FE \rightarrow ②$

∴ من ① ② ينتج أن $\overline{DC} \parallel \overline{FE}$, $DC = FE$
∴ $CDEF$ متوازي أضلاع

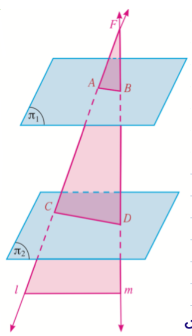
نظرية (4) — تفيد في اثبات توازي مستقيمين

إذا قطع مستو مستويين متوازيين فإن خطي تقاطعه معهما يكونان متوازيين .



$\pi_2 \parallel \pi_1$
$\pi \cap \pi_1 = \overleftrightarrow{AB}$
$\pi \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{CD}$
$\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

في الشكل المقابل: π_1 , π_2 مستويين متوازيين.
$\overleftrightarrow{\ell}$, $\overleftrightarrow{m}$ مستقيمان متقاطعان في F ويقطعان كلاً من π_1 في A, B، π_2 في C, D
إذا كان $FB = 5\text{ cm}$, $CD = 9\text{ cm}$, $AC = 6\text{ cm}$, $BD = 4\text{ cm}$
فأوجد محيط المثلث FAB



الحل

∵ $\overleftrightarrow{\ell}$, $\overleftrightarrow{m}$ متقاطعان ⇐ يعينان مستوى واحد π_3

∵ $\pi_1 \parallel \pi_2$, $\pi_3 \cap \pi_1 = \overleftrightarrow{AB}$, $\pi_3 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{CD}$ $\Rightarrow \overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ نظرية ④

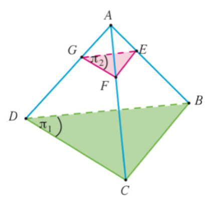
$\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ ⇐ المثلثان FCD ، FAB متشابهان

$\frac{FB}{FD} = \frac{FA}{FC} = \frac{AB}{CD} \Rightarrow \frac{5}{9} = \frac{FA}{FA+6} = \frac{AB}{9}$

$\frac{5}{9} = \frac{AB}{9} \Rightarrow AB = 5\text{ cm}$ | $5FA + 30 = 9FA$, $4FA = 30 \Rightarrow FA = 7.5\text{ cm}$

∴ محيط المثلث FAB $= 7.5 + 5 + 5 = 17.5\text{ cm}$

في الشكل المقابل $ABCD$ هرم ثلاثي.
المستويان π_1 , π_2 متوازيان.
إذا كان $\frac{AE}{EB} = \frac{1}{3}$ ، $FG = 6\text{ cm}$
فأوجد DC



الحل

∵ $\frac{AE}{EB} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{1}{4}$

∵ $\pi_1 \parallel \pi_2$

∵ $(ABC) \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{EF}$, $(ABC) \cap \pi_1 = \overleftrightarrow{BC}$ $\Rightarrow \overleftrightarrow{EF} \parallel \overleftrightarrow{BC}$

في المثلث ABC : $\overline{EF} \parallel \overline{BC}$ ⇐ $ABC \sim AEF$

$\frac{AE}{AB} = \boxed{\frac{AF}{AC}} = \frac{EF}{BC} = \frac{1}{4}$ (I)

بالمثل يمكن إثبات أن $AGF \sim ADC$

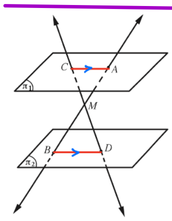
$\boxed{\frac{AF}{AC}} = \frac{GF}{DC} = \frac{AG}{AD}$ (II)

من (I) ، (II)

$\frac{GF}{DC} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{6}{DC} = \frac{1}{4}$

$DC = 24\text{ cm}$

في الشكل المقابل π_1 , π_2 مستويان متوازيان، M نقطة واقعة بينهما،
حيث $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{CD} = \{M\}$
أثبت أن: $\frac{AM}{MB} = \frac{AC}{BD}$



