KhateebAcademy.com

Alpha Education Center

الإمـــارات THE EMIRATES

الحل

الحل

الحل

اوراق عمل مادة

الرياضيات

الصـف الثاني عشـر متقدم

الفصل الدراسي الثاني

2025/2024

اسم الطالب : .....

المدرســـة :.....

مع تمنياتي لكم بالنجاح والتفوق

إعداد : محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

الوحدة الرابعة : تطبيقات التفاضل

4 -3 القيم العظمى والصغرى

4 -4 الدوال المتزايدة والمتناقصة

4 -5 التقعر واختبار المشتقة الثانية

4 -6 نظرة عامة على رسم المنحنيات

4 -7 القيم المثلى

4 -8 المعدلات المرتبطة

4 -9 معدلات التغير في الاقتصاد والعلوم

الوحدة الخامسة : التكامل

5 -1 الدوال الاصلية

5 -2 المجموع والرمز سيجما

5 -3 المساحة

5 -4 التكامل المحدود

5 -5 النظرية الأساسية لحساب التفاضل والتكامل

5 -6 التكامل بالتعويض

قواعد الاشتقاق (مراجعة من الفصل الأول)

#	الدالة	المشتقة	#	الدالة	المشتقة
1	c	0	15	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
2	x^n	nx^{n-1}	16	$\log_a(f)$	$\frac{f'}{f\times\ln a}$
3	$f\pm g$	$f'\pm g'$	17	$\sin x$	$\cos x$
4	$c\times f$	$c\times f'$	18	$\cos x$	$-\sin x$
5	$f\times g$	$f'\times g+f\times g'$	19	$\tan x$	$\sec^2 x$
6	$\frac{f}{g}$	$\frac{f'\times g-f\times g'}{g^2}$	20	$\cot x$	$-\csc^2 x$
7	$\frac{c}{g}$	$\frac{-c\times g'}{g^2}$	21	$\sec x$	$\sec x\tan x$
8	$\sqrt{f}$	$\frac{f'}{2\sqrt{f}}$	22	$\csc x$	$-\csc x\cot x$
9	$(f)^n$	$n(f)^{n-1}\times f'$	23	$\sin^{-1}x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
10	$(f\circ g)(x)$	$f'(g(x))\times g'(x)$	24	$\cos^{-1}x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
11	$y=f(u)$ $u=g(x)$	$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}$	25	$\tan^{-1}x$	$\frac{1}{1+x^2}$
12	$g=f^{-1}(x)$	$\frac{1}{f'(g(x))}$	26	$\cot^{-1}x$	$\frac{-1}{1+x^2}$
13	a^f	$a^f\times f'\times\ln a$	27	$\sec^{-1}x$	$\frac{1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2-1}}$
14	e^f	$e^f\times f'$	28	$\csc^{-1}x$	$\frac{-1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2-1}}$

محمد عمر الخطيب

الاعداد (القيم) الحرجة

يعرف العدد الحرج للدالة f بانه العدد c في مجال الدالة f والتي يكون عندها

اما المشتقة عند c تساوي صفر ($f'(c)=0$) او المشتقة عند c غير موجودة ($f'(c)$ غ.م)

ملاحظة (ممكن ان يكون العدد الحرج احدى اطراف الفترة المغلقة اذا حققت احد الشروط السابقة)

ملاحظة: في بيان الدالة f تكون الاعداد الحرجة هي النقاط التي عندها

(1) المشتقة تساوي صفر (مماسات افقية)

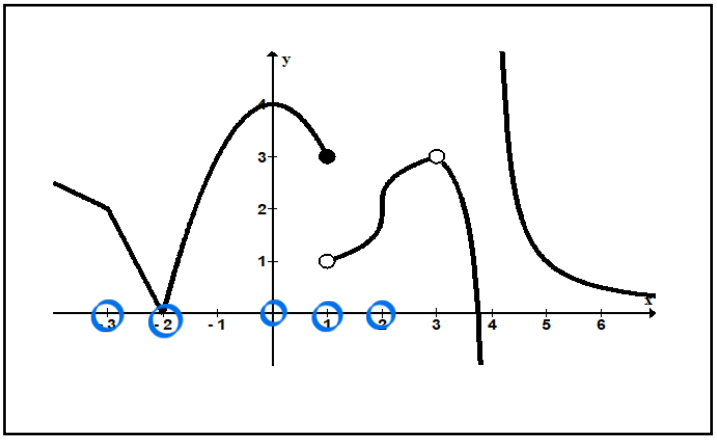
(2) المشتقة غير موجودة عند

(أ) نقاط عدم الاتصال (المعرفة عندها الدالة)

(ب) النقاط التي عندها المماسات الرأسية

(ج) النقاط التي عندها روؤس مدببه (ركن ، ناب)

اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة f لإكمال الجدول التالي:



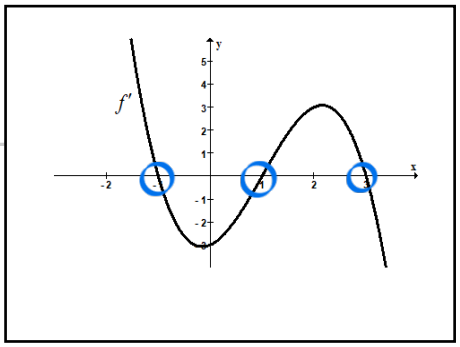
الأعداد الحرجة	$x=2$	$x=1$	$x=0$	$x=-2$	$x=-3$
السبب	مماس رأسي المشتقة غير موجودة	عدم اتصال المشتقة غير موجودة	مماس افقي المشتقة تساوي صفر	رأس مدبب المشتقة غير موجودة	رأس مدبب المشتقة غير موجودة

ملاحظة: ليس للدالة اعداد حرجة عند $x=3$ و $x=4$ لان هذه الاعداد خارج مجال الدالة (عندها خطوط تقارب رأسية)

ملاحظة: في بيان الدالة f' تكون الاعداد الحرجة هي نقاط التقاطع مع محور السينات (محور X)
او قيم x التي عندها الدالة f' غير معرفة. (لا يوجد صور للعدد في رسمة f')

بشرط ان تكون هذه الاعداد ضمن مجال الدالة

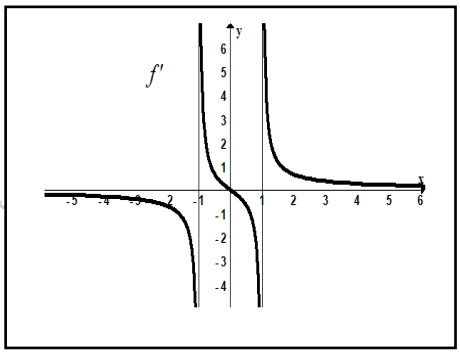
(1) بالاعتماد على الشكل المجاورالذي يمثل بيان الدالة f' اوجد الاعداد الحرجة للدالة f



الاعداد الحرجة للدالة f هي
نقاط التقاطع مع محور السينات (x)
$x = -1, 1, 3$

---

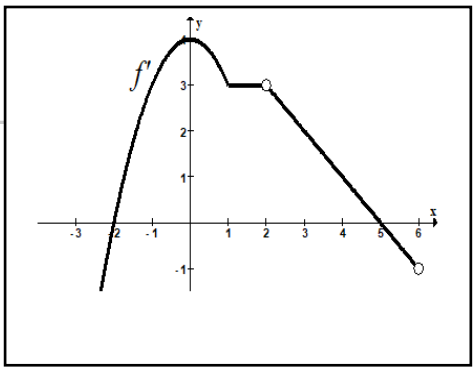
(2) اذا كانت الدالة f معرفه على R ، و الشكل المجاور يمثل بيان الدالة f'
فاوجد الاعداد الحرجة للدالة f



الاعداد الحرجة للدالة f هي
$x = -1, 0, 1$

---

(3) اذا كانت الدالة f معرفه على الفترة $(-\infty, 6]$ ، و الشكل المجاور يمثل بيان الدالة f'
فاوجد الاعداد الحرجة للدالة f



الاعداد الحرجة للدالة f هي
$x = -2, 2, 5, 6$

العدد 0 ليس عدد حرج
العدد 1 ليس عدد حرج

محمد عمر الخطيب

(1) اوجد الاعداد الحرجة للدالة: $f(x)=x^3-3x$ **على الفترة** $[-2,3]$.

$f(x)=x^3-3x$

$f'(x)=3x^2-3$

$f'(x)=0$

$3x^2-3=0$

$x=-1,1 \in [-2,3]$

الأعداد الحرجة هي $-1,1$

---

(2) اوجد الاعداد الحرجة للدالة: $f(x)=x^4-4x^3-8x^2+1$ **على الفترة** $[-1,3]$.

$f'(x)=4x^3-12x^2-16x$

$f'(x)=0$

$4x^3-12x^2-16x=0$

$4x(x^2-3x-4)=0$

$x=0,\ x=-1,\ x=4$

$-1,0 \in [-1,3]$

$4 \notin [-1,3]$

الاعداد الحرجة هي $-1,0$

---

(3) اوجد الاعداد الحرجة للدالة: $f(x)=\sqrt[3]{x^2-4}$

المجال $D=(-\infty,\infty)$

$f(x)=(x^2-4)^{1/3}$

$f'(x)=\frac{1}{3}(x^2-4)^{-2/3}\cdot 2x$

$=\frac{2x}{3(x^2-4)^{2/3}}$

$f'(x)$ غ.م

المقام $=0$

$(x^2-4)^{2/3}=0$

$x^2-4=0$

$x=\pm 2$

$f'(x)=0$

البسط $=0$

$2x=0$

$x=0$

الأعداد الحرجة هي $0,\pm 2$

---

(4) اوجد الاعداد الحرجة للدالة: $f(x)=\sqrt{x}$

$D=[0,\infty)$

$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$f'(x)$ غ.م

المقام $=0$

$\sqrt{x}=0$

$x=0 \in [0,\infty)$

$f'(x)=0$

البسط $=0$

لا يوجد حل

الأعداد الحرجة هي 0

---

(5) اوجد الاعداد الحرجة للدالة: $f(x)=e^{x^2-1}$

$D=(-\infty,\infty)$

$f(x)=e^{x^2-1}$

$f'(x)=e^{x^2-1}\cdot 2x$

$f'(x)=0$

$e^{x^2-1}=0$

لا يوجد حل

$2x=0$

$x=0$

الأعداد الحرجة هي 0

محمد عمر الخطيب

(1) اوجد الاعداد الحرجة للدالة: $f(x)=x^{\frac{1}{3}}(x+8)$

$D=(-\infty,\infty)$

$f'(x)=\frac{1}{3}x^{-2/3}\cdot(x+8)+x^{1/3}(1)$

$=\frac{x+8}{3x^{2/3}}+x^{1/3}$ توحيد مقامات

$=\frac{x+8+3x^{2/3}\cdot x^{1/3}}{3x^{2/3}}$

$=\frac{x+8+3x}{3x^{2/3}}=\frac{4x+8}{3x^{2/3}}$

ع.م $f'(x)$

$3x^{2/3}=0$

$x=0$

ع.ح $f'(x)$

$f'(x)=0$

$4x+8=0$

$x=-2$

الاعداد الحرجة هي $-2,0$

---

(2) اوجد الاعداد الحرجة للدالة: $f(x)=\frac{x^2+12}{x+2}$

$D=\mathbb{R}/\{-2\}$

$f'(x)=\frac{2x(x+2)-(x^2+12)(1)}{(x+2)^2}$

$=\frac{2x^2+4x-x^2-12}{(x+2)^2}$

$=\frac{x^2+4x-12}{(x+2)^2}$

ع.م $f'(x)$

$x=-2$ خارج المجال

ع.ح $f'(x)$

$f'(x)=0$

$x^2+4x-12=0$

$x=-6,2$

الأعداد الحرجة هي $-6,2$

---

(3) اوجد الاعداد الحرجة للدالة: $f(x)=\sqrt{4-x^2}$

نجد اولاً مجال الدالة $4-x^2\geq 0$

اشارة



$D=[-2,2]$

$f'(x)=\frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}$

$=\frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$

ع.م $f'(x)$

$2\sqrt{4-x^2}=0$

$4-x^2=0$

$x=\pm 2$

ع.ح $f'(x)$

$f'(x)=0$

$-x=0$

$x=0$

الأعداد الحرجة هي $0,\pm 2$

---

(4) اوجد الاعداد الحرجة للدالة: $f(x)=x\sqrt{4-x^2}$

$D=[-2,2]$

$f'(x)=1\cdot\sqrt{4-x^2}+x\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}$

$=\sqrt{4-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}$

$=\frac{4-x^2-x^2}{\sqrt{4-x^2}}=\frac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}}$ توحيد مقامات

ع.م $f'(x)$

$\sqrt{4-x^2}=0$

$x=\pm 2$

ع.ح $f'(x)$

$f'(x)=0$

$4-2x^2=0$

$x=\pm\sqrt{2}$

الأعداد الحرجة هي $\pm\sqrt{2},\pm 2$

محمد عمر الخطيب

(1) اوجد الاعداد الحرجة للدالة: $f(x)=x-2\cos x$ **على الفترة** $[0,2\pi]$

$f'(x) = 1 + 2\sin x$

$f'(x) = 0$

$1 + 2\sin x = 0$

$2\sin x = -1$

$\sin x = -\frac{1}{2}$

x : $\pi/6$

$Q_3 \rightarrow x = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$

$Q_4 \rightarrow x = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$

الاعداد الحرجة هي $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{11\pi}{6}$

---

(2) اوجد الاعداد الحرجة للدالة: $f(x)=x-\sin 2x$ **على الفترة** $[0,\pi]$

$f'(x) = 1 - 2\cos 2x$

$f'(x) = 0$

$1 - 2\cos 2x = 0$

$-2\cos 2x = -1$

$\cos 2x = \frac{1}{2}$

ملاحظة: بما ان المزاوية $2x$ يجب توسعة المجال ليصبح $[0, 2\pi]$

$2x$: $\pi/3$

$Q_1 \rightarrow 2x = \frac{\pi}{3}$

$Q_4 \rightarrow 2x = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$

$2x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$

$2x = \frac{5\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{5\pi}{6}$

الأعداد الحرجة هي $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$

---

(3) اوجد الاعداد الحرجة للدالة: $f(x)=\sin x+\cos x$

$D = (-\infty, \infty)$

$f'(x) = \cos x - \sin x$

$f'(x) = 0$

$\cos x - \sin x = 0$

$-\sin x = -\cos x$

بقسمة الطرفين على $-\cos x$

$\frac{-\sin x}{-\cos x} = \frac{-\cos x}{-\cos x}$

$\tan x = 1$

x : $\pi/4$

$Q_1 \rightarrow x = \frac{\pi}{4}$

$Q_3 \rightarrow x = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$

الفرق بين الحلين π لذلك يكون الحل العام

$x = \frac{\pi}{4} + n\pi$, $n \in Z$

الاعداد الحرجة هي $\frac{\pi}{4} + n\pi$, $n \in Z$

محمد عمر الخطيب

(1) اوجد الاعداد الحرجة للدالة: $f(x)=\sin x\cos x$ على الفترة $[0,2\pi]$

$f'(x)=\cos x\cdot\cos x+\sin x(-\sin x)$

$=\cos^2x-\sin^2x$

$f'(x)=0$

$\cos^2x-\sin^2x=0$

$-\sin^2x=-\cos^2x$

بالقسمة على $-\cos^2x$

$\frac{-\sin^2x}{-\cos^2x}=1$

$\tan^2x=1\Rightarrow\tan x=\pm1$

يمكن حل المعادلة بتعاريف مثلثية أيضاً

(1) $\tan x=1$

x مع $\pi/4$: $Q_1\longrightarrow x=\frac{\pi}{4}$

$Q_3\longrightarrow x=\pi+\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{4}$

(2) $\tan x=-1$

x مع $\pi/4$: $Q_2\longrightarrow x=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$

$Q_4\longrightarrow x=2\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{7\pi}{4}$

الأعداد الحرجة هي $\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4}$

---

(2) اوجد الاعداد الحرجة للدالة $f(x)=(x^2-3)e^x$

$D=(-\infty,\infty)$

$f'(x)=2x\cdot e^x+(x^2-3)e^x$

$=e^x[2x+x^2-3]$

$=e^x[x^2+2x-3]$

$f'(x)=0$

$e^x=0$ لا يوجد حل ، $x^2+2x-3=0$

$x=-3,1$

الأعداد الحرجة هي $-3,1$

---

(3) اوجد الاعداد الحرجة للدالة: $f(x)=|x^2-4|$

الحل الجبري

$D=(-\infty,\infty)$

اشارة x^2-4: $+++\ |\ ---\ |\ +++$ عند -2 و 2

f: x^2-4 ، $4-x^2$ ، x^2-4

f': $2x$ ، $-2x$ ، $2x$

$f'(x)=0$

$x=0$

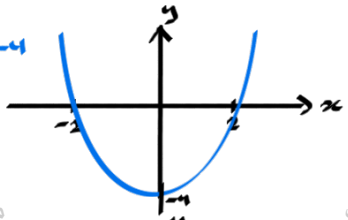
$f'(x)$ غ.م

$x=\pm2$

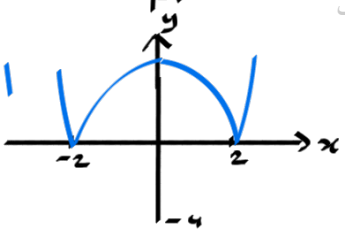
الأعداد الحرجة هي $0,\pm2$

الحل البياني

x^2-4



$|x^2-4|$



الاعداد الحرجة للدالة f هي $0,\pm2$

(1) اوجد الاعداد الحرجة للدالة: $f(x)=x^{2/3}$

$D=(-\infty,\infty)$

$f'(x)=\frac{2}{3}x^{-1/3}=\frac{2}{3x^{1/3}}$

$f'(x)$ غ.م

$x=0$

$f'(x)=0$ لا يوجد حل

الأعداد الحرجة هي 0

(2) اوجد الاعداد الحرجة للدالة: $f(x)=\tan^{-1}x^2$

$D=(-\infty,\infty)$

$f'(x)=\frac{1}{(x^2)^2+1}\cdot 2x=\frac{2x}{x^4+1}$

$f'(x)$ غ.م

$x^4+1=0$ لا يوجد حل

$f'(x)=0$

$2x=0$

$x=0$

العدد الحرج هو $x=0$

(3) اوجد الاعداد الحرجة للدالة: $f(x)=x^{3/4}-4x^{1/4}$

$f(x)=\sqrt[4]{x^3}-4\sqrt[4]{x}$

$D=[0,\infty)$

$f'(x)=\frac{3}{4}x^{-1/3}-4\cdot\frac{1}{4}x^{-3/4}$

$=\frac{3}{4}x^{-1/3}-x^{-3/4}$

☆ نخرج عامل مشترك $x^{-3/4}$ (بالسالب لأن صغير)

$=x^{-3/4}\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{x^{-1/3}}{x^{-3/4}}-1\right)$

$=x^{-3/4}\left(\frac{3}{4}x^{1/2}-1\right)$

$=\frac{3x^{1/2}-4}{4x^{3/4}}$

$f'(x)$ غ.م

المقام $=0$

$x^{3/4}=0$

$x=0$

$f'(x)=0$

البسط $=0$

$3x^{1/2}-4=0$

$3x^{1/2}=4$

$x^{1/2}=\frac{4}{3}$

$x=(\frac{4}{3})^2$

$x=\frac{16}{9}$

الأعداد الحرجة هي $0,\frac{16}{9}$

(4) اوجد الاعداد الحرجة للدالة: $f(x)=x^{4/3}+4x^{1/3}+4x^{-2/3}$

$f(x)=\sqrt[3]{x^4}+4\sqrt[3]{x}+\frac{4}{\sqrt[3]{x^2}}$

$D=\mathbb{R}/\{0\}$

$f'(x)=\frac{4}{3}x^{1/3}+\frac{4}{3}x^{-2/3}-\frac{8}{3}x^{-5/3}$

$=\frac{4}{3}x^{-5/3}\left(\frac{x^{1/3}}{x^{-5/3}}+\frac{x^{-2/3}}{x^{-5/3}}-2\right)$

$=\frac{4(x^2+x-2)}{3x^{5/3}}$

$f'(x)$ غ.م

$3x^{5/3}=0$

$x=0\notin D$

$f'(x)=0$

$4(x^2+x-2)=0$

$x=-2,1$

الأعداد الحرجة هي $-2,1$

محمد عمر الخطيب

(1) اوجد الاعداد الحرجة للدالة: $f(x)=\sqrt[3]{x^3-3x^2}$

$f(x) = (x^3-3x^2)^{1/3}$

$D=(-\infty,\infty)$

$f'(x) = \frac{1}{3}(x^3-3x^2)^{-2/3}\cdot(3x^2-6x)$

$= \frac{3(x^2-2x)}{3(x^3-3x^2)^{1/3}}$

$= \frac{x^2-2x}{(x^3-3x^2)^{1/3}}$

$f'(x)=0$ أو $f'(x)$ غ.م

$x^3-3x^2=0$

$x=0,3$

$f'(x)=0$

$x^2-2x=0$

$x=0,2$

الأعداد الحرجة هي $0, 2, 3$.

