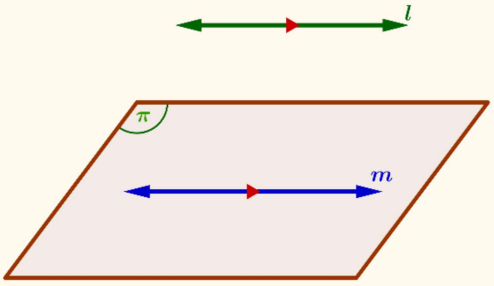
نظرية 1 إذا وازى مستقيم خارج مستوٍ مستقيماً في المستوي ، فإنه يوازي المستوي

$\vec{l}$ خارج المستوي π ، $\vec{m} \subset \pi$, $\vec{l} // \vec{m} \Leftarrow \vec{l} // \pi$

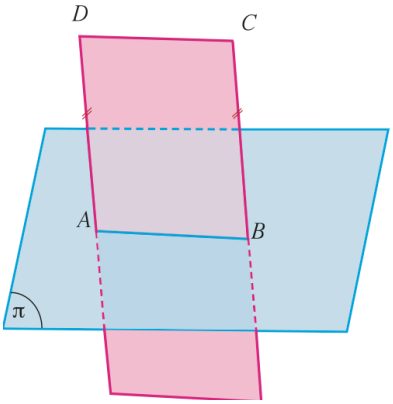


مثال(1) صفحة 125

في الشكل المقابل:

$\overrightarrow{AB} \subset \pi, \overrightarrow{AD} // \overrightarrow{BC}, AD = BC$

أثبت أن $\overrightarrow{CD} // \pi$.



الحل:

$\overleftrightarrow{AD} // \overleftrightarrow{BC}$

فالمستقيمان $\overleftrightarrow{AD}$, $\overleftrightarrow{BC}$ يعينان مستوياً وحيداً لكن (ABCD)

الشكل الرباعي ABCD فيه $\overline{AD} = \overline{BC}$, $\overleftrightarrow{AD} // \overleftrightarrow{BC}$

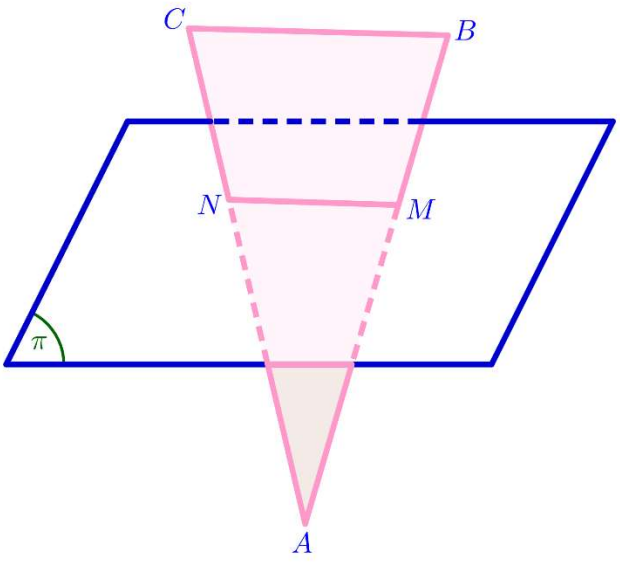
اذاً ABCD متوازي أضلاع

وعنه $\overleftrightarrow{DC} // \overleftrightarrow{AB}$

لكن $\overleftrightarrow{AB} \subset \pi$

اذاً $\overleftrightarrow{CD} // \pi$

حاول أن تحل(1) صفحة125



في الشكل المقابل:

المثلث ABC فيه M منتصف $\overline{AB}$ ، N منتصف $\overline{AC}$

M ، N تنتميان إلى المستوي π .

أثبت أن $\overleftrightarrow{BC} \,//\, \pi$.