∵ $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{CD}$ مستقيمان متقاطعان
∴ يعينان مستوى وحيداً وليكن π

∵ $\pi_1 \parallel \pi_2$, $\pi \cap \pi_1 = \overleftrightarrow{CA}$, $\pi \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{BD}$ $\Rightarrow \overleftrightarrow{AC} \parallel \overleftrightarrow{BD}$

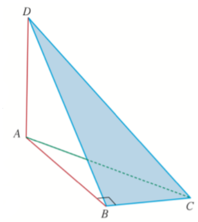
∴ المثلثان MCA , MDB متشابهان

$\frac{AM}{BM} = \frac{AC}{BD}$

إذا كان $\overleftrightarrow{l} \perp \pi$ فإن l عموديًّا على كل المستقيمات في المستوى π

نظرية (5)

المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين يكون عموديًّا على مستويهما.



في الشكل المقابل، المثلث ABC قائم في $\hat{B}$

$\overleftrightarrow{AD} \perp (ABC)$.

أثبت أن المثلث DBC قائم في $\hat{B}$

الحل

∵ المثلث ABC قائم في B

∴ $\overleftrightarrow{BC} \perp \overleftrightarrow{BA}$ ← ①

∵ $\overleftrightarrow{AD} \perp (ABC)$

∴ $\overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{BC}$ ← ②

∴ من ①، ② $\overleftrightarrow{BC}$ عمودي على كل من $\overleftrightarrow{AB}$ ، $\overleftrightarrow{AD}$

∴ $\overleftrightarrow{BC} \perp (ABD)$ (نظرية 5)

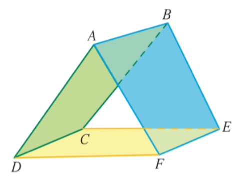
، $\overleftrightarrow{DB} \subset (ABD)$

∴ $\overleftrightarrow{BC} \perp \overleftrightarrow{DB}$ (من التعريف)

∴ △ DBC قائم الزاوية في $\hat{B}$

نظرية (6) $\overleftrightarrow{l} \perp \pi_1 , \overleftrightarrow{l} \perp \pi_2 \Rightarrow \pi_1 // \pi_2$

نظرية (7) $\overleftrightarrow{l} \perp \pi_1 , \pi_1 // \pi_2 \Rightarrow \overleftrightarrow{l} \perp \pi_2$



في الشكل المقابل:

$ABEF, ABCD$ مستطيلان

أثبت أن: $(AFD) // (BEC)$

الحل

∵ $ABEF$ مستطيل: $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BE}$

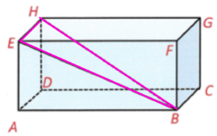
∵ $ABCD$ مستطيل: $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BC}$

$\Rightarrow \overleftrightarrow{AB} \perp (BEC)$ → ①

$\overleftrightarrow{BA} \perp \overleftrightarrow{AF}$ ، $\overleftrightarrow{BA} \perp \overleftrightarrow{AD}$ $\Rightarrow \overleftrightarrow{BA} \perp AFD$ → ②

∴ من ①، ② $(BEC) // (AFD)$

نظرية ⑥



في شبه المكعب المقابل،

أثبت أن المثلث BEH قائم في $\hat{E}$.

الحل

نظرية (5)

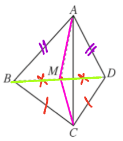
مستطيل "HEFG" $\overleftrightarrow{HE} \perp \overleftrightarrow{EF}$

مستطيل "HEAD" $\overleftrightarrow{HE} \perp \overleftrightarrow{EA}$

$\Rightarrow \overleftrightarrow{HE} \perp (ABFE)$

$\overleftrightarrow{HE} \perp (ABFE)$ ، $\overleftrightarrow{EB} \subset (ABFE)$ $\Rightarrow \overleftrightarrow{HE} \perp \overleftrightarrow{EB}$

∴ المثلث BEH قائم في $\hat{E}$



$ABCD$ هرم ثلاثي القاعدة.

