

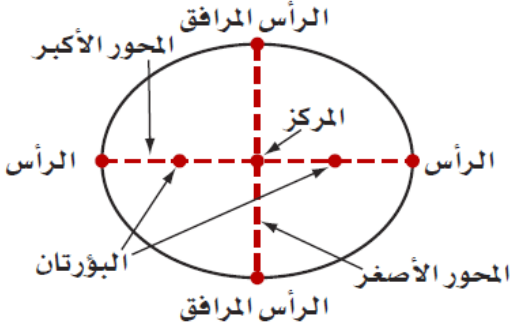
7-4 القطع الناقص

ورقة عمل الثاني عشر العام

2- تمثيل القطع الناقص بيانياً.

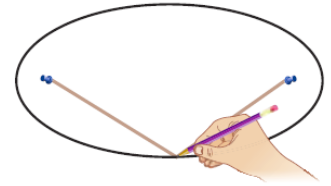
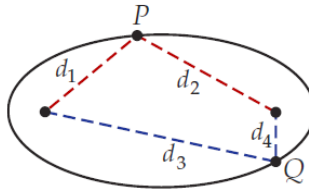
1- كتابة معادلات القطع الناقص.

في هذا الدرس سوف نتعلم:



القطع الناقص هو المحل الهندسي لمجموعة النقاط في المستوى التي يكون مجموع بعديها عن نقطتين ثابتتين يساوي مقداراً ثابتاً. وتسمى هاتان النقطتان **البؤرتين**.

مجموع بُعدي أية نقطة على منحنى القطع الناقص عن البؤرتين يساوي مقداراً ثابتاً، أي أن $d_1 + d_2 = d_3 + d_4$ ، وهذا مقدار ثابت ويساوي $2a$.



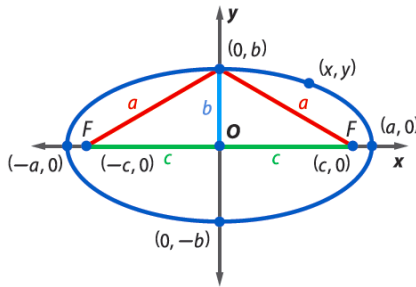
تُسمى القطعة المستقيمة التي تحوي البؤرتين، والتي نهايتها على منحنى القطع الناقص **المحور الأكبر** وهو محور تماثل للقطع، وتسمى نقطة منتصف المحور الأكبر **المركز**. أما القطعة المستقيمة التي تمر بالمركز، ونهايتها على المنحنى، والمتعامدة مع المحور الأكبر، فتسمى **المحور الأصغر**. وتُسمى نهايتا المحور الأكبر **الرأسين**، بينما تسمى نهايتا المحور الأصغر **الرأسين المرافقين**.

مركز القطع الناقص هو نقطة المنتصف لكل من المحور الأكبر والمحور الأصغر. لذا فالقطعتان من المركز إلى كل رأس متساويتا الطول، والقطعتان من المركز إلى الرأسين المرافقين متساويتا الطول أيضاً، وليكن البعد بين كل رأس والمركز يساوي a وحدة، والبعد بين المركز وكل رأس مرافق يساوي b وحدة، والبعد بين المركز وكل بؤرة يساوي c وحدة.

إرشادات للدراسة

اتجاه القطع الناقص

إذا كان $(x-h)^2$ مقسوماً على a^2 في الصورة القياسية لمعادلة القطع الناقص، فإن المحور الأكبر يكون أفقياً، أما إذا كان $(y-k)^2$ مقسوماً على a^2 فإن المحور الأكبر يكون رأسياً، حيث $a^2 > b^2$.



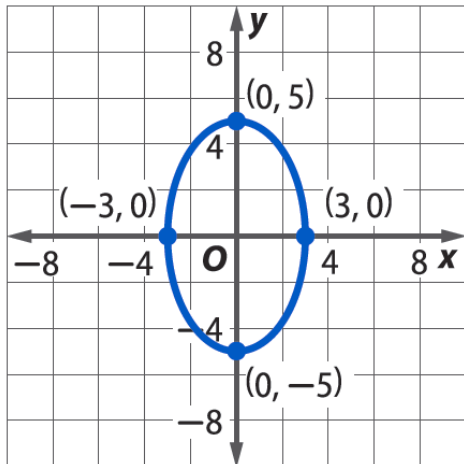
القطع الناقص الأفقي	القطع الناقص الرأسي	
$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$	$\frac{(y-k)^2}{a^2} + \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$	المعادلة
(h, k)	(h, k)	المركز

$$c^2 = a^2 - b^2$$

كتابة معادلة القطع الناقص

اكتب معادلة لكل قطع ناقص.