ملاحظة: عندما يكون للبسط والمقام حل مشترك عند عدد معين يجب اعتباره عدد حرج يأخذ بالنهاية

---

(2) اوجد الاعداد الحرجة للدالة: $f(x)=\sqrt{x^3+3x^2}$

أولاً نجد مجال الدالة

$x^3+3x^2 \geq 0$

	-3		0	
x^3+3x^2	$-$	0	$+$	$+$

$D=[-3,\infty)$

$f'(x) = \frac{3x^2+6x}{2\sqrt{x^3+3x^2}}$

$f'(x)=0$ أو $f'(x)$ غ.م

$x^3+3x^2=0$

$x=-3,0$

$f'(x)=0$

$3x^2+6x=0$

$x=-2,0$

الأعداد الحرجة هي $-3, -2, 0$

---

(3) اوجد الاعداد الحرجة للدالة: $f(x)=(x^{2/5}-3x^{1/5})^2$

$D=(-\infty,\infty)$

$f'(x) = 2(x^{2/5}-3x^{1/5})^1\cdot(\frac{2}{5}x^{-3/5}-\frac{3}{5}x^{-4/5})$

$= 2x^{1/5}(\frac{x^{2/5}}{x^{1/5}}-3)\cdot\frac{1}{5}x^{-4/5}(2\frac{x^{-2/5}}{x^{-4/5}}-3)$

$= \frac{2}{5}x^{-3/5}(x^{1/5}-3)(2x^{1/5}-3)$

$= \frac{2(x^{1/5}-3)(2x^{1/5}-5)}{5x^{3/5}}$

$f'(x)=0$ أو $f'(x)$ غ.م

$x^{3/5}=0$ أو $2x^{1/5}-3=0$ أو $x^{1/5}-3=0$

$x=0$ أو $2x^{1/5}=3$ أو $x^{1/5}=3$

$x=0$ أو $x^{1/5}=\frac{3}{2}$ أو $x=3^5$

$x=0$ أو $x=(\frac{3}{2})^5$ أو $x=3^5$

الأعداد الحرجة هي $0, 3^5, (\frac{3}{2})^5$

محمد عمر الخطيب

(1) اوجد الاعداد الحرجة للدالة: $f(x)=\sin^{-1}(1-\frac{1}{x^2})$

مجال الدالة

$-1\le 1-\frac{1}{x^2}\le 1$

$-2\le -\frac{1}{x^2}\le 0$

$2\ge \frac{1}{x^2}\ge 0$

$0\le \frac{1}{x^2}\le 2$

$\frac{1}{2}\le x^2$

$\sqrt{\frac{1}{2}}\le |x|$

$\frac{1}{\sqrt{2}}\le |x|$

$x\le -\frac{1}{\sqrt{2}}\ ,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\le x$

$D=\left(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right]\cup\left[\frac{1}{\sqrt{2}},\infty\right)$

$D=(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{2}}]\cup[\frac{1}{\sqrt{2}},\infty)$

$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-(1-\frac{1}{x^2})^2}}\cdot\frac{2}{x^3}=\frac{2}{x^3\sqrt{1-(1-\frac{1}{x^2})^2}}$

$f'(x)=0$ ليس لها حل

$f'(x)$ غ.م

$x^3=0$

$x=0$ خارج المجال

$\sqrt{1-(1-\frac{1}{x^2})^2}=0$

$1-(1-\frac{1}{x^2})^2=0$

$(1-\frac{1}{x^2})^2=1$

$1-\frac{1}{x^2}=1$

$-\frac{1}{x^2}=0$ ليس لها حل

$1-\frac{1}{x^2}=-1$

$-\frac{1}{x^2}=-2$

$x^2=\frac{1}{2}$

$x=\pm 1/\sqrt{2}\in D$

$\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ الاعداد الحرجة هي

---

(2) اوجد الاعداد الحرجة للدالة:

$$f(x)=\begin{cases}7-2x^2 & x\le 1\\ x^3-12x & x>1\end{cases}$$

$D=(-\infty,\infty)$

f: $7-2x^2$ | x^3-12x عند 1

f': $-4x$ ⊗ $3x^2-12$ عند 1

$f'(x)$ غ.م

عدم اتصال $x=1$

$f'(x)=0$

يوجد حالتين

تعامد لليسار

(i) $-4x=0$

$x=0$ ✓ $D_1=(-\infty,1)$

تعامد لليمين

(ii) $3x^2-12=0$

$D_2=(1,\infty)$

$x=2$, $x=-2$ ✗

خارج المجال الفرعي

الاعداد الحرجة هي $0, 1, 2$

محمد عمر الخطيب

(1) اذا كانت للدالة $f(x)=x^4-2ax^2+8x$ عدد حرج عند $x=2$ فاوجد قيمة الثابت a

الشرط $f'(2)=0$

$f'(x)=4x^3-4ax+8$

$f'(2)=0$

$4(2)^3-4a(2)+8=0$

$32-8a+8=0$

$-8a+40=0$

$-8a=-40$

$\boxed{a=5}$

---

(2) اذا كانت للدالة $f(x)=x^2e^{kx}$ عددا حرجاً عند $x=\frac{2}{3}$ فاوجد قيمة الثابت k

الشرط $f'(\frac{2}{3})=0$

$f'(x)=2xe^{kx}+x^2e^{kx}\cdot k$

$=e^{kx}(2x+kx^2)$

$f'(\frac{2}{3})=0$

$e^{k\cdot\frac{2}{3}}\left[2\cdot\frac{2}{3}+k\cdot(\frac{2}{3})^2\right]=0$

$e^{\frac{2}{3}k}=0$ ، $\frac{4}{3}+k(\frac{2}{3})^2=0$

لا يوجد حل

$\frac{4}{9}k=\frac{-4}{3}$

$\boxed{k=-3}$

---

(3) اذا كانت للدالة $f(x)=x^3+ax^2+bx$ اعداد حرجة عند $x=-1, x=2$

فاوجد قيمة الثوابت a,b

الشروط $f'(-1)=0$

$f'(2)=0$

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

$f'(-1)=0$

$3(-1)^2+2a(-1)+b=0$

$3-2a+b=0$

$-2a+b=-3$

$2a-b=3$ --- ①

$f'(2)=0$

$3(2)^2+2a(2)+b=0$

$12+4a+b=0$

$4a+b=-12$ --- ②

بحل المعادلتين

$4a+b=-12$

$2a-b=3$

بالجمع

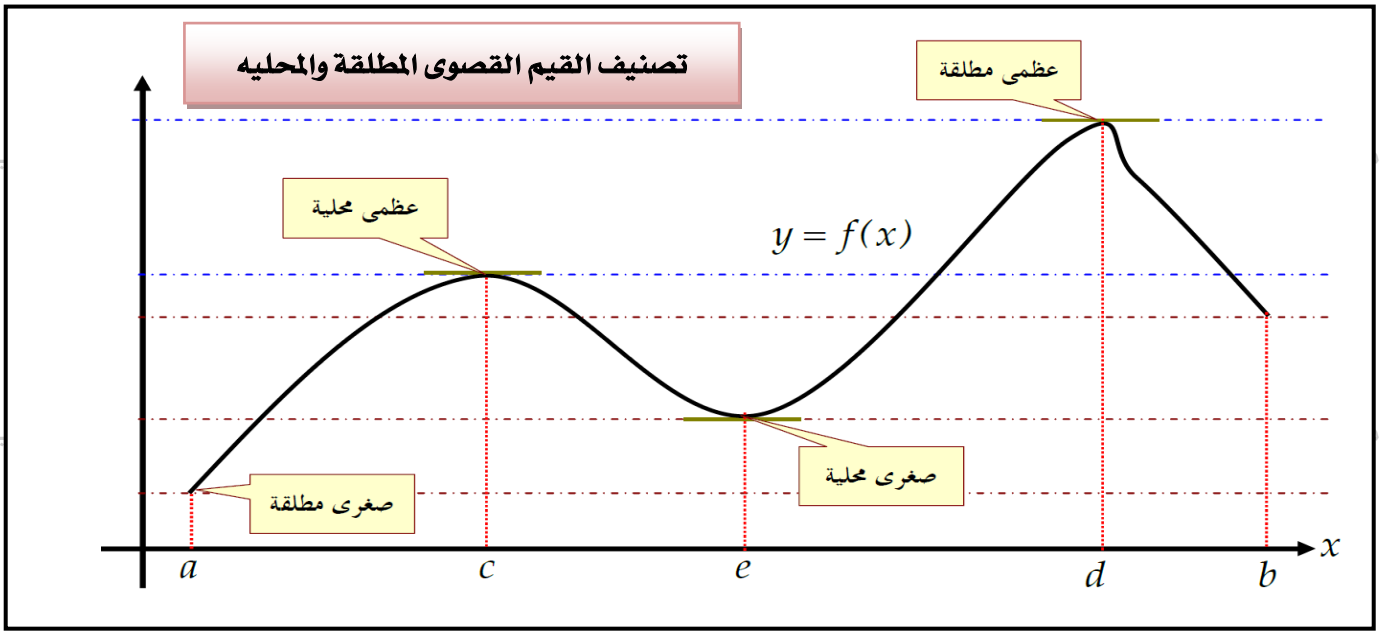
$6a=-9$

$\boxed{a=-\frac{3}{2}}$ $\Rightarrow$ $4(-\frac{3}{2})+b=-12$

$-6+b=-12$ $\Rightarrow$ $\boxed{b=-6}$

محمد عمر الخطيب

القيم القصوى (المطلقة) والقيم القصوى المحلية



القيم القصوى (المطلقة)

اذا كانت f دالة مجالها الفترة S , $c\in S$ فان $f(c)$ تكون:

1. قيمة عظمى مطلقة للدالة f على S اذا كانت $f(c)\geq f(x)$ لكل $x\in S$.
2. قيمة صغرى مطلقة للدالة f على S اذا كانت $f(c)\leq f(x)$ لكل $x\in S$.

ملاحظة:القيم العظمى المطلقة والصغرى المطلقة تسمى القيم القصوى او القيم القصوى المطلقة.

القيم القصوى (المحلية)

لا يتحدث كتابنا عن القيم القصوى المحلية عند الاطراف

اذا كانت c نقطة داخلية في مجال الدالة f فان $f(c)$ تكون:

1. قيمة عظمى محلية اذا كانت $f(c)\geq f(x)$ لكل x في فترة مفتوحة تحتوي c (جوار العدد c)
2. قيمة صغرى محلية اذا كانت $f(c)\leq f(x)$ لكل x في فترة مفتوحة تحتوي c (جوار العدد c)

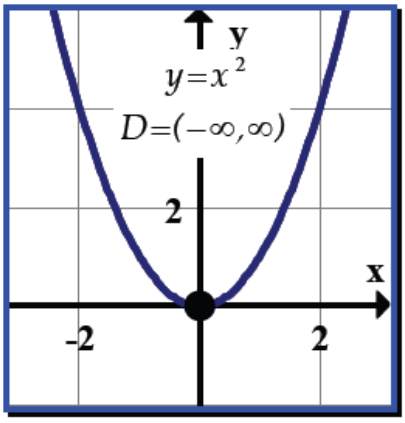
نظرية فيرمات : اذا كانت $f(c)$ قيمة قصوى محلية فان c عدد حرج للدالة f

اي ان $f'(c)=0$ او غير موجودة والعكس غير صحيح

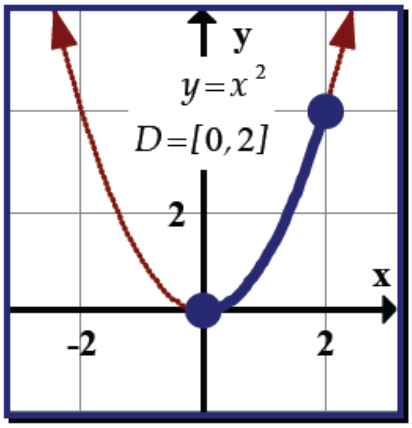
محمد عمر الخطيب

الجدول التالي والرسومات البيانية التالية تمثل اشكال مختلفة لقيم قصوى مطلقة.

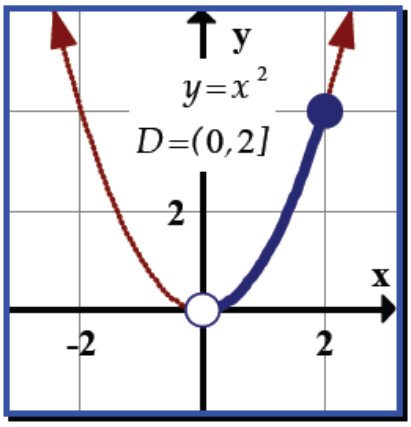
(أ) قيمة صغرى فقط



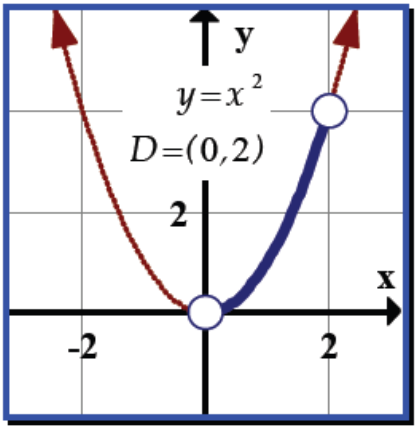
(ب) قيمة عظمى وقيمة صغرى



(ج) قيمة عظمى فقط



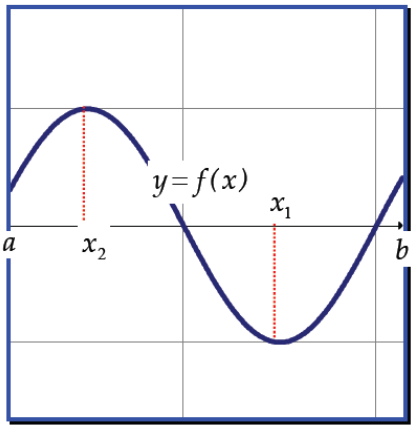
(د) لا توجد قيمة عظمى ولا صغرى



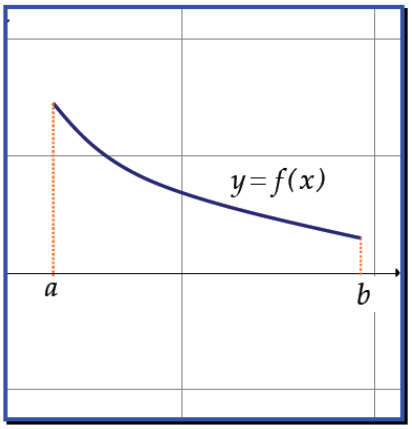
قاعدة الدالة	مجال D	القيم القصوى المطلقة فوق D
(أ) $y=x^2$	$(-\infty,\infty)$	لا يوجد قيمة عظمى مطلقة قيمة صغرى مطلقة تساوي 0 عند $x=0$
(ب) $y=x^2$	$[0,2]$	قيمة عظمى مطلقة تساوي 4 عند $x=2$ قيمة صغرى مطلقة تساوي 0 عند $x=0$
(ج) $y=x^2$	$(0,2]$	قيمة عظمى مطلقة تساوي 4 عند $x=2$ لا يوجد قيمة صغرى مطلقة
(د) $y=x^2$	$(0,2)$	لا توجد قيم قصوى مطلقة

نظرية القيمة القصوى

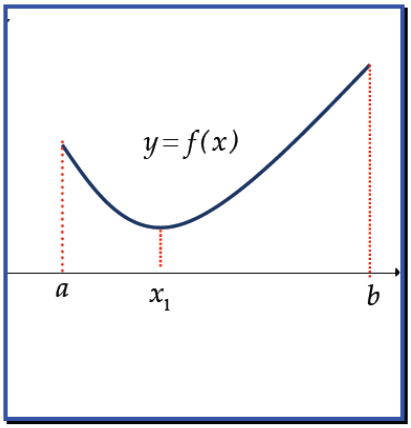
اذا كانت f دالة متصلة على فترة مغلقة $[a,b]$ فان الدالة f تكون لها قيمة عظمى (مطلقة) وقيمة صغرى(مطلقة) على هذة الفترة.



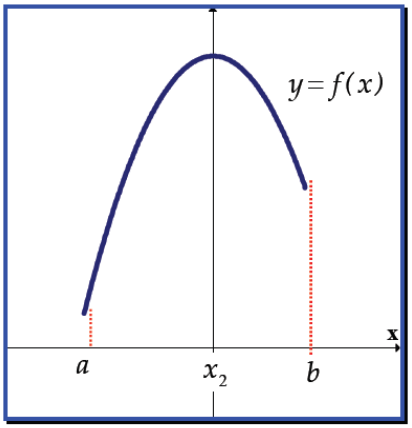
قيمة عظمى وقيمة صغرى
فقط عند نقاط داخلية



قيمة عظمى وقيمة صغرى
عند النقاط الطرفية



قيمة صغرى عند نقطة داخلية
وقيمة عظمى عند نقطة طرفية



قيمة عظمى عند نقطة داخلية
وقيمة صغرى عند نقطة طرفية

ملاحظات:

(1) اذا كانت f لا تحقق الشروط على الفترة المغلقة $[a,b]$ فانه من <u>الممكن</u> ان يكون للدالة f قيمة عظمى (مطلقة) او قيمة صغرى (مطلقة) على هذة الفترة .

(2) اذا كانت مجال الدالة f الفترة المفتوحة (a,b) فانه لا يوجد للدالة f قيمة عظمى (مطلقة) او قيمة صغرى (مطلقة) عند الاطراف.

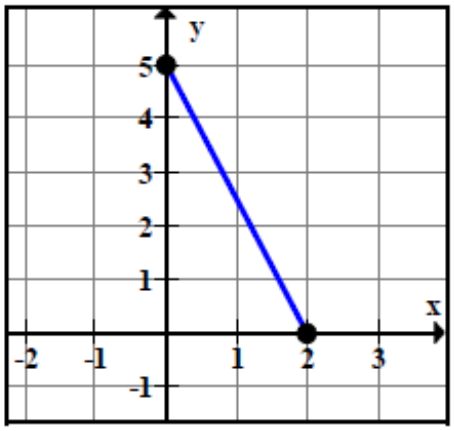
محمد عمر الخطيب

القيم القصوى المطلقة والمحلية بيانياً

بالاعتماد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة f

اوجد في كل حالة مما ياتي القيم القصوى (العظمى المطلقة، الصغرى المطلقة) وحدد مكانها

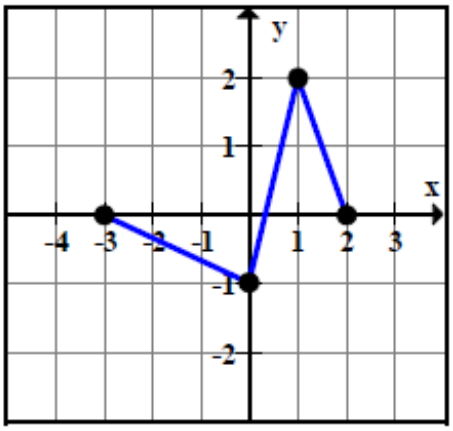
(1)



القيمة العظمى المطلقة 5 عند $x=0$

القيمة الصغرى المطلقة 0 عند $x=2$

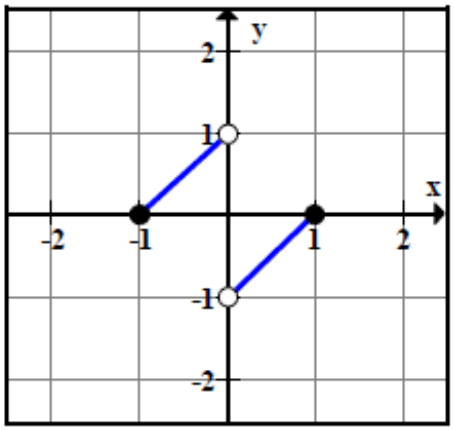
(2)



القيمة العظمى المطلقة 2 عند $x=1$

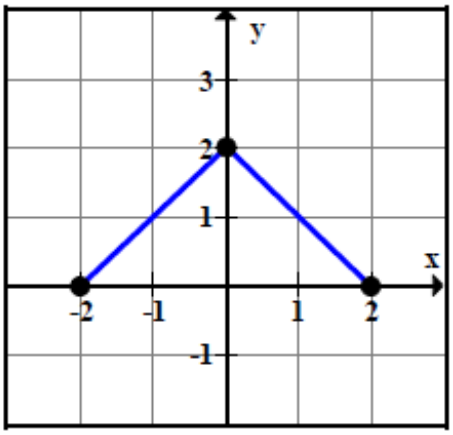
القيمة الصغرى المطلقة 1- عند $x=0$

(3)



لا يوجد قيم قصوى مطلقة .

(4)



القيمة العظمى المطلقة 2 عند $x=0$

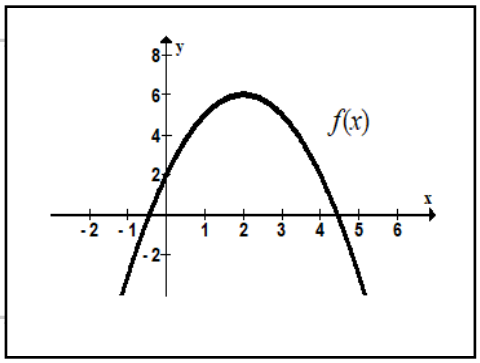
القيمة الصغرى المطلقة 0 عند $x=\pm 2$

محمد عمر الخطيب

يمثل كل شكل من الاشكال الاتية بيان الدالة $f(x)$ اكمل كل مما يأتي

ملاحظة : كل قيمة قصوى مطلقة (داخليه وليس عى الأطراف) هي قيمة قصوى محلية ولا داعي لذكر انها قيمة قصوى محلية ويكفي ان نقول انها قيمة قصوى مطلقة

اولاً:

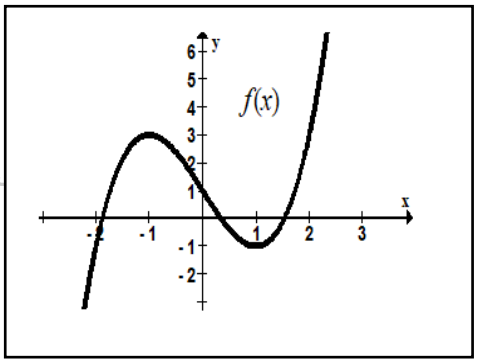


(أ) الاعداد الحرجة للدالة هي .....2.....لا يوجد

(ب) القيمة العظمى المحلية (ان وجدت) .....6.....عند x=2 وهي مطلقة

(ج) القيمة الصغرى المحلية (ان وجدت).....لا يوجد.....

ثانياً:

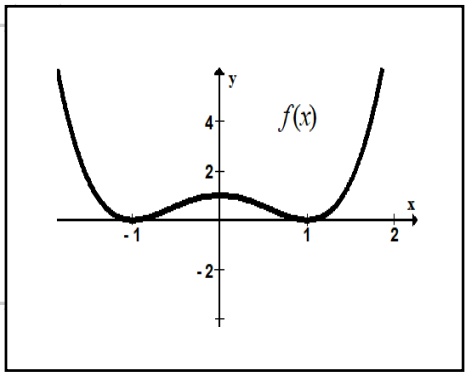


(أ) الاعداد الحرجة للدالة هي .....1 ، -1.....