$AD = AB$ ،$CD = CB$

النقطة M منتصف $\overline{DB}$

(a) أثبت أن: $\overleftrightarrow{BD} \perp (AMC)$

(b) استنتج أن: $\overleftrightarrow{BD} \perp \overleftrightarrow{AC}$

الحل

∵ $AD = AB$ ⇐ المثلث ABD متساوي الضلعين

∵ M منتصف $\overline{DB}$

∴ $\overleftrightarrow{DB} \perp \overleftrightarrow{AM}$ ← ① من خواص △ متساوي الضلعين

∵ $CD = CB$ ⇐ المثلث BCD متساوي الضلعين

∵ M منتصف $\overline{DB}$

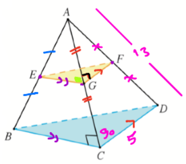
∴ $\overleftrightarrow{DB} \perp \overleftrightarrow{CM}$ ← ② من خواص △ متساوي الضلعين

∴ من ①، ② $\overleftrightarrow{DB}$ عمودي على كل من $\overleftrightarrow{AM}$ ، $\overleftrightarrow{CM}$

∴ $\overleftrightarrow{DB} \perp (AMC)$ نظرية ⑤

∵ $\overleftrightarrow{AC} \subset (AMC)$

∴ $\overleftrightarrow{DB} \perp \overleftrightarrow{AC}$ من التعريف



في الشكل المقابل:

A نقطة خارج المستوى BCD،

والنقاط E, G, F منتصفات $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ على الترتيب.

إذا كان $\overline{AC} \perp \overline{CB}$

وكان $AD = 13$ cm ،$AC = 12$ cm ،$CD = 5$ cm

فأثبت أن: $(EGF) // (BCD)$.

الحل

في △ ACD

$(AC)^2 + (CD)^2 = (12)^2 + (5)^2 = 169$ → ①

$(AD)^2 = (13)^2 = 169$ → ②

∴ من ①، ② المثلث ACD قائم الزاوية في $\hat{C}$

∴ $\overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{CD}$ ، $\overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{CB}$ $\Rightarrow \overleftrightarrow{AC} \perp (BCD)$ → ③

نظرية ⑤

في △ ABC

∵ E منتصف $\overline{AB}$ ، G منتصف $\overline{AC}$

∴ $\overleftrightarrow{EG} // \overleftrightarrow{CB}$

ويكون $m(B\hat{C}A) = 90°$

∴ $m(A\hat{G}E) = 90° \Rightarrow \overleftrightarrow{AG} \perp \overleftrightarrow{EG}$

بالمثل $\overleftrightarrow{AG} \perp \overleftrightarrow{GF}$

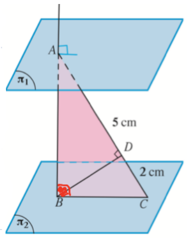
∴ $\overleftrightarrow{AG} \perp (EGF)$

$\overleftrightarrow{AC} \perp (EGF)$ → ④

من ③ ④ ينتج أن

∴ $(EGF) // (BCD)$

نظرية ⑥



في الشكل المقابل، $\overleftrightarrow{BC} \subset \pi_2$ ، $A \in \pi_1$ ، $\overleftrightarrow{AB} \perp \pi_1$ ، $\pi_1 \,//\, \pi_2$

رسم: $\overleftrightarrow{BD} \perp \overleftrightarrow{AC}$ في المستوي ABC

إذا كان: $AD = 5\text{ cm}$ ، $DC = 2\text{ cm}$

أوجد: BD

الحل

$\because \pi_1 \,//\, \pi_2$ ، $\overleftrightarrow{AB} \perp \pi_1$ $\Big\} \Rightarrow \overleftrightarrow{AB} \perp \pi_2$ نظرية 7

