الإدارة العامة لمنطقة الأحمدي التعليمية

التوجيه الفني للرياضيات

دفتر الطالب

لمادة الرياضيات

للصف الثاني عشر العلمي
الفصل الدراسي الثاني

مدرسة عبدالله بن عباس الثانوية بنين

إعداد : قسم الرياضيات في ثانوية عبدالله بن عباس

رئيس القسم : أ . محمد خير فلاح

مدير المدرسة : أ . فيصل السلامين

هذا الدفتر لا يغني عن كتاب الطالب وكراسة التمارين

2023-2024

تعريف: المشتقة العكسية

تسمى الدالة F مشتقة عكسية للدالة f المعرفة على مجالها I.

إذا كان: $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I$

استنادًا إلى هذا التعريف:

إذا كان $f(x) = x$ فيمكن أن تكون: $F(x) = \frac{x^2}{2}$ مشتقة عكسية للدالة f.

لأن: $F'(x) = 2\left(\frac{1}{2}\right)x^{2-1}$

$= x = f(x)$

نظرية (1) إذا كانت F مشتقّة عكسيّة للدالّة f على الفترة I، G مشتقّة عكسيّة أيضًا للدالّة f على الفترة I فإنّ:

$$G(x) = F(x) + C \quad \forall x \in I$$

حيث C ثابت.

نظرية (2) إذا كانت F مشتقة عكسية لِـ f على الفترة I فإن الصورة العامة للمشتقة العكسية لِـ f على الفترة I هي:

$$F(x) + C$$

حيث C ثابت اختياري

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 14 رقم 1 :

أثبت أن: $F(x) = 5 - \frac{1}{3}x^3$ هي مشتقة عكسية للدالة $f(x) = -x^2$

ثم اكتب مشتقة عكسية أخرى لها.

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 14 رقم 2 :

أثبت أن: $F(x) = \frac{x^3+1}{x^2}$ هي مشتقة عكسية للدالة: $f(x) = 1 - \frac{2}{x^3}$

كراسة التمارين صـ 9 رقم 1

أثبت أن : $F(x) = (3x+2)^5 + 7$ هي مشتقة عكسية للدالة $f(x) = 15(3x+2)^4$

تعريف: التكامل غير المحدد Indefinite Integral

التكامل غير المحدد للدالّة f بالنسبة إلى x هو مجموعة كل المشتقّات العكسيّة F ، ويكتب على الصورة: $\int f(x)dx$

قواعد التكامل غير المحدد Rules of Indefinite Integral

① $\int k\,dx = kx + C$ k عدد ثابت

قاعدة القوى

② $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad , \quad n \in Q - \{-1\}$

خواص التكامل غير المحدد Properties of Indefinite Integral

خاصية الضرب بعدد ثابت

① $\int k\,f(x)\,dx = k\int f(x)dx \quad , \quad k \neq 0$

خاصية الجمع والطرح

② $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

ملاحظات:

ⓐ $\int -f(x)dx = -\int f(x)dx$

ⓑ $\int (f(x) + k)dx = \int f(x)dx + \int k\,dx$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 15 رقم 3

أوجد :

ⓐ $\int 15\,dx =$

ⓑ $\int 5x^4\,dx =$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 16 رقم 4

احسب : $\int (3x^2 - 4x - 1)\,dx$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 17 رقم 5

ⓐ $\int (2x-3)(x+4)dx$

ⓑ $\int \frac{x^2+5x+4}{x+1}dx$

ⓒ $\int \left(\frac{3x^2-x}{x}\right)^2 dx$

كراسة التمارين صـ 9 رقم 8

$\int \frac{x^4-27x}{x^2-3x}dx$

كراسة التمارين صـ 9 رقم 7

$\int \left(x^3-\frac{1}{x^3}\right)dx$

كتاب الطالب مثال صـ 17 رقم 6 أوجد :

ⓐ $\int \sqrt{x}\,dx$

ⓑ $\int \sqrt[5]{x^2}\,dx$

ⓒ $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{x}+1}\,dx$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 17 رقم 6 أوجد :

ⓐ $\int x\sqrt{x}\,dx$

ⓑ $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

ⓒ $\int \frac{x^2-3x}{\sqrt[3]{x}}\,dx$

كراسة التمارين صـ 9 رقم 10

(10) $\int \frac{x-1}{\sqrt{x}+1}\,dx$

يمكن تحديد واحدة من المشتقات العكسية عندما يتوفر شرط يمكننا من إيجاد قيمة الثابت C .

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 18 رقم 7

إذا كان: $F(x) = \int (2x+5)dx$ ، $F(-1) = 0$ **فأوجد** $F(x)$

كراسة التمارين صـ 9 رقم 16

(16) إذا كان $F(x) = \int (9x^2 - 4x + 5)dx$ وكان $F(-1) = 0$، فأوجد $F(x)$.

كراسة التمارين صـ 9 رقم 17

(17) هامش الدخل. افرض أنّ هامش الدخل عندما يباع x ألف وحدة هو:

$\frac{dr}{dx} = 3x^2 - 6x + 12$ (دينارًا لكل وحدة)

أوجد دالة الدخل $r(x)$ إذا كان $r(0) = 0$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 19 رقم 8 :

ألقيت كرة إلى الأعلى بسرعة ابتدائية 12 m/s من على سطح أحد الأبنية ارتفاعه 80 m عن سطح الأرض.

ⓐ في أي زمن t سوف تصل الكرة إلى أعلى ارتفاع؟

ⓑ في أي زمن t سوف تصل الكرة إلى الأرض؟

(علمًا بأن عجلة الجاذبية الأرضية $a(t) = 9.8\ \text{m/s}^2$)

كراسة التمارين صـ 10 البنود الموضوعية

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

قاعدة التكامل بالتعويض

إذا كانت F هي مشتقة عكسية للدالة f فإن:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C$$

وإذا كان $u = g(x)$ ، $du = g'(x)dx$ فإن:

$$\int f(u)du = F(u) + C$$

في هذا التكامل

نتعامل مع متغير جديد .نستبدل المتغير x بالمتغير u بهدف استخدام القواعد الأساسية للتكامل غير المحدد .

حاول أن تحل صـ 21 رقم 1 :

أوجد :

ⓐ $\int (x^3 + 4x^2 + x)^7 (3x^2 + 8x)\, dx$

ⓑ $\int \sqrt[3]{x^2 - 5x + 2}\,(2x - 5)dx$

كراسة التمارين صـ 12 رقم 2 :

$$\int (4x-5)^8 dx$$

كراسة التمارين صـ 12 رقم 3 :

$$\int (x+2)\sqrt[3]{x^2+4x-1}\, dx$$

كراسة التمارين صـ 12 رقم 4 :

$$\int (x^2-1)\sqrt{x^3-3x+5}\, dx$$

* تمكننا قاعدة التكامل بالتعويض من تعميم قاعدة القوى في التكامل غير المحدد كالتالي:

كتاب الطالب مثال صـ 21 رقم 2 :

ⓐ $\int \sqrt{4x-5}\ dx$

ⓑ $\int \frac{5}{\sqrt{x}\,(\sqrt{x}+2)^3} dx$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 22 رقم 2 :

أوجد :

ⓐ $\int \sqrt[5]{3x+7}\ dx$

تابع كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 22 رقم 2 :

ⓑ $\int \frac{3(\sqrt[3]{x}-5)}{\sqrt[3]{x^2}}dx$

كراسة التمارين صـ 12 رقم 6 :

(6) $\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{4+x^3}}dx$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 23 رقم 3

أوجد: $\int x(2x-1)^3 dx$

كراسة التمارين صـ 12 رقم 9 :

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+3x}} dx$$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 23 رقم 4

أوجد : $\int x^5\sqrt{3+x^2}\ dx$

كراسة التمارين صـ 12 رقم 10 :

$$\int x^2\sqrt{x-1}\,dx$$

كراسة التمارين صـ 12 رقم 11 :

$$\int x^3 \sqrt{x^2 - 2}\, dx$$

كراسة التمارين صـ 12 رقم 12 :

$$\int x^5 \sqrt[3]{x^3 + 1}\, dx$$

كراسة التمارين صـ 12 : البنود الموضوعية

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

الجدول أدناه يبيّن قواعد التكامل غير المحدد لبعض الدوال المثلثية جنبًا إلى جنب مع مصادر المشتقة لكل منها

التكامل غير المحدد
① $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$
② $\int \sin kx\, dx = -\frac{\cos kx}{k} + C$
③ $\int \cos x\, dx = \sin x + C$
④ $\int \cos kx\, dx = \frac{\sin kx}{k} + C$
⑤ $\int \sec^2 x\, dx = \tan x + C$
⑥ $\int \csc^2 x\, dx = -\cot x + C$
⑦ $\int \sec x \tan x\, dx = \sec x + C$
⑧ $\int \csc x \cot x\, dx = -\csc x + C$

تذكر:

$\frac{d}{dx}(-\cos x) = \sin x$

$\frac{d}{dx}\left(-\frac{\cos kx}{k}\right) = \sin kx$

$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$

$\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin kx}{k}\right) = \cos kx$

$\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$

$\frac{d}{dx}(-\cot x) = \csc^2 x$

$\frac{d}{dx}\sec x = \sec x \tan x$

$\frac{d}{dx}(-\csc x) = \csc x \cot x$

يمكن تطبيق قواعد التكامل التي تم دراستها عند تكامل الدوال المثلثية.

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 25 رقم 1 :

أوجد التكاملات غير المحددة التالية:

ⓐ $\int (\cos x + \csc^2 x)\ dx$

ⓑ $\int \sec x\,(\tan x + \sec x)\ dx$

ⓒ $\int \frac{dx}{\sin^2 x}$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 25 رقم 2 :

أوجـد :

ⓐ $\int cos5x \ \ dx$

ⓑ $\int (x^2 + cos2x) \ \ dx$

ⓒ $\int x \, sec^2(x^2 + 2) \ \ dx$

كراسة التمارين صـ 14 رقم 2

$\int (cscx \, cotx + \ sec^2x) \ \ dx$

كراسة التمارين صـ 14 رقم 1

$\int (secx \, tanx + \ sinx) \ \ dx$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 26 رقم 3 : أوجد : ⓐ $\int sin^3x \ . \ cosx \ \ dx$

ⓑ $\int csc^2x \ . \ cotx \ \ dx$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 27 رقم 4 : أوجد : ⓐ $\int cos^3(2x-3) \ . \ sin(2x-3) \ \ dx$

تابع كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 27 رقم 4

ⓑ $\int x^2 \ . \ sin(x^3 - 1) \ \ dx$

ⓒ $\int (3 + sin2x)^5 cos2x \ \ dx$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 28 رقم 5 : أوجد : $\int csc^5 x \ cotx \ \ dx$

كراسة التمارين البنود الموضوعية صـ 14

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

اشتقاق الدوال الأسية :

قاعدة (1) :

$$\frac{d}{dx}\, a^x = a^x \ln a$$

إذا كانت u دالة في x قابلة للإشتقاق فإن

$$\frac{d}{dx}\, a^u = a^u \ln a \ \frac{du}{dx}$$

في القاعدة (1) و بوضع $a = e$ نحصل على القاعدة التالية :

قاعدة (2) :

$$\frac{d}{dx}\, e^x = e^x$$

و حالة u دالة في x قابلة للإشتقاق فإن

$$\frac{d}{dx}\, e^u = e^u \ \frac{du}{dx}$$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 30 رقم 1 :

أوجد مشتقة كل من الدوال التالية :

ⓐ $f(x) = 10^x$

ⓑ $f(x) = 3^{\frac{1}{x}}$

ⓒ $f(x) = 5^{\cos x}$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 31 رقم 2 :

أوجد مشتقة كل من الدوال التالية :

ⓐ $f(x) = e^{\sqrt{x}}$

ⓑ $g(x) = e^{x^2-4}$

ⓒ $h(x) = e^{tanx}$

كراسة التمارين ص 16 رقم 2 :

$y = 5^{\sqrt{x+1}}$

كراسة التمارين ص 16 رقم 3 :

$y = 8^{tanx}$

اشتقاق دوال اللوغاريتمات الطبيعية

Derivatives of Natural Logarithmic Functions

قاعدة (3) :

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$$

إذا كانت u دالة في x قابلة للإشتقاق فإن

$$\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$$

لاحظ أن :

$$\frac{d}{dx}(\ln g(x)) = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

قاعدة (4) :

$$\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{1}{x} \quad , \quad x \neq 0$$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 32 رقم 3 :

أوجد مشتقة كل من الدوال التالية:

ⓐ $f(x) = \ln(2x + x^3)$

ⓑ $g(x) = \ln\frac{1}{2x+1}$

ⓒ $f(x) = \ln(1 + \sqrt{3}\,x)$

ⓓ $h(x) = \ln(\sin x)$

تكامل بعض الدوال الأسية واللوغاريتمية : Integrals of some Exponential and Logarithmic Functions