(ب) القيمة العظمى المحلية (ان وجدت) .....3.....عند x=-1.....

(ج) القيمة الصغرى المحلية (ان وجدت) .....-1.....عند x=1.....

ثالثاً:

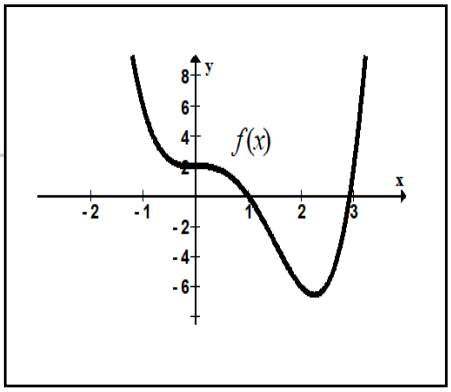


(أ) الاعداد الحرجة للدالة هي .....1 ، 0 ، -1.....

(ب) القيمة العظمى المحلية (ان وجدت) .....1.....عند x=0.....

(ج) القيمة الصغرى المحلية (ان وجدت) .....0.....عند $x=\pm 1$ وهي صغرى مطلقة

رابعاً:



(أ) الاعداد الحرجة للدالة هي .....2 ، 0.....

(ب) القيمة العظمى المحلية (ان وجدت) .....لا يوجد.....

(ج) القيمة الصغرى المحلية (ان وجدت) .....-6.....عند x=2 وهي مطلقة

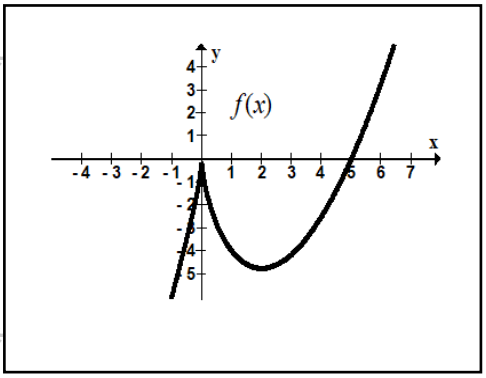
ملاحظة سيتم مناقشة القيم القصوى المحلية بشكل موسع في الدرس الرابع مع التزايد والتناقص

محمد عمر الخطيب

(1) يمثل الشكل الاتي بيان الدالة $f(x)$ اكمل كل مما يأتي

(أ) هل الدالة تحقق شروط نظرية القيمة القصوى على الفترة $(-\infty,\infty)$ مع ذكر السبب

لا يوجد لفترة ليست مغلقة



(ب) القيمة العظمى المطلقة (ان وجدت) لا يوجد

(ج) القيمة الصغرى المطلقة (ان وجدت) لا يوجد

(د) القيمة العظمى المحلية (ان وجدت) 0 عند $x=0$

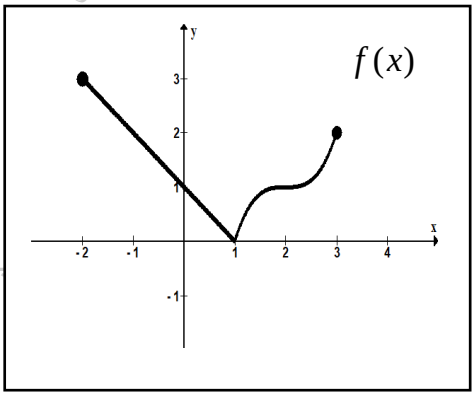
(هـ) القيمة الصغرى المحلية (ان وجدت) -5 عند $x=2$

---

(2) يمثل الشكل الاتي بيان الدالة $f(x)$ اكمل كل مما يأتي

(أ) هل الدالة تحقق شروط نظرية القيمة القصوى على الفترة $[-2,3]$ مع ذكر السبب

نعم لان الدالة متصلة على فترة مغلقة



(ب) القيمة العظمى المطلقة (ان وجدت) 3 عند $x=-2$

(ج) القيمة الصغرى المطلقة (ان وجدت) 0 عند $x=1$

(د) القيمة العظمى المحلية (ان وجدت) لا يوجد

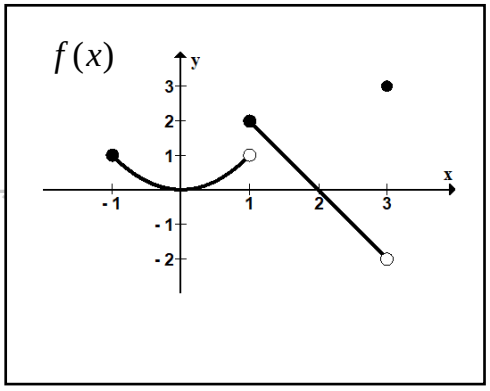
(هـ) القيمة الصغرى المحلية (ان وجدت) 0 عند $x=1$ هي مطلقة

---

(3) يمثل الشكل الاتي بيان الدالة $f(x)$ اكمل كل مما يأتي

(أ) هل الدالة تحقق شروط نظرية القيمة القصوى على الفترة $[-1,3]$ مع ذكر السبب

لا لان الدالة ليست متصلة على $[-1,3]$



(ب) القيمة العظمى المطلقة (ان وجدت) 3 عند $x=3$

(ج) القيمة الصغرى المطلقة (ان وجدت) لا يوجد

(د) القيمة الصغرى المحلية (ان وجدت) 0 عند $x=0$

(هـ) القيمة العظمى المحلية (ان وجدت) 2 عند $x=1$

محمد عمر الخطيب

القيم القصوى (المطلقة) تحليلاً

اختبار القيم

(1) إيجاد جميع الاعداد الحرجة في الفترة المغلقة المعرفة عليها الدالة

(2) ايجاد قيمة الدالة عند النقاط الحرجة واطراف الفترة المغلقة.

(3) تكون اكبر هذه القيم عظمى مطلقة وتكون اصغر هذه القيم صغرى مطلقة.

(1) اوجد القيم القصوى (المطلقة) للدالة : $f(x)=x^3-3x+1$ على الفترة $[0,3]$.

$f'(x)=3x^2-3$

$f'(x)=0$

$3x^2-1=0$

$x=-1,1$

الأعداد الحرجة فقط $x=1$ فقط

اختبار القيم

$f(0)=1$

$f(3)=19$

$f(1)=-1$

صغرى مطلقة -1 وعظمى مطلقة 19.

---

(2) اوجد القيم القصوى للدالة $f(x)=x+\frac{1}{x}$ على الفترة $\left[\frac{1}{2},2\right]$.

$f'(x)=1-\frac{1}{x^2}$

$=\frac{x^2-1}{x^2}$

$f'(x)=0$ ، $f'(x)$ غ.م

$x^2-1=0$ ، $x^2=0$

$x=\pm1$ ، $x=0$

الأعداد الحرجة هي $x=1$ فقط

$f(\frac{1}{2})=2.5$

$f(2)=2.5$

$f(1)=2$

صغرى مطلقة 2 ، عظمى مطلقة 2.5

---

(3) اوجد القيم القصوى للدالة $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$ على الفترة $[-3,2]$.

$f'(x)=\frac{1\cdot(x^2+1)-x(2x)}{(x^2+1)^2}$

$=\frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2}$

$=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$

$f'(x)=0$ ، $f'(x)$ غ.م

$1-x^2=0$ ، $x^2+1=0$

$x=\pm1$ ، لا يوجد حل

الاعداد الحرجة هي $x=\pm1$

$f(-3)=-0.3$

$f(2)=0.4$

$f(-1)=-0.5$

$f(1)=0.5$

صغرى مطلقة -0.5 ، عظمى مطلقة 0.5

محمد عمر الخطيب

(1) اوجد القيم القصوى للدالة $f(x)=x^2+e^x$ على الفترة $[0,1]$.

$f'(x)=2x+e^x$

$f'(x)=0$

$2x+e^x=0$

$x=-0.35$ من الحل

خارج المجال

لا يوجد اعداد حرجة

$f(0)=1$

$f(1)=1+e$

صغرى مطلقة 1 وعظمى مطلقة $1+e$

---

(2) اوجد القيم القصوى للدالة $f(x)=\tan^{-1}(x^2)$ على $[0,1]$.

$f'(x)=\frac{1}{(x^2)^2+1}\cdot 2x=\frac{2x}{x^4+1}$

$f'(x)=0$

$2x=0$

$x=0$

$f'(x)$ م.ع

$x^4+1=0$

لا يوجد حل

الأعداد الحرجة هي $x=0$

$f(0)=\tan^{-1}0=0$

$f(1)=\tan^{-1}1=\frac{\pi}{4}$

صغرى مطلقة 0 وعظمى مطلقة $\frac{\pi}{4}$

---

(3) اوجد القيم القصوى للدالة $f(x)=\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ على الفترة $[-1,1]$.

$f(x)=(4-x^2)^{-1/2}$

$f'(x)=-\frac{1}{2}(4-x^2)^{-3/2}\cdot(-2x)$

$=\frac{x}{(4-x^2)^{3/2}}$

$f'(x)=0$

$x=0$

$f'(x)$ م.ع

$4-x^2=0$

$x=\pm 2$ خارج المجال

الاعداد الحرجة هي $x=0$ فقط

$f(-1)=\frac{1}{\sqrt{3}}=0.7$

$f(1)=\frac{1}{\sqrt{3}}=0.7$

$f(0)=1/2$

صغرى مطلقة $1/2$ وعظمى مطلقة $\frac{1}{\sqrt{3}}$

---

(4) اوجد القيم القصوى للدالة $f(x)=x\sqrt{3-x}$ على الفترة $[-1,3]$.

$f'(x)=1\cdot\sqrt{3-x}+x\cdot\frac{-1}{2\sqrt{3-x}}$

$=\sqrt{3-x}-\frac{x}{2\sqrt{3-x}}$

$=\frac{2(3-x)-x}{2\sqrt{3-x}}$

$=\frac{6-3x}{2\sqrt{3-x}}$

$f'(x)=0$

$6-3x=0$

$x=2$

$f'(x)$ م.ع

$3-x=0$

$x=3$

الاعداد الحرجة هي $x=2, x=3$

$f(-1)=-2$

$f(3)=0$

$f(2)=2$

صغرى مطلقة -2 وعظمى مطلقة 2

محمد عمر الخطيب

(1) اوجد القيم القصوى للدالة $f(x)=x^{2/3}$ على $[-1,3]$.

$f'(x)=\frac{2}{3}x^{-1/3}=\frac{2}{3x^{1/3}}$

$f'(x)=0$ لا يوجد حل

$f'(x)$ غ.م.ع

$3x^{1/3}=0$

$x=0$

الاعداد الحرجة هي $x=$

$f(-1)=1$

$f(3)=3^{2/3}=\sqrt[3]{9}$

$f(0)=0$

$\sqrt[3]{9}$ عظمى مطلقة ، 0 صغرى مطلقة

---

(2) اوجد القيم القصوى للدالة $f(x)=x^2e^{-x}$ على $[0,4]$.

$f'(x)=2xe^{-x}+x^2e^{-x}(-1)$

$=e^{-x}(2x-x^2)$

$=\frac{2x-x^2}{e^x}$

$f'(x)=0$

$2x-x^2=0$

$x=0,\ x=2$

$f'(x)$ غ.م.ع

$e^x=0$ لا يوجد حل

الاعداد الحرجة هي $0,2$

$f(0)=0$

$f(4)=4^2e^{-4}=\frac{16}{e^4}=0.29$

$f(2)=2^2e^{-2}=\frac{4}{e^2}=0.54$

$\frac{4}{e^2}$ عظمى مطلقة ، 0 صغرى مطلقة

---

(3) اوجد القيم القصوى للدالة $f(x)=\sin x+\cos x$ على $[0,2\pi]$.

$f'(x)=\cos x-\sin x$

$f'(x)=0$

$\cos x-\sin x=0$

$-\sin x=-\cos x$

بالقسمة على $-\cos x$

$\tan x=1$

$x<\pi/4$

$Q_1\rightarrow x=\frac{\pi}{4}$

$Q_3\rightarrow x=\pi+\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{4}$

الاعداد الحرجة هي $\frac{\pi}{4}$ ، $\frac{5\pi}{4}$

$f(0)=1$

$f(2\pi)=1$

$f(\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}$

$f(\frac{5\pi}{4})=-\sqrt{2}$

$\sqrt{2}$ عظمى مطلقة ، $-\sqrt{2}$ صغرى مطلقة

---

(4) اوجد القيم القصوى للدالة $f(x)=\sin^{-1}(x)$

اولاً... اوجد مجال الدالة

$D=[-1,1]$

$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$f'(x)=0$ لا يوجد حل

$f'(x)$ غ.م.ع

$1-x^2=0$

$x=\pm1$

الاعداد الحرجة هي ±1

$f(-1)=\sin^{-1}(-1)=-\pi/2$

$f(1)=\sin^{-1}(1)=\pi/2$

$\frac{\pi}{2}$ عظمى مطلقة ، $-\frac{\pi}{2}$ صغرى مطلقة

(1) اوجد القيم القصوى للدالة $f(x)=\sqrt{4-x^2}$

اولاً... اوجد مجال الدالة

$4-x^2 \geq 0$

مجال الدالة

$D=[-2,2]$

$f'(x)=\frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}=\frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$

$f'(x)=0$ ، $x=0$

$f'(x)$ غ.م ، $x=\pm 2$

الأعداد الحرجة هي $0, \pm 2$

$f(-2)=0$

$f(2)=0$

$f(0)=4$

صغرى مطلقة 0 وعظمى مطلقة 4.

---

(2) اوجد القيم القصوى للدالة $f(x)=\sqrt{3+2x-x^2}$ على مجالها.

اولاً... اوجد مجال الدالة

مجال الدالة

$3+2x-x^2 \geq 0$

$D=[-1,3]$

$f'(x)=\frac{2-2x}{2\sqrt{3+2x-x^2}}=\frac{1-x}{2\sqrt{3+2x-x^2}}$

$f'(x)=0$ ، $1-x=0$ ، $x=1$

$f'(x)$ غ.م ، $3+2x-x^2=0$ ، $x=-1,3$

الأعداد الحرجة هي $-1, 1, 3$

$f(-1)=0$

$f(1)=2$

$f(3)=0$

صغرى مطلقة 0 وعظمى مطلقة 2

---

(3) اوجد القيم القصوى المطلقة للدالة

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & x<1\\ x^3-12x+12 & 1\leq x\leq 5\end{cases}$$

اولاً... اوجد مجال الدالة

$x \geq 0$

$[0,5]$ مجال الدالة

f: $\sqrt{x}$ على $[0,1)$ ، $x^3-12x+12$ على $[1,5]$

f': $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ على $(0,1)$ ، $3x^2-12$ على $(1,5)$

$f'(x)$ غ.م

(i) $x=1$ نقطة التزوج

(ii) $x=0$ أحد طرفي المجال

$f'(x)=0$

(i) $\frac{1}{2\sqrt{x}}=0$ ليس له حل.

(ii) $3x^2-12=0$ ، $x=-2$ ، $x=2$ خارج المجال الفرعي

قاعدة اليسار

قاعدة اليمين

الأعداد الحرجة هي $0, 1, 2$

$f(0)=0$

$f(5)=77$

$f(1)=1$

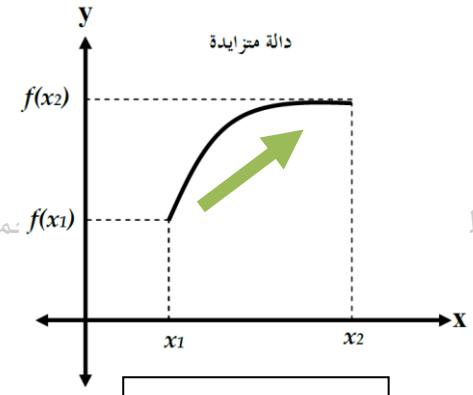
$f(2)=-4$

صغرى مطلقة -4

وعظمى مطلقة 77

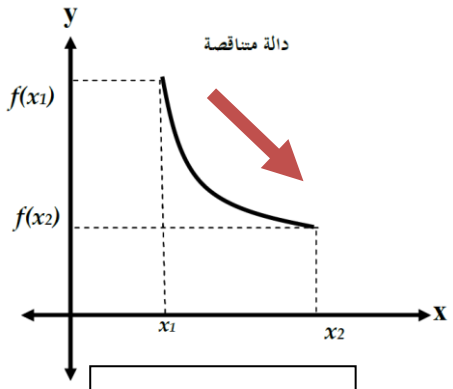
الدوال المتزايدة والمتناقصة

تعريف الدالة المتزايدة والدالة المتناقصة



$$x_1 < x_2$$
$$f(x_1) < f(x_2)$$

كلما زادات قيمة x تزيد قيمة y (العلاقة طردية)



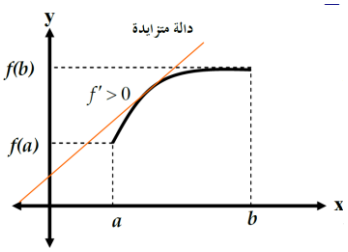
$$x_1 < x_2$$
$$f(x_1) > f(x_2)$$

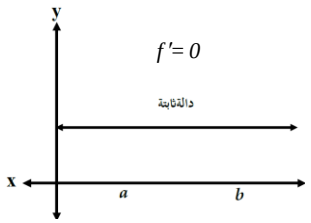
كلما زادات قيمة x تقل قيمة y (العلاقة عكسية)

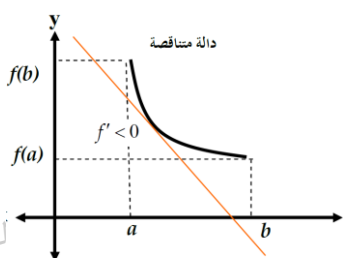
العلاقة بين سلوك الدالة (التزايد والتناقص) واشارة مشتقة الدالة (اشارة f')

اذا كانت

$f'(x) > 0$	$f'(x) = 0$	$f'(x) < 0$
لكل x في الفترة (a,b)	لكل x في الفترة (a,b)	لكل x في الفترة (a,b)
فان الدالة $f(x)$	فان الدالة $f(x)$	فان الدالة $f(x)$
تكون متزايدة على الفترة (a,b)	تكون ثابتة على الفترة (a,b)	تكون متناقصة على الفترة (a,b)

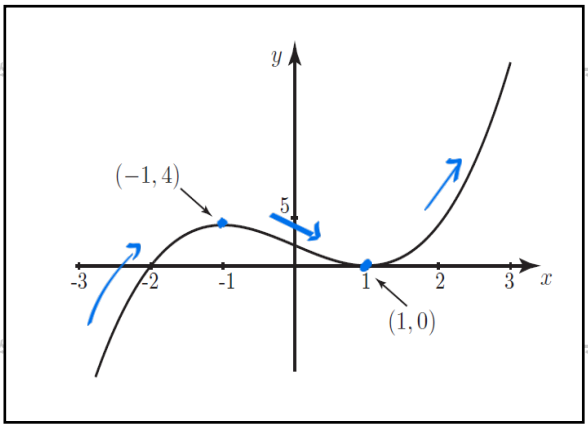






فترات التزايد وفترات التناقص للدالة (بيانياً)

يمثل كل شكل من الاشكال الاتية بيان الدالة $f(x)$ اوجد



(1) الاعداد الحرجة للدالة هي .....

(2) فترات التزايد هي.....

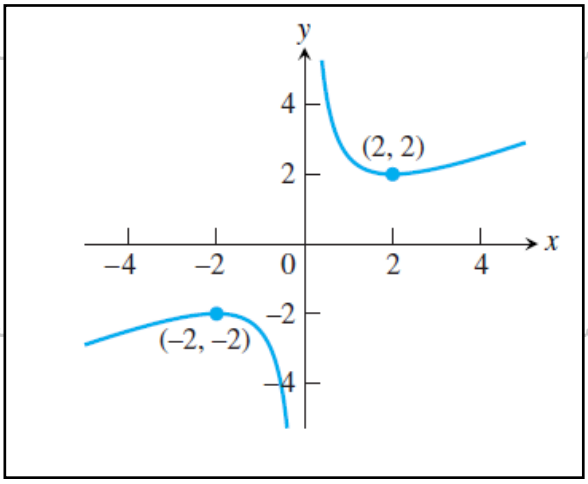
(3) فترة التناقص هي.....

(4) القيمة العظمى المطلقة (ان وجدت).....

(5) القيمة الصغرى المطلقة هي(ان وجدت).....

(6) القيمة العظمى المحلية (ان وجدت).....

(7) القيمة الصغرى المحلية (ان وجدت).....



(1) الاعداد الحرجة للدالة هي .....

(2) فترات التزايد هي.....

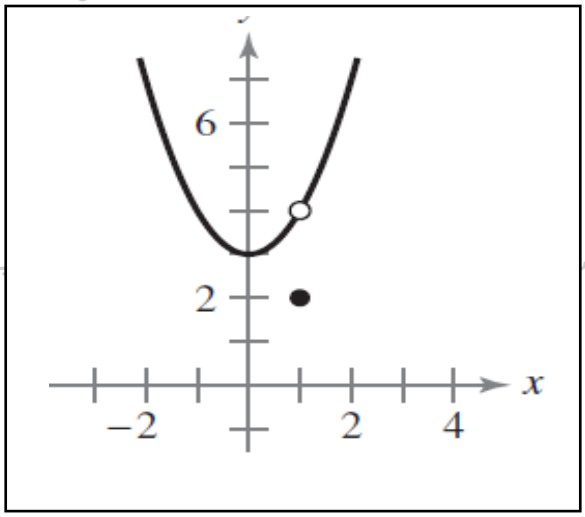
(3) فترات التناقص هي.....

(4) القيمة العظمى المطلقة (ان وجدت) .....

(5) القيمة الصغرى المطلقة(ان وجدت) .....

(6) القيمة العظمى المحلية (ان وجدت) .....

(7) القيمة الصغرى المحلية (ان وجدت) .....



(1) الاعداد الحرجة للدالة هي .....

(2) فترة التزايد هي.....

(3) فترة التناقص هي.....

(4) القيمة العظمى المطلقة (ان وجدت) .....

(5) القيمة الصغرى المطلقة (ان وجدت) .....

(6) القيمة العظمى المحلية (ان وجدت) .....

(7) القيمة الصغرى المحلية (ان وجدت) .....