$\because \overleftrightarrow{AB} \perp \pi_2$ ، $\overleftrightarrow{BC} \subset \pi_2$ $\Big\} \Rightarrow \overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BC}$ تعريف

$\because$ المثلث ABC قائم الزاوية في $\hat{B}$

$\therefore (BD)^2 = CD \cdot DA$

$(BD)^2 = (2)\cdot(5) = 10$

$\therefore BD = \sqrt{10}$ cm

سر التفوق

أ/ شكري

نظرية (8)

$$\overleftrightarrow{l} \perp \pi \,,\, \overleftrightarrow{m} \perp \pi \Longrightarrow \overleftrightarrow{l} \,//\, \overleftrightarrow{m}$$

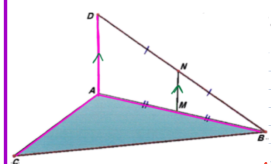
نظرية (9)

$$\overleftrightarrow{l} \,//\, \overleftrightarrow{m} \,,\, \overleftrightarrow{l} \perp \pi \Longrightarrow \overleftrightarrow{m} \perp \pi$$

ABC مثلث، اخذت النقطة D خارج مستوي المثلث بحيث كان:

$\overleftrightarrow{DA}$ عمودي على كل من $\overleftrightarrow{AC}, \overleftrightarrow{AB}$ فإذا كانت M منتصف $\overline{AB}$

N منتصف $\overline{DB}$ أثبت أن: $\overleftrightarrow{MN} \perp (ABC)$.



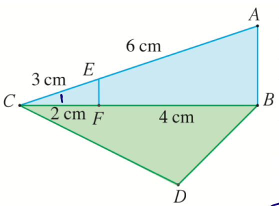
الحل

$\because \overleftrightarrow{DA} \perp \overleftrightarrow{AB}$ ، $\overleftrightarrow{DA} \perp \overleftrightarrow{AC}$ $\Big\} \Rightarrow \overleftrightarrow{DA} \perp (ABC) \longrightarrow$ ①

$\overleftrightarrow{DB} \cap \overleftrightarrow{AB} = \{B\}$ فهما يعينان مستوى وحيد (DAB)

في المثلث DAB: M منتصف $\overline{AB}$ ، N منتصف $\overline{DB}$ $\Big\} \Rightarrow \overleftrightarrow{NM} \,//\, \overleftrightarrow{DA} \longrightarrow$ ②

$\therefore$ من ① ② $\overleftrightarrow{NM} \perp (ABC)$



في الشكل المقابل إذا كان $\overline{AB} \perp (BCD)$

وكان $CE = 3\text{ cm}$ ، $EA = 6\text{ cm}$ ، $CF = 2\text{ cm}$ ، $FB = 4\text{ cm}$

أثبت أن: $\overline{EF} \perp \overline{DB}$

الحل

$\because \overline{AB}, \overline{CA}$ متقاطعان $\therefore$ يعينان مستوى وحيد وليكن π

المثلثين CEF ، CAB فيهما

$\frac{CE}{CA} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

$\frac{CF}{CB} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$(\hat{1})$ مشترك

$\Rightarrow \triangle CAB \sim \triangle CEF$

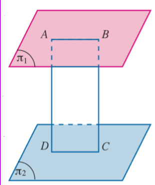
$\therefore \overline{EF} \,//\, \overline{AB}$

$\because \overline{AB} \perp (CBD)$

$\therefore EF \perp (CBD) \longrightarrow$ ① "نظرية"

، $\because \overline{DB} \subset (CBD) \longrightarrow$ ②

$\therefore$ من ① ، ② $\overline{EF} \perp \overline{DB}$



في الشكل المقابل: $\pi_1 \,//\, \pi_2$

A, B نقطتان في π_1،

C, D نقطتان في π_2 حيث: A, B, C, D في مستوى واحد

$\overline{AD} \perp \pi_2$ ، $\overline{BC} \perp \pi_2$

أثبت أن $ABCD$ مستطيل.

