مدرسة الشراكات التعليمية الافتراضية
VIRTUAL CHARTER SCHOOL

Tuesday, February 6, 2024

الرياضيات للصف الثانى عشر

المستوى المتقدم

السنة الدراسية 2023 / 2024
الفصل الدراسى الثانى

+971566151988/

أ/ محمد طه

النشيد الوطني

أ/ محمد طه
+971566151988/

Tuesday, February 6, 2024

الوحدة 4
(اتطبيقات التفاضل)

درس رقم. 8
اسم الدرس: المعدّلات المرتبطة

+971566151988/
أ/ محمد طه

Tuesday, February 6, 2024

أهداف التعلم

حل مشاكل الحياة الحقيقية والرياضيات باستخدام المعدّلات المرتبطة

+971566151988/
أ/ محمد طه

مفردات الدرس

المعدّلات المرتبطة

مقدمة

مسائل المعدلات المرتبطة

- معادلة تربط كميتين أو أكثر تتغير جميعها بتغير الزمن.

استخدم قاعدة السلسلة (مع الاشتقاق الضمني للمتغير الزمن) لإيجاد مشتقات كل الحدود الموجودة بالمعادلة مترابطة .

خطوات لحل مسائل المعدلات المرتبطة

1- مخطط: اصنع مخططًا بسيطًا، إذا كان مناسبًا.

2- معادلة : أنشئ معادلة مرتبطة بكل الكميات ذات الصلة .

3- اشتقاق : اشتق (ضمنيًا) كلا جانبي المعادلة مع المتغير الزمن (t)

4- التعويض : عوَّض القيم لكل الكميات و المشتقات المعروفة .

5- الحل: حل لإيجاد المعدل الباقي .

d/dt

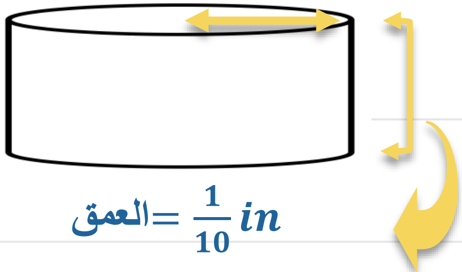
مسألة معدلات مرتبطة

مثال 8.1صفحة 300

تعرضت ناقلة نفط لحادث وتسرب النفط بمعدل $150\ gl/min$. على فرض أن النفط ينتشر على الماء في دائرة بسمك $\frac{1}{10}''$
حدد معدل تزايد نصف قطر التسرب عند وصول نصف القطر الى $500\ ft$.

الحل

$1\ ft^3 = 7.5\ gl$
$1\ ft = 12\ in$



المعطيات معدل تغير الحجم $\frac{dV}{dt} = 150\ \frac{\cancel{gl}}{min} \cdot \frac{1\ ft^3}{7.5\ \cancel{gl}}$ $\quad V'(t) = \frac{150}{7.5} = 20ft^3/min$

العمق $\frac{1}{10}'' = 0.1\cancel{in} \times \frac{1ft}{12\cancel{in}} = \frac{1}{120}ft$ (ثابت)

المطلوب معدل تغيير نصف القطر $\left.\frac{dr}{dt}\right|_{r=500ft} = ?$

معادلة المتغيرات المرتبطة : (اسطوانة) العمق×مساحة الدائرة =الحجم

الحجم ونصف القطر هما دالتين في الوقت

$$V = \pi r^2 \times \frac{1}{120}$$

$$V(t) = \frac{\pi}{120} r^2(t)$$

الاشتقاق بالنسبة للزمن:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{120} \times 2r(t)\frac{dr}{dt}$$

$$V'(t) = \frac{\pi}{120} \times 2r(t)r'(t) \Rightarrow V'(t) = \frac{\pi}{60} \times r(t)r'(t)$$

التعويض:

$V'(t) = 20ft^3/min \quad ,r = 500ft$

$$20 = \frac{\pi}{60} \times 500 \times r'(t)$$

$$20 = \frac{25\pi}{3} \times r'(t)$$

حل دالة : $r'(t)$

$$20 \times \frac{3}{25\pi} = r'(t)$$

$$r'(t) = 2.4\pi \approx 0.76394\ ft/min$$

نصف القطر يتزايد بمعدل $0.76394\ ft/min$
عند وصول نصف القطر الى $500\ ft$

مسألة معدلات مرتبطة

تمرين

Q3صفحة 303

يتسرب النفط من ناقلة النفط بمعدل g برميل في الدقيقة. ينتشر النفط في دائرة بسمك $\frac{1}{4}''$
على فرض أن نصف قطر التسرب يتزايد بمعدل $0.6\ ft/min$ ، عندما يساوي نصف القطر $100\ ft$، فحدد قيمة g .

المعطيات معدل تغير النصف قطر $\frac{dr}{dt} = r'(t) = 0.6\ ft/min$

العمق $\cancel{\frac{1''}{4}} = \cancel{\frac{1}{4}} in \times \frac{1ft}{12in} = \frac{1}{48} ft$ (ثابت)

المطلوب معدل تغير الحجم $g = ?$ $\Longrightarrow$ $\left.\frac{dV}{dt}\right|_{r=100ft} = ?$

معادلة المتغيرات المرتبطة (اسطوانة) الحجم = مساحة الدائرة × العمق

الحجم ونصف القطر هما دالتين في الزمن

$$V = \pi r^2 \times \frac{1}{48}$$

$$V(t) = \frac{\pi}{48} r^2(t)$$

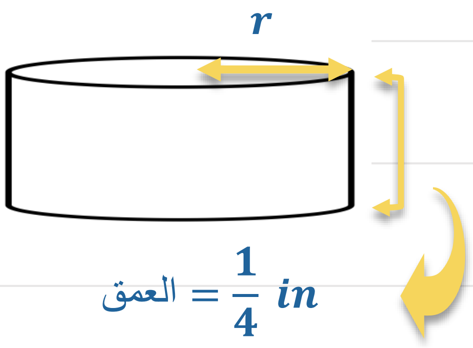
الاشتقاق بالنسبة للزمن:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{48} \times 2r(t)\frac{dr}{dt}$$

$$V'(t) = \frac{\pi}{48} \times 2r(t)r'(t) \Longrightarrow V'(t) = \frac{\pi}{24} \times r(t)r'(t)$$