التكامل غير المحدد	قاعدة المشتقة
$\int e^x\,dx = e^x + C$	$\frac{d}{dx}e^x = e^x$
$\int u'e^u\,dx = e^u + C$	$\frac{d}{dx}e^u = e^u\frac{du}{dx} = u'e^u$
$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln\lvert x\rvert + C$	$\frac{d}{dx}\ln\lvert x\rvert = \frac{1}{x}$
$\int \frac{u'}{u}\,dx = \ln\lvert u\rvert + C$	$\frac{d}{dx}\ln\lvert u\rvert = \frac{1}{u}\frac{du}{dx} = \frac{u'}{u}$

لاحظ أن: $\int \frac{g'(x)\,dx}{g(x)} = \ln\lvert g(x)\rvert + C$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 33 رقم 4 :

أوجـد :

ⓐ $\int e^{3x}\,dx$

ⓑ $\int (2x-1)e^{x^2-x+3}\,dx$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 34 رقم 5 :

ⓐ $\int \frac{-5}{3x-2}\,dx$

تابع كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 34 رقم 5 :

ⓑ $\int \frac{3t^2 - 6t}{t^3 - 3t^2 + 8}\, dt$

ⓒ $\int \frac{x^3 + 4}{x} dx$

كراسة التمارين صـ 16 رقم 17 :

$\int \frac{1}{x^2}\, e^{\frac{1}{x}}\, dx$

كراسة التمارين صـ 16 رقم 19 :

$\int (x^2 - 2)e^{x^3 - 6x}\, dx$

كراسة التمارين صـ 16 رقم 20 :

$\int \left(e^{0.5x} + \frac{0.5}{x}\right) dx$

كتاب الطالب مثال صـ 35 رقم 6 : أوجد : $\int tanx\ dx$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 35 رقم 6 : أوجد : $\int cotx\ dx$

كراسة التمارين صـ 16 رقم 21 :

$$\int \frac{x^3 - x}{x^4 - 2x^2}\, dx$$

كراسة التمارين صـ 16 رقم 22 :

$$\int \frac{e^x}{e^x + 1}\, dx$$

كراسة التمارين صـ 16 البنود الموضوعية

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

قاعدة التكامل بالتجزيء Integration by Parts Formula

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 37 رقم 1 :

أوجد : $\int x \ cosx \ dx$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 38 رقم 2 :

أوجـد : ⓐ $\int (x-3)e^{x-3}dx$

تابع كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 38 رقم 2: أوجد : $\int 4xe^{-5x}dx$ ⓑ

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 38 رقم 3 :
أوجـد : $\int \ln x\,dx$

كراسة التمارين صـ 18 رقم 5 : أوجـــد : $\int \ln \sqrt[4]{x}\, dx$

كراسة التمارين صـ 18 رقم 8 : أوجـــد : $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$

كراسة التمارين صـ 18 رقم 9 : أوجـد : $\int \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} dx$

كراسة التمارين صـ 18 رقم 10 : أوجـد : $\int x^2 \ln x^2 \, dx$

يمكن حساب التكامل بالتجزيء أكثر من مرة

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 40 رقم 6 :

أوجـد : $\int x^2 \, e^{x+2} \, dx$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 39 رقم 5 :

أوجـــد : $\int x^2 \sin x \, dx$

كراسة التمارين صـ 18 رقم 12 : أوجـــد : $\int (x^2 + 3x) \sin x \, dx$

كراسة التمارين صـ 18 رقم 11 :

أوجـــد : $\int (x^2 - 2x)cosx \ dx$

كراسة التمارين صـ 18 رقم 14 : أوجـــد : $\int x^2 e^{2x-3} \ dx$

كراسة التمارين صـ 18 : البنود الموضوعية

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

أولًا: المقام يمكن تحليله إلى عوامل خطية (عوامل من الدرجة الأولى) غير مكررة

المقام $h(x)$ عبارة عن ناتج ضرب عوامل خطية غير مكررة.

لتكن $f(x)=\frac{r(x)}{h(x)}$ حيث المقام $h(x)$ على الصورة:

$$h(x)=(a_1x+b_1)(a_2x+b_2)\ldots(a_kx+b_k)$$

حيث لا يوجد عوامل مكررة ولا يوجد عامل ثابت مضروب بآخر.

في هذه الحالة تكون الدالة f على صورة كسور جزئية كالتالي:

$$\frac{r(x)}{h(x)}=\frac{A_1}{a_1x+b_1}+\frac{A_2}{a_2x+b_2}+\ldots+\frac{A_k}{a_kx+b_k}$$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 43 رقم 1 :

لتكن الدالة f : $f(x)=\frac{2x-1}{x^2-4x+3}$

فأوجد : ⓐ الكسور الجزئيـة

ⓑ $\int f(x)\,dx$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 44 رقم 2 :

أوجـد :

$$\int \frac{x^2 - 2}{2x^3 - 5x^2 - 3x}\, dx$$

كراسة التمارين صـ 20 رقم 4 : أوجـد الكسـور الجزئيـة لكل دالة f ثم أوجـد $\int f(x)\,dx$

$$f(x) = \frac{12}{x^3 + 2x^2 - 3x}$$

كراسة التمارين صـ 20 رقم 2 : أوجد الكسور الجزئيـة لكل دالة f ثم أوجـد $\int f(x)\,dx$

$$f(x) = \frac{1}{x^2+2\,x}$$

كراسة التمارين صـ 20 رقم 5 : أوجد الكسور الجزئيـة لكل دالة f ثم أوجـد $\int f(x)\,dx$

$$\int \frac{x\ +\ 17}{2x^2+5\,x-3}\ dx$$

ثانيًا: المقام يمكن تحليله إلى عوامل خطية بعضها متكرر

المقام $h(x)$ عبارة عن ناتج ضرب عوامل خطية بعضها متكرر. لكل عامل من عوامل $h(x)$ على الصورة $(mx+n)^k$، يجب أن يحتوي التفكيك إلى كسور جزئية على مجموع حدود عددها k:

$$\frac{A_1}{mx+n}+\frac{A_2}{(mx+n)^2}+\cdots+\frac{A_k}{(mx+n)^k}$$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 45 رقم 3 :

أوجـد : $\int \frac{4x^2-4x+1}{x^3-2x^2+x}\,dx$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 46 رقم 4 :

أوجـــد : $\int \frac{x^2 + 1}{x^3 + 4x^2} \, dx$

العنـــوان : تابع التكامل بالكسور الجزئية بند 6 - 5

عندما تكون درجة البسط في الحدودية النسبية $f(x)=\frac{r(x)}{h(x)}$ مساوية أو أكبر من درجة المقام، نوجد أولًا ناتج القسمة $q(x)$ باستخدام القسمة المطولة ثم نكتب الدالة على الصورة: $f(x)=q(x)+\frac{p(x)}{h(x)}$ حيث $p(x)$ هو الباقي.

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 47 رقم 5 : أوجـد : $\int \frac{x^3-2x^2-4}{x^3-2x^2}\,dx$

كراسة التمارين صـ 20 رقم 9 : أوجـد : $\int \frac{2x^2 + x + 3}{x^2 - 1} dx$

التكامل المحدد Definite Integral

تعلمت فيما سبق إنه إذا كانت f دالة متصلة على $[a\,,b]$ وكانت الدالة F مشتقة عكسية للدالة f فإن التكامل غير المحدد للدالة f هو:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

وفي هذا البند سوف تتعلم التكامل المحدد للدالة f من a إلى b وهو العدد الحقيقي:

$F(b) - F(a)$

حيث:

$$\int_a^b f(x)dx = \left[\int f(x)\,dx\right]_a^b$$
$$= [F(x)]_a^b$$
$$= F(b) - F(a)$$

ويسمّى a, b حدّي التكامل، والقواعد التي سبق ذكرها في التكامل غير المحدد تطبق على التكامل المحدد.

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 51 رقم 1 : أوجـد : $\int_2^7 (x^3 - 2x^2 + 2)\,dx$

كراسة التمارين صـ 22 رقم 1 : أوجـد : $\int_{-1}^1 3x(x-4)\,dx$

كراسة التمارين صـ 22 رقم 1 : أوجـد : $\int_0^2 (x+1)^2\,dx$

Properties of the Definite Integral خواص التكامل المحدد

إذا كانت f دالة متصلة على الفترة I ، $k \in \mathbb{R}$ ، $a, b, c \in I$ فإن:

1. $\int_a^a f(x)\,dx = 0$
2. $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$
3. $\int_a^b k\,dx = k(b-a)$
4. $\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$
5. $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

لاحظ في خاصية 3 أنه: إذا كان $k = 1$ فإن: $\int_a^b dx = b - a$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 52 رقم 2

أوجـد :

ⓐ $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2}\sin 2x - \csc^2 x\right) dx$

ⓑ $\int_2^{-3} 5\,dx$

ⓒ $\int_3^3 (-2x^3 + x^2)\,dx$

ⓓ $\int_2^4 \frac{1}{x-1}\,dx$

كراسة التمارين صـ 22 رقم 4 أوجد : $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos 3x \ dx$

كراسة التمارين صـ 22 رقم 5 أوجد : $\int_1^4 \frac{8 - x^4}{2x^2} dx$

كراسة التمارين صـ 22 رقم 6 أوجد : $\int_0^1 x\sqrt{x} \ dx$

كراسة التمارين صـ 22 رقم 7 أوجد : $\int_1^2 (3e^x + \frac{5}{x}) \ dx$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 52 رقم 3 : أوجـــد :

ⓐ $\int_{-3}^{4} |2x-4|\,dx$

ⓑ $\int_{1}^{2} |x+2|\,dx$

كراسة التمارين صـ 22 رقم 9 :

أوجد :

$$\int_{-1}^{1} |x^3|\,dx$$

كراسة التمارين صـ 22 رقم 10 :

أوجد :

$$\int_{-2}^{3} (x|x|+3)\,dx$$

تابع خواص التكامل : لتكن f دالة متصلة على $[a,b]$

⑥ إذا كانت: $f(x) \geqslant 0 \quad \forall \quad x \in [a,b]$

فإن: $\int_a^b f(x)dx \geqslant 0$

⑦ إذا كانت: $f(x) \leqslant 0 \quad \forall \quad x \in [a,b]$

فإن: $\int_a^b f(x)dx \leqslant 0$

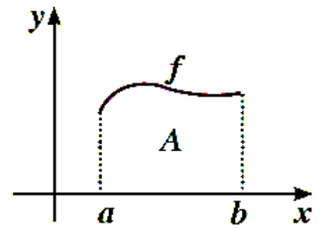
كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 53 رقم 4 :

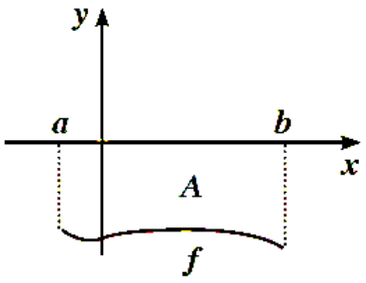
دون حساب قيمة التكامل أثبت أن : $\int_{-1}^{0} (x^2 + x)\, dx \leq 0$

كراسة التمارين صـ 22 رقم 12 :

دون حساب قيمة التكامل أثبت أن : $\int_{-1}^{0} (x^3 - 5x^2 - 6x)\, dx \geq 0$

التفسير البياني للتكامل المحد د Graphical Interpretation of Definite Integral





في المستوى الإحداثي لتكن f دالة متصلة على $[a\,,b]$،

A تمثل مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات

والمستقيمين $x = a \quad , \quad x = b$

① إذا كانت: $f(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in [a\,,b]$

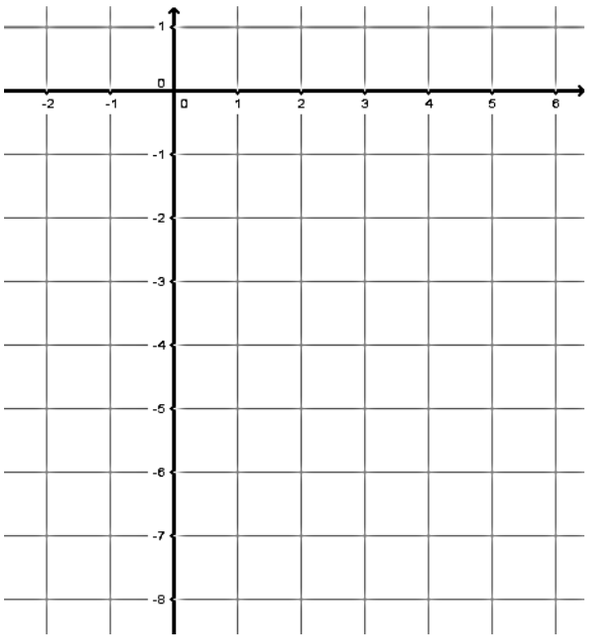
فإن: $\int_a^b f(x)\,dx = A$

② إذا كانت: $f(x) \leqslant 0 \quad \forall x \in [a\,,b]$

فإن: $\int_a^b f(x)\,dx = -A$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 55 رقم 6 :

أوجد قيمة $\int_{-1}^{5} (2-2x)\;dx$ بيانيا



كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 56 رقم 7 :

أوجـــد : ⓐ $\int_{-5}^{5} \sqrt{25 - x^2}\,dx$

تابع كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 56 رقم 7 :

أوجد : $\int_0^4 -\sqrt{16 - x^2}\ dx$ ⓑ

تعلمت في البنود السابقة طرائق عدة لإيجاد التكامل غير المحدد منها التكامل بالتعويض والتكامل بالتجزيء والتكامل بالكسور الجزئية. وتستخدم هذه الطرائق أيضًا في إيجاد التكاملات المحددة.