الحل

$\because$ النقاط A, B, C, D في مستوى وليكن π

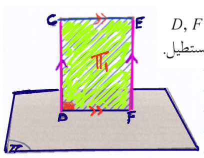
$\because \pi_1 \,//\, \pi_2$ ، $\pi \cap \pi_1 = \overleftrightarrow{AB}$ ، $\pi \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{DC}$ $\Big\} \Rightarrow \overleftrightarrow{AB} \,//\, \overleftrightarrow{DC} \longrightarrow$ ① نظرية ④

$\because \overleftrightarrow{AD} \perp \pi_2$ ، $\overleftrightarrow{BC} \perp \pi_2$ $\Big\} \Rightarrow \overleftrightarrow{AD} \,//\, \overleftrightarrow{BC} \longrightarrow$ ② نظرية ⑧

$\because \overleftrightarrow{AD} \perp \pi_2$ ، $\overleftrightarrow{DC} \subset \pi_2$ $\Big\} \Rightarrow \overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{DC}$ تعريف

$\therefore m(\hat{D}) = 90° \longrightarrow$ ③

$\therefore$ من ① ، ② ، ③ الشكل $ABCD$ مستطيل



ليكن $\overleftrightarrow{EF}$، $\overleftrightarrow{CD}$ عموديان على المستوي π ويقطعانه في D, F على الترتيب. فإذا كان $\overleftrightarrow{CE}$ يوازي π. أثبت أن $CDFE$ مستطيل.

الحل

$\because \overleftrightarrow{EF} \perp \pi$ ، $\overleftrightarrow{CD} \perp \pi$ $\Big\} \Rightarrow \overleftrightarrow{EF} \,//\, \overleftrightarrow{CD} \longrightarrow$ Ⅰ نظرية ⑧

$\because \overleftrightarrow{EF}, \overleftrightarrow{CD}$ متوازيان $\therefore$ يعينان مستوى وحيد وليكن π_1

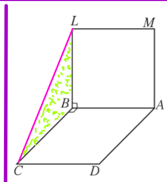
$\because \overleftrightarrow{CE} \,//\, \pi$ ، $\overleftrightarrow{CE} \subset \pi_1$ ، $\pi \cap \pi_1 = \overleftrightarrow{DF}$ $\Big\} \Rightarrow \overleftrightarrow{CE} \,//\, \overleftrightarrow{DF} \longrightarrow$ Ⅱ نظرية ②

$\therefore$ من Ⅰ ، Ⅱ $\therefore$ الشكل $CEFD$ متوازي أضلاع فيه كل ضلعين متقابلين متوازيين

$\because \overleftrightarrow{CD} \perp \pi$ ، $\overleftrightarrow{DF} \subset \pi$ $\Big\} \Rightarrow \overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{DF}$ تعريف

$\Rightarrow m(\hat{D}) = 90° \longrightarrow$ Ⅲ

$\therefore$ من Ⅰ ، Ⅱ ، Ⅲ الشكل $CEFD$ مستطيل (متوازي أضلاع فيه زاوية قائمة)



ABCD، ABLM مربعان ليسا في مستو واحد، لهما ضلع مشترك $\overline{AB}$

أثبت أن: $\overleftrightarrow{LM} \perp (LBC)$

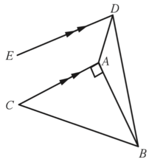
الحل

$\because \overleftrightarrow{BA} \perp \overleftrightarrow{BC}$ مربع ABCD

$، \overleftrightarrow{BA} \perp \overleftrightarrow{LB}$ مربع ABLM $\Big\} \Rightarrow \overleftrightarrow{BA} \perp (LBC)$

$\because \overleftrightarrow{BA} \perp (LBC)$

$، \overleftrightarrow{LM} \parallel \overleftrightarrow{BA}$ مربع ABLM $\Big\} \Rightarrow \overleftrightarrow{LM} \perp (LBC)$ نظرية 9