الحل:

في المثلث ABC :

M منتصف AB و N منتصف AC $\Rightarrow$ $\overline{BC} \,//\, \overline{MN}$

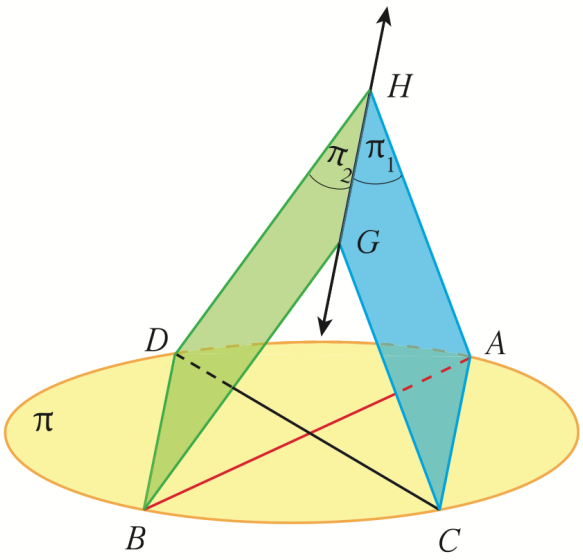
وعليه $\overleftrightarrow{BC} \,//\, \overleftrightarrow{MN}$ ①

لكن ② $M \in \pi$ و $N \in \pi$ $\Rightarrow$ $\overleftrightarrow{MN} \subset \pi$

من ① و ② نجد $\overleftrightarrow{BC} \,//\, \pi$ نظرية ١

مثال(3) صفحـ127ـة

في الشكل المقابل:
$\overline{AB}, \overline{CD}$ قطران في مستوي الدائرة π.
$\pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{GH}$
أثبت أن مستوي الدائرة π يوازي $\overleftrightarrow{GH}$.



الحل:

$\overline{AB}$, $\overline{CD}$ قطران في الدائرة
فهما متقاطعان وينصف كل منهما الآخر
فالشكل ACBD مستطيل

$\overline{AC} \parallel \overline{DB}$ ①

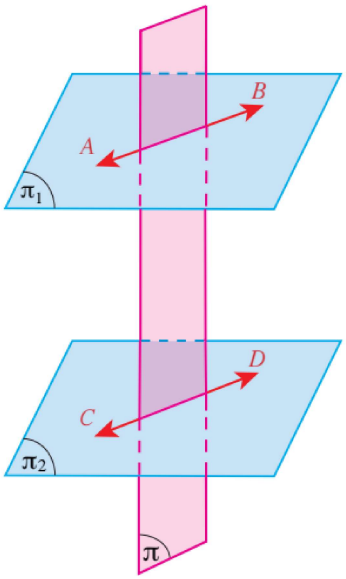
$\overline{AC} \subset \pi_1$, $\overline{DB} \subset \pi_2$, $\pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{GH}$ ②

من ① ، ② نجد

$\overleftrightarrow{GH} \parallel \overleftrightarrow{AC} \parallel \overleftrightarrow{DB}$

$\left.\begin{matrix} \overleftrightarrow{GH} \parallel \overleftrightarrow{AC} \\ \overleftrightarrow{AC} \subset \pi \end{matrix}\right\} \Rightarrow \overleftrightarrow{GH} \parallel \pi$

أي أن مستوي الدائرة π يوازي $\overleftrightarrow{GH}$



نظرية 4 إذا قطع مستوٍ مستويين متوازيين فإن

خطي تقاطعه معهما يكونان متوازيين

$$\because \pi_1 // \pi_2 \ , \ \pi \cap \pi_1 = \overleftrightarrow{AB} \ , \pi \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{CD}$$

$$\therefore \overleftrightarrow{AB} \ // \overleftrightarrow{CD}$$

مثال(4) صفحـة128ـة

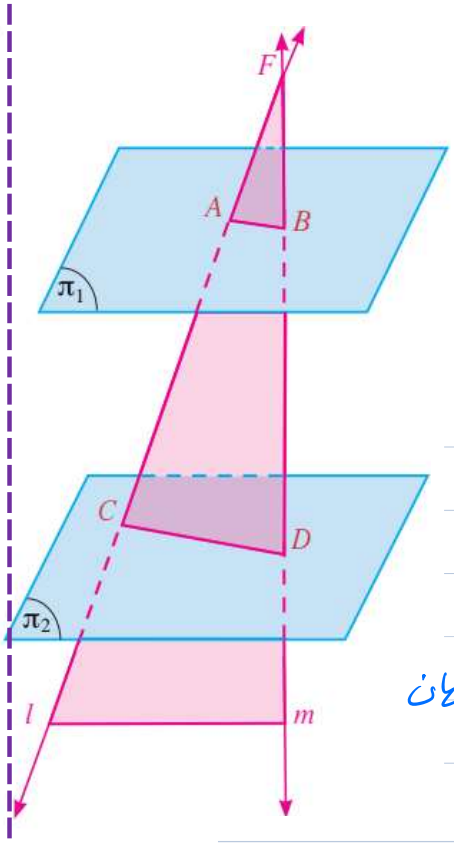
في الشكل المقابل : π_1, π_2 مستويان متوازيين ،