ويجب مراعاة ما يلي عند استخدام طريقة التعويض في إيجاد التكامل المحدد:

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx$$

بفرض $u = g(x)\ ,\ du = g'(x)dx$

ثم كامل بالنسبة لـ u من $u = g(a)$ إلى $u = g(b)$ بحيث يكون:

$$\int_c^b f(g(x))\cdot g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\cdot du$$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 57 رقم 8 : أوجـد : $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} Sin\ 2x\ Cos2x\ \ dx$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 58 رقم 9 :

أوجـــد :

ⓐ $\int_{-1}^{1} (x+1)\sqrt{x^2+2x+5}\ dx$

ⓑ $\int_{2}^{5} x\sqrt{x-1}\ dx$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 58 رقم 10 :

أوجـد : $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} x\,sec^2x\ dx$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 59 رقم 11 : أوجـــد : $\int_{4}^{7} \frac{3x^2-17}{x^2-x-6}\ dx$

كراسة التمارين صـ 22 : البنود الموضوعية

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

أولًا: مساحة منطقة محددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات في الفترة $[a , b]$

علمنا من دراستنا السابقة أنه إذا كانت f دالة متصلة على $[a , b]$ فإن مساحة المنطقة A المحددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات والمستقيمين $x = a$, $x = b$

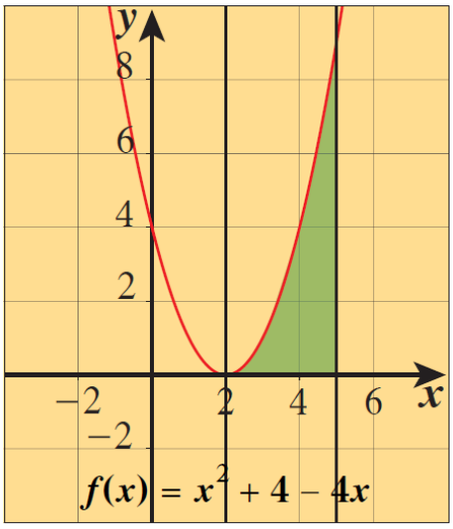
إذا كانت: $f(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in [a , b]$

فإن $A = \int_a^b f(x)dx$

إذا كانت: $f(x) \leqslant 0 \quad \forall x \in [a , b]$

فإن $A = -\int_a^b f(x)dx$

كتاب الطالب مثال صـ 66 رقم 1 :



يبيّن الشكل المقابل بيان الدالة: $f(x) = x^2 + 4 - 4x$

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة ومحور السينات والمستقيمين $x = 2$, $x = 5$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 66 رقم 1 : في مثال (1)

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات والمستقيمين $x = 4$, $x = -1$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 67 رقم 2 :

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = x^2 + 5x + 4$ ومحور السينات.

لتكن f دالة متصلة على الفترة $[a,b]$ ، $c \in (a,b)$ حيث $f(c) = 0$

فإن مساحة المنطقة المستوية المحددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات في الفترة $[a,b]$ هي:

$$A = \left| \int_a^c f(x)\,dx \right| + \left| \int_c^b f(x)\,dx \right|$$

وهذه القاعدة صحيحة عند وجود: ... ، c_1 ، c_2 ، c_3 تنتمي إلى (a , b)

حيث $f(c_1) = f(c_2) = f(c_3) = ... = 0$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 69 رقم 3 :

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f و محور السينات في الفترة المبينة .

ⓐ $f(x) = x^3 - 9x \quad , \quad [-2\,,1]$

ⓑ $f(x) = cosx \quad , \quad [0\,,\pi]$

ثانيًا: مساحة منطقة محددة بمنحنيي دالتين في الفترة $[a\,,b]$

مساحة منطقة محددة بين منحنيين

إذا كانت كل من $f\,,g$ متّصلتين على الفترة $[a\,,b]$، حيث

$$f(x) \geqslant g(x) \quad \forall x \in [a\,,b]$$

فإن مساحة المنطقة المحددة بمنحنيي الدالتين g , f والمستقيمين $x = a$, $x = b$ هي:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

كتاب الطالب مثال صـ 70 رقم 4 :

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = x^2 + 2$ ومنحنى الدالة g : $g(x) = \sqrt[3]{x}$

والمستقيمين $x = 1$, $x = 0$ علمًا بأن: $f(x) > g(x) \quad , \quad \forall x \in [0\,,1]$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 70 رقم 4 :

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = x^2 + 3$

ومنحنى الدالة g : $g(x) = x^2 + 1$ والمستقيمين $x = 1$, $x = -1$

علمًا بأن: $f(x) > g(x) \quad , \quad \forall x \in [-1\,,1]$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 71 رقم 5 :

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = x^2 + 1$

ومنحنى الدالة g : $g(x) = -x^2 - 3$ والمستقيمين $x = 1$, $x = -1$

علمًا بأن المنحنيين للدالتين f , g غير متقاطعين.

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 72 رقم 6 :

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنيي الدالتين: $y_2 = -2x + 5$, $y_1 = x^2 + 2$

يمكن لإيجاد المساحة A باستخدام القيمة المطلقة دون الحاجة لاستخدام القيمة الاختيارية كالتالي :

$$A = \left| \int_{-1}^{2} (y_1 - y_2)dx \right| = \left| \int_{-1}^{2} (y_2 - y_1)dx \right|$$

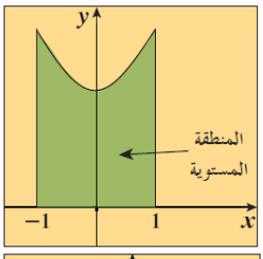
كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 72 رقم 7 :

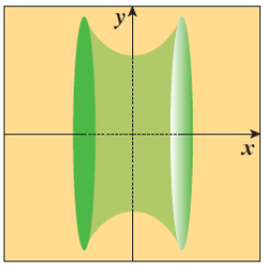
أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنيي الدالتين : $f(x) = -2x^2 + 2 \quad , \quad g(x) = x^2 - 1$

من فقرة «دعنا نفكر ونتناقش» لاحظنا أنه: إذا نتج مجسم من دوران منطقة محددة بمنحنى دالة f ومحور السينات والمستقيمين $x = b$, $x = a$ حيث $a < b$ دورة كاملة حول محور السينات فإن حجم هذا المجسم يساوي:

$$V = \int_a^b \pi (f(x))^2 dx$$

كتاب الطالب مثال صـ 77 رقم 1 :





أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = x^2 + 2$ ومحور السينات في الفترة $[-1, 1]$.

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 77 رقم 1 :

أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بمنحنى الدالة f: $f(x) = \sqrt{x-1}$ ومحور السينات في الفترة $[1, 5]$.

كتاب الطالب مثال صـ 77 رقم 2 :

باستخدام التكامل المحدد أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بنصف الدائرة $y = \sqrt{r^2 - x^2}$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 78 رقم 2 :

باستخدام التكامل المحدد أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بمنحنى الدالة f : $r \neq 0$, $f(x) = r$ في الفترة $[0 , h]$

إذا نتج مجسم عن دوران منطقة محددة بمنحنيي الدالتين f , g والمستقيمين $x = a$, $x = b$ دورة كاملة حول محور السينات، بحيث f, g لهما الإشارة نفسها في الفترة $[a, b]$، فإن حجم هذا المجسم يعطى بالقاعدة:

$$V = \pi \int_a^b [(f(x))^2 - (g(x))^2]dx$$

حيث: $f(x) \geqslant g(x) \geqslant 0$ أو $f(x) \leqslant g(x) \leqslant 0$

كتاب الطالب مثال صـ 78 رقم 3 :

أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بمنحنيي الدالتين

$$f(x) = x^2 \quad , \quad g(x) = \sqrt{x} : g$$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 79 رقم 3 :

أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور محور السينات والمحددة بين منحنيي الدالتين

$$f(x) = \frac{x^2}{2} + 1 \quad , \quad g(x) = \frac{x}{2} + 2$$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 79 رقم 4 :

أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بمنحنيي الدالتين: $y_1 = x + 3 \ , \ y_2 = x^2 + 1$

كراسة التمارين صـ 30 البنود الموضوعية

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

أولا : طول قوس من منحنى

قاعدة طول القوس

إذا كانت الدالة f' متصلة على $[a, b]$ فإن طول القوس من منحنى $y = f(x)$ في $[a, b]$ هو:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

ملاحظة: سنتعامل في هذا البند مع دوال مشتقاتها متصلة على الفترات المعطاة.

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 81 رقم 1 :

أوجد طول القوس من منحنى الدالة f : $f(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 1$ في الفترة $[3, 8]$

كراسة التمارين صـ 32 رقم 1 :

أوجد طول القوس من منحنى الدالة f: $f(x) = 5 + 2\sqrt{x^3}$ في الفترة $\left[0, \frac{1}{3}\right]$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 82 رقم 2 :

أوجد طول القوس من منحنى الدالة f : $f(x) = \frac{2}{9}(9+3x)^{\frac{3}{2}}$ في الفترة $[2\,,5]$

كراسة التمارين صـ 32 رقم 2 :

أوجد طول القوس من منحنى الدالة f: $f(x) = \frac{1}{3}(7+4x)^{\frac{3}{2}}$ في الفترة $\left[1,\frac{5}{4}\right]$

ثانيا : إيجاد معادلة منحنى دالة باستخدام التكامل

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 83 رقم 3 :

أوجد معادلة منحنى الدالة f الذي ميله عند أي نقطة $P(x, y)$ يساوي $3x^2 + x$ ويمر بالنقطة $(2 , 2)$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 83 رقم 4 :

أوجد معادلة منحنى الدالة f الذي ميله عند أي نقطة $P(x, y)$ يساوي $-8x^3 + 3x^2 - 2x + 4$ ويمر بالنقطة $(-1 , -5)$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 84 رقم 5 :

إذا كان ميل العمودي لمنحنى الدالة f عند أي نقطة عليه (x , y) هو $2x - 1$

فأوجد معادلة المنحنى علمًا بأنه يمر بالنقطة $B(1 , 0)$

مثال (5)صـ 84

إذا كان ميل العمودي على منحنى الدالة f عند أي نقطة (x,y) يساوي $\sqrt{5 - 4x}$ فأوجد معادلة المنحنى عندما يمر بالنقطة $A(-5,3)$

كراسة التمارين صـ 32 : البنود الموضوعية

1	2	3	4	5	6	7	8	9

تعريف (1)
المعادلات التفاضلية: هي معادلات تحتوي على دالّة مجهولة وبعض مشتقاتها.
نستخدم عادة y بدلًا من $f(x)$.

تعريف (2)
رتبة المعادلة التفاضلية هي أعلى رتبة لمشتقة دالة موجودة في هذه المعادلة.

تعريف (3)
درجة المعادلة التفاضلية: هي أكبر أس لأعلى المشتقات رتبة.

حل المعادلات التفاضلية
هو إيجاد
دوال تحقق مع مشتقاتها هذه المعادلات

وسنقتصر في دراستنا على
حل معادلات تفاضلية من الدرجة الأولى.

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 87 رقم 1 :

أثبت أنّ الدالة: $y = 2e^{3x} + 1$ هي حل للمعادلة: $y' + 3 = 3y$

هناك بعض القواعد التي تساعد في حل معادلات تفاضلية من الدرجة الأولى.

I المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى والدرجة الأولى التي على الصورة $y' = f(x)$

حلها يكون على الصورة: $y = \int f(x)dx$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 8 رقم 2 :

حل المعادلة: $y' = 7x^2 + 9x - 1$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 88 رقم 3 :

حل المعادلة: $y' = 8x^3 - 3x^2 + 4$ ، والتي تحقق $y = 5$ عند $x = 1$

II بعض المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى والدرجة الأولى تحوي المتغيرين: x , y على الصورة: $\frac{dy}{dx} = g(x) \cdot h(y)$ يتم حلها بطريقة فصل المتغيرات بالصورة التالية:

$$\frac{1}{h(y)} dy = g(x) dx$$

ونكامل الطرفين وصولًا إلى حل المعادلة التفاضلية وهو إيجاد y.

كتاب الطالب مثال صـ 88 رقم 4 : حل المعادلات التفاضلية التالية:

ⓐ $y' - 2xy = 0$

تابع كتاب الطالب مثال صـ 88 رقم 4 :

ⓑ $y' = 4y$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 89 رقم 4 :

حل المعادلة التفاضلية: $\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}$

III المعادلات التفاضلية على الصورة $y' = ay$ حيث $a \neq 0$ حلولها هى $y = k\,e^{ax}$ حيث $k \in \mathbb{R}^*$.