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

فترات التزايد وفترات التناقص للدالة (تحليلياً)

(1) ايجاد اصفار المشتقة وقيم x التي عندها المشتقة غير موجودة وتعينها على خط الاعداد.

حتى وان لم تكن اعداد حرجة

(2) دراسة اشارة دالة المشتقة f' .

(3) تحديد سلوك الدالة f من خلال اشارة الدالة f' .

أ) اذا كانت اشارة الدالة f' موجبة (+ +) على فترة فان الدالة f تكون متزايدة على هذه الفترة.

ب) اذا كانت اشارة الدالة f' سالبة (- -) على فترة فان الدالة f تكون متناقصة على هذه الفترة.

(1) اوجد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة: $f(x)=x^3-3x^2-4$.

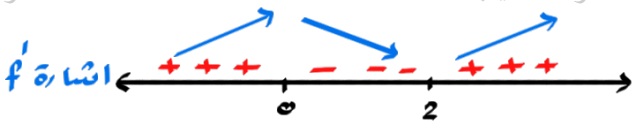
$D=(-\infty,\infty)$

$f'(x)=3x^2-6x$

$f'(x)=0$

$3x^2-6x=0$

$x=0$ ، $x=2$



فترات التزايد $(-\infty,0)\cup(2,\infty)$

فترة التناقص $(0,2)$

---

(2) اوجد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة: $f(x)=x-\sqrt{x-1}$.

$D=[1,\infty)$

$f'(x)=1-\frac{1}{2\sqrt{x-1}}$

$=\frac{2\sqrt{x-1}-1}{2\sqrt{x-1}}$

$f'(x)=0$

$2\sqrt{x-1}-1=0$

$2\sqrt{x-1}=1$

$\sqrt{x-1}=\frac{1}{2}$

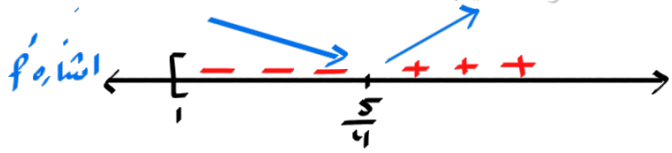
$x-1=\frac{1}{4} \Rightarrow x=\frac{5}{4}$ ✓

$f'(x)$ غ.م

$2\sqrt{x-1}=0$

$x-1=0$

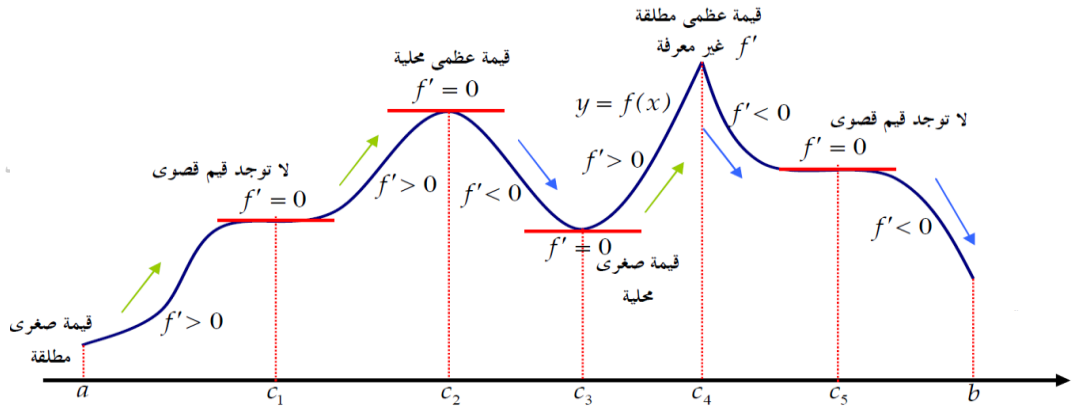
$x=1$ ✓



فترة التناقص $(1,\frac{5}{4})$

فترة التزايد $(\frac{5}{4},\infty)$

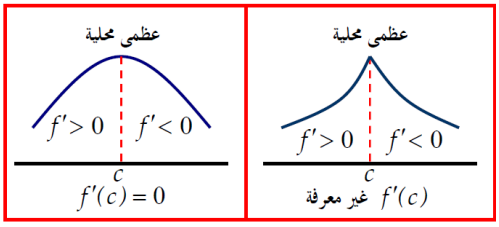
القيم القصوى المحلية: اختبار المشتقة الاولى للقيم القصوى المحلية



أ) اذا كانت $f(x)$ دالة متصلة ، c نقطة حرجة داخلية للدالة.

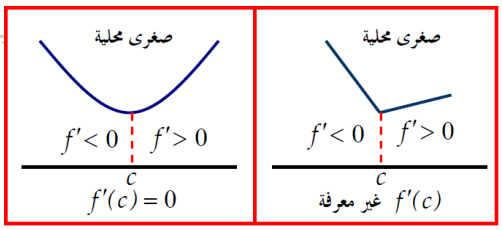
1) فان الدالة f يكون لها قيمة عظمى محلية اذا كانت المشتقة تغيير اشارتها من موجب (+) الى سالب (-)

النقطة الحرجة	c	
	$x<c$	$x>c$
إشارة f'	+	−
سلوك الدالة f	الدالة تزايدية	الدالة تناقصية
للدالة عند c قيمة عظمى محلية		



2) فان الدالة f يكون لها قيمة صغرى محلية اذا كانت المشتقة تغيير اشارتها من سالب (-) الى موجب(+)

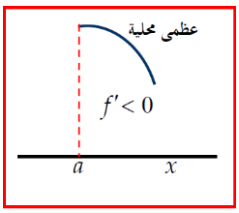
النقطة الحرجة	c	
	$x<c$	$x>c$
إشارة f'	−	+
سلوك الدالة f	الدالة تناقصية	الدالة تزايدية
للدالة عند c قيمة صغرى محلية		



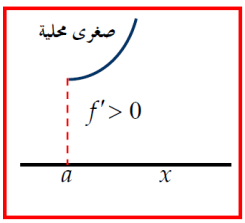
هذا التعريق من خارج الكتاب للفقرة ب ،ج

ب) اذا كانت $f(x)$ دالة متصلة ، a نقطة طرفية من اليسار.

(بداية فترة التناقص)

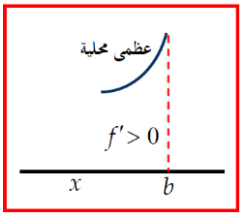


(بداية فترة االتزايد)

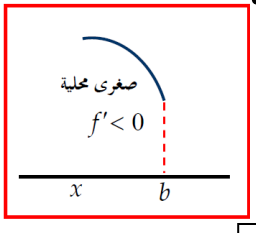


ج) اذا كانت $f(x)$ دالة متصلة ، b نقطة طرفية من اليمين.

(نهاية فترة التزايد)



(نهاية فترة التناقص)



كل قيمة قصوى مطلقة ليست على الاطراف ممكن اعتبارها قيمة قصوى محلية

محمد عمر الخطيب

(1) لتكن : $f(x)=x^4-18x^2+9$ اوجد

(أ) الاعداد الحرجة للدالة (ب) فترات التزايد والتناقص للدالة (ج) القيم القصوى المحلية.

ملاحظة: ص.م ← صغرى محلية
ع.م ← عظمى محلية

$D=(-\infty,\infty)$

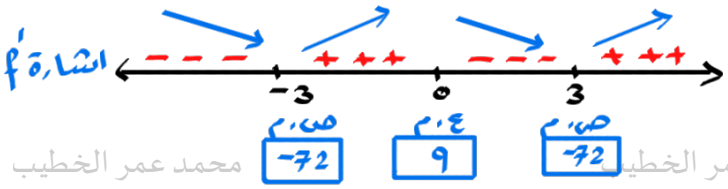
$f'(x)=4x^3-36x$

$f'(x)=0$

$4x^3-36x=0$

$x=0\ ,\ x=\pm 3$

☆ الاعداد الحرجة هي $0,\pm 3$



فترات التناقص $(-\infty,-3)\cup(0,3)$

فترات التزايد $(-3,0)\cup(3,\infty)$

صغرى محلية -72 عند $x=\pm 3$

عظمى محلية 9 عند $x=0$

---

(2) لتكن : $f(x)=2x\sqrt{x+1}$ اوجد

(أ) الاعداد الحرجة للدالة (ب) فترات التزايد والتناقص للدالة (ج) القيم القصوى المحلية.

$D=[-1,\infty)$

$f'(x)=2\sqrt{x+1}+2x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$

$=2\sqrt{x+1}+\frac{x}{\sqrt{x+1}}$

$=\frac{2(x+1)+x}{\sqrt{x+1}}$

$=\frac{3x+2}{\sqrt{x+1}}$

$f'(x)=0$

$3x+2=0$

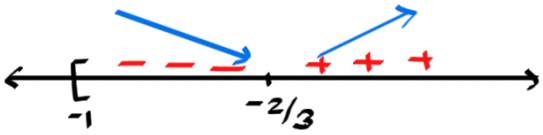
$x=-2/3$

ع.م $f'(x)$,

$\sqrt{x+1}=0$

$x=-1$

الاعداد الحرجة هي $-1\ ,\ -\frac{2}{3}$



فترة التناقص $(-1,-\frac{2}{3})$

فترة التزايد $(-\frac{2}{3},\infty)$

تبه صغرى محلية عند $x=-\frac{2}{3}$

وهي $f(-\frac{2}{3})=\frac{-4\sqrt{3}}{9}$

ملاحظة (من اجابات دليل المعلم)
اعتبر الدالة تبه عظمى محلية عند $x=-1$
رغم انها طرف فترة .

محمد عمر الخطيب

(1) لتكن : $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ **اوجد**

(أ) الاعداد الحرجة للدالة (ب) فترات التزايد والتناقص للدالة (ج) القيم القصوى المحلية.

$D=(-\infty,\infty)$

$f'(x)=\dfrac{1(x^2+1)-x(2x)}{(x^2+1)^2}$

$=\dfrac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2}$

$=\dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$

$f'(x)=0$ ع.م $f'(x)$

$1-x^2=0$ $x^2+1=0$

$x=\pm 1$ لايوجد حل

± 1 الاعداد الحرجة هي

اشارة f'

-1 ص.م 1 ع.م

متزايدة $(-1,1)$ متناقصة $(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$

نقاط الحرجة $(1,-1)$

عند $x=-1$ قيمة صغرى محلية $-\frac{1}{2}$

عند $x=1$ قيمة عظمى محلية $\frac{1}{2}$

---

(2) لتكن : $f(x)=\tan^{-1}(x^2)$ **اوجد**

(أ) الاعداد الحرجة للدالة (ب) فترات التزايد والتناقص للدالة (ج) القيم القصوى المحلية.

$D=(-\infty,\infty)$

$f'(x)=\dfrac{1}{(x^2)^2+1}\cdot 2x=\dfrac{2x}{x^4+1}$

$f'(x)=0$ ع.م $f'(x)$

$2x=0$ $x^4+1=0$

$x=0$ لايوجد حل

$x=0$ الاعداد الحرجة هي

اشارة f'

0 ص.م

متناقصة $(-\infty,0)$

متزايدة $(0,\infty)$

عند $x=0$ قيمة صغرى محلية 0

---

(3) بين ان الدالة $f(x)=\sin^{-1}\left(\dfrac{2}{\pi}\tan^{-1}x\right)$ **متزايدة على مجالها** (R)

$f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2}{\pi}\tan^{-1}x\right)}}\cdot\dfrac{2}{\pi}\cdot\dfrac{1}{x^2+1}>0$

بما ان $f'(x)>0$ لكل قيم x في مجال الدالة فان الدالة متزايدة على R

محمد عمر الخطيب

D = (-∞, ∞)

(1) لتكن : $f(x)=(x-1)^{1/3}$ **اوجد**

(أ) الاعداد الحرجة للدالة (ب) فترات التزايد والتناقص للدالة (ج) القيم القصوى المحلية وبين نوعها

$f'(x)=\frac{1}{3}(x-1)^{-2/3}=\frac{1}{3(x-1)^{2/3}}$

$f'(x)=0$ لا يوجد حل

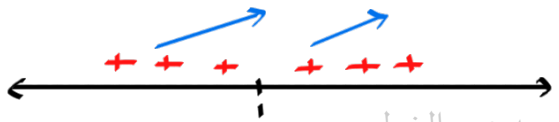
$f'(x)$ غ.م

$x-1=0$

$x=1$

الأعداد الحرجة هي $x=1$

اشارة f'



فترة التزايد $(-\infty,\infty)$

* لاحظ ان الدالة متصلة عند $x=1$

لا يوجد قيم قصوى محلية .

* يوجد مماس رأسي عند $x=1$

---

(2) لتكن : $f(x)=x^2e^{-x}$ **اوجد**

(أ) الاعداد الحرجة للدالة (ب) فترات التزايد والتناقص للدالة (ج) القيم القصوى المحلية. وبين نوعها

D = (-∞, ∞)

$f'(x)=2xe^{-x}+x^2e^{-x}(-1)$

$=e^{-x}(2x-x^2)=\frac{2x-x^2}{e^x}$

$f'(x)=0$

$2x-x^2=0$

$x=0,\ x=2$

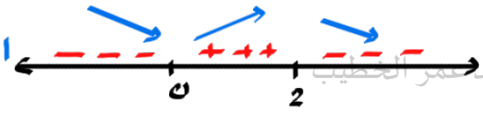
$f'(x)$ غ.م

$e^x=0$

لا يوجد حل

الأعداد الحرجة هي 0, 2

اشارة f'



فترات التناقص $(-\infty,0)\cup(2,\infty)$

فترة التزايد $(0,2)$

قيمة صغرى محلية 0 عند $x=0$

قيمة عظمى محلية $\frac{4}{e^2}$ عند $x=2$

D = R / {0}

(3) لتكن : $f(x)=\frac{x^2-1}{x}$ **اوجد**

(أ) الاعداد الحرجة للدالة (ب) فترات التزايد والتناقص للدالة (ج) القيم القصوى المحلية. وبين نوعها

$f'(x)=\frac{2x(x)-(x^2-1)(1)}{x^2}$

$=\frac{2x^2-x^2+1}{x^2}=\frac{x^2+1}{x^2}$

$f'(x)=0$

$x^2+1=0$

لا يوجد حل

$f'(x)$ غ.م

$x^2=0$

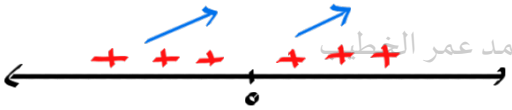
$x=0\notin D$

لا يوجد اعداد حرجة .

رغم انه لا يوجد اعداد حرجة .

الا انه يجب تقسيم الجدول على اساس

اشارة f'



فترات التزايد $(-\infty,0)\cup(0,\infty)$

* الدالة غير متصلة عند $x=0$.

لا يوجد قيم قصوى محلية .

* يوجد خط تقارب رأسي $x=0$

محمد عمر الخطيب

(1) لتكن : $f(x) = x \ln x$ اوجد

$x > 0$

$D = (0, \infty)$

(أ) الاعداد الحرجة للدالة (ب) فترات التزايد والتناقص للدالة (ج) القيم القصوى المحلية وبين نوعها

$f'(x) = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}$

$= \ln x + 1$

$f'(x) = 0$

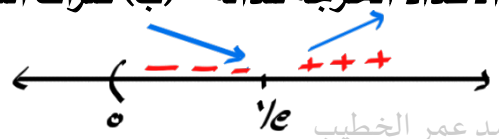
$\ln x + 1 = 0$

$\ln x = -1$

$x = e^{-1} = \frac{1}{e}$

الأعداد الحرجة هي $x = \frac{1}{e}$

اشارة f'



ص.م

فترة التناقص $(0, \frac{1}{e})$

فترة التزايد $(\frac{1}{e}, \infty)$

قيمة صغرى محلية $-\frac{1}{e}$ عند $x = \frac{1}{e}$

---

(2) لتكن : $f(x) = \ln(x^2 - 1)$ اوجد

اشارة $x^2 - 1$



(أ) الاعداد الحرجة للدالة (ب) فترات التزايد والتناقص للدالة (ج) القيم القصوى المحلية وبين نوعها

$D = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

$f'(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}$

$f'(x) = 0$

$2x = 0$

$x = 0 \notin D$

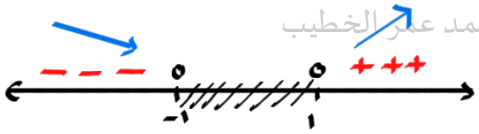
ع.م $f'(x)$

$x^2 - 1 = 0$

$x = \pm 1 \notin D$

لا يوجد اعداد حرجة .

اشارة f'



فترة التناقص $(-\infty, -1)$

فترة التزايد $(1, \infty)$

لا يوجد قيم قصوى محلية .

---

(3) لتكن : $f(x) = x^{\frac{4}{3}} + 4x^{\frac{1}{3}}$ اوجد.

$D = (-\infty, \infty)$

(أ) الاعداد الحرجة للدالة (ب) فترات التزايد والتناقص للدالة (ج) القيم القصوى المحلية وبين نوعها.

$f'(x) = \frac{4}{3} x^{\frac{1}{3}} + \frac{4}{3} x^{-\frac{2}{3}}$

$= \frac{4}{3}\left(x^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}\right)$

$= \frac{4}{3}\left(\frac{x^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{2}{3}} + 1}{x^{\frac{2}{3}}}\right) = \frac{4}{3} \quad \frac{x+1}{x^{\frac{2}{3}}}$

$f'(x) = 0$

$x + 1 = 0$

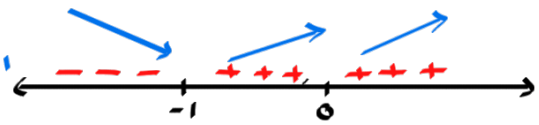
$x = -1$

ع.م $f'(x)$

$x = 0$

الاعداد الحرجة هي $-1, 0$

اشارة f'



فترة التناقص $(-\infty, -1)$

فترة التزايد $(-1, \infty)$

قيمة صغرى محلية 3 عند $x = -1$

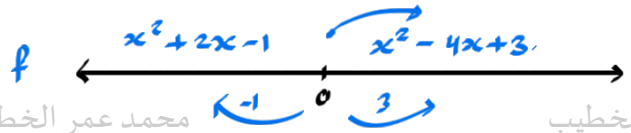
☆ يوجد عاس رأسي عند $x = 0$.

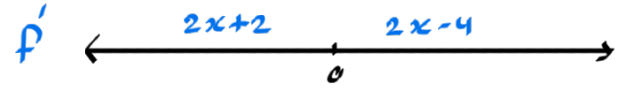
ليس قيمة قصوى محلية .

محمد عمر الخطيب

(1) اوجد القيم القصوى المحلية للدالة

$$f(x)=\begin{cases}x^2+2x-1 & x<0\\ x^2-4x+3 & x\geq 0\end{cases}$$





$f'(x)=0$

(i) $2x+2=0$

$x=-1$ ✓

(ii) $2x-4=0$

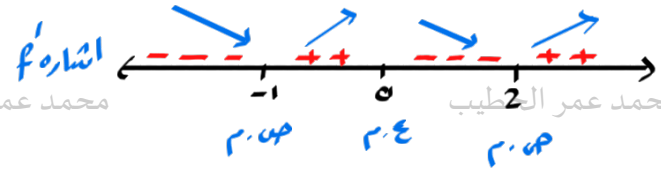
$x=2$ ✓

$f'(x)$ غ.م

$x=0$

عدم اتصال

$-1, 0, 2$ الأعداد الحرجة هي



عند $x=-1$ قيمة صغرى محلية -2

عند $x=2$ قيمة صغرى محلية -1

عند $x=3$ قيمة عظمى محلية 0

---

(2) لتكن : $y=\sin^2 x$ اوجد

(أ) الاعداد الحرجة للدالة (ب) فترات التزايد والتناقص للدالة (ج) القيم القصوى المحلية.