الحل

$$1\ ft = 12\ in$$
$$1\ ft^3 = 7.5\ gl$$



التعويض:

$r'(t) = 0.6\ ft/min$, $r = 100ft$

$$V'(t) = \frac{\pi}{24} \times 100 \times 0.6$$

حل دالة: $V'(t)$

$$V'(t) = 2.5\pi ft^3/min$$

$$V'(t) = 2.5\pi \frac{\cancel{ft^3}}{min} \cdot \frac{7.5\ gl}{1\ \cancel{ft^3}}$$

$$V'(t) = g = 2.5\pi \times 7.5 = \frac{75\pi}{4} gl/min$$

$$\approx 58.\ gl/min$$

+971566151988/
أ/ محمد طه

مسألة معدلات مرتبطة تتضمن مساحة

تمرين

Q6صفحة 303

على فرض أن حريق غابات ينتشر في دائرة بنصف قطر يتغير بمعدل $5\ ft/min$.
عندما يصل نصف القطر إلى $200ft$ ، فما هو معدل تزايد مساحة المنطقة المحترقة ؟

الحل

المعطيات — معدل تغير النصف قطر $\frac{dr}{dt} = 5ft/min$

المطلوب — معدل تغير المساحة $\left.\frac{dA}{dt}\right|_{r=200ft} = ?$

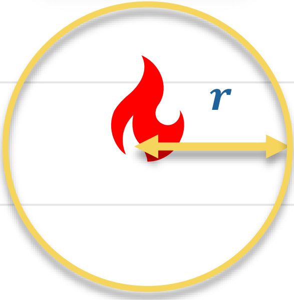
معادلة المتغيرات المرتبطة — مساحة المنطقة المحترقة = مساحة الدائرة

المساحة ونصف القطر هما دالتين في الزمن $A = \pi r^2$

الاشتقاق بالنسبة للزمن: $A(t) = \pi r^2(t)$

$$\frac{dA}{dt} = \pi \times 2r(t)\frac{dr}{dt}$$

$$A'(t) = \pi \times 2r(t)r'(t)$$



بالتعويض

$r'(t) = 5ft/min \quad , r = 200ft$

$$A'(t) = \pi \times 2 \times 200 \times 5$$

حل دالة: $A'(t)$

$$A'(t) = 2000\pi \approx 6283.185\ ft^2/min$$

المساحة تزيد بمعدل $6283.185\ ft^2/min$
عندما يصل نصف القطر إلى $200\ ft$

+971566151988/

أ/ محمد طه

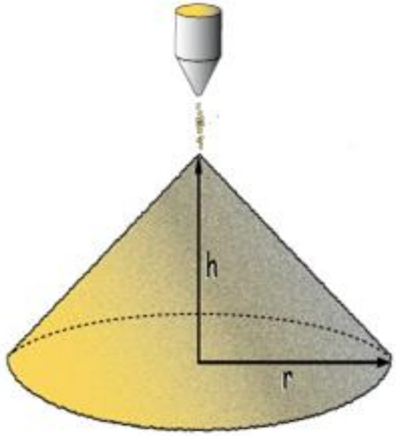
مسألة معدلات مرتبطة تتضمن الحجم

تمرين

صفحة 304 Q22

ينسكب الرمل في كومة مخروطية الشكل وارتفاعها يعادل قطرها. إذا انسكب الرمل بمعدل ثابت $5m^3/s$، فما معدل تزايد ارتفاع الكومة عندما يكون الارتفاع $2m$؟

الحل



الإرتفاع = القطر

$$h = D = 2r \Rightarrow r = \frac{h}{2}$$

المعطيات

الارتفاع h

نصف القطر $r = \frac{h}{2}$

معدل تغير الحجم $\frac{dV}{dt} = 5m^3/s$

المطلوب

معدل تغير الارتفاع: $\left.\frac{dh}{dt}\right|_{h=2m} = ?$

معادلة المتغيرات

حجم الكومة المخروطية $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

تعويض $= \frac{h}{2}$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

الحجم والارتفاع هما دالتين في الوقت

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{h}{2}\right)^2 \times h$$

$$V = \frac{1}{3}\pi \times \frac{h^2}{4} \times h \Rightarrow V(t) = \frac{1}{12}\pi h^3(t)$$

الاشتقاق للمتغير الزمن:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{12} \times 3h^2(t)\frac{dh}{dt}$$

$$V'(t) = \frac{\pi}{4}h^2(t) \times h'(t)$$

التعويض:

$$\frac{dV}{dt} = 5m^3/s \quad , h = 2\ m$$

$$5 = \frac{\pi}{4}(2)^2 \times h'(t)$$

$$5 = \pi \times h'(t)$$

حل دالة: $h'(t)$

$$h'(t) = \frac{5}{\pi} \approx 1.59 m/s$$

الارتفاع يزيد بمعدل $1.59\ m/s$ عندما يصل الارتفاع الى $2m$

مدرسة الشراكات التعليمية الافتراضية
VIRTUAL CHARTER SCHOOL

Tuesday, February 6, 2024

الحصة الثانية

+971566151988/
أ/ محمد طه

Tuesday, February 6, 2024

أهداف التعلم

حل مشاكل الحياة الحقيقية والرياضيات عن طريق المعدّلات المرتبطة

+971566151988/

أ/ محمد طه

مدرسة الشراكات التعليمية الافتراضية
VIRTUAL CHARTER SCHOOL

Tuesday, February 6, 2024

سلم ينزلق

مثال | 8.2صفحة300

يرتكز سلم بطول $10ft$ على جانب المبنى. إذا كان الجزء العلوي من السلم يبدأ في الانزلاق إلى أسفل الجدار بمعدل $2\ ft/sec$ ، فما سرعة انزلاق الجزء السفلي من السلم مبتعداً عن الحائط عندما يكون الجزء العلوي من السلم مرتفعًا عن الأرض بـ $8ft$