مثال (5)صـ 90

أوجد حلّا للمعادلة : $y' = 4\,y$ إذا كان $y = 2$ عند $x = 0$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 90 رقم 5 :

أوجد حلًّا للمعادلة: $y' = -2y$ إذا كان $y = 3$ عند $x = 0$

IV المعادلات التفاضلية على الصورة $y' = ay + b$ حيث $b \neq 0$, $a \neq 0$ تكون حلولها: $y = k\,e^{ax} - \frac{b}{a}$

مثال (6)صـ 90

a حل المعادلة : التالية : $2y' + y = 1$

b أوجد الحل الذي يحقق $y = 2$ عند $x = -1$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 90 رقم 6 :

حل المعادلة $3y' - 2y = 4$ ، ثم أوجد الحل الذي يحقق $y = 3$ عند $x = 0$

V المعادلات التفاضلية على الصورة: $y'' = f(x)$

يتم حل هذه المعادلات بخطوتين: $y' = \int f(x)dx = F(x) + C_1$

ثم $y = \int (F(x) + C_1)dx$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 91 رقم 7 :

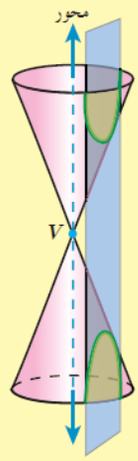
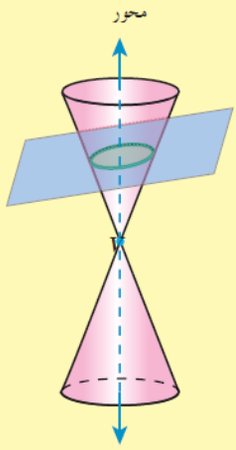
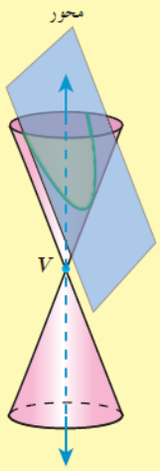
حل المعادلة: $y'' = -3x^2 + 6x$

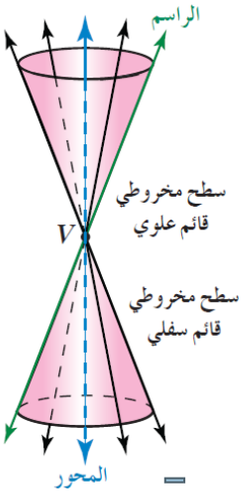
حل المعادلة : التالية : $y'' = 3x^2 - 2x$

كراسة التمارين صـ 35 : البنود الموضوعية

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

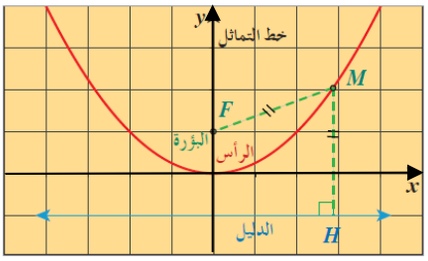
ويوضح الجدول التالي وضعية المستوى بالنسبة إلى الراسم أو إلى المحور.

الشكل			
وضع المستوى	المستوى موازٍ للمحور ولا يحويه	المستوى ليس عموديًّا على المحور وليس موازيًا لأي راسم	المستوى موازٍ لراسم ولا يحويه
القطع الناتج	قطع زائد	قطع ناقص	قطع مكافئ

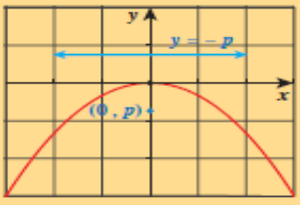
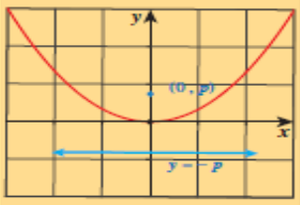
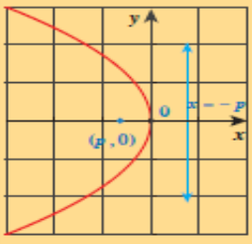
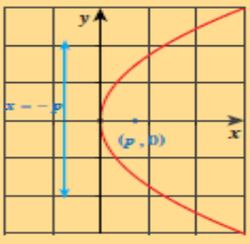


تعريف: القطع المكافئ

القطع المكافئ هو مجموعة كل النقاط في المستوى المتساوية البعدين عن نقطة ثابتة معطاة (البؤرة) وعن مستقيم ثابت معطى (الدليل).



قطع مكافئ رأسه نقطة الأصل (0, 0)

الصورة العامة	$x^2 = 4py$		$y^2 = 4px$	
الفتحة	إلى أعلى أو إلى أسفل		إلى اليمين أو إلى اليسار	
البؤرة	$(0, p)$		$(p, 0)$	
الدليل	$y = -p$		$x = -p$	
محور التناظر	محور الصادات $(y - axis)$		محور السينات $(x - axis)$	
المسافة من الرأس إلى البؤرة	$\lvert p \rvert$			
المسافة من الرأس إلى الدليل				
إشارة p	$p < 0$	$p > 0$	$p < 0$	$p > 0$
الشكل				

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 104 رقم 1 :

ⓐ أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل وبؤرته $F(-4,0)$

ⓑ أوجد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته $F(0,2)$ ودليله المستقيم $y=-2$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 105 رقم 2 :

أوجد البؤرة والدليل لقطع مكافئ، ثم ارسم شكلًا تقريبيًّا لهذا القطع في كل مما يلي:

ⓐ المعادلة: $y=\frac{x^2}{4}$

ⓑ المعادلة: $x=-\frac{1}{5}y^2$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 105 رقم 3 :

أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ويمر بالنقطة $A(1,1)$ وخط تماثله $y-axis$.

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 106 رقم 4 :

أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه $(0,0)$ ويمر بالنقطتين $B(1,4)$, $A(-1,4)$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 106 رقم 5 :

أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ومعادلة دليله $y = 1$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 107 رقم 6 :

تصنع إحدى الشركات الكشافات المكافئة لنوعيات عديدة من السيارات.

إذا كان لأحد هذه الكشافات سطح مكافئ متولد من تدوير القطع المكافئ الذي معادلته $x^2 = 12y$، فأين سيكون موضع المصباح الكهربائي؟

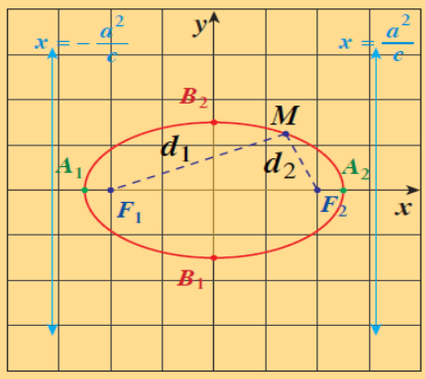
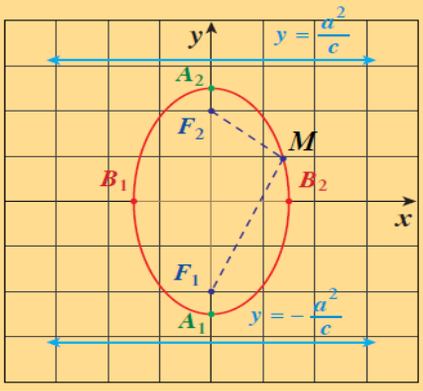
كراسة التمارين صـ 40 : البنود الموضوعية

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

تعريف: القطع الناقص

القطع الناقص هو مجموعة كل النقاط في المستوى التي يكون مجموع بعدي كل نقطة منها عن نقطتين ثابتتين في المستوى ثابتًا.

معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل $(0,0)$ كالتالي:

	$a > b > 0$	$a > b > 0$
المعادلة	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$
بيان القطع		
المحور الأكبر	ينطبق على محور السينات	ينطبق على محور الصادات
الرأسان طرفا المحور الأكبر	$A_1(-a,0)$, $A_2(a,0)$	$A_1(0,-a)$, $A_2(0,a)$
طول المحور الأكبر	$2a$	
طرفا المحور الأصغر	$B_1(0,-b)$, $B_2(b,0)$	$B_1(-b,0)$, $B_2(b,0)$
طول المحور الأصغر	$2b$	
البؤرتان	$F_1(-c,0), F_2(c,0)$	$F_1(0,-c)$, $F_2(0,c)$
العلاقة الأساسية	$a^2=b^2+c^2$	
معادلتا الدليلين	$x=-\frac{a^2}{c}$, $x=\frac{a^2}{c}$	$y=-\frac{a^2}{c}$, $y=\frac{a^2}{c}$
التناظر	القطع الناقص متناظر حول كل من محوريه ومركزه	

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 112رقم 1 : إذا كانت: $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ معادلة قطع ناقص فأوجد:

ⓐ رأسي القطع وطرفي المحور الأصغر.

ⓑ البؤرتين.

ⓒ معادلة دليلي القطع.

ⓓ طول كل من المحورين، ثم ارسم شكلًا تقريبيًّا للقطع.

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 113 رقم 2 :

أوجد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه: $F_2(2,0)$, $F_1(-2,0)$ وطول محوره الأكبر 6، وارسم شكلًا تقريبيًّا لهذا القطع.

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 113 رقم 3 :

أوجد البؤرتين والرأسين وطول المحور الأكبر للقطع الناقص الذي معادلته: $x^2 + 4y^2 = 16$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 114 رقم 4 :

أوجد معادلة قطع ناقص إذا كان محوره الأكبر 16 cm والمسافة بين البؤرتين 10 cm

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 115 رقم 5 :

أوجد معادلة القطع الناقص الذي محوره الأصغر أفقي طوله 10 cm ويمر بالنقطة $A(2,2\sqrt{6})$.

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 116 رقم 6 :

يتولد المجسم الناقص لأحد أجهزة تفتيت الحصوات، من دوران قطع ناقص نقطتا طرفي محوره الأكبر $A_1(-8,0)$, $A_2(8,0)$. إذا كانت إحدى نقطتي طرفي محوره الأصغر $B_1(0,3.5)$؛ فأوجد إحداثيات البؤرتين.

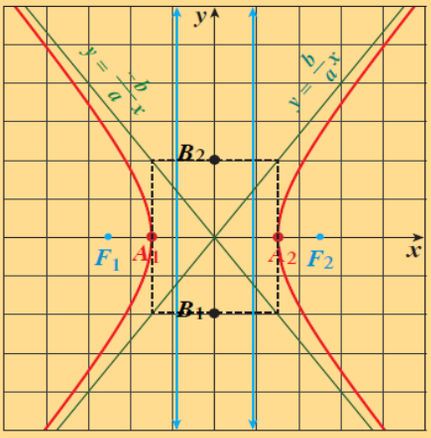
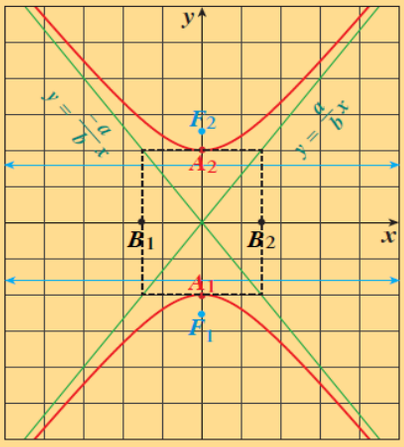
كراسة التمارين صـ 43 : البنود الموضوعية

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

تعريف: القطع الزائد

القطع الزائد هو مجموعة كل النقاط في المستوي التي تكون القيمة المطلقة للفرق بين بعدي كل نقطة منها عن نقطتين ثابتتين في المستوي ثابتًا.

معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل كالتالي:

المعادلة	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$
بيان القطع		
طرفا المحور القاطع الرأسان	$A_1(-a,0)\ ,\ A_2(a,0)$	$A_1(0,-a)\ ,\ A_2(0,a)$
المحور القاطع (الأساسي)	ينطبق على محور السينات	ينطبق على محور الصادات
طول المحور القاطع	$2a$	
طرفا المحور المرافق	$B_1(0,-b)\ ,\ B_2(0,b)$	$B_1(-b,0)\ ,\ B_2(b,0)$
طول المحور المرافق	$2b$	
البؤرتان	$F_1(-c,0)\ ,\ F_2(c,0)$	$F_1(0,-c)\ ,\ F_2(0,c)$
العلاقة الأساسية	$c^2=a^2+b^2$	
معادلة الخطين المقاربين	$y=\pm\frac{b}{a}x$	$y=\pm\frac{a}{b}x$
معادلة الدليلين	$x=\pm\frac{a^2}{c}$	$y=\pm\frac{a^2}{c}$
التناظر	القطع متناظر حول محوريه ومركزه	

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 122 رقم 1 : لتكن: $9y^2 - 25x^2 = 225$ معادلة قطع زائد، أوجد:

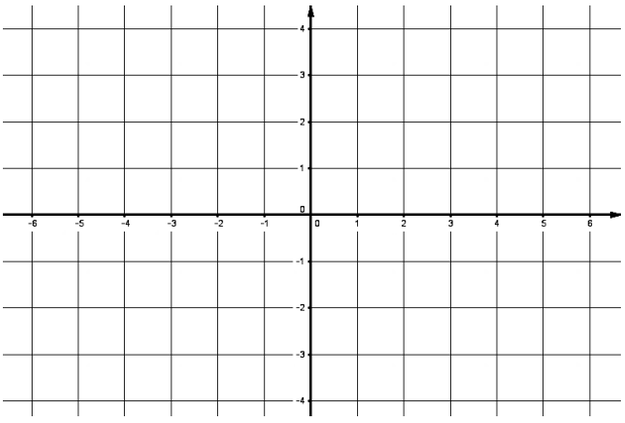
ⓐ رأسي القطع الزائد.