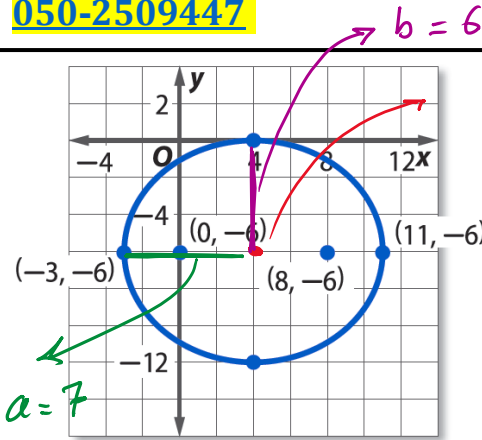
المركز $(0,0)$ ، $b = 3$ ، $a = 5$



$$\Rightarrow \frac{(y-k)^2}{a^2} + \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{(y-0)^2}{5^2} + \frac{(x-0)^2}{3^2} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{y^2}{25} + \frac{x^2}{9} = 1$$



المركز (4, -6)

اكتب معادلة لكل قطع ناقص.

$$\text{المعادلة} \Rightarrow \frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{(x-4)^2}{7^2} + \frac{(y-(-6))^2}{6^2} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{(x-4)^2}{49} + \frac{(y+6)^2}{36} = 1$$

كتابة معادلة القطع الناقص

يقع الرأسان عند (-2, 4) و (-2, -6). ويقع الرأسان المرافقان عند (-5, -1) و (1, -1)

$$a = 5$$

$$b = 3$$

الرأسان المبسط ← المركز (-2, -1)

$$\text{بدون الركن} \Rightarrow \text{مركز الرأس} = \left(\frac{-2-2}{2}, \frac{4-6}{2} \right) = (-2, -1)$$

$$2a = \text{المحور الأكبر} = \text{البعد بين الرأسين} = \sqrt{(-2+2)^2 + (4+6)^2} = 10 \Rightarrow a = 5$$

$$2b = \text{المحور الأصغر} = \text{البعد بين الرأسين المرافقين} = \sqrt{(1+5)^2 + (-1+1)^2} = 6 \Rightarrow b = 3$$

$$\text{المعادلة} \Rightarrow \frac{(y-(-1))^2}{3^2} + \frac{(x-(-2))^2}{5^2} = 1 \Rightarrow \frac{(y+1)^2}{9} + \frac{(x+2)^2}{25} = 1$$

يقع الرأسان عند (-2, 5) و (14, 5). ويقع الرأسان المرافقان عند (6, 1) و (6, 9)

$$\text{مركز الرأس} = \left(\frac{14-2}{2}, \frac{5+5}{2} \right) = (6, 5)$$

$$2a = \text{المحور الأكبر} = \text{البعد بين الرأسين} = \sqrt{(14+2)^2 + (5-5)^2} = 16 \Rightarrow a = 8$$

$$2b = \text{المحور الأصغر} = \text{البعد بين الرأسين المرافقين} = \sqrt{(6-6)^2 + (9-1)^2} = 8 \Rightarrow b = 4$$

$$\text{المعادلة} \Rightarrow \frac{(x-6)^2}{8^2} + \frac{(y-5)^2}{4^2} = 1 \Rightarrow \frac{(x-6)^2}{64} + \frac{(y-5)^2}{16} = 1$$