$D=(-\infty,\infty)$

$f(x)=\sin^2 x=(\sin x)^2$

$f'(x)=2(\sin x)\cdot\cos x=\sin 2x$

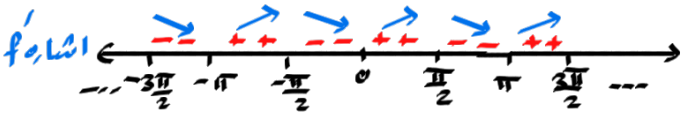
$f'(x)=0$

$\sin 2x=0$

$2x$ < 0 (بديهي) ✓ ; π (تأكد) ✓ — لماذا توقفنا عند π؟

$2x=0+n\pi$

$x=n\frac{\pi}{2}, n\in\mathbb{Z}$



فترة التزايد $(0,\frac{\pi}{2})+n\pi$

فترة التناقص $(\frac{\pi}{2},\pi)+n\pi$

عند $x=n\pi$ قيمة صغرى محلية (مغلقة) 0

عند $x=n\frac{\pi}{2}$ قيمة عظمى محلية (مغلقة) 1

محمد عمر الخطيب

(1) اوجد فترات التزايد والتناقص للدالة $f(x)=\sin x+\cos x$

$D=(-\infty,\infty)$

$f'(x)=\cos x-\sin x$

$f'(x)=0$

$\cos x-\sin x=0$

$-\sin x=-\cos x$

بالقسمة على $-\cos x$

$\frac{-\sin x}{-\cos x}=\frac{-\cos x}{-\cos x}$

$\tan x=1$



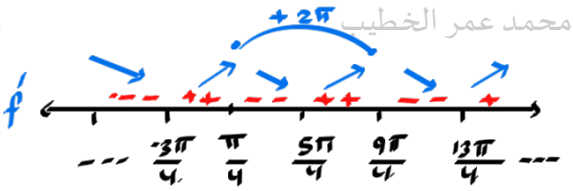
$x=\frac{\pi}{4}+n\pi$

الاعداد المحرجة

خذ قيم مختلفة لـ n مثلاً

$n=0,1,2,3,\dots$

$\dots,-3,-2,-1$



فترات التناقص

$(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4})+2n\pi$

فترات التزايد

$(\frac{5\pi}{4},\frac{9\pi}{4})+2n\pi$

---

(2) لتكن : $f(x)=\sin x\cos x$ **على** $[0,2\pi]$ **اوجد القيم القصوى المحلية وبين نوعها وحدد اي منها مطلقة**

$f'(x)=\cos x\cdot\cos x+\sin x(-\sin x)$

$=\cos^2x-\sin^2x$

$f'(x)=0$

$\cos^2x-\sin^2x=0$

$-\sin^2x=-\cos^2x$

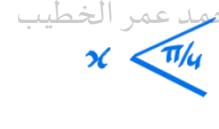
بالقسمة على $-\cos^2x$

$\frac{-\sin^2x}{-\cos^2x}=\frac{-\cos^2x}{-\cos^2x}$

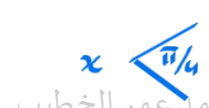
$\tan^2x=1$

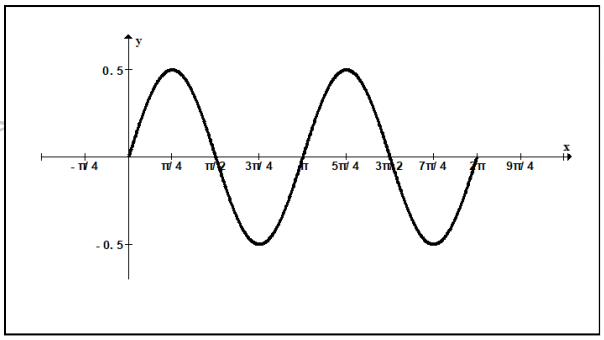
$\tan x=-1\ ,\ \tan x=1$

(i) $\tan x=1$

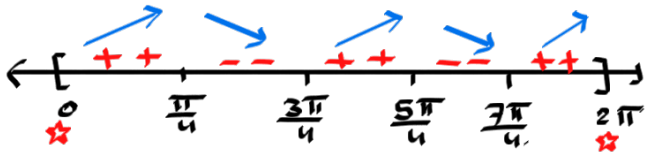


(ii) $\tan x=-1$





الاعداد المحرجة هي $\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4}$



$x=0,\frac{3\pi}{4},\frac{7\pi}{4}$ عند يوجد صغرى محلية $-\frac{1}{2}$

$x=\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4},2\pi$ عند يوجد عظمى محلية $\frac{1}{2}$

$f(0)=0\ ,\ f(\frac{\pi}{4})=\frac{1}{2}$

$f(\frac{3\pi}{4})=-\frac{1}{2}\ ,\ f(\frac{5\pi}{4})=-\frac{1}{2}$

$f(\frac{7\pi}{4})=-\frac{1}{2}\ ,\ f(2\pi)=0$

☆ عظمى مطلقة $\frac{1}{2}$

☆ صغرى مطلقة $-\frac{1}{2}$

فترات التزايد والتناقص بيانياً من الدالة $f'(x)$

الخطوات

ايجاد جميع اصفار المشتقة الأولى وقيم x التي عندها المشتقة غير موجودة وتعينها على خط الاعداد.

أ) اذا كان بيان الدالة f' فوق محور السينات فان اشارة f' موجبة (+) اي ان الدالة f تكون متزايدة على هذه الفترة.

ب) اذا كان بيان الدالة f' تحت محور السينات فان اشارة f' سالبة (-)اي ان الدالة f تكون متناقصة على هذه الفترة.

يفضل تحويل الرسم الى خط اعداد (اشارة المشتقة)

تطابق الرسم مع الخط

(الرسم f' والخط f')

فوق محور x ← موجب

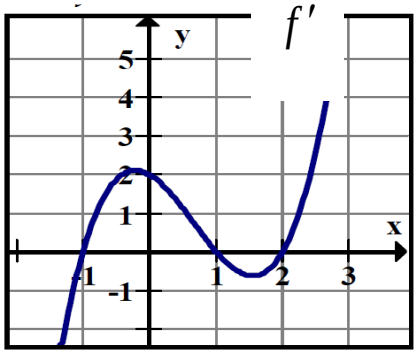
تحت محور x ← سالب

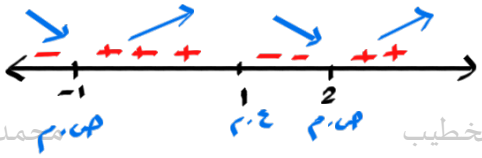
اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة $f'(x)$ في ايجاد

(1) فترات التزيد والتناقص للدالة $f(x)$

(2) قيم x التي عندها القيم القصوى المحلية للدالة ثم حدد نوعها.

b)





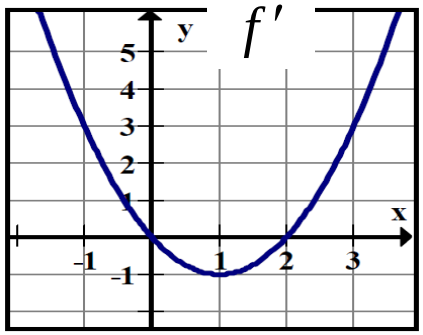
فترات التناقص $(2,1) \cup (1,-\infty)$

فترات التزايد $(\infty,2) \cup (1,-1)$

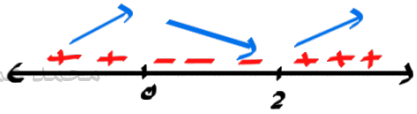
صغرى محلية عند $x = -1, 2$

عظمى محلية عند $x = 1$

a)



تطابق الرسم (f') مع الخط (f')



اشارة f'

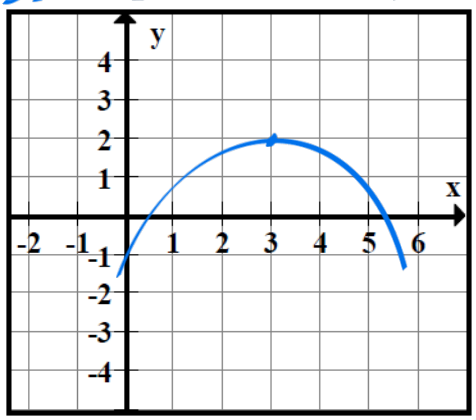
فترات التزايد $(\infty,2) \cup (0,-\infty)$

فترة التناقص $(2,0)$

عظمى محلية عند $x=0$ وصغرى محلية عند $x=2$

☆ يوجد رسومات صحيحة كثيرة

(1) استخدم المعطيات التالية في رسم بيان تقريبي للدالة $f(x)$



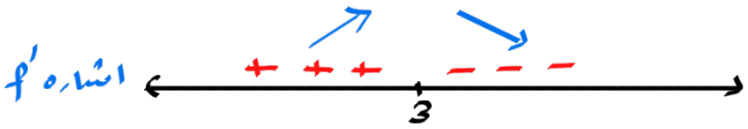
$f(3)=2 \quad , f'(3)=0$ ← مماس أفقي

$f'(x)>0 \, , x<3$

$f'(x)<0 \, , x>3$

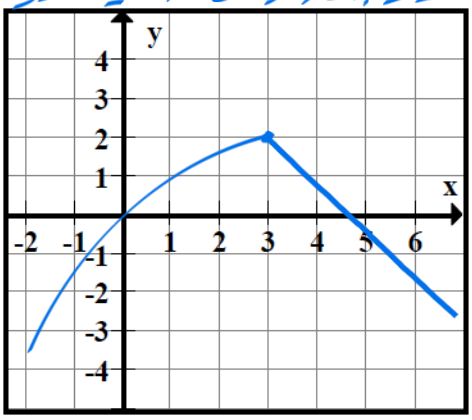
☆ حول المعطيات على شكل إشارة

إشارة f'



يوجد رسومات صحيحة كثيرة

(2) استخدم المعطيات التالية في رسم بيان تقريبي للدالة $f(x)$

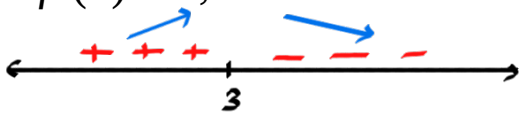


$f(3)=2 \quad , f'(3)$ غير موجودة ← ركن، أو عدم اتصال

$f'(x)>0 \, , x<3$

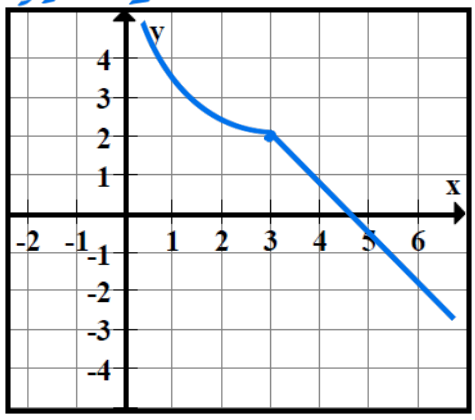
$f'(x)<0 \, , x>3$

إشارة f'



يوجد رسومات صحيحة كثيرة

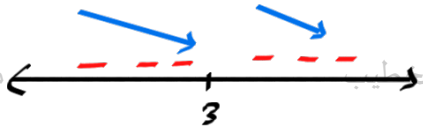
(3) استخدم المعطيات التالية في رسم بيان تقريبي للدالة $f(x)$



$f(3)=2 \quad , f'(3)$ غير موجودة

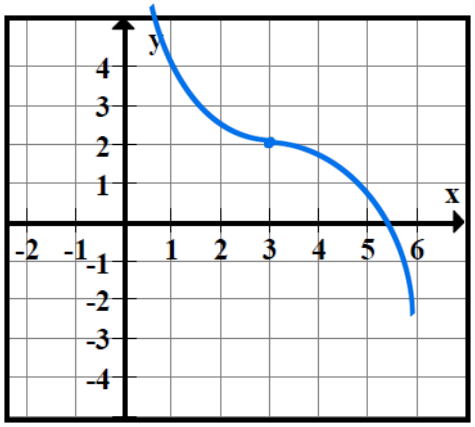
$f'(x)<0 \, , x\neq 3$

إشارة f'



---

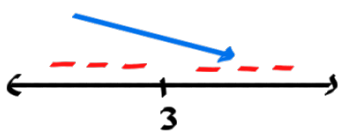
(4) استخدم المعطيات التالية في رسم بيان تقريبي للدالة $f(x)$



$f(3)=2 \quad , f'(3)=0$ ← مماس أفقي

$f'(x)<0 \, , x\neq 3$

إشارة f'



(1) اذا كانت f دالة متزايدة لها معكوس f^{-1} ، فاثبت ان الدالة f^{-1} متزايدة

الاثبات : بما أن f دالة متزايدة فان $f'>0$.

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} > 0$$ لان البسط والمقام كلاهما موجب

بما ان مشتقة الدالة المعكسية موجبة فانها متزايدة #

---

(2) اذا كانت f و g دوال متزايدة ، فاثبت ان الدالة $h(x)=f(g(x))$ دالة متزايدة

الاثبات : بما أن f, g دوال متزايدة فان $f'>0, g'>0$

$$h'(x) = \underbrace{f'(g(x))}_{\text{موجب}} \cdot \underbrace{g'(x)}_{\text{موجب}} > 0$$

بما أن $h'(x)>0$ فان الدالة $h(x)$ متزايدة . #

---

(3) اذا كانت $f'(x)>g'(x)$ لكل $x>a$ حيث $f(a)=g(a)$ ، فاثبت ان $f(x)>g(x)$

لكل x لكل $h(x)>h(a)$ ∴

من تعريف التزايد

$f(x)-g(x) > f(a)-g(a)=0$

$f(x)-g(x)>0$

$f(x)>g(x)$ #.

الاثبات : لتكن

$h(x)=f(x)-g(x)$

$h'(x)=f'(x)-g'(x)>0$

الدالة $h(x)$ متزايدة

لكل $x>a$.

---

(4) استخدم السؤال السابق في اثبات ان $x-1>\ln x$ لكل $x>1$

لتكن $x>1$ فان $\frac{1}{x}<1$

$g'(x)<f'(x)$, $g(1)=f(1)$

$g(x)<f(x)$

$\ln x < x-1$ #

الاثبات : لتكن

$f(x)=x-1$

$f'(x)=1$

$g(x)=\ln x$

$g'(x)=\frac{1}{x}$

$f(1)=0$, $g(1)=0$ $\Rightarrow f(1)=g(1)$

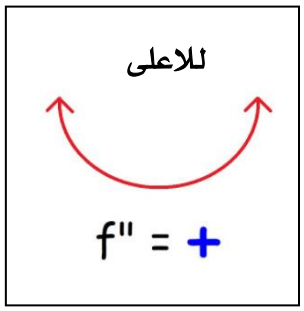
التقعر

الرسم البياني للدالة $y = f(x)$ يكون مقعراً للاعلى على الفترة المفتوحة I

(1) اذا كان منحنى الدالة يقع فوق جميع مماسته.

او (2) اذا كان $y' = f'(x)$ دالة متزايدة على الفترة المفتوحة I.

او (3) اذا كان $f''(x) > 0$ على الفترة المفتوحة I.

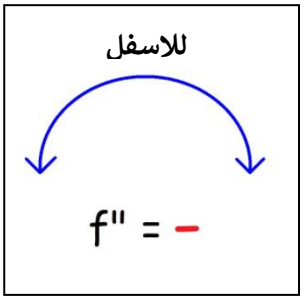


الرسم البياني للدالة $y = f(x)$ يكون مقعراً للاسفل على الفترة المفتوحة I

(1) اذا كان منحنى الدالة يقع تحت جميع مماسته.

او (2) اذا كان $y' = f'(x)$ دالة متناقصة على الفترة المفتوحة I.

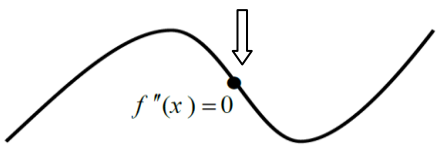
او (3) اذا كان $f''(x) < 0$ على الفترة المفتوحة I.



نقطة الانعطاف

اذا كانت $f(x)$ دالة متصلة على الفترة المفتوحة (a,b) والتمثيل البياني يغير اتجاه التقعر عند النقطة $c \in (a,b)$ فان النقطة $(c, f(c))$ تسمى نقطة انعطاف.

ملاحظة: اذا كانت الدالة غير متصلة عند $x = c$ فانها لا تعتبر نقطة انقلاب (انعطاف) حتى لوغيرت الدالة اتجاه التقعر عندها



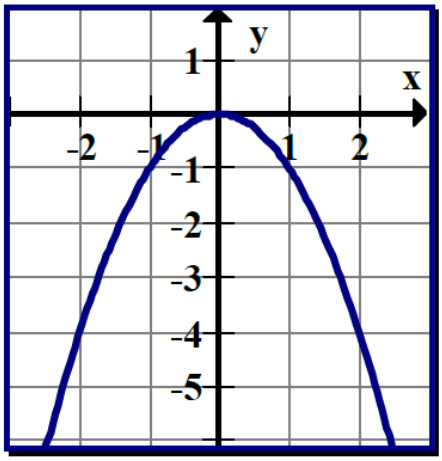
محمد عمر الخطيب

فترات التقعر للدالة (بيانياً) من الدالة f

مباشر

اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة f ، اوجد في كل حالة مما ياتي .

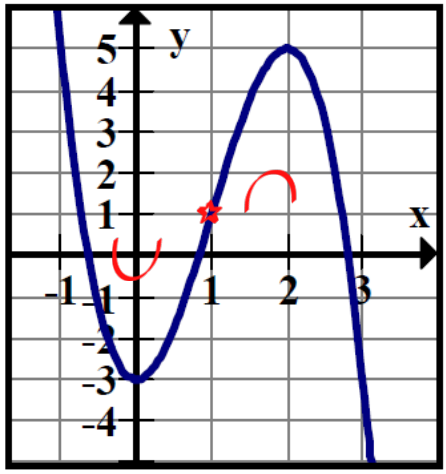
(1) فترات التقعر للاعلى وفترات التقعر للاسفل (2) نقاط الانعطاف.



فترة التقعر للاسفل $(-\infty, \infty)$

لا يوجد نقطة انعطاف .

☆ يفضل تحديد نقط الانقلاب اولا

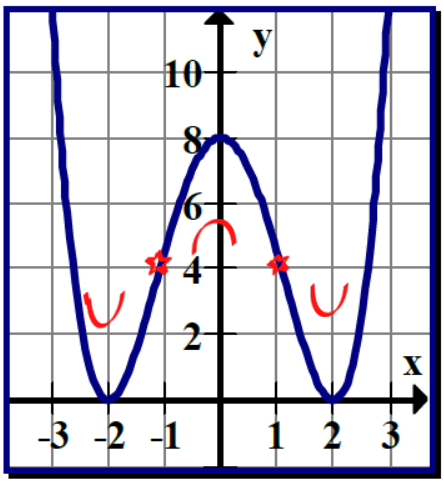


فترة التقعر للاعلى $(-\infty, 1)$

فترة التقعر للاسفل $(1, \infty)$

نقطة الانعطاف $(1, 1)$

تزوج مرتبة وليس فترة .



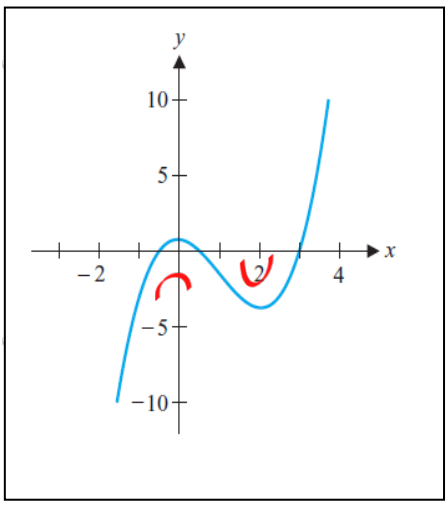
فترة التقعر للاعلى $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

فترة التقعر للاسفل $(-1, 1)$

نقاط الانقلاب $(1, 4)$ و $(-1, 4)$

محمد عمر الخطيب

(1) اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة f للاجابة عن الاسئلة التالية:



(أ) فترة التزايد للدالة $f(x)$ هي ..... $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$

(ب) فترة التناقص للدالة $f(x)$ هي ..... $(0, 2)$

(ج) للدالة $f(x)$ قيمة عظمى محلية عند ..... $x = 0$

(د) للدالة $f(x)$ قيمة صغرى محلية عند ..... $x = 2$

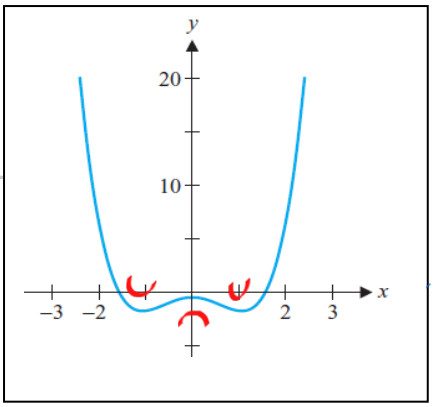
(هـ) فترة التقعر للاعلى هي ..... $(1, \infty)$

(و) فترة التقعر للاسفل هي ..... $(-\infty, 1)$

(ي) للدالة نقطة انعطاف عند ..... $x = 1$

---

(2) اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة f للاجابة عن الاسئلة التالية:



(أ) فترة التزايد للدالة $f(x)$ هي ..... $(-1, 0) \cup (1, \infty)$

(ب) فترة التناقص للدالة $f(x)$ هي ..... $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$

(ج) للدالة $f(x)$ قيمة عظمى محلية عند ..... $x = 0$

(د) للدالة $f(x)$ قيمة صغرى محلية عند ..... $x = \pm 1$ وهي مطلقة

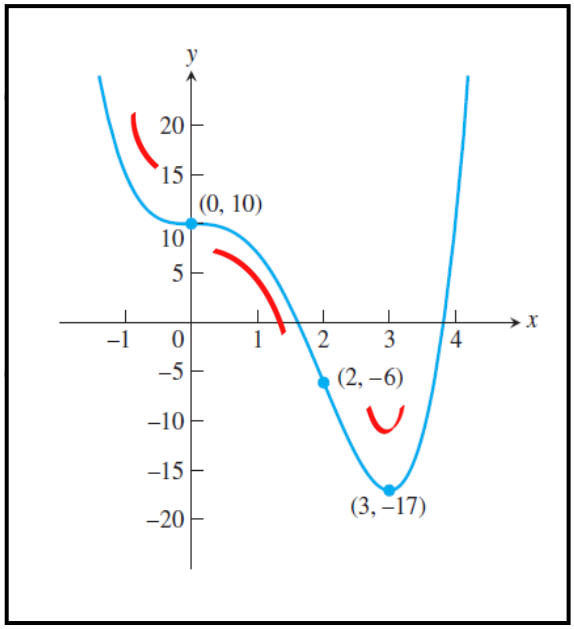
(هـ) فترة التقعر للاعلى هي ..... $(-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \infty)$

(و) فترة التقعر للاسفل هي ..... $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

(ي) للدالة نقطة انعطاف عند ..... $x = \pm \frac{1}{2}$

محمد عمر الخطيب

(1) اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة f للاجابة عن الاسئلة التالية:



(أ) اوجد الاعداد الحرجة للدالة..... $x=0 , x=3$ ..... عندها مماسات افقية

(ب) اوجد فترات التناقص للدالة..... $(-\infty, 3)$ .....

(ج) اوجد فترات التزايد للدالة..... $(3, \infty)$ .....

(د) اوجد القيم القصوى المطلقة وبين نوعها

..... صغرى مطلقة -17 عند $x=3$ .....

(هـ) اوجد فترة التقعر للاسفل. ..... $(0, 2)$ .....

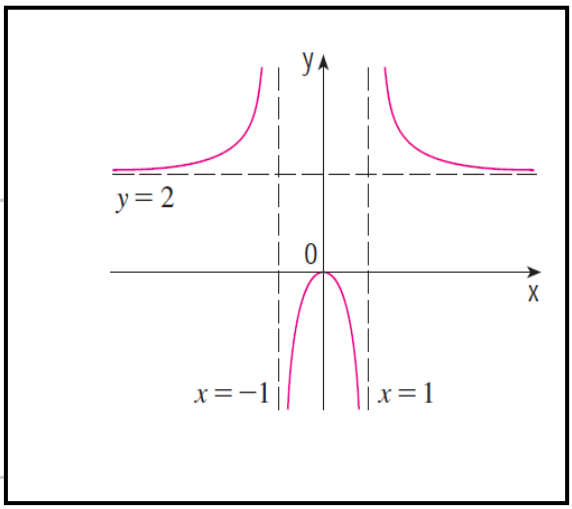
(و) اوجد فترات التقعر للاعلى. ..... $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$ .....