الحل

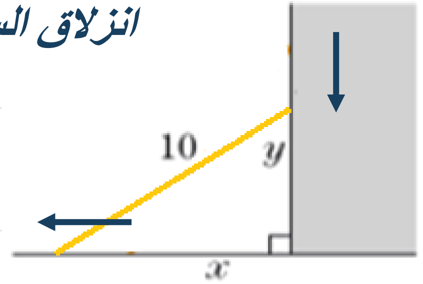
المعطيات

طول السلم $= 10\ ft$ (ثابت)

معدل تغير y $\quad \dfrac{dy}{dt} = -2ft/sec$ (الإشارة السالبة تشير إلى أن y تتناقص)

المطلوب

معدل تغير x: $\quad \left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{y=8ft} = ?$



معادلة المتغيرات المرتبطة :

نظرية فيثاغورس $\quad x^2 + y^2 = (10)^2$

x و y وهما دالتين في الزمن $\quad x^2(t) + y^2(t) = 100$

الاشتقاق بالنسبة للزمن: $\quad 2x\dfrac{dx}{dt} + 2y\dfrac{dy}{dt} = 0$

$2x \cdot x'(t) + 2y \cdot y'(t) = 0$

القسمة على 2

$x \cdot x'(t) + y \cdot y'(t) = 0$

لدينا $y = 8ft$, $y'(t) = -2ft/sec$

لإيجاد x :

$x^2 + y^2 = 100$

$x^2 + (8)^2 = 100 \Rightarrow x^2 = \sqrt{100 - 64}$

$\cancel{x = -6}$ $\quad \boxed{x = 6}$

المسافة لا يمكن أن تكون سالبة

التعويض في المعادلة:

$x \cdot x'(t) + y \cdot y'(t) = 0$

$(6) \cdot x'(t) + (8) \cdot (-2) = 0$

حل دالة: $x'(t)$

$6x'(t) - 16 = 0$

$x'(t) = \dfrac{16}{6} = \dfrac{8}{3} \approx 2.67 ft/sec$

الجزء السفلي من السلم ينزلق بعيدا بمعدل $2.67\ ft/sec$
عندما يكون ارتفاع السلم عن الأرض $8ft$

+971566151988/
أ/ محمد طه

سلم ينزلق

تمرين

صفحة 303 Q7

يرتكز سلم بطول 10 ft علي جانب المبني فإذا تم سحب الجزء السفلي من السلم بعيداً عن الجدار بمعدل $3ft/sec$ ، وبقي السلم ملامسًا للجدار:

a) جد المعدل الذي يسقط به الجزء العلوي من السلم عندما يكون الجزء السفلي بعيدًا بمقدار $6ft$ عن الجدار

b) جد معدل تغير الزاوية بين السلم وسطح الأرض عندما يبعد أسفل السلم $6ft$ من الجدار.

الحل

a)

المعطيات — طول السلم $= 10\ ft$ (ثابت)

المطلوب — معدل تغير x: $\frac{dx}{dt} = 3\ ft/sec$

معدل تغير y: $\left.\frac{dy}{dt}\right|_{x=6ft} = ?$

معادلة المتغيرات المرتبطة :

نظرية فيثاغورس: $x^2 + y^2 = (10)^2$

x و y هما دالتي الزمن: $x^2(t) + y^2(t) = 100$

الاشتقاق لمتغير الزمن: $2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0$

$2x \cdot x'(t) + 2y \cdot y'(t) = 0$

$x \cdot x'(t) + y \cdot y'(t) = 0$

التعويض في المعادلة:

$x'(t) = 3\ ft/sec \quad , x = 6ft$

$(6) \cdot (3) + (8) \cdot y'(t) = 0$

حل دالة: $y'(t)$

$18 + 8y'(t) = 0$

$y'(t) = -\frac{18}{8} = -2.25ft/sec$

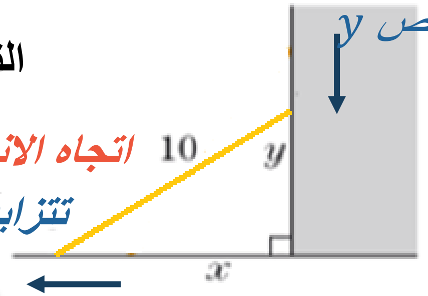
الإشارة سالبة y تتناقص

انزلاق لاسفل

y تتناقص

اتجاه الانزلاق

x تتزايد



لإيجاد y

$x^2 + y^2 = 100$

$(6)^2 + y^2 = 100$

$y^2 = \sqrt{100 - 36}$

$y = \cancel{-8}$ $\quad \boxed{y = 8}$

المسافة لا يمكن أن تكون سالبة

الجزء العلوي من السلم ينزلق لأسفل بمعدل $2.25\ ft/sec$
عندما يبعد الجزء السفلي من السلم عن الحائط $6ft$

سلم ينزلق

تمرين

Q7صفحة 303

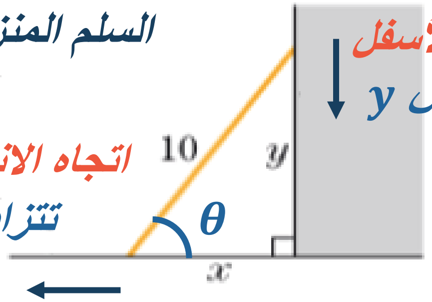
يرتكز سلم بطول 10 ft علي جانب المبني فإذا تم سحب الجزء السفلي من السلم بعيداً عن الجدار بمعدل $3ft/sec$ ، وبقي السلم ملامسًا للجدار:

a) جد المعدل الذي يسقط به الجزء العلوي من السلم عندما يكون الجزء السفلي بعيدًا بمقدار $6ft$عن الجدار

b)جد معدل تغير الزاوية بين السلم وسطح الأرض عندما يبعد أسفل السلم $6ft$ من الجدار.