يقع المركز عند (-2, 6). ويقع الرأس عند (-2, 16). ويقع الرأس المرافق عند (1, 6)

$$a =$$

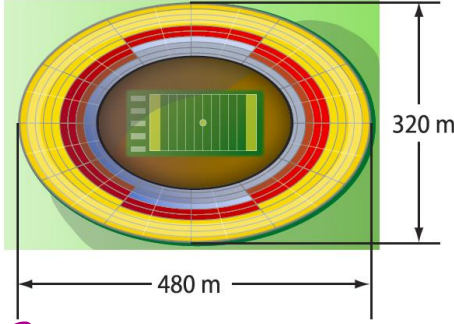
$$b =$$

المركز (-2, 6)

$$a = \text{بعد المركز عن الرأس} = \sqrt{(-2+2)^2 + (16-6)^2} = 10$$

$$b = \text{بعد المركز عن الرأس المرافق} = \sqrt{(1+2)^2 + (6-6)^2} = 3$$

$$\text{المعادلة} \Rightarrow \frac{(y-6)^2}{10^2} + \frac{(x+2)^2}{3^2} = 1 \Rightarrow \frac{(y-6)^2}{100} + \frac{(x+2)^2}{9} = 1$$



الاستنتاج المنطقي أرسلت شركة هندسة معمارية عرضاً إلى إحدى المدن لبناء المدرج الموضح.

a. قيمة a و b .

b. بافتراض أن المركز يقع عند نقطة الأصل، اكتب معادلة تمثل القطع الناقص.

c. حدد إحداثيات البؤرتين.

a $2a = \text{المحور الأكبر} = 480 \Rightarrow a = \frac{480}{2} = \boxed{240}$

$2b = \text{المحور الأصغر} = 320 \Rightarrow b = \frac{320}{2} = \boxed{160}$

b المركز $(0, 0)$

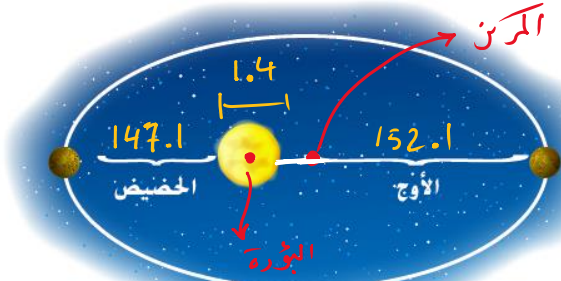
المعادلة $\Rightarrow \frac{(x-0)^2}{240^2} + \frac{(y-0)^2}{160^2} = 1 \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{57600} + \frac{y^2}{25600} = 1}$

c $c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow c = \sqrt{240^2 - 160^2} = 80\sqrt{5} = \boxed{178.89}$

البؤرة $\Rightarrow (-178.89, 0)$

البؤرة $\Rightarrow (178.89, 0)$

الفضاء يبلغ مدار الأرض 147.1 مليون كيلومتر تقريباً عند الحضيض و 152.1 مليون كيلومتر تقريباً عند الأوج. حدد معادلة تمثل مدار الأرض حول الشمس بالمليون ميل بحيث يكون مركز القطع الناقص الأفقي عند نقطة الأصل.



هناك معلومة (قطر الشمس = 1.4 مليون تقريباً)

المركز $(0, 0)$

$2a = 152.1 + 1.4 + 147.1 = 300.6 \Rightarrow \boxed{a = 150.3}$

$c = \text{بعد البؤرة عن المركز} = 150.3 - 147.1 - 0.7 = \boxed{2.5}$

نستخدم القانون $c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{150.3^2 - 2.5^2} = \boxed{150.28}$

المعادلة $\Rightarrow \frac{x^2}{150.3^2} + \frac{y^2}{150.28^2} = 1$

$\Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{22590.09} + \frac{y^2}{22583.84} = 1}$

جد إحداثيات المركز والبؤرتين وطولي المحورين الأكبر والأصغر لقطع ناقص بالمعادلة المعطاة. ثم مثل القطع الناقص بيانيًا.