ⓑ البؤرتين.

ⓒ معادلتي دليلي القطع.

ⓓ طول كل من المحورين.

ⓔ معادلة كل من الخطين المقاربين ثم ارسم شكلًا تخطيطيًّا للقطع.



كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 122 رقم 2 :

أوجد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه $F_1(-4\,,0)\,,F_2(4\,,0)$ ورأساه $A_1(-2\,,0)\,,A_2(2\,,0)$، ثم أوجد معادلة كلّ من خطيه المقاربين، وارسم شكلًا تقريبيًّا للقطع.

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 123 رقم 3 :

أوجد معادلة القطع الزائد الذي إحدى بؤرتيه $F(\sqrt{41}\,,0)$ ومعادلة أحد خطية المقاربين $y=\frac{4}{5}x$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 124 رقم 4 :

أوجد معادلة القطع الزائد الذي أحد رأسيه $\left(0, \frac{5}{4}\right)$ ويمر بالنقطة $\left(-\sqrt{3}, -\frac{5}{2}\right)$

كراسة التمارين صـ 46 : البنود الموضوعية

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

تعريف:

القطع المخروطي هو مجموعة كل النقاط في المستوى الإحداثي حيث تكون نسبة بعد كل منها من نقطة ثابتة (البؤرة) إلى بعدها عن مستقيم ثابت (الدليل) في نفس المستوى تساوي مقدارًا ثابتًا.

إذا $e = 1$ يكون القطع المخروطي **قطعًا مكافئًا**

إذا $e < 1$ يكون القطع المخروطي **قطعًا ناقصًا**

إذا $e > 1$ يكون القطع المخروطي **قطعًا زائدًا**

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 129 رقم 1 :

حدد نوع القطع في كل مما يلي ثم أوجد معادلته

ⓐ اختلافه المركزي $(e = 1)$ وبؤرته $F(-1,0)$

ⓑ اختلافه المركزي $\left(e = \frac{4}{5}\right)$ وإحدى بؤرتيه $F(-4\sqrt{2}\,,0)$

ⓒ اختلافه المركزي $(e = \sqrt{3})$ ومعادلة أحد دليليه $x = \frac{1}{3}$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 131 رقم 2 :

أوجد الاختلاف المركزي لكل قطع مما يلي حيث معادلته:

ⓐ $x^2 + \frac{y^2}{25} = 1$

ⓑ $24y^2 = 600 + 25x^2$

كتاب الطالب مثال صـ 131 رقم 3 :

أوجد طول المحور الأكبر للقطع الناقص الذي اختلافه المركزي $\left(e = \frac{\sqrt{5}}{3}\right)$ وطول محوره الأصغر 4 وحدات.

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 131 رقم 3 :

أوجد طول المحور القاطع للقطع الزائد الذي اختلافه المركزي $(e = 2)$ وطول محوره المرافق 6 وحدات.

كراسة التمارين صـ 49 : البنود الموضوعية

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

(8 – 1) المتغيرات العشوائية المتقطعة

Discrete Random Variables

المتغيّر العشوائي *Random Variable*

تعريف :المتغير العشوائي

هو دالة مجالها فضاء العينة لتجربة عشوائية s ومجالها المقابل هو $\mathbb{R}$ ومداها مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$

حيث $X : S \longrightarrow \mathbb{R}$

(X المتغير العشوائي لتجربة عشوائية ، S فضاء العينة ، $\mathbb{R}$ مجموعة الأعداد الحقيقية) .

مثال توضيحي :

عند إلقاء قطعة نقود متماثلة مرتين متتاليتين فإن فضاء العينة يكون كالتالي :

S = { (H ،H) ، (H ،T)، (T ، H) ، (T ، T) }

اذا اقتصرت دراستنا على عدد الصور التي ظهرت في كل عنصر من عناصر فضاء العينة ف والتي هي كالتالي : 0 ، 1 ، 1 ، 2 على الترتيب

نكون قد أقرنّا كل عنصر من عناصر فضاء العينة بعدد حقيقي كما هو موضّح في الجدول التالي :

عناصر فضاء العينة	عدد الصور في كل عنصر
(H , H)	2
(H , T)	1
(T , H)	1
(T , T)	0

سوف نرمز المتغير العشوائي بالرمز X وعليه فإن مدى X = { 0 ، 1، 2 }

ففي المثال السابق نلاحظ ما يلي :

(1) **مجال المتغير العشوائي X هو** S = { (H ،H) ، (H ،T)، (T ، H) ، (T ، T) }

(2) **المجال المقابل للمتغير العشوائي هو $\mathbb{R}$**

(3) **المدي للمتغير العشوائي X هو { 0 ، 1 ، 2 } ويرمز له بالرمز X (s)**

يوجد عدة أنواع من المتغيرات العشوائية ، سوف ندرس نوعين فقط منها وهما :

المتغيرات العشوائية المتقطعة (المنفصلة).

المتغيرات العشوائية المتصلة (المستمرة).

سوف نستخدم X ، Y ، ... للرمز للمتغيرات العشوائية وكذلك سنستخدم x , y لقيم هذه المتغيرات

تعريف المتغيرات العشوائية المتقطع

يكون المتغير العشوائي X متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا إذا كانت مجموعة القيم الممكنة له (المدى) $X(s)$: مجموعة متقطعة أي قابلة للعد ، من <u>الأعداد الحقيقية</u> سواء كانت منتهية أم غير منتهية.

مثال (1) صـ 142

في تجربة إلقاء قطعة نقود متماثلة مرتين متتاليتين ، أوجد مجموعة القيم للمتغيرات العشوائية التالية وحدّد فيما إذا كانت متغيرات عشوائية متقطعة أم لا :

(أ) المتغير العشوائي X الذي يمثل عدد االصور

(ب) المتغير العشوائي Y الذي يمثل مربع عدد الصور

(جـ) المتغير العشوائي Z الذي يمثل عدد الكتابات مطروحًا منه عدد الصور

الحل

حاول أن تحل (1) صـ 143

في تجربة إلقاء قطعة نقود متماثلة مرتين متتاليتين ، أوجد مجموعة القيم للمتغيرات العشوائية التالية وحدّد فيما إذا كانت متغيرات عشوائية متقطعة أم لا :

(أ) المتغير العشوائي X الذي يمثل عدد الكتابات

(ب) المتغير العشوائي Y الذي يمثل مكعب عدد الكتابات

(جـ) المتغير العشوائي Z الذي يمثل عدد الكتابات مطروحًا منه عدد 2

الحل

(2) في تجربة إلقاء قطعة نقود متماثلة ثلاث مرات متتالية ، أوجد مجموعة القيم للمتغيرات العشوائية التالية وحدّد فيما إذا كانت متغيرات عشوائية متقطعة أم لا :

(أ) المتغير العشوائي X الذي يمثل عدد الكتابات

(ب) المتغير العشوائي Y الذي يمثل ربع عدد الكتابات

(جـ) المتغير العشوائي Z الذي يمثل عدد الكتابات مضافا له 1

الحل

دالة التوزيع الاحتمالي *Probability Distribution Function*

تعريف: دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي س

إذا كان X متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا مداه $\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$

فإن دالة التوزيع الاحتمالي f تعّرف كالتالي :

$$f(x_i) = p\,(x = x_i) \quad , i = 1, 2, 3, \ldots$$

ويمكن تمثيلها بالجدول التالي :

x_i	x_1	x_2	.....
$f(x_i)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	.....

أي أن مجموعة النقاط في المستوي الإحداثي التي تمثل الأزواج المرتبة $(x_i, p(x_i))$ تسمي دالة التوزيع الاحتمالي .

مثال (2) ص 143

في تجربة رمي حجر نرد مرة واحدة، المتغير العشوائي X يعبّر عن:

الجذر التربيعي للعدد الظاهر على الوجه العلوي عندما يكون الجذر التربيعي عددًا كليًّا والصفر لغير ذلك.

فأوجد:

(a)فضاء العينة (s) وعدد عناصر n(s) .

(b) مدى المتغير العشوائي X .

(c) مدى المتغير العشوائي (s) : $f(x_i) = p\,(X = x_1)$

(d) دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X .

الحـــــــل

حاول أن تحل (2) ص 144

في تجربة رمي حجر نرد مرة واحدة، المتغير العشوائي X يعبّر عن:

« مربع العدد الظاهر مطروحًا منه 1 عندما يكون العدد الظاهر أصغر من 4 ، و -1 لغير ذلك »

فأوجد:

(a)فضاء العينة (s) وعدد عناصر n(s) .

(b) مدى المتغير العشوائي X .

(c) مدى المتغير العشوائي (s) : $f(x_i) = p\ (X = x_1)$

(d) دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X .

مثال (3) ص- 145

عند إلقاء قطعة نقود ثلاث مرات متتالية، إذا كان المتغير العشوائي X عدد الكتابات « يعبّر عن الكتابات »

فأوجد:

(a)فضاء العينة (s) وعدد عناصر n(s) .

(b) مدى المتغير العشوائي X .

(c) مدى المتغير العشوائي (s) : $f(x_i) = p\ (X = x_1)$

(d) دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X .

حاول أن تحل (3) ص 146

عند إلقاء قطعة نقود ثلاث مرات متتالية، إذا كان المتغير العشوائي X عدد الكتابات « يعبّر عن الصورة » فأوجد:

(a)فضاء العينة (s) وعدد عناصر n(s) .

(b) مدى المتغير العشوائي X .

(c) مدى المتغير العشوائي (s) : $f(x_i) = p\ (X = x_1)$

(d) دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X .

المجموعة A تمارين مقالية

(1) في تجربة إلقاء قطعة نقود مرتين متتاليتين، إذا كان المتغيّر العشوائي X يعبر عن عدد الصور فأوجد:

(a) فضاء العينة (s) وعدد عناصر ه $n(s)$

(b) مدى المتغير العشوائي X

(c) احتمال وقوع كل عنصر من عناصر فضاء العينة (s) : $f(x_i) = P\,(X = x_i)$

(d) دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X

الحـــــــــل:

مثال (4) ص 146

إذا كانت دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X هي :

x	-2	1	2	3
$f(x)$	0.3	0.1	k	0.2

(a) فأوجد قيمة k

(b) أرسم بيان دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X

.....

حاول أن تحل (4) ص 146

إذا كانت دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X هي :

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	0.35	0.15	0.1	0.2	k

(a) فأوجد قيمة k

(b) أرسم بيان دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X

مثال (5) ص 146

إذا كان x **متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا مداه هو:** $\{ -2 , -1 , 0 , 1 \}$ **وكان** $f(-2) = f(-1) = 0.3 \quad , f(1)=0.2$

أوجد $f(0)$ **، ثم اكتب دالة التوزيع الاحتمالي** f **للمتغير العشوائي** X

الحـــــــل

.....

حاول أن تحل (5) ص 146

إذا كان x **متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا مداه هو:** $\{ 0, 1 , 2 , 3 \}$

وكان $f(0) = 0.1 \quad , \quad f(1)=0.6 \quad , \quad f(2) =0.15$

أوجد $f(3)$ **، ثم اكتب دالة التوزيع الاحتمالي** f **للمتغير العشوائي** X

الحـــــــل

(3) إذا كانت دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X هي :

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	0.1	0.3	k	0.2	0.3

(a) فأوجد قيمة k

.....

(4) إذا كان x متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا مداه هو: $\{1, 2, 3, 4\}$ وكان $f(1)=0.1$, $f(2) = 0.4$, $f(3) = 0.2$

أوجد $f(2)$ ، ثم اكتب دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X

التوقع (الوسط) والتباين للمتغيرات العشوائية المتقطعة

Expectation and Variance for Discrete Random Variables

التوقع (الوسط) μ: هو القيمة التي تتجمع حولها القيم الممكنة للمتغير العشوائي المتقطع .

التباين σ^2 : هو القيمة التي تقيس تشتت قيم المتغير العشوائي المتقطع عن قيمته المتوسطة .

أولًا :التوقع (الوسط) للمتغير العشوائي المتقطع:

Expectation for Discrete Random Variable

تعريف :

إذا كان X متغيرًا عشوائيًّا له دالة التوزيع الاحتمالي f

مدى X : $X(s) = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots\}$

فإن (μ) التوقع للمتغير العشوائي X يعطى بالصيغة التالية:

$$\mu = \sum x_i f(x_i)$$

$$\mu = x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2) + x_3 f(x_3) + \cdots$$

مثال (7) صـ (150)

إذا كانت دالة التوزيع الأحتمالي f للمتغير العشوائي X هي :

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	$\frac{3}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{6}{35}$	$\frac{3}{35}$	$\frac{1}{35}$

أوجد التوقع للمتغير μ العشوائي X

الحـــــــــل :

حاول أن تحل (7) صـ (150)

إذا كانت دالة التوزيع الأحتمالي f للمتغير العشوائي X هي :

x	0	1	2
$f(x)$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$

أوجد التوقع للمتغير μ العشوائي X

الحـــــــــل :

.....