(ل) اوجد نقاط الانعطاف للدالة..... $(0, 10)$, $(2, -6)$ .....

(ي) اوجد الفترة التي تكون عندها اشارة الدالة f' والدالة f'' سالبتين..... $(0, 2)$ .....

---

(2) اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة f للاجابة عن الاسئلة التالية:



(أ) اوجد الاعداد الحرجة للدالة..... $x=0$ .....

(ب) اوجد فترات التناقص للدالة..... $(0, 1) \cup (1, \infty)$ .....

(ج) اوجد فترات التزايد للدالة..... $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$ .....

(د) اوجد فترات التقعر للاسفل..... $(-1, 1)$ .....

(هـ) اوجد فترات التقعر للاعلى..... $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ .....

(و) هل يوجد نقاط انعطاف للدالة..... لا يوجد .....

(ل) اوجد القيم القصوى المحلية وبين نوعها. ..... قيمة عظمى محلية 0 عند $x=0$ .....

(ي) اوجد القيم القصوى المطلقة على الفترة $(-1,1)$ وبين نوعها. ..... قيمة عظمى مطلقة 0 عند $x=0$ .....

محمد عمر الخطيب

فترات التقعر للدالة (تحليلياً)

(1) ايجاد جميع النقاط التي تجعل المشتقة الثانية تساوي صفر او غير موجودة وتعينها على خط الاعداد.

(2) دراسة اشارة المشتقة الثانية f''.

(3) تحديد سلوك الدالة f من خلال اشارة الدالة f''.

أ) اذا كانت اشارة الدالة f'' موجبة (+)على فترة فان الدالة f تكون مقعرة للاعلى على هذه الفترة.

ب) اذا كانت اشارة الدالة f'' سالبة (-)على فترة فان الدالة f تكون مقعرة للاسفل على هذه الفترة.

لتكن: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

اوجد (أ) فترات التقعر للاعلى وفترات التقعر للاسفل (ب) نقاط الانعطاف

$D = (-\infty, \infty)$

$f'(x) = 3x^2 - 6x$

$f''(x) = 6x - 6$

$f''(x) = 0$

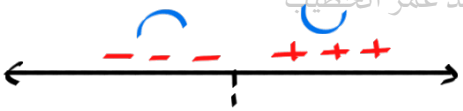
$6x - 6 = 0$

$x = 1$

☆ ممكن ان يكون طرد الدالة نقطة انعطاف عند $x=1$ وممكن لا .

☆ نقطة شك .

اشارة f''



فترة التقعر للاسفل $(-\infty, 1)$

فترة التقعر للاعلى $(1, \infty)$

نقطة الانعطاف $(1, f(1))$

$(1, -1)$

محمد عمر الخطيب

(1) لتكن: $f(x)=x+\frac{1}{x}$ اوجد

(أ) فترات التقعر للاعلى وفترات التقعر للاسفل (ب) نقاط الانعطاف

$D=\mathbb{R}/\{0\}$

$f'(x)=1-\frac{1}{x^2}=1-x^{-2}$

$f''(x)=2x^{-3}=\frac{2}{x^3}$

$f''(x)=0$ ع.م $f''(x)$

لا يوجد حل $x=0$

نقطة شك

اشارة f''



فترة التقعر للاسفل $(-\infty,0)$

فترة التقعر للاعلى $(0,\infty)$

☆ لا يوجد للدالة نقطة انقلاب

عند $x=0$ لان الدالة غير متصلة

عند $x=0$

رغم ان الدالة تغير اتجاه التقعر

عند $x=0$

---

(2) لتكن: $f(x)=(x+2)^{\frac{1}{5}}+4$ اوجد

$D=(-\infty,\infty)$

(أ) فترات التقعر للاعلى وفترات التقعر للاسفل (ب) نقاط الانعطاف

$f'(x)=\frac{1}{5}(x+2)^{-4/5}$

$f''(x)=\frac{-4}{25}(x+2)^{-9/5}$

$=\frac{-4}{25(x+2)^{9/5}}$

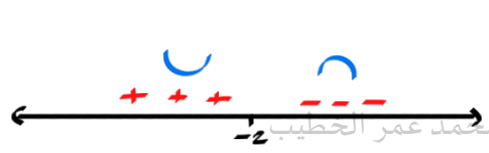
$f''(x)=0$ ع.م $f''(x)$

لا يوجد حل $x+2=0$

$x=-2$

نقطة شك

اشارة f''



فترة التقعر للاعلى $(-\infty,-2)$

فترة التقعر للاسفل $(-2,\infty)$

نقطة الانعطاف $(-2,4)$

محمد عمر الخطيب

(1) لتكن: $f(x)=x^2+4\sin x$ على $[0,2\pi]$

اوجد (أ) فترات التقعر للاعلى وفترات التقعر للاسفل (ب) قيم x التي عندها نقاط الانعطاف

$f'(x) = 2x + 4\cos x$

$f''(x) = 2 - 4\sin x$

$f''(x) = 0$

$2 - 4\sin x = 0$

$-4\sin x = -2$

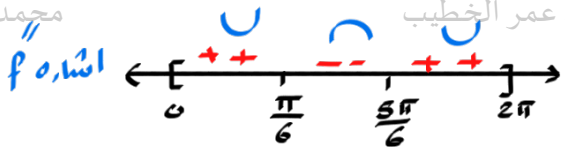
$\sin x = \frac{1}{2}$

x / $\pi/6$

$Q_1 \rightarrow x = \pi/6$

$Q_2 \rightarrow x = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$

نقاط الانعطاف $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$



فترات التقعر للاعلى $(0, \frac{\pi}{6}), (\frac{5\pi}{6}, 2\pi)$

فترات التقعر للاسفل $(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6})$

نقطة انقلاب عند $x = \frac{\pi}{6}$

---

(2) لتكن: $f(x)=\sin x-\cos x$

$D = (-\infty, \infty)$

اوجد (أ) فترات التقعر للاعلى وفترات التقعر للاسفل (ب) قيم x التي عندها نقاط الانعطاف

$f'(x) = \cos x + \sin x$

$f''(x) = -\sin x + \cos x$

$f''(x) = 0$

$-\sin x = -\cos x$

$\sin x = \cos x$

بالقسمة على $\cos$

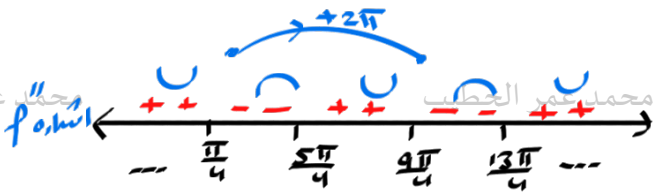
$\tan x = 1$

x / $\pi/4$

$Q_1 \rightarrow x = \frac{\pi}{4}$

$Q_3 \rightarrow x = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$

$x = \frac{\pi}{4} + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$



فترات التقعر للاسفل $(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}) + 2n\pi$

وليس $n\pi$

فترات التقعر للاعلى $(\frac{5\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}) + 2n\pi$

نقاط الانعطاف عند $x = \frac{\pi}{4} + n\pi$

محمد عمر الخطيب

(1) لتكن: $f(x) = x e^{-4x}$

$D = (-\infty, \infty)$

اوجد (أ) فترات التقعر للاعلى وفترات التقعر للاسفل (ب) نقاط الانعطاف

$f'(x) = 1 \cdot e^{-4x} + x e^{-4x}(-4)$

$= e^{-4x}(1 - 4x)$

$f''(x) = e^{-4x}(-4)(1-4x) + e^{-4x}(-4)$

$= -4e^{-4x}(1 - 4x + 1)$

$= -4e^{-4x}(2 - 4x)$

$= -4e^{-4}(-2)(2x-1)$

$= \frac{8(2x-1)}{e^{4x}}$

$f''(x) = 0$

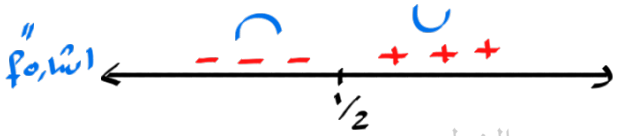
$2x - 1 = 0$

$x = 1/2$

$f''(x)$ م.ع

لا يوجد حل

اشارة f''



فترة التقعر للاسفل $(-\infty, \frac{1}{2})$

فترة التقعر للاعلى $(\frac{1}{2}, \infty)$

نقطة الانعطاف $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}e^{-2})$

---

(2) لتكن: $f(x) = x^{4/3} + 4x^{1/3}$

$D = (-\infty, \infty)$

اوجد (أ) فترات التقعر للاعلى وفترات التقعر للاسفل (ب) نقاط الانعطاف

$f'(x) = \frac{4}{3}x^{1/3} + \frac{4}{3}x^{-2/3}$

$f''(x) = \frac{4}{9}x^{-2/3} - \frac{8}{9}x^{-5/3}$

$= \frac{4}{9}x^{-5/3}\left(\frac{x^{-2/3}}{x^{-5/3}} - 2\right)$

$= \frac{4}{9}x^{-5/3}(x^1 - 2)$

$= \frac{4(x-2)}{9x^{5/3}}$

$f''(x) = 0$

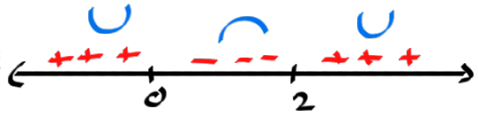
$x - 2 = 0$

$x = 2$

$f''(x)$ م.ع

$x = 0$

اشارة f''



فترات التقعر للاعلى $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$

فترات التقعر للاسفل $(0, 2)$

نقاط الانقلاب

$(0, 0)$, $(2, 6\sqrt[3]{2})$

محمد عمر الخطيب

(1) لتكن: $f(x)=\tan^{-1}x^2$

اوجد (أ) فترات التقعر للاعلى وفترات التقعر للاسفل (ب) نقاط الانعطاف

$D=(-\infty,\infty)$

$f'(x)=\frac{1}{(x^2)^2+1}\cdot 2x=\frac{2x}{x^4+1}$

$f''(x)=\frac{2(x^4+1)-2x(4x^3)}{(x^4+1)^2}$

$=\frac{2x^4+2-8x^4}{(x^4+1)^2}$

$=\frac{2-6x^4}{(x^4+1)^2}$

$f'(x)$ غ.م

$x^4+1=0$

لا يوجد حل

$f''(x)=0$

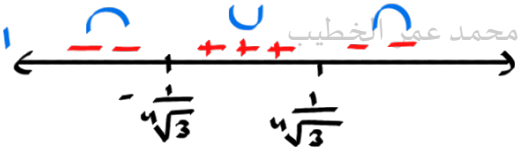
$2-6x^4=0$

$-6x^4=-2$

$x^4=\frac{1}{3}$

$x=\pm\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$

اشارة f''



فترات التقعر للاسفل $(-\infty,-\frac{1}{\sqrt[4]{3}})\cup(\frac{1}{\sqrt[4]{3}},\infty)$

فترة التقعر للاعلى $(-\frac{1}{\sqrt[4]{3}},\frac{1}{\sqrt[4]{3}})$

نقاط الانعطاف عند $x=\pm\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$

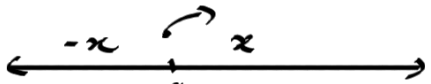
---

(2) لتكن: $f(x)=x^2|x|$

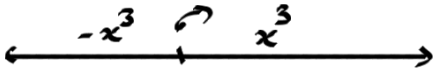
$D=(-\infty,\infty)$

اوجد (أ) فترات التقعر للاعلى وفترات التقعر للاسفل (ب) نقاط الانعطاف

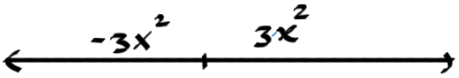
$|x|$



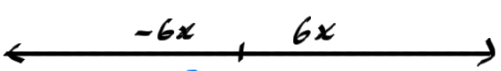
$f=x^2|x|$



f'



f''



$f''(x)=0$

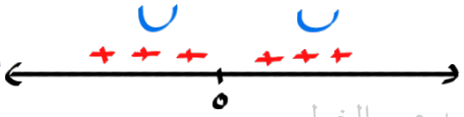
$-6x=0$, $6x=0$

$x=0$ $x=0$

$f''(x)$ غ.م

لا يوجد

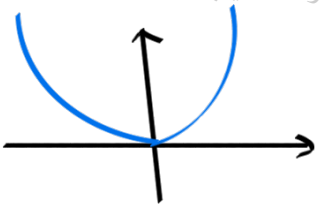
اشارة f''



فترة التقعر للاعلى $(-\infty,\infty)$

لا يوجد نقاط انعطاف

$f(x)=x^2|x|$



محمد عمر الخطيب

السؤال الشامل

$f'(x)<0$	$f'(x)>0$
تناقص وتقعر للاعلى	تزايد وتقعر للاعلى
تناقص وتقعر للاسفل	تزايد وتقعر للاسفل

$f''(x)>0$ ←

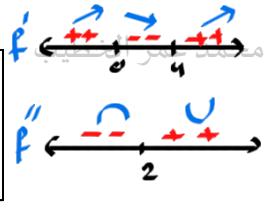
$f''(x)<0$ ←

اكمل الخريطة التالية

$$f(x)=x^3-6x^2$$

$f'(x)=\ldots 3x^2-12x \ldots$

$f''(x)=\ldots 6x-12 \ldots$



الاعداد الحرجة هي

$\ldots x=0 \ldots , x=4 \ldots$

اصفار المشتقة الثانية هي

$\ldots x=2 \ldots$

الفترات	$(-\infty,0)$	$(0,4)$	$(4,\infty)$
اشارة $f'(x)$	+ +	− −	+ +
سلوك $f(x)$	تزايد	تناقص	تزايد

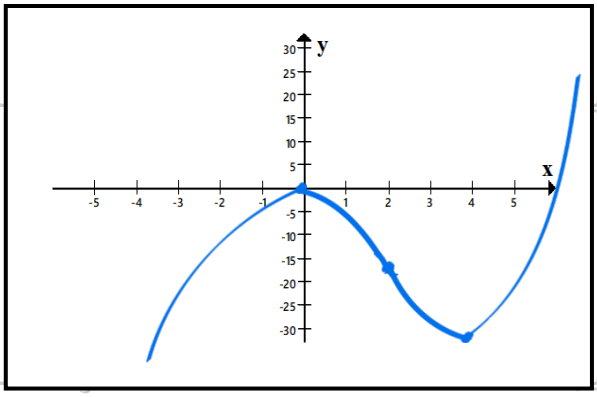
الفترات	$(-\infty,2)$	$(2,\infty)$
اشارة $f''(x)$	− −	+ +
سلوك $f(x)$	للاسفل	للاعلى

يوجد قيمة عظمى محلية للدالة عند x تساوي $x=0$

يوجد قيمة صغرى محلية للدالة عند x تساوي $x=4$

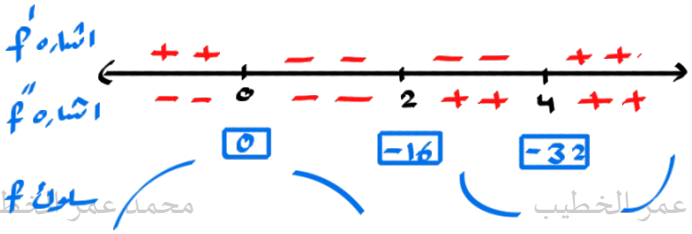
يوجد نقطة انقلاب للدالة عند x تساوي

$\ldots x=2 \ldots$



استفد من المخطط السابق في رسم بيان الدالة $f(x)$

☆ الخط المزدوج (مهم جداً للرسم)



لتكن $f(x) = x^4 + 4x^3 - 1$

(1) اوجد فترات التزايد والتناقص للدالة (2) اوجد القيم القصوى المحلية وبين نوعها.

(3) اوجد فترات التقعر للاعلى وللاسفل (4) اوجد نقاط الانعطاف للدالة (5) ارسم الدالة

$D = (-\infty, \infty)$

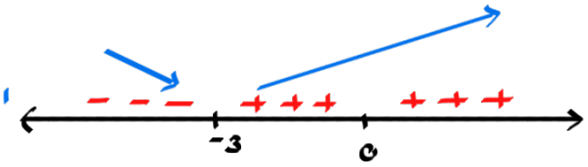
$f'(x) = 4x^3 + 12x^2$

$f'(x) = 0$

$4x^3 + 12x^2 = 0$

$x = 0 \ , \ x = -3$

اشارة f'



ص.م

تناقص $(-\infty, -3)$

تزايد $(-3, \infty)$ لان المشتقة عند $x=0$

قيمة صغرى محلية -28 عند $x=-3$

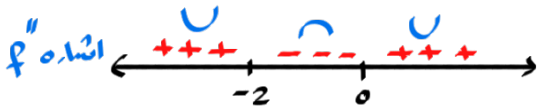
$f''(x) = 12x^2 + 24x$

$f''(x) = 0$

$12x^2 + 24x = 0$

$x = -2 \ , \ x = 0$

اشارة f''



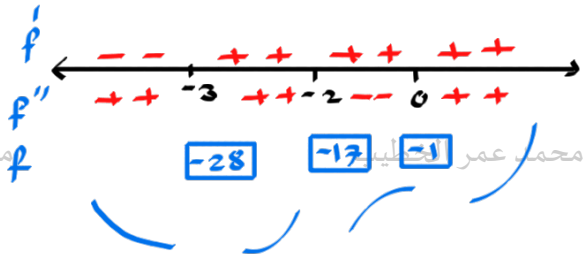
تقعر للاعلى $(-\infty, -2) \cup (0, \infty)$

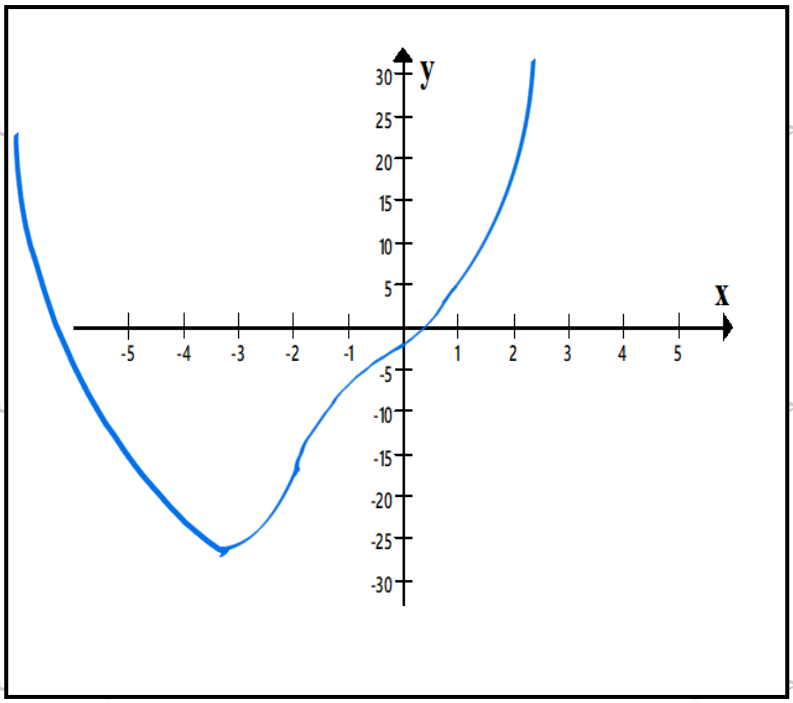
تقعر للاسفل $(-2, 0)$

نقاط الانعطاف عند

$x = -2 \ , \ x = 0$

الخط المزدوج





لتكن $f(x)=x+3(1-x)^{1/3}$

(1) اوجد فترات التزايد والتناقص للدالة (2) اوجد القيم القصوى المحلية وبين نوعها.