$$\frac{(y+1)^2}{64} + \frac{(x-5)^2}{28} = 1$$

$$\text{المركز} = (5, -1) \quad , \quad a^2 = 64 \quad , \quad b^2 = 28$$

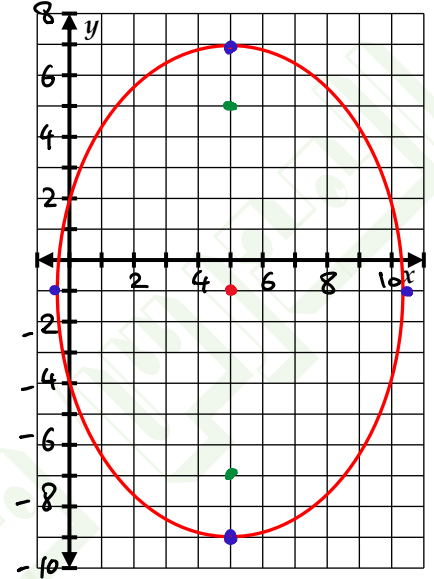
$$\Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{64 - 28} = 6$$

$$\text{البؤرتة 1} = (5, -1 + 6) = (5, 5)$$

$$\text{البؤرتة 2} = (5, -1 - 6) = (5, -7)$$

$$\text{المحور الأكبر} = 2a = 2(\sqrt{64}) = 16$$

$$\text{المحور الأصغر} = 2b = 2(\sqrt{28}) = 4\sqrt{7} \approx 10.58$$



$$\frac{(x+2)^2}{48} + \frac{(y-1)^2}{20} = 1$$

$$\text{المركز} = (-2, 1) \quad , \quad a^2 = 48 \quad , \quad b^2 = 20$$

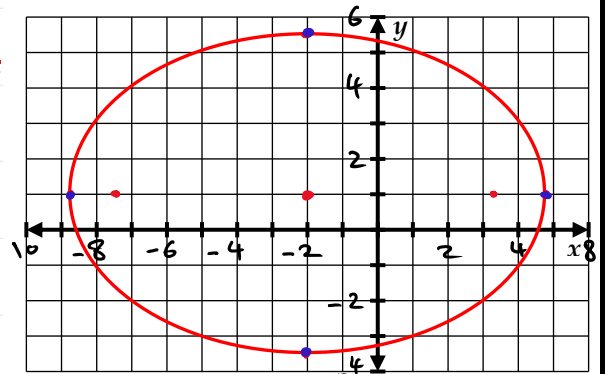
$$\Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{48 - 20} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7} = 5.3$$

$$\text{البؤرتة 1} = (-2 + 2\sqrt{7}, 1) = (3.3, 1)$$

$$\text{البؤرتة 2} = (-2 - 2\sqrt{7}, 1) = (-7.3, 1)$$

$$\text{المحور الأكبر} = 2a = 2\sqrt{48} = 8\sqrt{3} = 13.86$$

$$\text{المحور الأصغر} = 2b = 2\sqrt{20} = 4\sqrt{5} = 8.94$$



جد إحداثيات المركز والبؤرتين وطولي المحورين الأكبر والأصغر لقطع ناقص بالمعادلة المعطاة. ثم مثل القطع الناقص بيانيًا.

$$4x^2 + y^2 - 32x - 4y + 52 = 0$$

كتابة المعادلة في الصيغة القياسية

$$4x^2 - 32x + y^2 - 4y = -52$$

$$4(x^2 - 8x + (\frac{8}{2})^2) + (y^2 - 4y + (\frac{4}{2})^2) = -52 + 4(\frac{8}{2})^2 + (\frac{4}{2})^2$$

$$4(x^2 - 8x + 16) + (y^2 - 4y + 4) = 16$$

$$4(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 16$$

$$\frac{(x - 4)^2}{\frac{1}{4}} + \frac{(y - 2)^2}{1} = 16 \quad (\div 16)$$

$$\frac{(x - 4)^2}{\frac{1}{4}(16)} + \frac{(y - 2)^2}{1(16)} = 1$$

$$\frac{(x - 4)^2}{4} + \frac{(y - 2)^2}{16} = 1 \Rightarrow \text{الصيغة القياسية}$$

$$\text{المركز } (4, 2), \quad a^2 = 16, \quad b^2 = 4$$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{16 - 4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} = 3.46$$

$$\text{البؤرة}_1 = (4, 2 + 2\sqrt{3}) = (4, 5.46)$$

$$\text{البؤرة}_2 = (4, 2 - 2\sqrt{3}) = (4, -1.46)$$

$$\text{المحور الأكبر} = 2a = 2\sqrt{16} = 8$$

$$\text{المحور الأصغر} = 2b = 2\sqrt{4} = 4$$