التباين للمتغير العشوائي المتقطع *Variance for Discrete Random Variable*

إذا كان X متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا له دالة التوزيع الاحتمالي f فإن التباين للمتغير العشوائي يعطى بالصيغة:

التباين : $\sigma^2 = \sum(x_i^2 f(x_i) - \mu^2$ **حيث μ هو التوقع**

الانحراف المعياري : $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$ **(ا لجذر التربيعي الموجب للتباين)**

مثال (8) صـ (151)

إذا كانت دالة التوزيع الأحتمالي f للمتغير العشوائي X هي :

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	0.43	0.29	0.17	0.09	0.02

أوجد :

(a) التوقع (μ)

(b) التباين (σ^2) **(c) االانحراف المعياري (σ)**

الحـــــــــل:

حاول أن تحل (8) صـ (151)

إذا كانت دالة التوزيع الأحتمالي f للمتغير العشوائي X هي :

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	0.2	0.1	0.3	0.1	0. 3

أوجد :

(a) التوقع (μ)

(b) التباين (σ^2) (c) االانحراف المعياري (σ)

الحـــــــــل:

(6) إذا كانت دالة التوزيع الأحتمالي f للمتغير العشوائي X هي :

x	0	1	2	3
$f(x)$	0.2	0.3	0.4	0.1

أوجد التوقع للمتغير μ العشوائي X

الحـــــــــل :

---

(7) إذا كانت دالة التوزيع الأحتمالي f للمتغير العشوائي X هي :

x	7	8	9	10
$f(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$

أوجد :

(c) التوقع (μ)

(d) التباين (σ^2) **(c) االانحراف المعياري (σ)**

الحـــــــــل:

دالة التوزيع التراكمي لمتغير عشوائي متقطع

Cumulative Distribution Function for a Discrete Random Variable

درسنا بالتفصيل دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي المتقطع X

وبيّنا أن دالة التوزيع الاحتمالي f تحقق الشرطين:

(a) $0 \le f(x) \le 1$ (b) $\sum f(x_i) = 1$

تعريف :

دالة التوزيع التراكمي F للمتغير العشوائي المتقطع عند القيمة a هي احتمال وقوع المتغير العشوائي X بحيث يكون X أصغر من أو يساوي a أي أن :

$$F(a) = P(X \le a)$$

لاحظ أن مجال دالة التوزيع التراكمي F هو $\mathbb{R}$ وأن المجال المقابل يساوي المدى $[0, 1]$

مثال (9) صـ (152)

إذا كانت دالة التوزيع الأحتمالي f للمتغير العشوائي X هي :

x	3	4	5
$f(x)$	0.5	0.3	0.2

إذا كانت F دالة التوزيع التراكمي للمتغير العشوائي X

فأوجد : $F(2)$, $F(3)$, $F(4)$, $F(4.5)$, $F(5)$, $F(7)$

الحل:

حاول أن تحل (9) صـ (152)

إذا كانت دالة التوزيع الأحتمالي f للمتغير العشوائي X هي :

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	0.43	0.29	0.17	0. 09	0. 02

إذا كانت F دالة التوزيع التراكمي للمتغير العشوائي X

فأوجد : $F(0)$, $F(1)$, $F(3.5)$, $F(4)$, $F(5)$, $F(8)$

الحـــــــل:

بعض خواص دالة التوزيع التراكمي للمتغير العشوائي X :

(a) $P(X > 0) = 1 - P(X \leq a) = 1 - F(a)$

(b) $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$

(c) $P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X < b) = P(a \leq X \leq b)$

مثال (10) صـ (154)

الجدول التالي يبيّن بعض قيم دالة التوزيع التراكمي F للمتغير العشوائي المتقطع X .

x	1	2	3	5
$F(x)$	0.15	0.2	0.6	1

أوجد :

(a) $P(1 < x \leq 3)$

(b) $P(2 \leq x < 5)$

(c) $P(x > 2)$

الحل:

.....

حاول أن تحل (10) صـ (155)

الجدول التالي يبيّن بعض قيم دالة التوزيع التراكمي F للمتغير العشوائي المتقطع X .

x	1	2	3	4
$F(x)$	0.25	0.40	0.65	1

أوجد :

(a) $P(2 < x < 4)$

(c) $P(x > 3)$

الحل:

(8)إذا كانت دالة التوزيع الأحتمالي f للمتغير العشوائي X هي :

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	0.2	0. 15	0. 1	0.25	0.3

إذا كانت F دالة التوزيع التراكمي للمتغير العشوائي X

فأوجد : $F(0)$, $F(1)$, $F(2)$, $F(3)$, $F(3.5)$, $F(4)$, $F(5)$

الحل:

.....

(9) الجدول التالي يبيّن بعض قيم دالة التوزيع التراكمي F للمتغير العشوائي المتقطع X .

x	-1	3	5	7
$F(x)$	0.1	0.45	0.7	1

أوجد :

(a) $P(-1 < x < 5)$
(b) $P(3 < x < 7)$
(c) $P(x > 3)$

الحل:

(8-2) المتغيرات العشوائية المتصلة (المستمرة)
Continuous Random Variables

تعريف :المتغير العشوائي المتصل

هو المتغير التي تكون مجموعة القيم الممكنة له عبارة عن فترة من الأعداد الحقيقية أي أن مدى المتغير العشوائي المتصل $X = \{ x: a \le x \le b \}$ وهي مجموعة غير قابلة للعد.

أمثلة عن المتغيرات العشوائية المتصلة:

- **كتلة مجموعة طلاب بالكيلوجرام أعمارهم من** *(15-20)* **سنة**
- **درجة حرارة جسم الإنسان خلال يوم كامل.**
- **المسافة المقطوعة لسيارة خلال وحدة الزمن.**
- **كمية الحليب التي تنتجها البقرة في اليوم باللتر.**

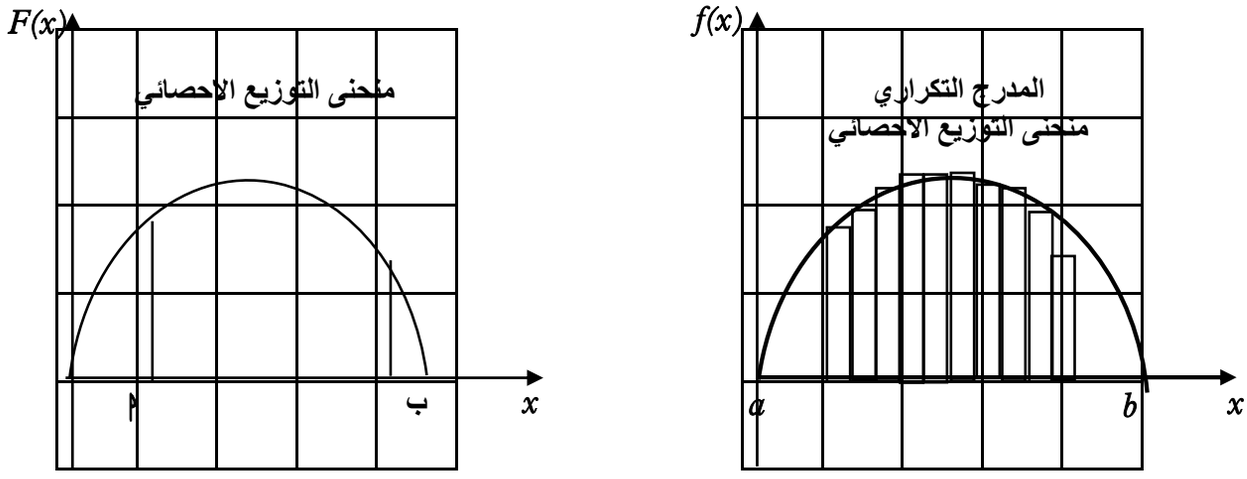
التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المتصل (المستمر)

التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المتصل

يمكن تمثيل بيانات المتغير العشوائي الكمي المستمر على شكل مدرج تكراري نسبي

شكل هذا المدرج هو أقرب وصف لمنحنى التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المتصل

كلما صغر طول الفئة حصلنا على رسم أدق للمنحنى الخاص بدالة احتمال المتغير المستمر كما بالشكل



المساحة تحت المنحنى هي عبارة عن مجموع الاحتمالات الكلية للمتغير العشوائي المتصل

لذلك فإن هذه المساحة تساوي الواحد الصحيح

تسمى الدالة $f(x)$ **بدالة كثافة الاحتمال للمتغير العشوائي المتصل (المستمر).**

خواص دالة كثافة الاحتمال د (س)

1- $f(x)$ هي دالة متصلة على مجالها

2 - $f(x) \leq 0$ لكل قيم س التي تنتمي لمجال الدالة

3- قيمة المساحة المحددة بمنحنى الدالة $f(x)$ ومحور السينات تساوي الواحد الصحيح

4-يمكن ايجاد الاحتمال $P\ (a \leq x \leq b)$ بحساب المساحة تحت المنحنى ل بين القيمة a, b من الشكل السابق

5- تنعدم المساحة المظللة في الشكل السابق إذا كان $a=b$

أي أن لأي متغير عشوائي متصل فإن $P\ (X = a)$

مثال (1) صـ (161)

إذا كان X متغيرًا عشوائيًّا متصلًا ودالة كثافة الاحتمال له هي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} : 1 \leq x \leq 5 \\ 0 \quad \text{في ماعد ذلك} \end{cases}$$

$(a)\ P\ (1 < x \leq 5)$ $\qquad$ $(b)\ P\ (X < 3)$

$(c)\ P\ (X \geq 1.5)$ $\qquad$ $(d)\ P\ (X = 3)$

الحـــــــل:

حاول أن تحل (1) صـ (162)

إذا كان X متغيرًا عشوائيًّا متصلًا ودالة كثافة الاحتمال له هي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} : -3 \leq x \leq 3 \\ 0 \quad \text{في ماعد ذلك} \end{cases}$$

$(a)\ P\ (X \leq 2)$

$(b)\ P\ (-1 < X < 2)$

$(c)\ P\ (-1.5X < X < 2.5)$

$(d)\ P\ (X = 0)$

الحـــــــل:

بند(2-8) المتغيرات العشوائية المتصلة(المستمرة)

(1) إذا كان X متغيرًا عشوائيًّا متصلًا ودالة كثافة الاحتمال له هي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5} : & 0 \leq x \leq 5 \\ 0 : & \text{في ماعد ذلك} \end{cases}$$

$(a)\ P(0 \leq x \leq 5)$ $(b) P(X = 3)$ $(c)\ P(X \leq 2)$ $(d)\ P(X > 2)$

الحـــــــــل:

مثال (2) صـ (161)

إذا كان X متغيرًا عشوائيًّا متصلًا ودالة كثافة الاحتمال له هي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}x: 0 \leq x \leq 4 \\ 0 \quad \text{في ماعد ذلك} \end{cases}$$

$(a)\ P\ (\ 0 \leq x \leq 4\ )$ $\qquad$ $(b)\ P\ (\ X \leq 2\ )$ $\qquad$ $(c)\ P\ (\ X > 2\ )$

الحل:

حاول أن تحل (1) صـ (162)

إذا كان X متغيرًا عشوائيًّا متصلًا ودالة كثافة الاحتمال له هي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x : & 0 \leq x \leq 2 \\ 0 : & \text{في ماعد ذلك} \end{cases}$$

$(a)\ P\ (\ x < 1\ )$ $\qquad$ $(b)\ P\ (\ X \geq 1\ )$ $\qquad$ $(c)\ P\ (\ X = 1\ )$

الحـــــــل:

(2) إذا كان X متغيرًا عشوائيًّا متصلًا ودالة كثافة الاحتمال له هي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} : & 2 \leq x \leq 4 \\ 0 : & \text{في ماعد ذلك} \end{cases}$$

$(a)\ P\ (2 \leq x \leq 4)$ $(b)\ P\ (X \geq 2.5)$

الحل:

.....

(3) إذا كان X متغيرًا عشوائيًّا متصلًا ودالة كثافة الاحتمال له هي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{9}x : & 0 \leq x \leq 3 \\ 0 : & \text{في ماعد ذلك} \end{cases}$$

$(a)\ P\ (0 \leq x \leq 3)$ $(b) P(X < 1)$ $(c)\ P\ (X \geq 1)$

الحل:

التوزيع الاحتمالي المنتظم لمتغير عشوائي متصل (مستمر)

Regular Probability Distribution for a Random Continuous Variable

تعريف:

دالة كثافة الاحتمال للتوزيع الاحتمالي المنتظم على [a , b] هي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} : & a \le x \le b \\ 0 : & \text{في ماعد ذلك} \end{cases}$$

- **التوقع (الوسط) للتوزيع الاحتمالي المنتظم هو:** $\mu = \frac{a+b}{2}$
- **التباين للتوزيع الاحتمالي المنتظم هو :** $\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$

مثال (3) صـ (163)

لتكن الدالة : f

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} : & 0 \le x \le 3 \\ 0 : & \text{في ماعد ذلك} \end{cases}$$

(a) **أثبت أن الدالة هي دالة كثافة احتمال.**

(b) **أثبت أن الدالة** f **تتبع التوزيع الاحتمالي المنتظم.**

(c) **أوجد** $P(1 < X \le 3)$

(d) **أوجد التوقع والتباين للدالة** f

الحـــــــــل:

.....