الحل

السلم المنزلق



الانزلاق لأسفل
y تتناقص

اتجاه الانزلاق
x تتزايد

$$(6)^2+y^2 = 100$$

$$y^2 = \sqrt{100-36}$$

$$y = \cancel{-8} \qquad \boxed{y = 8}$$

المسافة لا يمكن أن تكون سالبة

بالتعويض

$$x'(t) = 3\ ft/sec \quad , x(t) = 6\ ft$$

أوجد $y(t)$: $y(t) = 8\ ft$

$$sin(\theta(t)) = \frac{y(t)}{10} \Rightarrow sin\ (\theta(t)) = \frac{8}{10}$$

$$-sin(\theta(t)) \cdot \theta'(t) = \frac{x'(t)}{10}$$

$$-\frac{8}{10} \cdot \theta'(t) = \frac{3}{10}$$

$$-8\ \theta'(t) = 3$$

$$\theta'(t) = -\frac{3}{8}\ rad/sec$$

الإشارة سالبةθ تناقص

الزاوية تقل بمعدل $\frac{3}{8}\ rad/sec$
عندما يكون بعد الجزء السفلي من السلم عن الحائط $6ft$

b)

المعطيات

طول السلم $= 10\ ft$ (ثابت)

معدل تغير x $\frac{dx}{dt} = 3\ ft/sec$

المطلوب : معدل تغير θ $\left.\frac{d\theta}{dt}\right|_{x=6ft} = ?$

معادلة المتغيرات المرتبطة :

x و θهما دالتى الزمن

$$cos\ \theta = \frac{adj}{hyp} = \frac{x}{10}$$

$$cos\ (\theta(t)) = \frac{x(t)}{10}$$

الاشتقاق لمتغير الزمن:

$$-sin(\theta(t)) \cdot \theta'(t) = \frac{x'(t)}{10}$$

+971566151988/

أ/ محمد طه

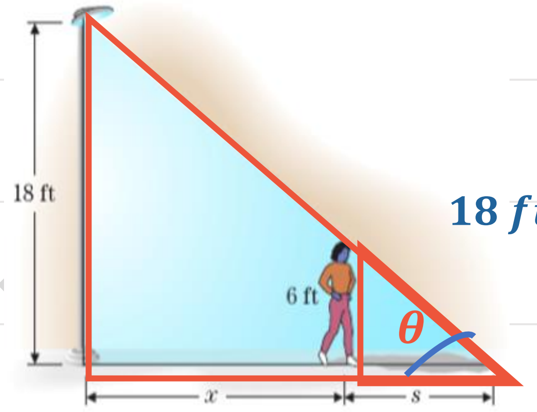
مسألة معدلات مرتبطة

تمرين

Q19صفحة 304

على فرض أن شخصًا ما يبلغ طوله $6ft$ يبعد عن عمود إنارة ارتفاعه $18\ ft$، إذا كان الشخص يبتعد عن عمود الإنارة بمعدل $2ft/sec$، فما هو المعدل الذي يتغير به طول الظل؟

الحل



$18\ ft$

θ $\quad 6\ ft \quad$ θ

s

$x+s$

المعطيات

معدل تغير x $\quad \dfrac{dx}{dt} = x'(t) = 2ft/sec$

المطلوب

معدل تغير طول الظل $\quad \dfrac{ds}{dt} = s'(t) = ?$

معادلة المتغيرات:

استخدم تشابه المثلثات أو tan الزاوية θ

$$tan\ \theta = \frac{6}{s} \qquad tan\ \theta = \frac{18}{x+s}$$

$$\Rightarrow \frac{18}{x+s} = \frac{6}{s}$$

$$\Rightarrow \frac{x+s}{18} = \frac{s}{6} \qquad \Rightarrow \frac{x+s}{3} = s$$

$$x(t) + s(t) = 3s(t)$$

x و s وهما دالتى الزمن

$$x(t) = 2s(t)$$

الاشتقاق لمتغير الزمن:

$$x'(t) = 2s'(t)$$

$$2 = 2s'(t)$$

$$\Rightarrow s'(t) = 1\ ft/sec$$

طول الظل يزيد بمعدل $1ft/sec$، عندما يبتعد الشخص عن عمود الإنارة بمعدل $2\ ft/sec$

مسألة أخري للمعدلات المرتبطة

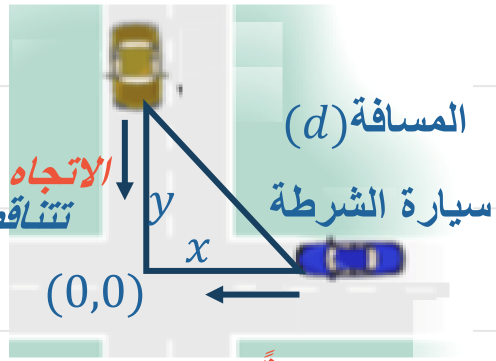
مثال

8.3صفحة 301

تسير سيارة بسرعة $50mph$ تجاه الجنوب من نقطة تبعد $\frac{1}{2}mile$ شمال التقاطع .
وتسير سيارة شرطة بسرعة $40mph$ تجاه الغرب من نقـطة تبعد $\frac{1}{4}mile$ شرق التقاطع نفسه.
في هذه اللحظة، يقيس الرادار في سيارة الشرطة المعدل الذي تتغير به المسافة بين السيارتين. فما الذي سيسجله جهاز الرادار؟

الحل

اقتراب السيارات من التقاطع



المعطيات

في لحظة معينة من الزمن $t= t_0$

$$y(t_0) = 0.5\ mile \quad , x(t_0) = 0.25\ mile$$

معدل تغير y :
$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=t_0} = y'(t_0) = -50\ mph$$

معدل تغير x :
$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=t_0} = x'(t_0) = -40\ mph$$

المطلوب

معدل تغير المسافة d : $d'(t_0) = ?$

معادلة المتغيرات المرتبطة :

نظرية فيثاغورس
$$d^2 = x^2 + y^2$$

x, y, d هم دوال الزمن
$$d(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$$

الاشتقاق لمتغير الزمن:
$$\frac{d[d]}{dt} = \frac{2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}}{2\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\frac{d[d]}{dt} = \frac{x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$d'(t) = \frac{x(t)\cdot x'(t) + y(t)\cdot y'(t)}{\sqrt{x^2(t) + y^2(t)}}$$