$\overleftrightarrow{l}, \overleftrightarrow{m}$ مستقيمان متقاطعان في F و يقطعان كلاً من π_1 في A, B و

π_2 في C, D .

إذا كان $FB = 5\ cm\ , CD = 9\ cm\ AC = 6\ cm\ , BD = 4\ cm$

فأوجد محيط المثلث FAB



الحل:

$\overleftrightarrow{m}$, $\overleftrightarrow{l}$ مستقيمان متقاطعان في F فهما يعينان مستوى وحيد π

$$\left.\begin{array}{l} \pi_1 // \pi_2 \\ \pi \cap \pi_1 = \overleftrightarrow{AB} \\ \pi \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{CD} \end{array}\right\} \Rightarrow \overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$$ نظرية 4

في المستوي π ، $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$ فالمثلثان FCD, FAB متشابهان

$$\frac{FB}{FD} = \frac{FA}{FC} = \frac{AB}{CD}$$

$$\frac{5}{5+4} = \frac{FA}{FA+6} = \frac{AB}{9}$$

$$\frac{5}{9} = \frac{FA}{FA+6} \Rightarrow 9FA = 5FA + 30 \Rightarrow 4FA = 30$$

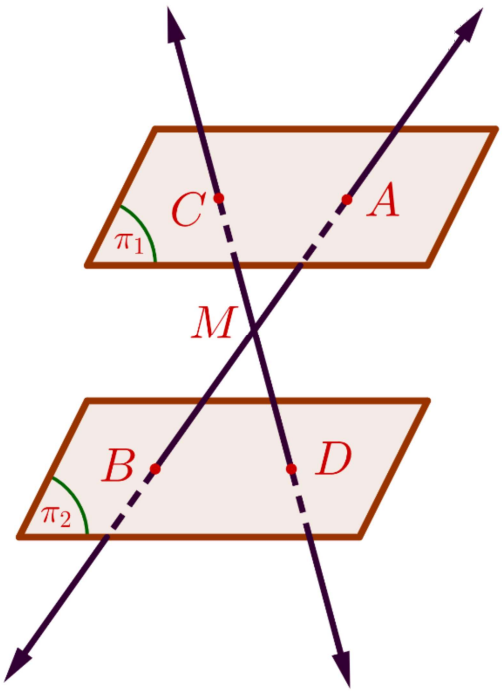
$$\Rightarrow FA = 7.5\ cm$$

$$\frac{5}{9} = \frac{AB}{9} \Rightarrow AB = \frac{5 \times 9}{9} \Rightarrow AB = 5\ cm$$

محيط المثلث FAB يساوي

$$FA + FB + AB = 7.5 + 5 + 5 = 17.5\ cm$$

تمرين(9) صفحة 52



في الشكل المقابل : π_1, π_2 مستويان متوازيان ،

M نقطة واقعة بينهما حيث : $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{CD} = \{M\}$

أثبت أن : $\frac{AM}{MB} = \frac{AC}{BD}$

الحل:

$\overleftrightarrow{AB}$ ، $\overleftrightarrow{CD}$ مستقيمان متقاطعان في M

فهما يعينان مستوياً وحيداً ولكن π

$\pi_1 // \pi_2$

$\pi \cap \pi_1 = \overleftrightarrow{CA}$

$\pi \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{BD}$

$\Rightarrow \overleftrightarrow{CA} // \overleftrightarrow{BD}$ نظرية

فالمثلثان AMC, BMD متشابهان

من التشابه $\frac{AM}{MB} = \frac{MC}{MD} = \frac{AC}{BD}$

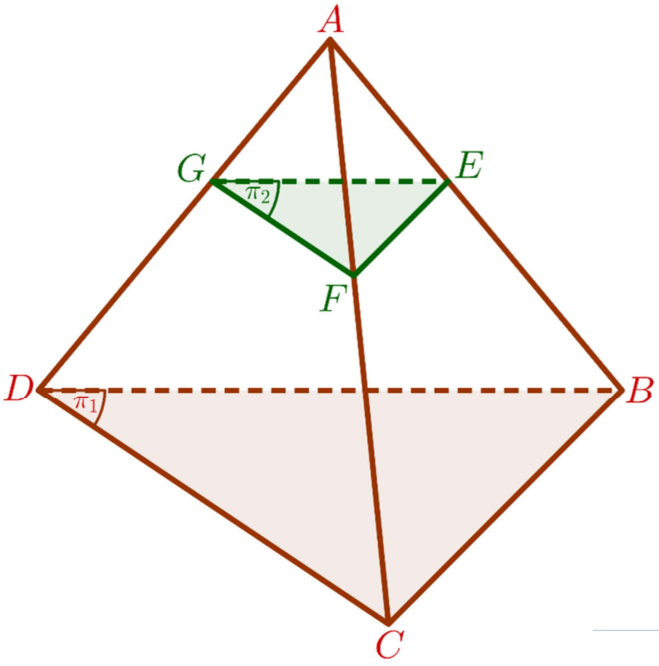
وعنه $\frac{AM}{MB} = \frac{AC}{BD}$

حاول أن تحل(4) صفحـ129ـة

في الشكل المقابل : $ABCD$ هرم ثلاثي ، π_1, π_2 مستويان متوازيان .

إذا كان $FG = 6\text{cm}$, $\frac{AE}{EB} = \frac{1}{3}$

فأوجد DC



الحل:

$$\frac{AE}{EB} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{1}{4}$$

$$\left.\begin{array}{l} (ABC) \cap \pi_1 = \overleftrightarrow{BC} \\ (ABC) \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{EF} \\ \pi_1 // \pi_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \overleftrightarrow{EF} // \overleftrightarrow{BC}$$

نظرية 4

المثلث ABC فيه $\overline{EF} // \overline{BC}$

فالمثلثان ABC , AEF متشابهان

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{EF}{BC} = \frac{1}{4} \quad (1)$$

بالمثل نجد المثلثان ACD , AFG متشابهان

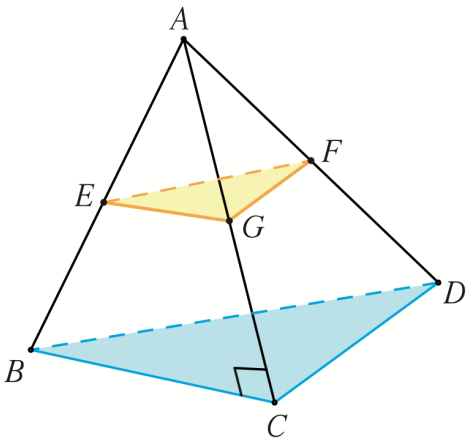
$$\frac{AF}{AC} = \frac{AG}{AD} = \frac{FG}{CD} \quad (2)$$

من (1) و (2) نجد

$$\frac{FG}{CD} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{6}{CD} = \frac{1}{4}$$

$$CD = 24\text{ cm}$$

مثال(2) صفحة 132



في الشكل المقابل: A خارج المستوي BCD

و النقاط E , G , F منتصفات $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ على الترتيب

إذا كان $\overline{AC} \perp \overline{CB}$

وكان $CD = 5\ cm$, $AC = 12\ cm$, $AD = 13\ cm$

فأثبت أن : $(EGF) // (BCD)$

الحل:

في ΔACD :

$(AD)^2 = (13)^2 = 169$

$(AC)^2 + (CD)^2 = (12)^2 + (5)^2 = 169$

فالمثلث ACD قائم في C

$\overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{CD}$

$\overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{CB}$ معطى

$\overleftrightarrow{CB}$, $\overleftrightarrow{CD}$ متقاطعان

إذاً $\overleftrightarrow{AC} \perp (BCD)$ ① نظرية

في ΔABC : E منتصف $\overline{AB}$, G منتصف $\overline{AC}$ $\Leftarrow \overline{EG} // \overleftrightarrow{BC}$