حاول أن تحل (3) صـ (164)

لتكن الدالة : f

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} : & 1 \leq x \leq 3 \\ 0 : & \text{في ماعد ذلك} \end{cases}$$

(a) أثبت أن الدالة هي دالة كثافة احتمال.

(b) أثبت أن الدالة f تتبع التوزيع الاحتمالي المنتظم.

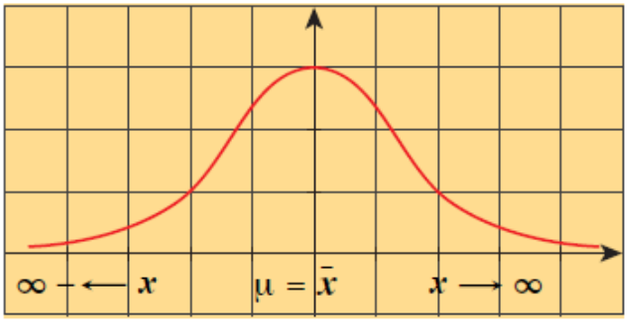
(c) أوجد $P\,(2 < X \leq 3)$

(d) أوجد التوقع والتباين للدالة f

الحل:

التوزيع الاحتمالي الطبيعي $N(\mu, \sigma^2)$

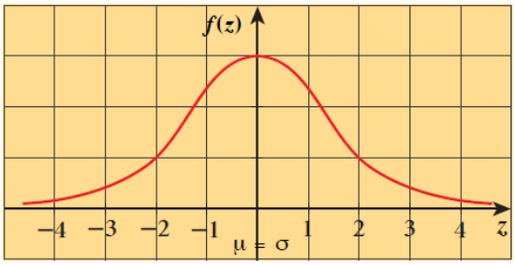
يعتبر التوزيع الاحتمالي الطبيعي من أهم التوزيعات الاحتمالية المتصلة وقد سبق أن درسنا منحنى التوزيع الطبيعي وخواصه والتي منها:



منحنى التوزيع الطبيعي $N(\mu, \sigma^2)$

- المتوسط الحسابي = الوسيط = المنوال.
- يكون بيان المنحنى على شكل ناقوس (جرس) متماثل حول محوره $(\bar{x} = \mu)$
- يمتد المنحنى من طرفيه إلى $-\infty$ **إلي** ∞ (لا يقطع محور السينات) .
- المساحة تحت المنحنى تساوي الواحد الصحيح (وحدة مساحة)
- المستقيم الرأسي $\bar{x} = \mu$ يقسم المساحة تحت المنحنى إلى قطعتين متماثلتين مساحة كل منهما تساوي نصف (نصف وحدة مساحة) .

التوزيع الطبيعي المعياري $N(0, 1)$



منحنى التوزيع الطبيعي $N(\mu, \sigma^2)$

إذا كان المتوسط الحسابي للتوزيع الطبيعي $\mu = 0$ والانحراف المعياري $\sigma = 1$ يسمى التوزيع الطبيعي **بالتوزيع الطبيعي المعياري**.

الشكل المرسوم يمثل بيان منحنى التوزيع الطبيعي المعياري.

نعلم أن منحنى التوزيع الطبيعي يتحدد بكل من التوقع μ والتباين لها σ^2 ونظرًا لاختلاف قيم من توزيع لآخر فإننا نقوم بتحويل أي توزيع طبيعي إلى توزيع طبيعي معياري وفق التحويل $z = \frac{a-\mu}{\sigma}$

حساب الاحتمالات للتوزيع الطبيعي المعياري P (z)

- **إذا كانت $z \geq a, z \leq a$ حيث $z \geq 0$ نستخدم جدول z رقم (4) .**
- **إذا كانت $z \geq a, z \leq a$ حيث $z > 0$ نستخدم جدول z رقم (5) .**

مثال (4) صـ (166)

إذا كان z هو التوزيع الطبيعي المعياري للمتغير العشوائي X فأوجد:

$(a)\ \ P\,(z \le 2.18)$ $\qquad$ $(b)\ P\,(z \ge 2.43)$ $\qquad$ $(c)\ \ P\,(1.4 \le z \le 2.6)$

الحـــــــل:

.....

مثال (4) صـ (166)

إذا كان z هو التوزيع الطبيعي المعياري للمتغير العشوائي X فأوجد:

$(a)\ \ P\,(z \le 0.95)$ $\qquad$ $(b)\ P\,(z > 0.71)$ $\qquad$ $(c)\ \ P\,(1.4\,5 \le z \le 3.26)$

الحـــــــل:

مثال (5) صـ (166)

إذا كان z هو التوزيع الطبيعي المعياري للمتغير العشوائي X فأوجد:

$(a)\ P(z \leq -0.55)$ $(b)\ P(-2.2 \leq z \geq -1.6)$ $(c)\ P(-1.3 \leq z \leq 0.28)$

الحل:

.....

حاول أن تحل (5) صـ (167)

إذا كان z هو التوزيع الطبيعي المعياري للمتغير العشوائي X فأوجد:

$(a)\ P(z \leq -0.12)$ $(b)\ P(-3.2 \leq z \geq -0.1)$ $(c)\ P(-5.26 \leq z \leq 0.69)$

الحل:

الاحتمالات في توزيع ذات الحدين: $f(x)$

		P										
n	x	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95
2	0	0.902	0.810	0.640	0.490	0.360	0.250	0.160	0.090	0.040	0.010	0.002
	1	0.095	0.180	0.320	0.420	0.480	0.500	0.480	0.420	0.320	0.180	0.095
	2	0.002	0.010	0.040	0.090	0.160	0.250	0.360	0.0490	0.0640	0.0810	0.0902
3	0	0.857	0.729	0.512	0.343	0.216	0.125	0.064	0.027	0.008	0.001	
	1	0.135	0.243	0.384	0.441	0.432	0.375	0.288	0.189	0.096	0.027	0.007
	2	0.007	0.027	0.096	0.189	0.288	0.375	0.432	0.441	0.384	0.243	0.135
	3		0.001	0.008	0.027	0.064	0.125	0.216	0.343	0.512	0.729	0.857
4	0	0.815	0.656	0.410	0.240	0.130	0.062	0.026	0.008	0.002		
	1	0.171	0.292	0.410	0.412	0.346	0.250	0.154	0.076	0.026	0.004	
	2	0.014	0.049	0.154	0.265	0.346	0.375	0.346	0.265	0.154	0.049	0.014
	3		0.004	0.026	0.076	0.154	0.250	0.346	0.412	0.410	0.292	0.171
	4			0.002	0.008	0.026	0.062	0.130	0.240	0.410	0.656	0.815
5	0	0.774	0.590	0.328	0.168	0.078	0.031	0.010	0.002			
	1	0.204	0.328	0.410	0.360	0.259	0.156	0.077	0.028	0.006		
	2	0.021	0.073	0.205	0.309	0.346	0.312	0.230	0.132	0.051	0.008	0.001
	3	0.001	0.008	0.051	0.132	0.230	0.312	0.346	0.309	0.205	0.073	0.021
	4			0.006	0.028	0.077	0.156	0.259	0.360	0.410	0.328	0.204
	5				0.002	0.010	0.031	0.078	0.168	0.328	0.590	0.774
6	0	0.735	0.531	0.262	0.118	0.047	0.016	0.001				
	1	0.232	0.354	0.393	0.303	0.187	0.094	0.004	0.010	0.002		
	2	0.031	0.098	0.246	0.324	0.311	0.234	0.037	0.060	0.015	0.001	
	3	0.002	0.015	0.082	0.185	0.276	0.312	0.138	0.185	0.082	0.015	0.002
	4		0.001	0.015	0.060	0.138	0.234	0.276	0.324	0.246	0.098	0.031
	5			0.002	0.010	0.037	0.094	0.311	0.303	0.393	0.354	0.232
	6				0.001	0.004	0.016	0.187	0.118	0.262	0.531	0.735
								0.047				
7	0	0.698	0.478	0.210	0.082	0.028	0.008					
	1	0.257	0.372	0.367	0.247	0.131	0.055	0.002	0.004			
	2	0.041	0.124	0.275	0.318	0.261	0.164	0.017	0.025	0.004		
	3	0.004	0.023	0.115	0.227	0.290	0.273	0.077	0.097	0.029	0.003	
	4		0.003	0.029	0.097	0.194	0.273	0.194	0.227	0.115	0.023	0.004
	5			0.004	0.025	0.077	0.164	0.290	0.318	0.275	0.124	0.041
	6				0.004	0.017	0.055	0.261	0.247	0.367	0.372	0.257
	7					0.002	0.008	0.131	0.082	0.210	0.478	0.698
								0.028				

الاحتمالات في توزيع ذات الحدين: $f(x)$

		P										
n	x	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95
8	0	0.663	0.430	0.168	0.058	0.017	0.004	0.001				
	1	0.279	0.383	0.336	0.198	0.090	0.031	0.008	0.001			
	2	0.051	0.149	0.294	0.296	0.209	0.109	0.041	0.010	0.001		
	3	0.005	0.033	0.147	0.254	0.279	0.219	0.124	0.047	0.009		
	4		0.005	0.046	0.136	0.232	0.273	0.232	0.136	0.046	0.005	
	5			0.009	0.047	0.124	0.219	0.279	0.254	0.147	0.033	0.005
	6			0.001	0.010	0.041	0.109	0.209	0.296	0.294	0.149	0.051
	7				0.001	0.008	0.031	0.090	0.198	0.336	0.383	0.279
	8					0.001	0.004	0.017	0.058	0.168	0.430	0.663
9	0	0.630	0.387	0.134	0.040	0.010	0.002					
	1	0.299	0.387	0.302	0.156	0.060	0.018	0.004				
	2	0.063	0.172	0.302	0.267	0.161	0.070	0.021	0.004			
	3	0.008	0.045	0.176	0.267	0.251	0.164	0.074	0.021	0.003		
	4	0.001	0.007	0.065	0.172	0.251	0.246	0.167	0.074	0.017	0.001	
	5		0.001	0.017	0.074	0.167	0.246	0.251	0.172	0.066	0.007	0.001
	6			0.003	0.021	0.074	0.164	0.251	0.267	0.176	0.045	0.008
	7				0.004	0.021	0.070	0.161	0.267	0.302	0.172	0.063
	8					0.004	0.018	0.060	0.156	0.302	0.387	0.299
	9						0.002	0.010	0.040	0.134	0.387	0.630
10	0	0.599	0.349	0.107	0.028	0.006	0.001					
	1	0.315	0.387	0.268	0.121	0.040	0.010	0.002				
	2	0.075	0.194	0.302	0.233	0.121	0.044	0.011	0.001			
	3	0.010	0.057	0.201	0.267	0.215	0.117	0.042	0.009	0.001		
	4	0.001	0.011	0.088	0.200	0.251	0.205	0.111	0.037	0.006		
	5		0.001	0.026	0.103	0.201	0.246	0.201	0.103	0.026	0.001	
	6			0.006	0.037	0.111	0.205	0.251	0.200	0.088	0.011	0.001
	7			0.001	0.009	0.042	0.117	0.215	0.267	0.201	0.057	0.010
	8				0.001	0.011	0.044	0.121	0.233	0.302	0.194	0.075
	9					0.002	0.010	0.040	0.121	0.268	0.387	0.315
	10						0.001	0.006	0.028	0.107	0.349	0.599

الاحتمالات في توزيع ذات الحدين: $f(x)$

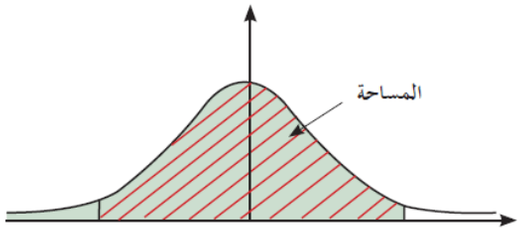
		P										
n	x	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95
11	0	0.569	0.314	0.086	0.020	0.004						
	1	0.329	0.384	0.236	0.093	0.027	0.005	0.001				
	2	0.087	0.213	0.295	0.200	0.089	0.027	0.005	0.001			
	3	0.014	0.071	0.221	0.257	0.177	0.081	0.023	0.004			
	4	0.001	0.016	0.111	0.220	0.236	0.161	0.070	0.017	0.002		
	5		0.002	0.039	0.132	0.221	0.226	0.147	0.057	0.010		
	6			0.010	0.057	0.147	0.226	0.221	0.132	0.039	0.002	
	7			0.002	0.017	0.070	0.161	0.236	0.220	0.111	0.016	0.001
	8				0.004	0.023	0.081	0.177	0.257	0.221	0.071	0.014
	9				0.001	0.005	0.027	0.089	0.200	0.295	0.213	0.087
	10					0.001	0.005	0.027	0.093	0.236	0.384	0.329
	11							0.004	0.020	0.086	0.314	0.569
12	0	0.540	0.282	0.069	0.014	0.002						
	1	0.341	0.377	0.206	0.071	0.017	0.003					
	2	0.099	0.230	0.283	0.168	0.064	0.016	0.002				
	3	0.017	0.085	0.236	0.240	0.142	0.054	0.012	0.001			
	4	0.002	0.021	0.133	0.231	0.213	0.121	0.042	0.008	0.001		
	5		0.004	0.053	0.158	0.227	0.193	0.101	0.029	0.003		
	6			0.016	0.079	0.177	0.226	0.177	0.079	0.016		
	7			0.003	0.029	0.101	0.193	0.227	0.158	0.053	0.004	
	8			0.001	0.008	0.042	0.121	0.213	0.231	0.133	0.021	0.002
	9				0.001	0.012	0.054	0.142	0.240	0.236	0.085	0.017
	10					0.002	0.010	0.064	0.168	0.283	0.230	0.099
	11						0.003	0.017	0.071	0.206	0.377	0.341
	12							0.002	0.014	0.069	0.282	0.540