(3) اوجد فترات التقعر للاعلى وللاسفل (4) اوجد نقاط الانعطاف للدالة (5) ارسم الدالة

$D=(-\infty,\infty)$

$f'(x)=1+\frac{1}{3}\cdot 3(1-x)^{-2/3}(-1)$

$=1-(1-x)^{-2/3}$

$=1-\frac{1}{(1-x)^{2/3}}$

$=\frac{(1-x)^{2/3}-1}{(1-x)^{2/3}}$

$f'(x)=0$

$(1-x)^{2/3}-1=0$

$(1-x)^{2/3}=1$

$(1-x)^2=1$

$1-x=1 \quad 1-x=-1$

$-x=0 \quad -x=-2$

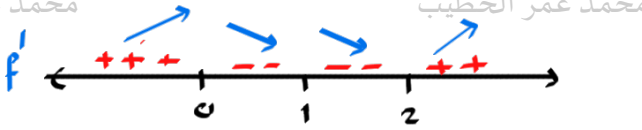
$x=0 \quad x=2$

$f'(x)$ م.ع

$(1-x)^{2/3}=0$

$1-x=0$

$x=1$



تزايد $(-\infty,0)\cup(2,\infty)$

تناقص $(0,2)$

عظمى محلية عند $x=0$

صغرى محلية عند $x=2$

$f''(x)=-\frac{2}{3}(1-x)^{-5/3}=\frac{-2}{3(1-x)^{5/3}}$

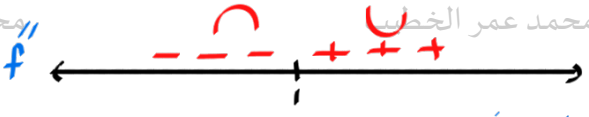
$f''(x)=0$

لا يوجد حل

$3(1-x)^{3/2}=0$

$1-x=0$

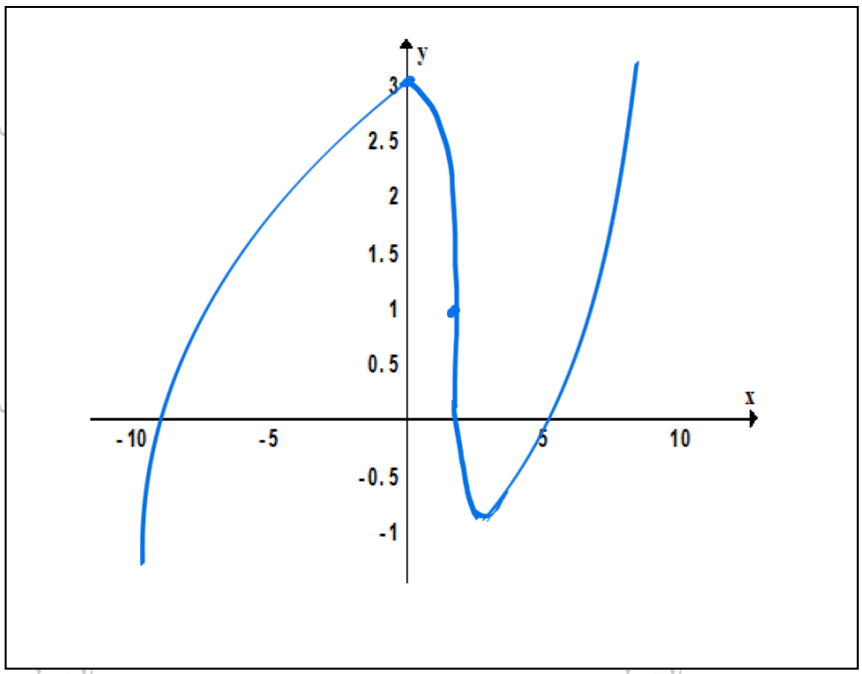
$x=1$

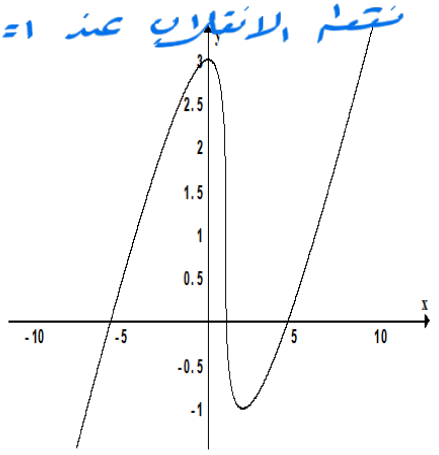


للاسفل $(-\infty,1)$

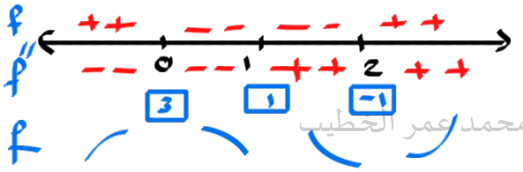
للاعلى $(1,\infty)$

تنعدم الانقلاب عند $x=1$





الخط المزدوج



لتكن $f(x)=e^{-x^2/2}$ حيث $f'(x)=-xe^{-x^2/2}$ و $f''(x)=(x^2-1)e^{-x^2/2}$

(1) اوجد فترات التزايد والتناقص للدالة (2) اوجد القيم القصوى المحلية وبين نوعها.

(3) اوجد فترات التقعر للاعلى وللاسفل (4) اوجد نقاط الانعطاف للدالة (5) ارسم الدالة

$D=(-\infty,\infty)$

$f'(x)=-x\,e^{-x^2/2}=\frac{-x}{e^{x^2/2}}$

$f'(x)=0$

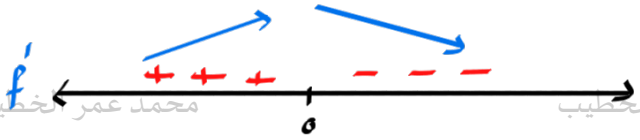
$-x=0$

$x=0$

$f'(x)$ ع.م

$e^{x^2/2}=0$

للا يوجد حل



$(-\infty,0)$ تزايد

$(0,\infty)$ تناقص

$x=0$ عند ا عظمى محلية

$f''(x)=(x^2-1)e^{-x^2/2}=\frac{x^2-1}{e^{x^2/2}}$

$f''(x)=0$

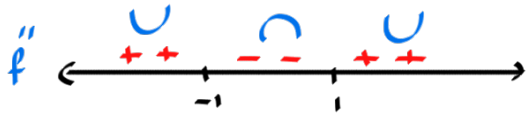
$x^2-1=0$

$x=\pm 1$

$f'(x)$ ع.م

$e^{x^2/2}=0$

للا يوجد حل



$(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$ للاعلى

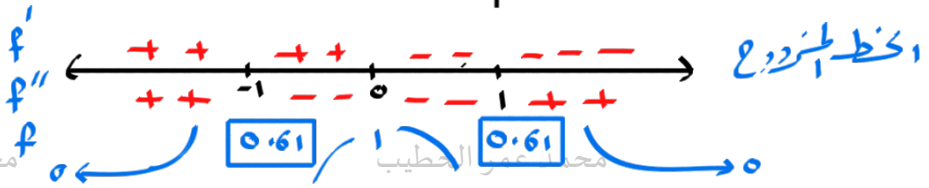
$(-1,1)$ للاسفل

$x=\pm 1$ نقاط الانقلاب عند

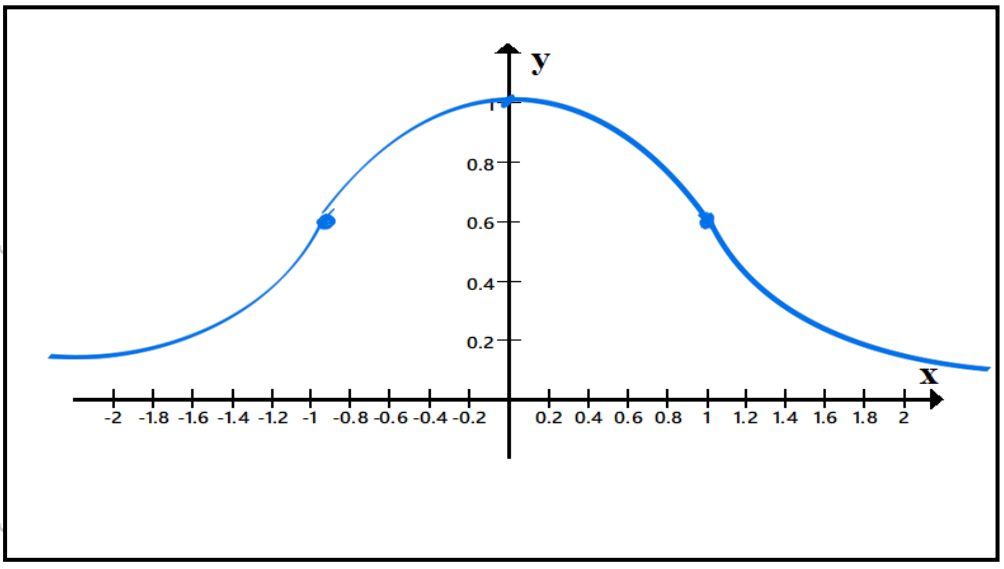
* خط تقارب افقي

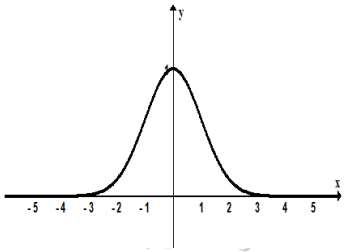
$\lim_{x\to\pm\infty} e^{-x^2/2}=e^{-\infty}=1/e^{\infty}=0$

خط تقارب افقي $y=0$



الخط المزدوج





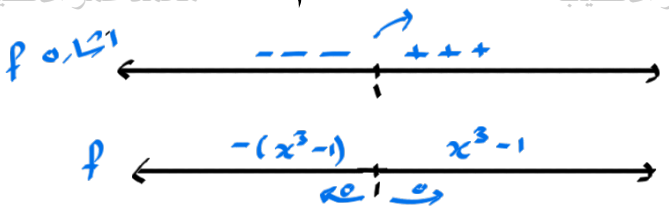
$f(x)=e^{-x^2/2}$

لتكن $f(x)=|x^3-1|$

ملاحظة : لان الرسم سهل... يفضل الرسم ثم ايجاد المطلوب

(1) اوجد فترات التزايد والتناقص للدالة (2) اوجد القيم القصوى المحلية وبين نوعها.

(3) اوجد فترات التقعر للاعلى وللاسفل (4) اوجد نقاط الانعطاف للدالة (5) ارسم الدالة



$f'(x)=0$

1) $3x^2=0$

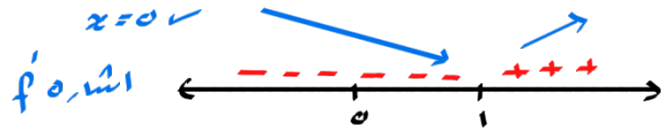
$x=0$

$f'(x)$ ع.م

$x=1$

2) $-3x^2=0$

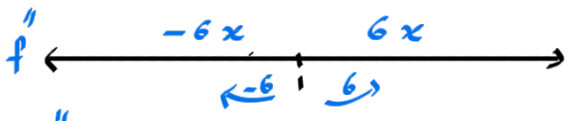
$x=0$ ✓



تناقص $(-\infty,1)$

تزايد $(1,\infty)$

قيمة حرجة محلية 0 عند $x=1$



$f''(x)=0$

1) $6x=0$

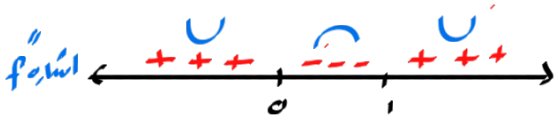
$x=0$

$f''(x)$ ع.م

$x=1$

2) $-6x=0$

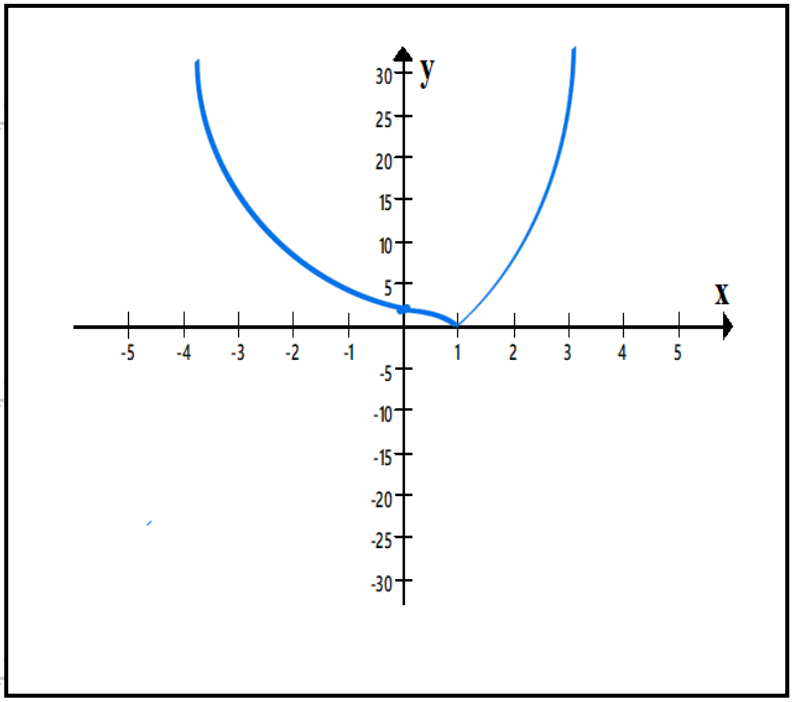
$x=0$ ✓

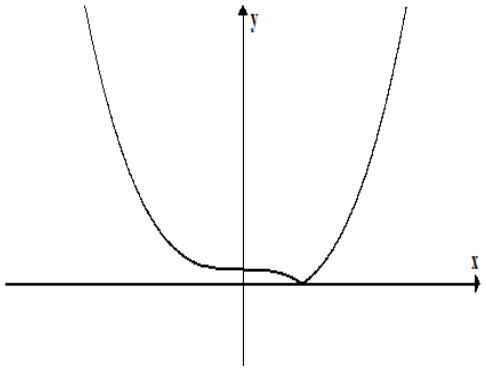


للاعلى $(-\infty,0)\cup(1,\infty)$

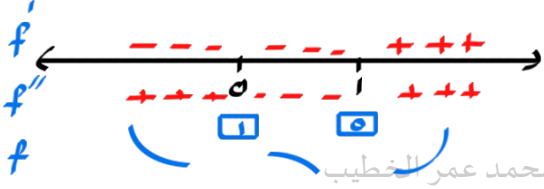
للاسفل $(0,1)$

نقاط الانقطاف عند $x=0,1$





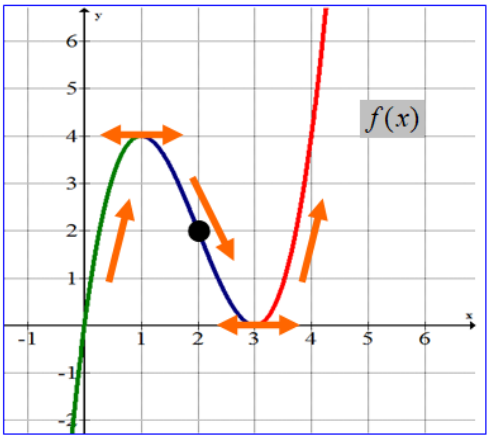
الخط المزدوج



محمد عمر الخطيب

الربط بين منحنى الدالة ومنحنى المشتقة الأولى ومنحنى المشتقة الثانية

سلوك الدالة $f(x)$ ....من بيان الدالة $f(x)$



مباشر من الرسم

فترات التزايد للدالة f $(-\infty,1)$, $(3,\infty)$

فترات التناقص للدالة f $(1,3)$

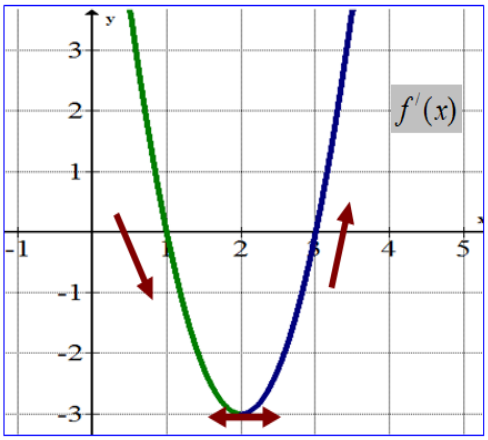
فترات التقعر لأعلى للدالة f $(2,\infty)$

فترات التقعر لأسفل للدالة f $(-\infty,2)$

نقطة الانقلاب $(2,2)=(2,f(2))$

$f'(1)=0$, $f'(3)=0$

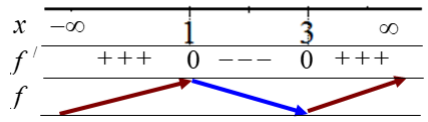
سلوك الدالة $f(x)$ ....من بيان الدالة $f'(x)$



(1) اذا كان $f'(x)$ فوق محور السينات فأن اشارة $f'(x)$ موجبة

(2) اذا كان $f'(x)$ تحت محور السينات فأن اشارة $f'(x)$ سالبة

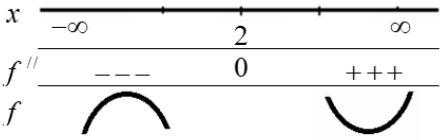
تطابق الخط مع الرسم



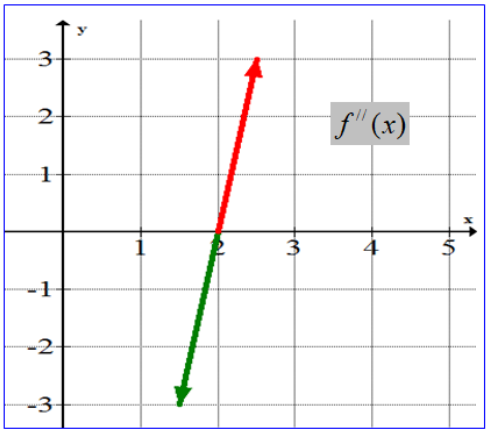
(1) اذا كان $f'(x)$ متزايدة فأن اشارة $f''(x)$ موجبة

(2) اذا كان $f'(x)$ متناقصة فأن اشارة $f''(x)$ سالبة

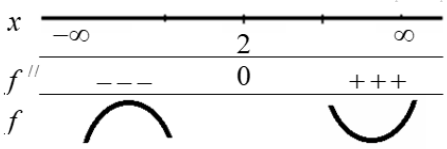
ليس تطابق



سلوك الدالة $f(x)$ ....من بيان الدالة $f''(x)$

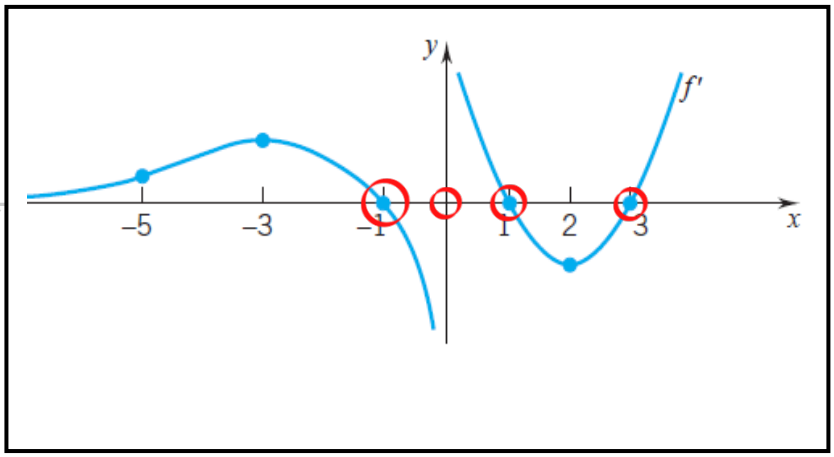


تطابق الخط مع الرسم



محمد عمر الخطيب

اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة $f'(x)$ للدالة المتصلة $f(x)$ في ايجاد



(1) النقاط الحرجة.

نقاط التقاطع مع محور x

اوجد قيم x التي فيها صورة

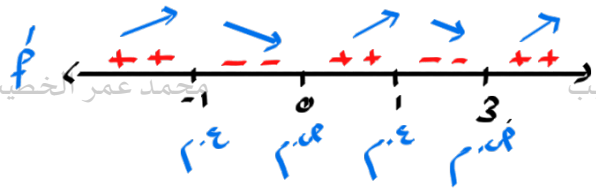
-1 , 0 , 1 , 3

---

(2) اوجد فترات التزايد والتناقص للدالة.

ارسم خط اشارة f'

☆ تطابق الرسم مع الخط { فوق ← موجب / تحت ← سالب



تزايد $(-\infty,-1)\cup(0,1)\cup(3,\infty)$

تناقص $(-1,0)\cup(1,3)$

---

(3) اوجد قيم x التي عندهاالقيم القصوى المحلية وبين نوعها.

عظمى محلية عند $x=-1$, $x=1$

صغرى محلية عند $x=0$, $x=3$

---

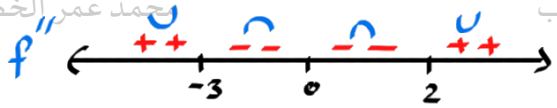
(4) اوجد فترات التقعر للاعلى وللاسفل.

ارسم خط اشارة f''

لا يوجد تطابق بين الرسم و الخط

☆ f' متزايدة ⟵ $f''>0$

☆ f' متناقصة ⟵ $f''<0$



تقعر للاعلى $(-\infty,-3)\cup(2,\infty)$

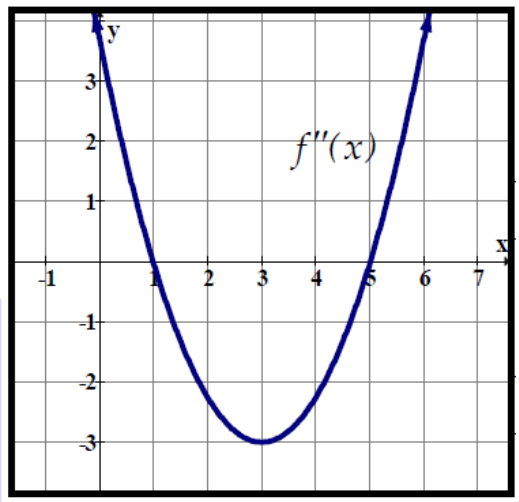
للاسفل $(-3,2)$

---

(5) اوجد قيم x التي عندها نقاط انعطاف للدالة. $x=-3$, $x=2$

(1) اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة $f''(x)$ في ايجاد

(أ) فترات التقعر للاعلى وللاسفل



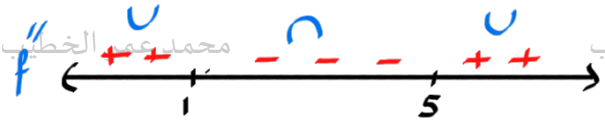
فترات التقعر للاعلى $(-\infty , -1) \cup (5 , \infty)$

فترة التقعر للاسفل $(-1 , 5)$

(ب) قيم x التي عندها نقاط الانقلاب.

$x = -1 , x = 5$

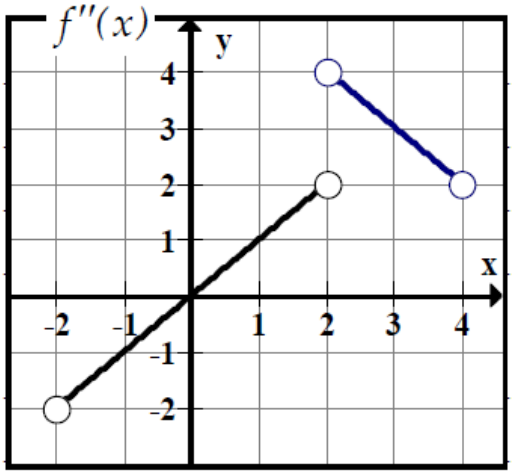
☆ تطابق الرسم مع الخط { فوق ← موجب / تحت ← سالب



---

(2) اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة $f''(x)$ للدالة المتصلة $f(x)$ في ايجاد

(أ) فترات التقعر للاعلى وللاسفل



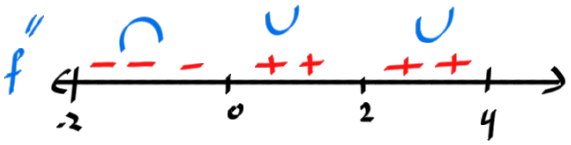
للاسفل $(-2 , 0)$

للاعلى $(0 , 4)$

☆ تطابق

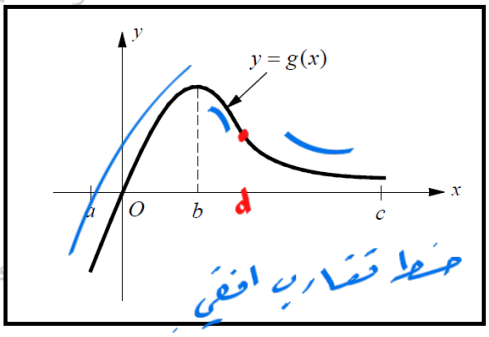
(ب) قيم x التي عندها نقاط الانقلاب.