ولكن $m(B\hat{C}A) = 90°$ بالتالي $m(A\hat{G}E) = 90°$

$\Rightarrow \overleftrightarrow{AG} \perp \overleftrightarrow{EG}$

بالمثل $\overleftrightarrow{AG} \perp \overleftrightarrow{GF}$

بالتالي $\overleftrightarrow{AG} \perp (EGF)$

أي أن $\overleftrightarrow{AC} \perp (EGF)$ ②

من ① , ② نجد

$(EGF) // (BCD)$

مثال(3) صفحـ134ـة

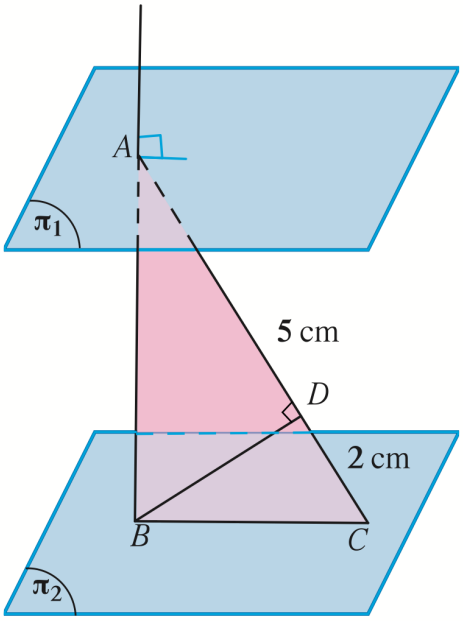
في الشكل المقابل:

$\pi_1 // \pi_2, \overleftrightarrow{AB} \perp \pi_1, A \in \pi_1, \overleftrightarrow{BC} \subset \pi_2$

رسم: $\overleftrightarrow{BD} \perp \overleftrightarrow{AC}$ في المستوي ABC

إذا كان: $AD = 5\ cm, DC = 2\ cm$

أوجد: BD



الحل:

$\pi_1 // \pi_2$
$AB \perp \pi_1$ $\Rightarrow \overleftrightarrow{AB} \perp \pi_2$ نظرية 7

$\overline{BC} \subset \pi_2$
$\overleftrightarrow{AB} \perp \pi_2$ $\Rightarrow \overline{AB} \perp \overline{BC}$

في المثلث ABC القائم في B

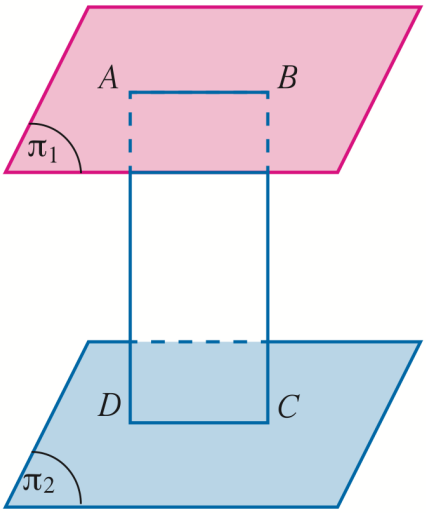
$\overline{BD} \perp \overline{AC}$

$(BD)^2 = AD \times DC = 5 \times 2 = 10$

$BD = \sqrt{10}\ cm$

(في المثلث القائم مربع الارتفاع المتعلق بالوتر يساوي جداء طولي جزئي الوتر المعينين به)

حاول أن تحل(3) صفحـة134ـة



في الشكل المقابل: $\pi_1 // \pi_2$ ، A , B نقطتان في π_1

C , D نقطتان في π_2 حيث : A , B , C , D في مستوى واحد

$\overline{AD} \perp \pi_2$ ، $\overline{BC} \perp \pi_2$

أثبت أن: $ABCD$ مستطيل .