تعويض و حل
دالة $d'(t_0)$

$$d'(t_0) = \frac{x(t_0)\cdot x'(t_0) + y(t_0)\cdot y'(t_0)}{\sqrt{x^2(t_0) + y^2(t_0)}}$$

$$d'(t_0) = \frac{(0.25)\cdot(-40) + (0.5)\cdot(-50)}{\sqrt{(0.25)^2 + (0.5)^2}}$$

$$d'(t_0) = \frac{-140}{\sqrt{5}} \approx -62.6\ mph$$

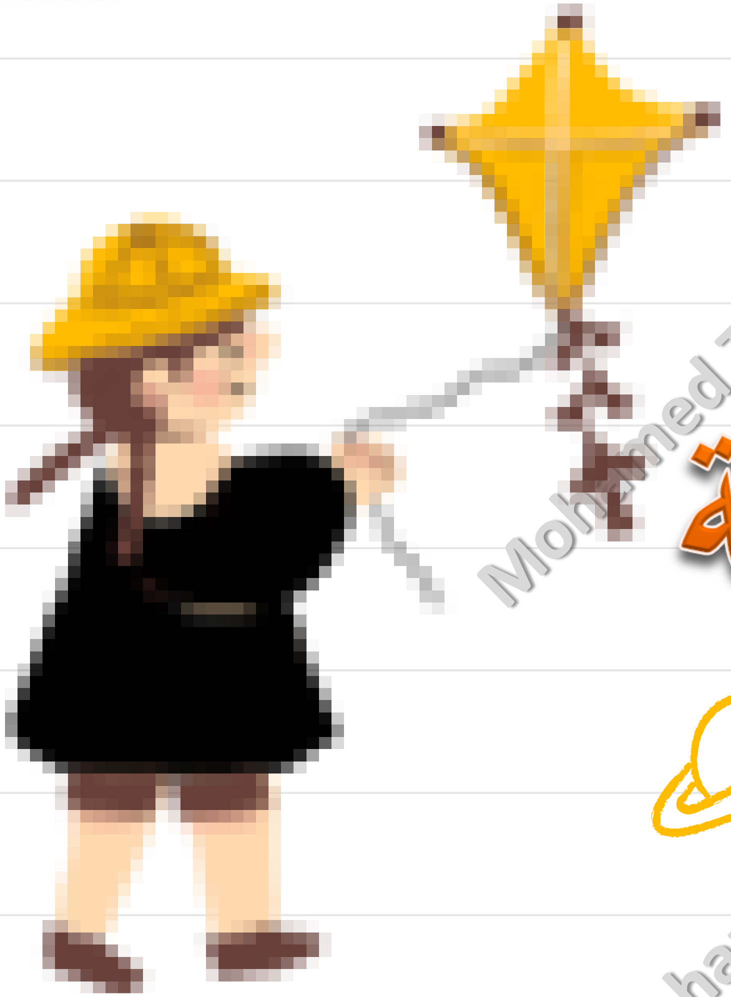
الإشارة سالبة أي ان المسافة تتناقص

جهاز الرادار سجل $62.6mph$

أ/ محمد طه
+971566151988/

مدرسة الشراكات التعليمية الافتراضية
VIRTUAL CHARTER SCHOOL

Tuesday, February 6, 2024



الحصة الثالثة

+971566151988/

أ/ محمد طه

Tuesday, February 6, 2024

أهداف التعلم

حل مشاكل الحياة الحقيقية والرياضيات عن طريق المعدّلات المرتبطة

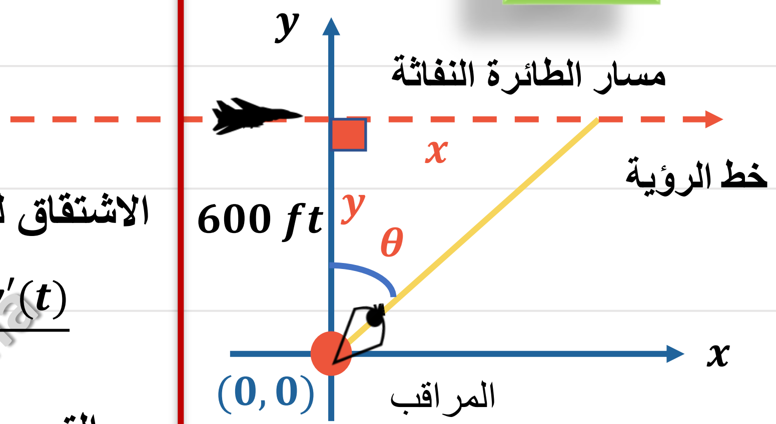
تتبع طائرة نفاثة

مثال

8.5صفحة 302

يحاول مراقب عرض جوي تتبع رحلة لطائرة نفاثة. تسير الطائرة النفاثة في خط مستقيم أمام المراقب بسرعة $540mph$.
وعند أقرب نقطة لها، تمر الطائرة النفاثة أمام المراقب على بعد $600ft$.
جد أعلى معدل تغير للزاوية بين خط نظر المراقب والخط العمودي على مسار الطيران، عند مرور الطائرة النفاثة به.

الحل



يمكنك كتابة $tan\theta = \frac{x}{600}$
بما أن y ثابت
فإن الاشتقاق يكون أسهل

معادلة المتغيرات المرتبطة :

$$\tan\theta = \frac{opp}{adj} = \frac{x}{y}$$

$$\tan(\theta(t)) = \frac{x(t)}{y(t)}$$

الاشتقاق لمتغير الزمن:

$$sec^2(\theta)\cdot\theta'(t) = \frac{x'(t)\cdot y(t) + x(t)\cdot y'(t)}{[y(t)]^2}$$

التعويض:

$x'(t) = 792\ ft/sec\ \ , y(t) = 600\ ft\ \ , y'(t) = 0$

$$sec^2(\theta)\cdot\theta'(t) = \frac{(792)(600)\ + x(t)(0)}{[600]^2}$$

$$sec^2(\theta)\cdot\theta'(t) = \frac{(792)(600)}{[600]^2} = 1.32$$

$$\theta'(t) = \frac{1.32}{sec^2(\theta)}$$

المعطيات

$y(t) = 600\ ft$ (ثابت) $\Rightarrow y'(t) = 0$

حيث أن الطائرة تسير في مسار أفقي

$x'(t) = 540\ mile/hour \Rightarrow 1\ mile = 5280\ ft$

$1\ hour = 3600\ sec$

$$x'(t) = \frac{540\ \cancel{mile}}{1\ \cancel{hour}} \times \frac{5280ft}{1\ \cancel{mile}} \times \frac{1\ \cancel{hour}}{3600\ sec}$$

$$x'(t) = \frac{540 \times 5280}{3600} = 792\ ft/sec$$

المطلوب أعلى معدل تغير للزاوية θ

$\theta'(t) = ?$

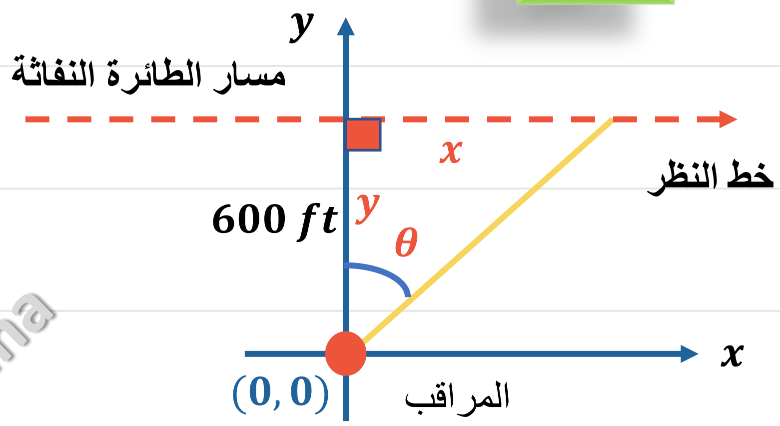
تتبع طائرة نفاثة

مثال

8.5صفحة 302

يحاول مراقب عرض جوي تتبع رحلة لطائرة نفاثة. تسير الطائرة النفاثة في خط مستقيم أمام المراقب بسرعة $540mph$.
وعند أقرب نقطة لها، تمر الطائرة النفاثة أمام المراقب على بعد $600ft$.
جد أعلى معدل تغير للزاوية بين خط نظر المراقب والخط العمودي على مسار الطيران، عند مرور الطائرة النفاثة به.

الحل



$$\theta'(t) = \frac{1.32}{sec^2(\theta)}$$

أعلى قيمة لـ $cos\theta$ تكون 1

$$\theta'(t) = 1.32\, cos^2(\theta)$$

أعلى قيمة لـ $cos^2(\theta)$ تكون 1

أعلى معدل تغير للزاوية (θ):

$cos^2(0) = 1$ $\quad \theta = 0$ تحدث عندما

حين تكون $\theta = 0$ ، عندما تصل الطائرة عند أقرب نقطة للمراقب

$$\theta'(t) = 1.32(1)$$

عين الإنسان تستطيع تتبع الأشياء حتى $3\frac{rad}{sec}$، يستطيع المراقب مراقبة الطائرة النفاثة السريعة.

$$\theta'(t) = 1.32\, rad/sec$$

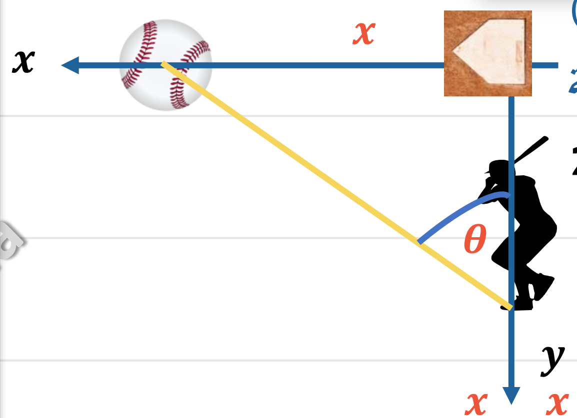
تتبع كرة البيسبول

Q17صفحة 304

تمرين

يبعد لاعب البيسبول حوالي $2ft$ من القاعدة الرئيسية وشاهد الكرة تمر سريعًا .
xهي المسافة من الكرة إلى القاعدة الرئيسية و θ هي الزاوية التي تحدد اتجاه نظر اللاعب.
a)جد المعدلθالذي تتحرك به عينيه لمشاهدة رمية الكرة بنحو $x'(t) = -130ft/s$ حيث تمر إلى القاعدة الرئيسية بمعدل $x = 0$
b)يمكن أن يحافظ الإنسان على تركيزه فقط عندما $\theta' \leq 3rad/s$. جد أسرع رمية كرة يمكنك مشاهدتها فعليًا إلى القاعدة الرئيسية.

الحل



لإيجاد θ:

$$\tan\theta = \frac{x}{y} = \frac{x}{2}$$

$$\tan\theta = \frac{0}{2} = 0$$

$$\boxed{\theta = \tan^{-1}(0) = 0}$$

الاشتقاق لمتغير الزمن: $\tan(\theta(t)) = \frac{x(t)}{2}$

$$\sec^2(\theta)\cdot\theta'(t) = \frac{1}{2}x'(t)$$

$$\theta'(t) = \frac{x'(t)}{2\sec^2(\theta)}$$

$$\theta'(t) = \frac{1}{2}x'(t)\cos^2(\theta)$$

بالتعويض

عند $x(t) = 0 \ , x'(t) = -130\ ft/s$

$$\theta'(t) = \frac{1}{2}x'(t)\cos^2(\theta)$$

$$\theta'(t) = \frac{1}{2}(-130)\cos^2(0)$$

$$\theta'(t) = \frac{1}{2}(-130)(1) = -65\ rad/s$$

a)

المعطيات

$y(t) = 2\ ft$ (ثابت) $\Rightarrow$ $y'(t) = 0$

معدل تغير x

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=0} = -130\ ft/s$$

المطلوب

معدل تغير θ

$$\left.\frac{d\theta}{dt}\right|_{x=0} = ?$$

معادلة المتغيرات المرتبطة :

$$\tan\theta = \frac{opp}{adj} = \frac{x}{y}$$

$$\tan(\theta(t)) = \frac{x(t)}{y(t)}$$

$y(t) = 2\ ft$ (ثابت)