في الشكل المقابل، ABC مثلث قائم الزاوية في A

رسم $\overleftrightarrow{AD}$ عمودي على مستوي المثلث ABC، ورسم $\overleftrightarrow{ED} \parallel \overleftrightarrow{CA}$

أثبت أن: $\overleftrightarrow{ED} \perp \overleftrightarrow{AB}$

الحل

$\because \overleftrightarrow{DA} \perp (ABC)$

$، \overleftrightarrow{CA} \subset (ABC) \Big\} \Rightarrow \overleftrightarrow{DA} \perp \overleftrightarrow{CA}$

$\therefore \overleftrightarrow{CA} \perp AB$

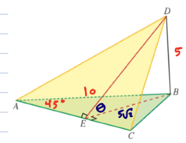
$، \overleftrightarrow{CA} \perp DA \Big\} \Rightarrow \overleftrightarrow{CA} \perp (DAB)$ نظرية 5

$\because \overleftrightarrow{CA} \parallel \overleftrightarrow{ED}$

$، \overleftrightarrow{CA} \perp DAB \Big\} \Rightarrow \overleftrightarrow{ED} \perp (DAB)$ نظرية 9

$\therefore \overleftrightarrow{ED} \perp (DAB)$

$، \overleftrightarrow{AB} \subset (DAB) \Big\} \Rightarrow \overleftrightarrow{ED} \perp \overleftrightarrow{AB}$ التعريف



في الشكل المقابل D نقطة خارج مستوى المثلث ABC،

$DB = 5\text{ cm}$ ، $AB = 10\text{ cm}$ ، $m(\widehat{BAC}) = 45°$

$\overline{DB} \perp (ABC)$

$\overline{BE} \perp \overline{AC}$ ، $\overline{DE} \perp \overline{AC}$

أوجد:

a BE, DE

b قياس الزاوية الزوجية بين المستويين BAC, DAC

الحل

a

$\because \overline{BE} \perp \overline{AC} \Rightarrow \therefore m(B\hat{E}A) = 90°$ معطى

$\sin 45° = \frac{EB}{AB} = \frac{EB}{10}$

$\therefore BE = 10 \sin 45° = 5\sqrt{2}$ cm

$\because \overline{DB} \perp (ABC)$

$، \overline{BE} \subset (ABC) \Big\} \Rightarrow \overline{DB} \perp \overline{BE}$

$\because$ المثلث DBE قائم في $\hat{B}$ $\therefore DE = \sqrt{(5)^2 + (5\sqrt{2})^2} = 5\sqrt{3}$

b

$\because \overline{AC}$ هو حافة الزاوية

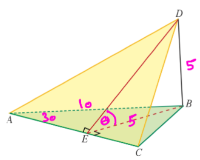
$\because \overline{BE} \subset (BAC)$ ، $\overline{BE} \perp \overline{AC}$

$\because \overline{DE} \subset (DAC)$ ، $\overline{DE} \perp \overline{AC}$ $\Big\} \Rightarrow \therefore (B\hat{E}D)$ هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية بين المستويين

$\because$ المثلث DBE قائم الزاوية في $\hat{B}$

$\tan(B\hat{E}D) = \frac{DB}{BE} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$m(B\hat{E}D) = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 35.26°$



في الشكل المقابل D نقطة خارج مستوى المثلث ABC،

$DB = 5\text{ cm}$ ، $AB = 10\text{ cm}$ ، $m(\widehat{BAC}) = \frac{\pi}{6} = 30$

$\overline{DB} \perp (ABC)$

$\overline{BE} \perp \overline{AC}$ ، $\overline{DE} \perp \overline{AC}$

أوجد:

a BE, DE

b قياس الزاوية الزوجية بين المستويين BAC, DAC

الحل

a

$\because \overline{BE} \perp \overline{AC} \Rightarrow \therefore m(B\hat{E}A) = 90°$ معطى