الحل:

$\overleftrightarrow{AD} \perp \pi_2$
$\overleftrightarrow{BC} \perp \pi_2$ $\Rightarrow \overleftrightarrow{AD} // \overleftrightarrow{BC}$ ①

النقاط A , B, C, D في مستوى واحد هو (ABCD)

$\pi_1 \cap (ABCD) = \overleftrightarrow{AB}$
$\pi_2 \cap (ABCD) = \overleftrightarrow{DC}$ $\Rightarrow \overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{DC}$ ②
$\pi_1 // \pi_2$

من ① ، ② نجد الشكل ABCD متوازي أضلاع

لكن

$\overline{AD} \perp \pi_2$
$\overline{DC} \subset \pi_2$ $\Rightarrow \overline{AD} \perp \overline{DC}$

إذا الشكل ABCD متوازي أضلاع إحدى زواياه قائمة

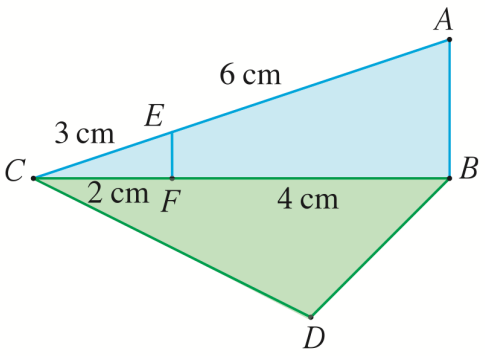
الشكل ABCD مستطيل

مثال(4) صفحة 135

في الشكل المقابل: إذا كان $\overline{AB} \perp (BCD)$

وكان : $CE = 3\ cm, EA = 6\ cm, CF = 2\ cm, FB = 4\ cm$

أثبت أن : $\overline{EF} \perp \overline{BD}$



الحل:

$\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{AC}$ متقاطعان في A ويعينان مستوياً وحيداً (ABC)

المثلثان ABC, EFC فيهما

$$\left.\begin{array}{l} \frac{CE}{CA} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \\ \frac{CF}{CB} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{CE}{CA} = \frac{CF}{CB}$$

$A\hat{C}B$ زاوية مشتركة

إذاً المثلثان ABC, EFC متشابهان ونتيجة التشابه

$$m(E\hat{F}C) = m(A\hat{B}C)$$

وهما في وضع تناظر

$\overline{EF} // \overline{AB}$

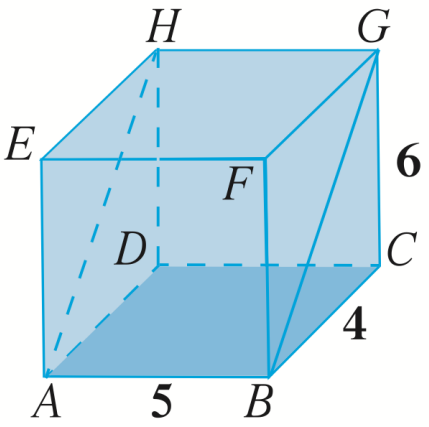
$\because \overline{AB} \perp (BCD)$, $\overline{EF} // \overline{AB}$

$\therefore \overline{EF} \perp (BCD)$ ①

$\overline{DB} \subset (BCD)$ ②

من ① و ② $\overline{EF} \perp \overline{DB}$

حاول أن تحل(1) صفحـ140ـة



في شبه المكعب المقابل :

أثبت أن الزاوية GBC هي الزاوية المستوية

للزاوية الزوجية للمستويين $(ABCD), (ABGH)$

ثم أوجد قياسها

الحل:

$(ABCD) \cap (ABGH) = \overleftrightarrow{AB}$

من خواص شبه المكعب (أوجه مستطيلات)

① $\overline{BC} \subset (ABCD)$ حيث $\overline{BC} \perp \overline{AB}$

من خواص شبه المكعب :

$$\left.\begin{matrix} \overline{AB} \perp \overline{BF} \\ \overline{AB} \perp \overline{BC} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \overline{AB} \perp (BCGF)$$