+971566151988/

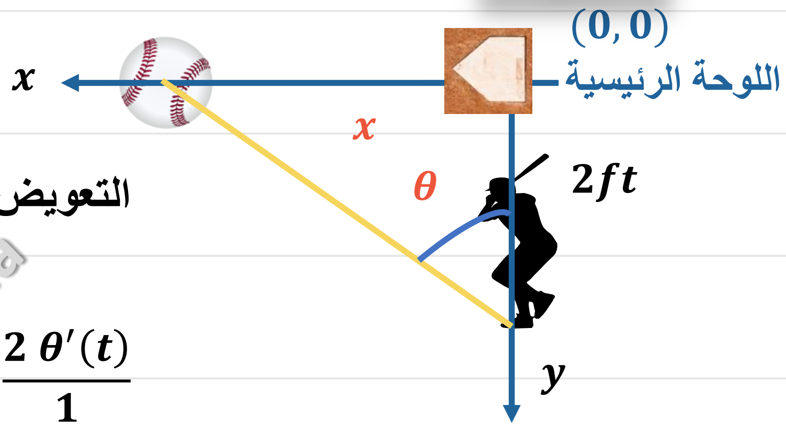
أ/ محمد طه

تتبع كرة البيسبول

تمرين — **Q17صفحة 304**

يبعد لاعب البيسبول حوالي $2ft$ من القاعدة الرئيسية وشاهد الكرة تمر سريعًا .
xهي المسافة من الكرة إلى القاعدة الرئيسية و θ هي الزاوية التي تحدد اتجاه نظر اللاعب .
a) جد المعدل θ' الذي تتحرك به عينيه لمشاهدة رمية الكرة بنحو $x'(t) = -130ft/s$ حيث تمر إلى القاعدة الرئيسية بمعدل $x = 0$.
b) يمكن أن يحافظ الإنسان على تركيزه فقط عندما $\theta' \le 3rad/s$. جد أسرع رمية كرة يمكنك مشاهدتها فعليًا إلى القاعدة الرئيسية.

الحل



$$x'(t) = \frac{2\,\theta'(t)}{cos^2(\theta)}$$

التعويض:

عند $x(t) = 0$ ⇨ $\theta = 0$

$$x'(t) = \frac{2\,\theta'(t)}{cos^2(0)} \Rightarrow x'(t) = \frac{2\,\theta'(t)}{1}$$

$$\theta'(t) = \frac{x'(t)}{2}$$

معدل تغير الزاوية التي تستطيع عين الإنسان تتبعها $\theta\,'(t) \le 3\,rad/s$

$$\frac{x'(t)}{2} \le 3 \qquad x'(t) \le 6$$

أكبر معدل تغيرلـ x : $x'(t) = 6\,ft/s$

b)

المعطيات

معدل تغير θ : $\theta\,'(t) \le 3\,rad/s$

معدل تغير الزاوية التي تستطيع عين الإنسان تتبعها

المطلوب أكبر معدل تغير x : $\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=0} = ?$

معادلة المتغيرات المرتبطة : $tan\,(\theta(t)) = \frac{x(t)}{2}$

$x(t) = 2tan\,(\theta(t))$

الاشتقاق لمتغير الزمن:

$x'(t) = 2sec^2(\theta) \cdot \theta'(t)$

تقدير معدل التغير في الاقتصاد

8.4صفحة 302

مثال :

تقوم شركة صغيرة بتقدير أنه عند إنفاق x ألف دولار على الإعلانات في السنة، فمن الممكن وصف مبيعاتها السنوية بالدالة $s = 60 - 40e^{-0.05x}$ ألف دولار. يوضح الجدول التالي آخر أربعة إجماليات للإعلانات السنوية. قدِّر القيمة الحالية (السنة 4) لـ $x'(t)$ والمعدل الحالي للتغير في المبيعات.

الحل

السنة (t)	1	2	3	4
تكلفة الإعلان بالدولار$(x(t))$	$14,500$	$16,000$	$18,000$	$20,000$

2000 2000

يزداد الإنفاق الإعلاني بمقدار 2000 دولار سنويًا

المعطيات

مصاريف الإعلانات $x(t)$ ألف دولار

مصاريف الإعلانات الحالية: $x(4) = 20$ ألف دولار

المطلوب :

المعدل الحالي للتغير مصاريف الإعلانات: $x'(4) = ?$

المعدل الحالى للتغير فى المبيعات: $s'(4) = ?$

من الجدول $x'(4) \approx 2$ ألف دولار / السنة

معادلة المتغيرات المرتبطة : $s(t) = 60 - 40e^{-0.05x(t)}$ ألف دولار

الاشتقاق الضمني لمتغير الزمن: $s'(t) = (-40)(-0.05x'(t))e^{-0.05x(t)}$

$s'(t) = 2x'(t)e^{-0.05x(t)}$

التعويض وحل دالة $s'(4)$:

$$s'(4) = 2x'(4)e^{-0.05x(4)} = 2(2)e^{-0.05(20)}$$

$$= 4e^{-1} \approx 1.472$$ ألف دولار / السنة

تقدير معدل التغير في الاقتصاد

Q14صفحة 304

تمرين

على فرض أن متوسط التكلفة السنوية لكل عنصر لإنتاج العناصر x من المنتجات التجارية هو $\overline{C}(x) = 12 + \frac{94}{x}$.
تتضح أعداد منتجاتها السنوية في الثلاث سنوات الأخيرة في الجدول التالي ، قدّر قيمة $x'(2)$ ومعدل تغير متوسط التكلفة في العام الحالي (عامين).