الاحتمالات في توزيع ذات الحدين: $f(x)$

		P										
n	x	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95
13	0	0.513	0.254	0.055	0.010	0.001						
	1	0.351	0.367	0.179	0.054	0.011	0.002					
	2	0.111	0.245	0.268	0.139	0.045	0.010	0.001				
	3	0.021	0.100	0.246	0.218	0.111	0.035	0.005	0.001			
	4	0.003	0.028	0.154	0.234	0.184	0.087	0.024	0.003			
	5		0.006	0.069	0.180	0.221	0.157	0.066	0.014	0.001		
	6		0.001	0.023	0.103	0.197	0.209	0.131	0.044	0.006		
	7			0.006	0.044	0.131	0.209	0.197	0.103	0.023	0.001	
	8			0.001	0.014	0.066	0.157	0.221	0.180	0.069	0.006	
	9				0.003	0.024	0.087	0.184	0.234	0.154	0.028	0.003
	10				0.001	0.006	0.035	0.111	0.218	0.246	0.100	0.021
	11					0.001	0.010	0.045	0.139	0.268	0.245	0.111
	12						0.002	0.011	0.054	0.179	0.367	0.351
	13							0.001	0.010	0.055	0.254	0.513
14	0	0.488	0.229	0.044	0.007	0.001						
	1	0.359	0.356	0.154	0.041	0.007	0.001					
	2	0.123	0.257	0.250	0.113	0.032	0.006	0.001				
	3	0.026	0.114	0.250	0.194	0.085	0.022	0.003				
	4	0.004	0.035	0.172	0.229	0.155	0.061	0.014	0.001			
	5		0.008	0.086	0.196	0.207	0.122	0.041	0.007			
	6		0.001	0.032	0.126	0.207	0.183	0.092	0.023	0.002		
	7			0.009	0.062	0.157	0.209	0.157	0.062	0.0009		
	8			0.002	0.023	0.092	0.183	0.207	0.126	0.032	0.001	
	9				0.007	0.041	0.122	0.207	0.196	0.086	0.008	
	10				0.001	0.014	0.061	0.155	0.229	0.172	0.035	0.004
	11					0.003	0.022	0.085	0.194	0.250	0.114	0.026
	12					0.001	0.006	0.032	0.113	0.250	0.257	0.123
	13						0.001	0.007	0.041	0.154	0.356	0.359
	14							0.001	0.007	0.044	0.229	0.488

الاحتمالات في توزيع ذات الحدين: $f(x)$

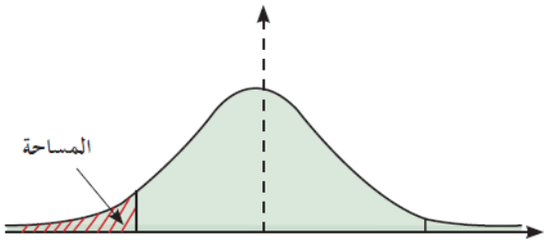
		P										
n	x	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95
15	0	0.463	0.206	0.035	0.005							
	1	0.366	0.343	0.132	0.031	0.005						
	2	0.135	0.267	0.231	0.092	0.022	0.003					
	3	0.031	0.129	0.250	0.170	0.063	0.014	0.002				
	4	0.005	0.043	0.188	0.219	0.127	0.042	0.007	0.001			
	5	0.001	0.010	0.103	0.206	0.186	0.092	0.024	0.003			
	6		0.002	0.043	0.147	0.207	0.153	0.061	0.012	0.001		
	7			0.014	0.081	0.177	0.196	0.118	0.035	0.003		
	8			0.003	0.035	0.118	0.196	0.177	0.081	0.014		
	9			0.001	0.012	0.061	0.153	0.207	0.147	0.043	0.002	
	10				0.003	0.024	0.092	0.186	0.206	0.103	0.010	0.001
	11				0.001	0.007	0.042	0.127	0.210	0.188	0.043	0.005
	12					0.002	0.014	0.063	0.170	0.250	0.129	0.031
	13						0.003	0.022	0.092	0.231	0.267	0.135
	14							0.005	0.031	0.132	0.343	0.366
	15								0.005	0.035	0.206	0.463



جدول التوزيع الطبيعي المعياري (z) لحساب قيم المساحات من اليسار

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646	0.83891
1.0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	0.88100	0.88298
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	0.89973	0.90147
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91309	0.91466	0.91621	0.91774
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785	0.92922	0.93056	0.93189
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408
1.6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352	0.95449
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080	0.96164	0.96246	0.96327
1.8	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995	0.97062
1.9	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	0.97441	0.97500	0.97558	0.97615	0.97670
2.0	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	0.97982	0.98030	0.98077	0.98124	0.98169
2.1	0.98214	0.98257	0.98300	0.98341	0.98382	0.98422	0.98461	0.98500	0.98537	0.98574
2.2	0.98610	0.98645	0.98679	0.98713	0.98745	0.98778	0.98809	0.98840	0.98870	0.98899
2.3	0.98928	0.98956	0.98983	0.99010	0.99036	0.99061	0.99086	0.99111	0.99134	0.99158
2.4	0.99180	0.99202	0.99224	0.99245	0.99266	0.99286	0.99305	0.99324	0.99343	0.99361
2.5	0.99379	0.99396	0.99413	0.99430	0.99446	0.99461	0.99477	0.99492	0.99506	0.99520
2.6	0.99534	0.99547	0.99560	0.99573	0.99585	0.99598	0.99609	0.99621	0.99632	0.99643
2.7	0.99653	0.99664	0.99674	0.99683	0.99693	0.99702	0.99711	0.99720	0.99728	0.99736
2.8	0.99744	0.99752	0.99760	0.99767	0.99774	0.99781	0.99788	0.99795	0.99801	0.99807
2.9	0.99813	0.99819	0.99825	0.99831	0.99836	0.99841	0.99846	0.99851	0.99856	0.99861
3.0	0.99865	0.99869	0.99874	0.99878	0.99882	0.99886	0.99889	0.99893	0.99896	0.99900
3.1	0.99903	0.99906	0.99910	0.99913	0.99916	0.99918	0.99921	0.99924	0.99926	0.99929
3.2	0.99931	0.99934	0.99936	0.99938	0.99940	0.99942	0.99944	0.99946	0.99948	0.99950
3.3	0.99952	0.99953	0.99955	0.99957	0.99958	0.99960	0.99961	0.99962	0.99964	0.99965
3.4	0.99966	0.99968	0.99969	0.99970	0.99971	0.99972	0.99973	0.99974	0.99975	0.99976
3.5	0.99977	0.99978	0.99978	0.99979	0.99980	0.99981	0.99981	0.99982	0.99983	0.99983
3.6	0.99984	0.99985	0.99985	0.99986	0.99986	0.99987	0.99987	0.99988	0.99988	0.99989
3.7	0.99989	0.99990	0.99990	0.99990	0.99991	0.99991	0.99992	0.99992	0.99992	0.99992
3.8	0.99993	0.99993	0.99993	0.99994	0.99994	0.99994	0.99994	0.99995	0.99995	0.99995
3.9	0.99995	0.99995	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99997	0.99997

جدول (4)



جدول التوزيع الطبيعي المعياري (z) لحساب قيم المساحات من اليسار

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
−3.9	0.00005	0.00005	0.00004	0.00004	0.00004	0.00004	0.00004	0.00004	0.00003	0.00003
−3.8	0.00007	0.00007	0.00007	0.00006	0.00006	0.00006	0.00006	0.00005	0.00005	0.00005
−3.7	0.00011	0.00010	0.00010	0.00010	0.00009	0.00009	0.00008	0.00008	0.00008	0.00008
−3.6	0.00016	0.00015	0.00015	0.00014	0.00014	0.00013	0.00013	0.00012	0.00012	0.00011
−3.5	0.00023	0.00022	0.00022	0.00021	0.00020	0.00019	0.00019	0.00018	0.00017	0.00017
−3.4	0.00034	0.00032	0.00031	0.00030	0.00029	0.00028	0.00027	0.00026	0.00025	0.00024
−3.3	0.00048	0.00047	0.00045	0.00043	0.00042	0.00040	0.00039	0.00038	0.00036	0.00035
−3.2	0.00069	0.00066	0.00064	0.00062	0.00060	0.00058	0.00056	0.00054	0.00052	0.00050
−3.1	0.00097	0.00094	0.00090	0.00087	0.00084	0.00082	0.00079	0.00076	0.00074	0.00071
−3.0	0.00135	0.00131	0.00126	0.00122	0.00118	0.00114	0.00111	0.00107	0.00104	0.00100
−2.9	0.00187	0.00181	0.00175	0.00169	0.00164	0.00159	0.00154	0.00149	0.00144	0.00139
−2.8	0.00256	0.00248	0.00240	0.00233	0.00226	0.00219	0.00212	0.00205	0.00199	0.00193
−2.7	0.00347	0.00336	0.00326	0.00317	0.00307	0.00298	0.00289	0.00280	0.00272	0.00264
−2.6	0.00466	0.00453	0.00440	0.00427	0.00415	0.00402	0.00391	0.00379	0.00368	0.00357
−2.5	0.00621	0.00604	0.00587	0.00570	0.00554	0.00539	0.00523	0.00508	0.00494	0.00480
−2.4	0.00820	0.00798	0.00776	0.00755	0.00734	0.00714	0.00695	0.00676	0.00657	0.00639
−2.3	0.01072	0.01044	0.01017	0.00990	0.00964	0.00939	0.00914	0.00889	0.00866	0.00842
−2.2	0.01390	0.01355	0.01321	0.01287	0.01255	0.01222	0.01191	0.01160	0.01130	0.01101
−2.1	0.01786	0.01743	0.01700	0.01659	0.01618	0.01578	0.01539	0.01500	0.01463	0.01426
−2.0	0.02275	0.02222	0.02169	0.02118	0.02068	0.02018	0.01970	0.01923	0.01876	0.01831
−1.9	0.02872	0.02807	0.02743	0.02680	0.02619	0.02559	0.02500	0.02442	0.02385	0.02330
−1.8	0.03593	0.03515	0.03438	0.03362	0.03288	0.03216	0.03144	0.03074	0.03005	0.02938
−1.7	0.04457	0.04363	0.04272	0.04182	0.04093	0.04006	0.03920	0.03836	0.03754	0.03673
−1.6	0.05480	0.05370	0.05262	0.05155	0.05050	0.04947	0.04846	0.04746	0.04648	0.04551
−1.5	0.06681	0.06552	0.06426	0.06301	0.06178	0.06057	0.05938	0.05821	0.05705	0.05592
−1.4	0.08076	0.07927	0.07780	0.07636	0.07493	0.07353	0.07215	0.07078	0.06944	0.06811
−1.3	0.09680	0.09510	0.09342	0.09176	0.09012	0.08851	0.08691	0.08534	0.08379	0.08226
−1.2	0.11507	0.11314	0.11123	0.10935	0.10749	0.10565	0.10383	0.10204	0.10027	0.09853
−1.1	0.13567	0.13350	0.13136	0.12924	0.12714	0.12507	0.12302	0.12100	0.11900	0.11702
−1.0	0.15866	0.15625	0.15386	0.15151	0.14917	0.14686	0.14457	0.14231	0.14007	0.13786
−0.9	0.18406	0.18141	0.17879	0.17619	0.17361	0.17106	0.16853	0.16602	0.16354	0.16109
−0.8	0.21186	0.20897	0.20611	0.20327	0.20045	0.19766	0.19489	0.19215	0.18943	0.18673
−0.7	0.24196	0.23885	0.23576	0.23270	0.22965	0.22663	0.22363	0.22065	0.21770	0.21476
−0.6	0.27425	0.27093	0.26763	0.26435	0.26109	0.25785	0.25463	0.25143	0.24825	0.24510
−0.5	0.30854	0.30503	0.30153	0.29806	0.29460	0.29116	0.28774	0.28434	0.28096	0.27760
−0.4	0.34458	0.34090	0.33724	0.33360	0.32997	0.32636	0.32276	0.31918	0.31561	0.31207
−0.3	0.38209	0.37828	0.37448	0.37070	0.36693	0.36317	0.35942	0.35569	0.35197	0.34827
−0.2	0.42074	0.41683	0.41294	0.40905	0.40517	0.40129	0.39743	0.39358	0.38974	0.38591
−0.1	0.46017	0.45620	0.45224	0.44828	0.44433	0.44038	0.43644	0.43251	0.42858	0.42465
−0.0	0.50000	0.49601	0.49202	0.48803	0.48405	0.48006	0.47608	0.47210	0.46812	0.46414

جدول (5)