نظرية 5

بما أن $\overline{BG} \subset (BCGF)$ اذاً

② $\overline{BG} \subset (ABGH)$ حيث $\overline{AB} \perp \overline{BG}$

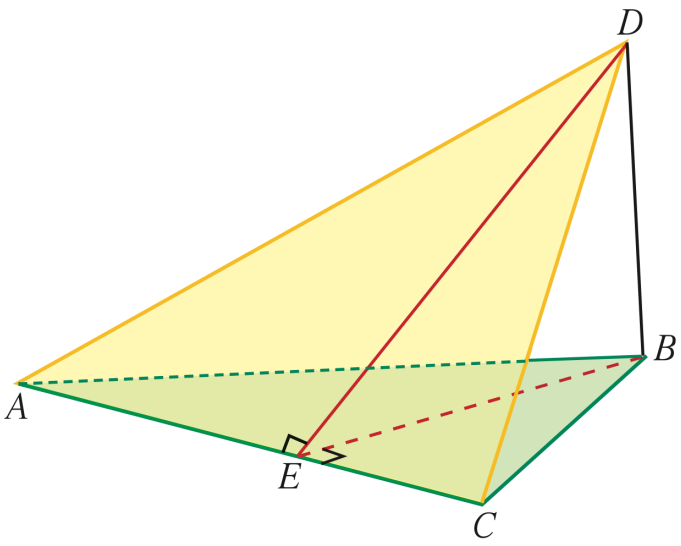
من ① ، ② نجد أن الزاوية المستوية للزاوية الزوجية هي $G\hat{B}C$

في المثلث GCB القائم في $\hat{C}$

$$\tan(G\hat{B}C) = \frac{GC}{BC} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$m(G\hat{B}C) = \tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right) \simeq 56.3^\circ$$

مثال(2) صفحة 140



في الشكل المقابل:

D نقطة خارج مستوى المثلث ABC ،

$$BD = 5cm\ AB = 10cm\ , m(B\hat{A}C) = \frac{\pi}{6}$$

$$\overline{DB} \perp (ABC), \overline{BE} \perp \overline{AC}, \overline{DE} \perp \overline{AC}$$

أوجد :

a) BE, DE

b) أوجد قياس الزاوية الزوجية بين المستويين BAC, DAC

الحل:

$\overline{BE} \perp \overline{AC} \Rightarrow m(B\hat{E}A) = \frac{\pi}{2}$

في المثلث ABE القائم في E

$\sin A = \frac{BE}{AB} \Rightarrow \sin\frac{\pi}{6} = \frac{BE}{10}$

$BE = 10\sin\frac{\pi}{6} = 5\ cm$

$\left.\begin{matrix} \overline{DB} \perp (ABC) \\ \overline{BE} \subset (ABC) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \overline{DB} \perp \overline{BE}$

فالمثلث DBE قائم في B ومتطابق الضلعين $(BD = BE = 5cm)$

حسب فيثاغورث $DE = \sqrt{(5)^2 + (5)^2} = 5\sqrt{2}$

b) $\overleftrightarrow{AC}$ هو خط تقاطع المستويين DAC ، BAC

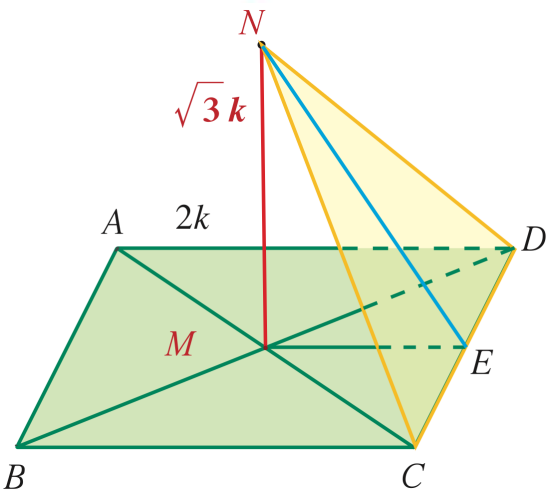
في المستوي BAC $\overline{BE} \perp \overline{AC}$

في المستوي DAC $\overline{DE} \perp \overline{AC}$

الزاوية المستوية للزاوية الزوجية بين المستويين BAC, DAC هي $B\hat{E}D$. ΔDBE قائم في $\hat{B}$ ومتطابق الضلعين $m(B\hat{E}D) = \frac{\pi}{4}$

قياس الزاوية الزوجية $= \frac{\pi}{4}$

مثال(3) صفحة 142



في الشكل المقابل:

$ABCD$ مستطيل تقاطع قطراه في M ،

فيه $AD = 2k$

أقيم $\overline{NM}$ عموداً على $(ABCD)$

حيث N خارج مستواه بحيث $MN = \sqrt{3}k$

أوجد قياس الزاوية الزوجية بين المستويين $ABCD, NCD$

الحل:

العمل: نرسم $\overline{ME}$ حيث E منتصف $\overline{CD}$

$\overline{CD}$ حافة الزاوية الزوجية

$\overline{NM} \perp (ABCD)$
$\overline{CD} \subset (ABCD)$
$\Rightarrow \overline{NM} \perp \overline{CD}$ ①

المثلث CDM متطابق الضلعين (من خواص المستطيل)

E منتصف $\overline{CD}$ بالتالي $\overline{ME} \perp \overline{CD}$ ②

من ① و ② نجد

$CD \perp (MNE)$

$\overline{NE} \subset (MNE)$

بالتالي $\overline{CD} \perp \overline{NE}$ حيث $NE \subset (NCD)$

$M\hat{E}N$ هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية $\overleftrightarrow{CD}$

في المثلث BCD لدينا M منتصف $\overline{BD}$ و E منتصف $\overline{CD}$

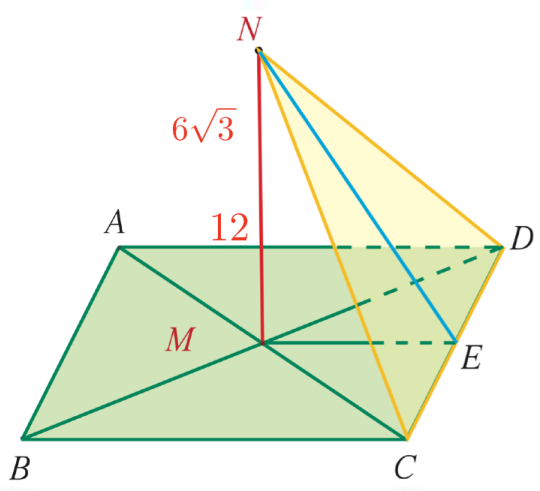
$ME = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2} \times 2k = k$

في المثلث MEN القائم الزاوية في M

$\tan(M\hat{E}N) = \frac{MN}{ME} = \frac{\sqrt{3}k}{k} = \sqrt{3} \Rightarrow m(M\hat{E}N) = 60°$

قياس الزاوية الزوجية بين المستويين NCD ، $ABCD$ هو $60°$

امتحان سابق



في الشكل المقابل:

$ABCD$ مستطيل تقاطع قطراه في M ،

وفيه $AD = 12$ ، E منتصف CD

أقيم $\overline{NM}$ عموداً على $(ABCD)$

حيث N خارج مستواه بحيث $MN = 6\sqrt{3}$

أوجد قياس الزاوية الزوجية بين المستويين $ABCD, NCD$

الحل:

$\overleftrightarrow{CD}$ هي الحافة المشتركة بين المستويين ABCD, NCD

$\left.\begin{matrix}\overleftrightarrow{MN} \perp (ABCD) \\ \overleftrightarrow{CD} \subset (ABCD)\end{matrix}\right\} \Rightarrow \overleftrightarrow{MN} \perp \overleftrightarrow{CD}$ ①

في المثلث CDM المتطابق الضلعين (من خواص المستطيل)

E منتصف $\overline{CD}$

$\overleftrightarrow{ME} \perp \overleftrightarrow{CD}$ ②

من ① و ② نجد $\overleftrightarrow{CD} \perp (MNE)$ ، $\overline{NE} \subset (MNE)$

$\overleftrightarrow{NE} \perp \overleftrightarrow{CD}$

$NE \subset (NCD)$

$M\hat{E}N$ هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية $\overleftrightarrow{CD}$

في المثلث ACD لدينا EM واصلة بين منتصفي الضلعين $\overline{CA}, \overline{CD}$

$EM = \frac{1}{2} AD = \frac{1}{2} \times 12 = 6$ cm

في المثلث MEN القائم الزاوية في M : $\tan(M\hat{E}N) = \frac{6\sqrt{3}}{6} = \sqrt{3}$

$m(M\hat{E}N) = 60°$

قياس الزاوية الزوجية بين المستويين NCD و ABCD هو $60°$