$\because m(BAC) = 30°$

$\therefore \Delta$ AEB مثلث ثلاثيني ستيني

$\therefore BE = \frac{1}{2} AB = 5$ cm

$\because \overline{DB} \perp (ABC)$

$، \overline{BE} \subset (ABC) \Big\} \Rightarrow \overline{DB} \perp \overline{BE}$

$\because$ المثلث DBE قائم في $\hat{B}$ ومتطابق الضلعين

$\therefore DE = \sqrt{2}\, BE = 5\sqrt{2}$ cm

b

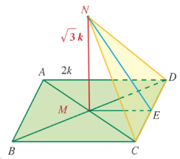
$\because \overline{AC}$ هو حافة الزاوية

$\because \overline{BE} \subset (BAC)$ ، $\overline{BE} \perp \overline{AC}$

$\because \overline{DE} \subset (DAC)$ ، $\overline{DE} \perp \overline{AC}$ $\Big\} \Rightarrow \therefore (B\hat{E}D)$ هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية بين المستويين

$\because$ المثلث DBE قائم الزاوية في $\hat{B}$ ومتطابق الضلعين

$m(B\hat{E}D) = \frac{\pi}{4}$



$ABCD$ مستطيل تقاطع قطراه في M، وفيه $AD = 2k$
أقيم $\overline{NM}$ عمودًا على $(ABCD)$ حيث N خارج مستواه بحيث $MN = \sqrt{3}k$
أوجد قياس الزاوية الزوجية بين المستويين NCD , $ABCD$

الحل

العمل: نرسم $\overline{ME}$ حيث E هي منتصف $\overline{DC}$

$\because \overline{NM} \perp (ABCD)$
$\overline{CD} \subset (ABCD)$
$\Rightarrow \overline{NM} \perp \overline{CD} \longrightarrow ①$

$\because$ المثلث MDC متطابق الضلعين حيث $MC = MD$ من خواص المستطيل
، $\because E$ منتصف $\overline{CD}$
$\therefore \overline{ME} \perp \overline{CD} \longrightarrow ②$

$\therefore$ من ①، ② $\overline{CD} \perp (MNE)$
، $\because \overline{NE} \subset (MNE)$
$\therefore \overline{NE} \perp \overline{CD}$

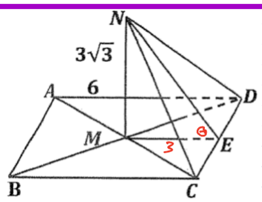
$\because \overline{CD}$ حافة الزاوية الزوجية
$\because \overline{NE} \perp \overline{CD}$, $\overline{NE} \subset (NCD)$
$\because \overline{ME} \perp \overline{CD}$, $\overline{ME} \subset (ABCD)$
$\Rightarrow (M\hat{E}N)$ هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية

في المثلث BCD
M منتصف $\overline{BD}$ ، E منتصف $\overline{CD}$
$\therefore ME = \frac{1}{2} BC = k$, $BC = AD = 2k$

في المثلث MEN القائم الزاوية في M

$\tan(M\hat{E}N) = \frac{\sqrt{3}k}{k} = \sqrt{3}$
$\therefore m(M\hat{E}N) = 60°$

$\therefore$ قياس الزاوية الزوجية بين المستويين $= 60°$



$ABCD$ مستطيل تقاطع قطراه في M ، و فيه $AD = 6cm$
أقيم $\overline{NM}$ عمودا على $(ABCD)$ حيث N خارج مستواه
بحيث $MN = 3\sqrt{3}\ cm$ ، E منتصف $\overline{CD}$
أوجد قياس الزاوية الزوجية بين المستويين $ABCD$, NCD

الحل

$\because \overline{NM} \perp (ABCD)$
$\overline{CD} \subset (ABCD)$
$\Rightarrow \overline{NM} \perp \overline{CD} \longrightarrow ①$

$\because$ المثلث MDC متطابق الضلعين حيث $MC = MD$ من خواص المستطيل
، $\because E$ منتصف $\overline{CD}$