الحل

السنة(t)	0	1	2
الإنتاج$(x(t))$	8.2	8.8	9.4

0.6 $\quad$ 0.6

الإنتاج يزيد بمعدل 0.6 في السنة

معادلة المتغيرات المرتبطة :

$$\overline{C}(t) = 12 + \frac{94}{x(t)}$$

الاشتقاق الضمني لمتغير الزمن:

$$\overline{C}'(t) = -\frac{94}{x^2(t)}x'(t)$$

التعويض وحل دالة $s'(4)$:

$$\overline{C}'(2) = -\frac{94}{x^2(2)}x'(2) =$$

$$-\frac{94}{(9.4)^2}(0.6) \approx -0.6383$$

كل سنة

المعطيات :

الإنتاج : $x(t)$

الإنتاج الحالي : $x(2) = 9.4$

المطلوب :

المعدل الحالي لتغير الإنتاج: $x'(2) = ?$

المعدل الحالي لتغير متوسط التكلفة: $\overline{C}'(2) = ?$

من الجدول $\quad$ كل سنة $\quad$ $x'(2) \approx 0.6$

أ/ محمد طه
+971566151988/

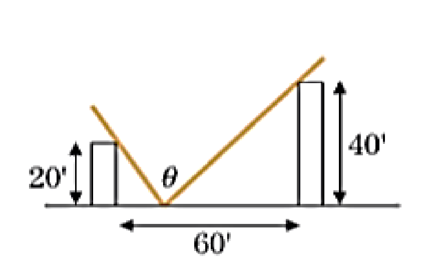
13- تنفق شركة صغيرة الآلاف سنويًا على الإعلانات، على فرض أن مبيعاتها السنوية AEDX بآلاف من الدراهم تساوي $s = 60 - 40e^{-0.05x}$
تتضح أعداد إعلاناتها السنوية في الثلاث سنوات الأخيرة في الجدول التالي.

21- يرتفع حوض مائي 6ft عن منسوب المياه ، على فرض أنك تقف على حافة الحوض وتسحب حبلاً متصلاً بمركب بمعدل ثابت $2ft/s$ و أن المركب لا تزال على مستوى المياه.
فما هي سرعة اقتراب المركب من الحوض عندما يبعد $20ft$ من الحوض؟ $10ft$ من الحوض؟ أليس من المستغرب أن تكون سرعة المركب ليست ثابتة؟

24- على فرض أنك تملأ بالونًا بالهواء بمعدل $1ft^3/s$ إذا بقي البالون في شكل كروي، فيرتبط حجمه ونصف قطره $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ قارن معدل تغير نصف قطره عندما يكون $r = 0.1ft$ في مقابل عندما يكون $r = 0.01ft$. ناقش طريقة ارتباط ذلك بخبرة الشخص الذي يملأ البالون.

2- يتسرب النفط من ناقلة النفط بمعدل $90\ gl/min$ ،
ينتشر النفط في دائرة بسمك $\frac{1''}{8}$ حدد معدل تزايد نصف قطر التسرب عند وصول نصف القطر إلي $100\ ft$

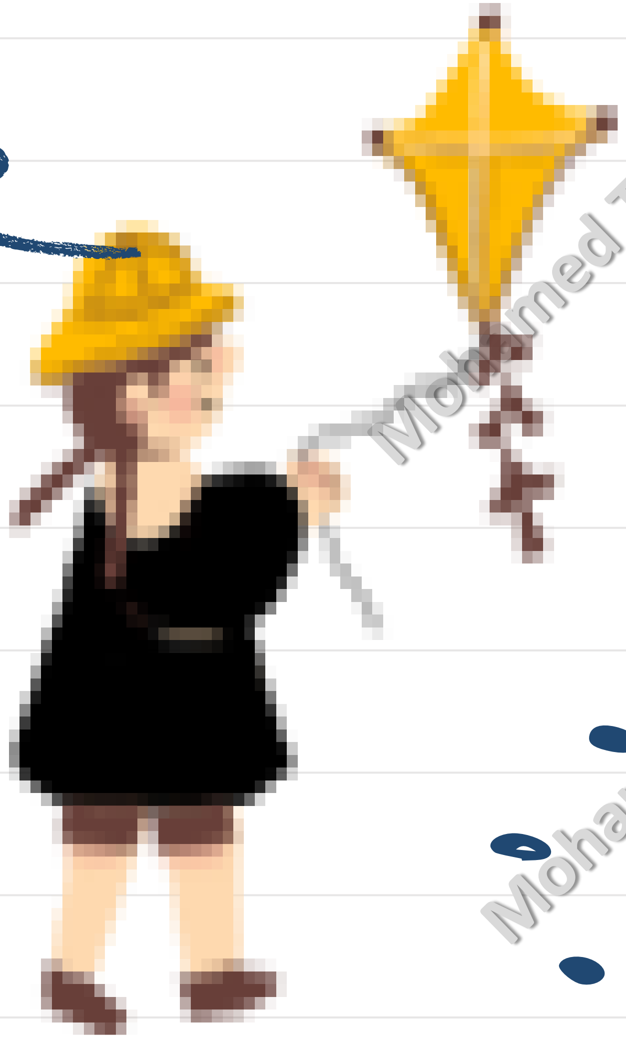
8- مبنيان ارتفاعهما $20\ ft$ و$40\ ft$ على التوالي، والمسافة بينهما $60\ ft$ على فرض أن شدة الضوء في نقطة معينة بين المبنيين تتناسب طرديًا مع الزاوية θ في الشكل (a). إذا تحرك شخص ما من اليمين إلى اليسار بمعدل $4\ ft/s$ ، فما معدل تغير θ عندما يكون الشخص في منتصف المسافة بين المبنيين بالضبط ؟
(b) جد الموقع الذي يكون قياس الزاوية θ أكبر ما يمكن .



9- تقع طائرة على بعد $x = 40\ mi$ (أفقياً) عن المطار وارتفاع h كيلومتر مكعب. يوجد رادار في المطار $s(t)$ يكشف المسافة بين الطائرة والمطار ويتغير بمعدل $s'(t) = -240\ mph$. (a) إذا حلقت الطائرة نحو المطار بارتفاع ثابت $h = 4$. فما هي السرعة $|x'(t)|$ للطائرة؟
(b) كرر العملية بارتفاع 6mi استنادًا إلى إجاباتك ما أهمية معرفة الارتفاع الفعلي للطائرة؟

مدرسة الشراكات التعليمية الافتراضية
VIRTUAL CHARTER SCHOOL

Tuesday, February 6, 2024



بالتوفيق للجميع

+971566151988/
أ/ محمد طه