$\therefore \overline{ME} \perp \overline{CD} \longrightarrow ②$

$\therefore$ من ①، ② $\overline{CD} \perp (MNE)$

، $\because \overline{NE} \subset (MNE)$

$\therefore \overline{NE} \perp \overline{CD}$

$\because \overline{CD}$ حافة الزاوية الزوجية
$\because \overline{NE} \perp \overline{CD}$, $\overline{NE} \subset (NCD)$
$\because \overline{ME} \perp \overline{CD}$, $\overline{ME} \subset (ABCD)$
$\Rightarrow (M\hat{E}N)$ هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية

في المثلث BCD
M منتصف $\overline{BD}$ ، E منتصف $\overline{CD}$

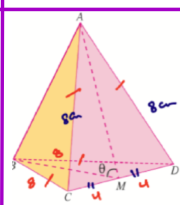
$\therefore ME = \frac{1}{2} BC = 3$, $BC = AD = 6$

في المثلث MEN القائم الزاوية في M

$\tan(M\hat{E}N) = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$

$\therefore m(M\hat{E}N) = 60°$

$\therefore$ قياس الزاوية الزوجية بين المستويين $= 60°$



يبيّن الشكل المقابل هرمًا ثلاثي القاعدة أوجهه مثلثات متطابقة الأضلاع طول حرفه 8 cm
M منتصف $\overline{DC}$

a. حدد الزاوية المستوية بين المستويين BDC , ADC
b. أوجد قياس الزاوية المستوية للزاوية الزوجية $\overline{DC}$

الحل

ⓐ $\overleftrightarrow{DC}$ حافة الزاوية الزوجية
$\because$ المثلث ADC متطابق الأضلاع
، M منتصف $\overline{CD}$

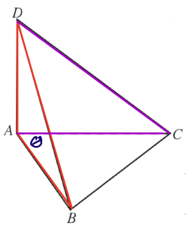
$\therefore \overline{AM} \perp \overline{DC}$, $\overline{AM} \subset (ADC)$

$\therefore \overline{BM} \perp \overline{DC}$, $\overline{BM} \subset (BDC)$
$\therefore (A\hat{M}B)$ هي الزاوية المستوية
للزاوية الزوجية $\overleftrightarrow{DC}$

ⓑ $\because$ المثلث AMD قائم الزاوية
من فيثاغورث $AM = \sqrt{8^2 - (4)^2} = 4\sqrt{3}$
بالمثل في Δ AMB $BM = 4\sqrt{3}$

في المثلث ABM
$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{(AM)^2 + (MB)^2 - (AB)^2}{2\ AM \cdot MB}\right)$
$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{48 + 48 - 64}{2 \times 4\sqrt{3} \times 4\sqrt{3}}\right) = 70.53°$

$\therefore$ قياس الزاوية المستوية $= 70.53°$



ABC مثلث متطابق الأضلاع.
$\overleftrightarrow{AD}$ متعامد مع المستوي ABC
أوجد قياس الزاوية الزوجية $(DAB, \overleftrightarrow{DA}, DAC)$

الحل

$\because \overleftrightarrow{AD} \perp (ABC)$
$\overleftrightarrow{AC} \subset (ABC)$
$\overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{AC}$

$\overleftrightarrow{AD} \perp (ABC)$
$\overleftrightarrow{AB} \subset (ABC)$
$\overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{AB}$

$\because \overleftrightarrow{DA}$ حافة الزاوية بين المستويين
$\overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{DA}$, $\overleftrightarrow{AC} \subset (DAC)$
$\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{DA}$, $\overleftrightarrow{AB} \subset (DAB)$
$\Rightarrow \theta$ هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية بين المستويين

$m(\hat{\theta}) = 60°$

لأن المثلث ABC متطابق الأضلاع

Mr. Shokry

بالتوفيق للجميع
م/ شكري الجميعي