$x = 0$



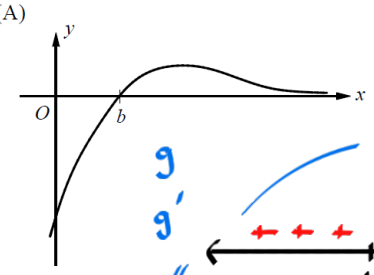
محمد عمر الخطيب

(1) الشكل المجاور يمثل بيان الدالة $g(x)$

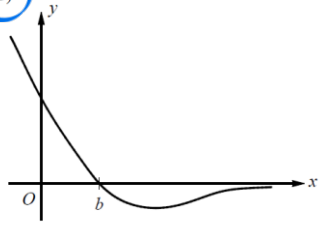


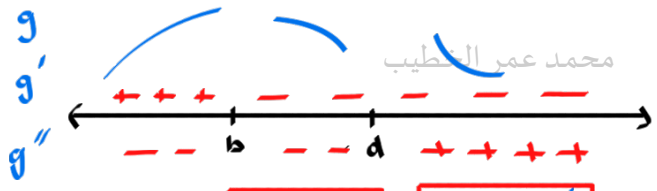
اي من الاشكال التالية يمكن ان يمثل بيان الدالة $g'(x)$

(A)

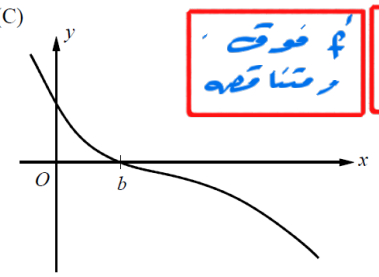


(B)

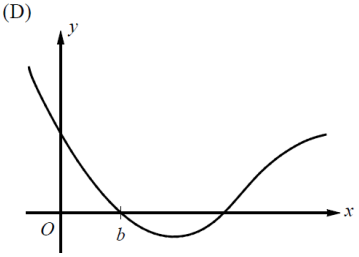




(C)

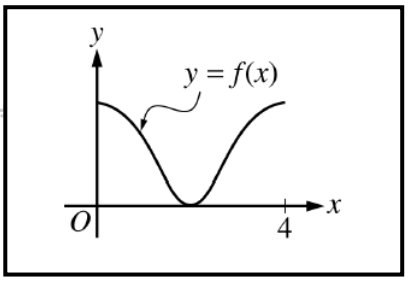


(D)



---

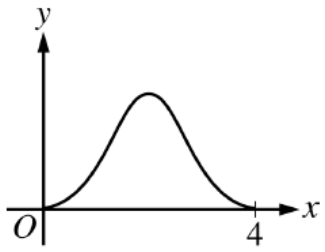
(2) الشكل المجاور يمثل بيان الدالة $f(x)$



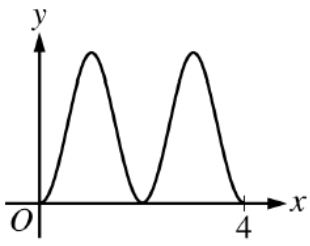
اي من الاشكال التالية ممكن ان يكون لبيان الدالة $f'(x)$



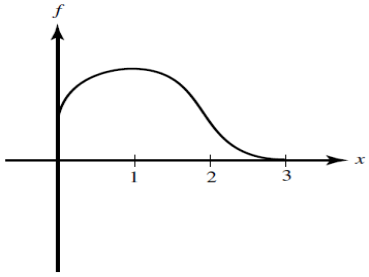
(A)



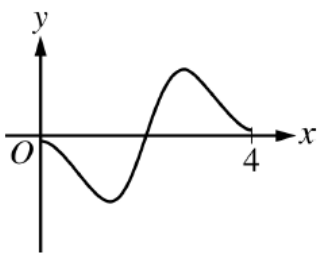
(B)



(C)



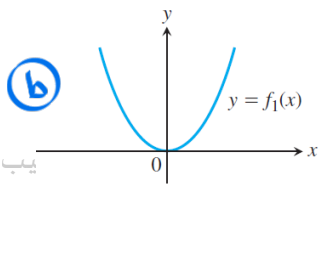
(D)

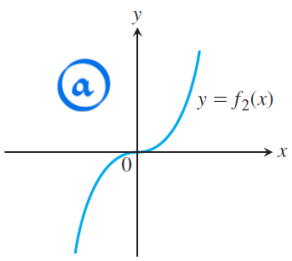


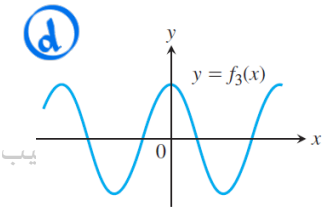
محمد عمر الخطيب

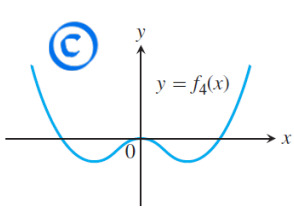
(1) صل بين كل رسم بياني يمثل الدالة f من المجموعة A بالرسم البياني الذي يمثل مشتقتها من المجموعة B.

A	f

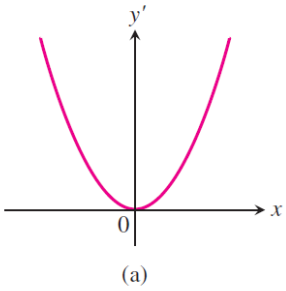


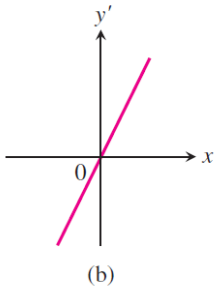


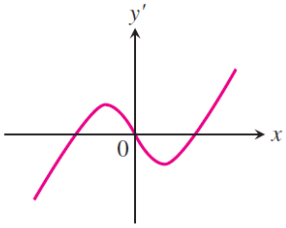


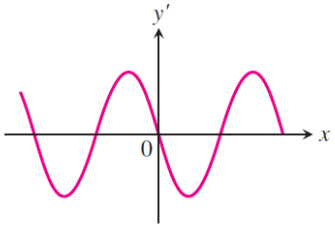


B	f'



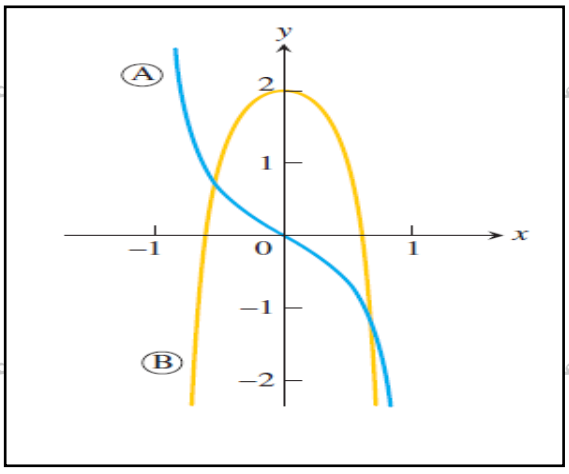




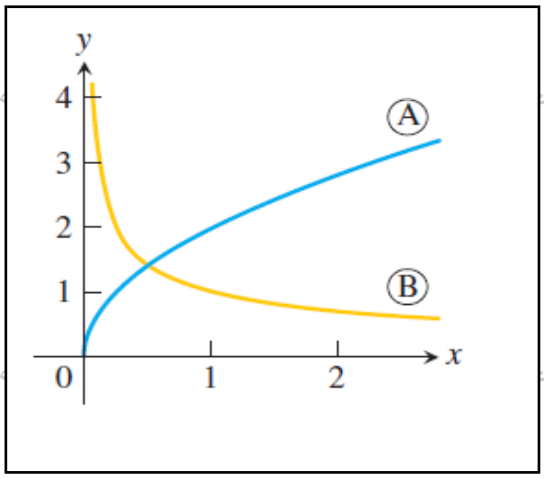


---

(2) حدد على الشكل المجاور بيان كل من الدوال $f(x)$ و $f'(x)$



A ⟶ f′
B ⟶ f

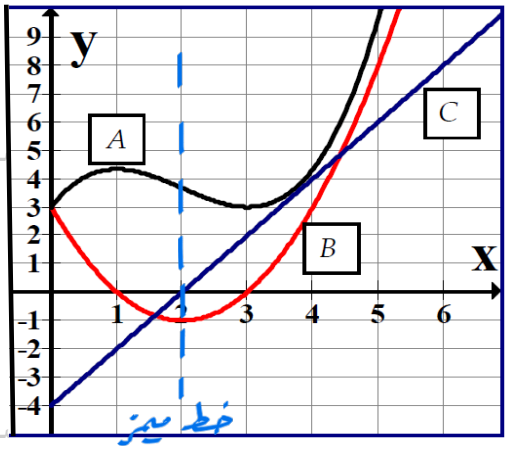


A ⟶ f
B ⟶ f′

محمد عمر الخطيب

الخط المميز

(1) حدد على الشكل المجاور بيان كل من الدوال $f(x)$ و $f'(x)$ و $f''(x)$



A → f
B → f'
C → f''

يمكن حل السؤال بالاعتماد على درجة الدوال

ملاحظة (الخط المميز) للدوال كثيرات الحدود

الخط المميز هو خط يمر بنقطة انقلاب وقيمة قصوى محلية ومقطع مع محور السينات فيكون

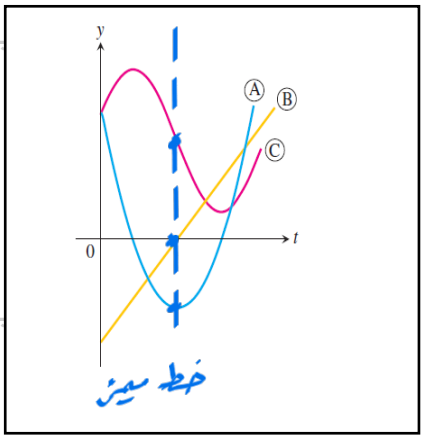
(1) نقطة الانقلاب على $f(x)$

(2) القيمة القصوى المحلية على $f'(x)$

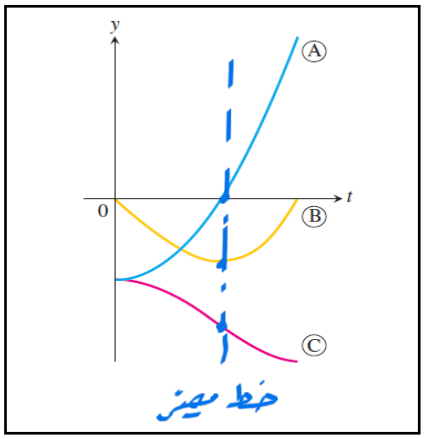
(3) المقطع مع محور السينات على $f''(x)$

---

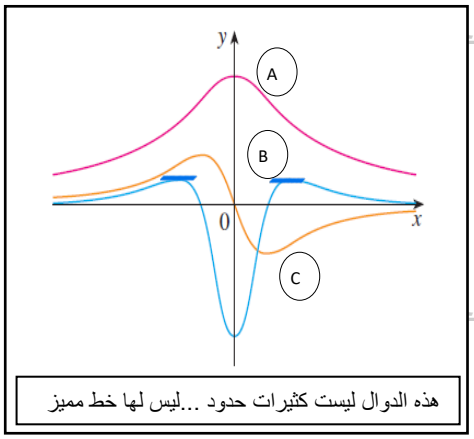
(2) حدد على الشكل المجاور بيان كل من الدوال $f(x)$ و $f'(x)$ و $f''(x)$



f → C
f' → A
f'' → B



f → C
f' → B
f'' → A



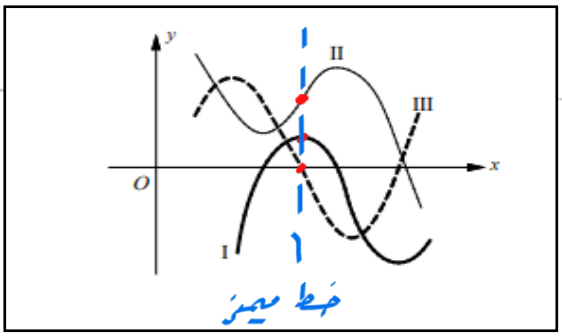
f → A
f' → C
f'' → B

البداية

---

(3) بالاعتماد على الشكل المجاور اي من الخيارات التالية هي الصحيحة

	f	f'	f''
(a)	I	II	III
(b)	II	I	III
(c)	III	II	I
(d)	II	III	I



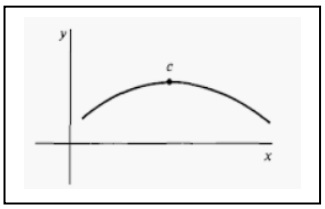
f → II , f' → I , f'' → III

محمد عمر الخطيب

اختبار المشتقة الثانية للقيم القصوى المحلية

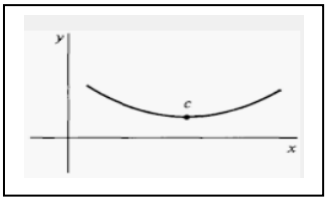
1) اذا كانت $f'(c)=0 \quad , \quad f''(c)<0$

فان f تكون لها قيمة عظمى محلية عند $x=c$



2) اذا كانت $f'(c)=0 \quad , \quad f''(c)>0$

فان f تكون لها قيمة صغرى محلية عند $x=c$



ملاحظة: (أ) لايجوز استخدام اختبار المشتقة الثانية اذا كانت $f'(c)$ غير موجودة

(ب) يفشل اختبار المشتقة الثانية اذا كانت $f''(c)=0$ ويجب الرجوع لاختبار المشتقة الأولى

1) استخدم اختبار المشتقة الثانية لايجاد القيم القصوى المحلية للدالة $f(x)=x^3-12x-5$

$f'(x)=3x^2-12$

$f'(x)=0$

$3x^2-12=0$

$x=-2 \quad , \quad x=2$

الاعداد الحرجة .

$f''(x)=6x$

$f''(-2)=6(-2)=-12<0$

للدالة قيمة عظمى محلية عند $x=-2$ وقيمتها 11

$f''(2)=6(2)=12>0$

للدالة قيمة صغرى محلية عند $x=2$ وقيمتها -21

2) استخدم اختبار المشتقة الثانية لايجاد القيم القصوى المحلية للدالة $f(x)=x^3-5x^2+3x$

$f'(x)=3x^2-10x+3$.

$f'(x)=0$

$3x^2-10x+3=0$

$x=\frac{1}{3} \quad , \quad x=3$.

الاعداد الحرجة .

$f''(x)=6x-10$

$f'(3)=6(3)-10=8>0$

قيمة صغرى محلية عند $x=3$ وقيمتها -9

$f(\frac{1}{3})=6(\frac{1}{3})-10=-8<0$

قيمة عظمى محلية عند $x=\frac{1}{3}$ وقيمتها $\frac{13}{27}$.

محمد عمر الخطيب

(1) استخدم اختبار المشتقة الثانية لايجاد القيم القصوى المحلية للدالة $f(x)=xe^{-x}$ حيث

$$f'(x)=e^{-x}(1-x)\ ,\ f''(x)=e^{-x}(x-2)$$

$f'(x)=e^{-x}(1-x)$

$f'(x)=0$

$1-x=0$

$x=1$

ع.م $f'(x)$

$e^{x}=0$

لا يوجد حل

الاعداد الحرجة $x=1$

$f''(x)=e^{-x}(x-2)$

$f''(1)=e^{-1}(1-2)=-e^{-1}=-1/e<0$

للدالة قيمة عظمى محلية عند $x=1$ وقيمتها $-1/e$

---

(2) اوجد القيم القصوى المحلية للدالة $f(x)=x^4+4x^3-1$

ما حدود الطريقة.

$f'(x)=4x^3+12x^2$

$f'(x)=0$

$x=-3\ ,\ x=0$

$-3, 0$ الاعداد الحرجة

$f''(x)=12x^2+24x$

$f''(-3)=36>0$

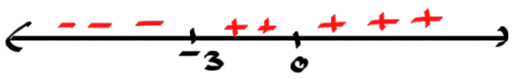
للدالة قيمة صغرى محلية عند $x=-3$ وقيمتها -28

$f''(0)=0$

يفشل اختبار المشتقة الثانية لتحديد نوع القيمة القصوى المحلية عند $x=0$

يجب الرجوع الى اختبار المشتقة الاولى.

f'



لا يوجد قيمة قصوى محلية عند $x=0$

---

(3) اوجد القيم القصوى المحلية للدالة $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x}$

$D=(-\infty,0)\cup(0,\infty)$

$f'(x)=\dfrac{2x(x)-(x^2-1)(1)}{x^2}$

$=\dfrac{2x^2-x^2+1}{x^2}$

$=\dfrac{x^2+1}{x^2}$

$f'(x)=0$

$x^2+1=0$

لا يوجد حل

ع.م $f'(x)$

$x^2=0$

$x=0$

خارج المجال.

لا يوجد اعداد حرجة.

لا يوجد قيم قصوى محلية للدالة

محمد عمر الخطيب

القيمة القصوى المحلية الوحيدة

نظرية القيمة القصوى المحلية الوحيدة

اذا كانت الدالة f متصلة على فترة مفتوحة وللدالة قيمة قصوى محلية وحيدة فانها تكون مطلقة

تستخدم هذه النظرية في مسائل القيم المثلى (الدرس السابع)

(1) اوجد القيمة القصوى المطلقة للدالة $f(x)=x^2-6x$ وحدد نوعها

$f'(x)=2x-6$

$f'(x)=0$

$2x-6=0$

$x=3$

$f''(x)=2$

$f''(3)=2>0$

بما ان الدالة متصلة على $\mathbb{R}$ ولها قيمة صغرى محلية وحيدة عند $x=3$ فهي مطلقة وقيمتها -9

(2) اوجد القيمة القصوى المطلقة للدالة $f(x)=xe^{-x}$ وحدد نوعها

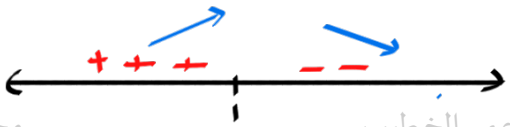
$f'(x)=1\cdot e^{-x}+x\cdot e^{-x}(-1)$

$=e^{-x}(1-x)$

$=\frac{1-x}{e^x}$

$f'(x)=0 \Rightarrow 1-x=0$

$x=1$



بما ان الدالة متصلة على $\mathbb{R}$ ولها قيمة عظمى محلية وحيدة عند $x=1$ فهي مطلقة وقيمتها $\frac{1}{e}$

(3) اوجد القيمة القصوى المطلقة للدالة $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ وحدد نوعها

$D=(0,\infty)$

$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x\cdot 1}{x^2}$

$=\frac{1-\ln x}{x^2}$

$f'(x)=0$

$1-\ln x=0$

$\ln x=1$

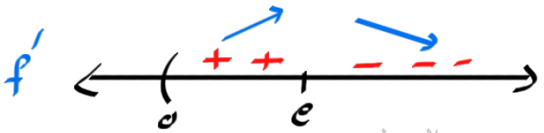
$x=e$

$f'(x)$ غ.م

$x^2=0$

$x=0$

خارج المجال

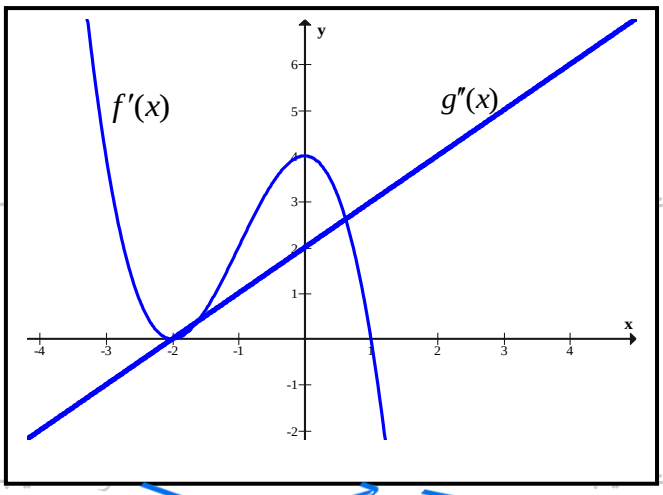


العدد الحرجة هي $x=e$ فقط

بما ان الدالة متصلة على $(0,\infty)$ ولها قيمة عظمى محلية وحيدة عند $x=e$ فهي مطلقة وقيمتها $\frac{1}{e}$

محمد عمر الخطيب

اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالتين $f'(x)$, $g''(x)$ لإكمال الفراغات التالية:



(أ) النقاط الحرجة للداله $f(x)$ هي .....-2 , 1.....

(ب) فترة التزايد للدالة $f(x)$ هي.....$(-\infty, 1)$.....

(ج) للدالة $f(x)$ قيم عظمى المحليه عند.....$x=1$.....

تطابق

(د) فتره التقعر للاعلى للدالة $f(x)$ هي.....$(-2, 0)$.....

تطابق

(هـ) فترات التقعر للاسفل للدالة $g(x)$ هي.....$(-\infty, -2)$.....

(و) عدد تقاط الانقلاب للدالة $f(x)$ تساوي: .....2.....

(ي) قيمة x التي عندها للدالتين $f(x), g(x)$ نقطة انقلاب هي.....-2.....

(م) ايهما أكبر $f(3)$ ام $f(2)$ مع ذكر السبب.....$f(2)$.....

$2 < 3$,
$f(2) > f(3)$

لان الدالة متناقصة على الفترة $(1, \infty)$

(ن) إذا كان للدالة $g(x)$ نقاط حرجة عند -3 , -1

فبين نوع القيم القصوى المحلية عند هذه القيم الحرجة.

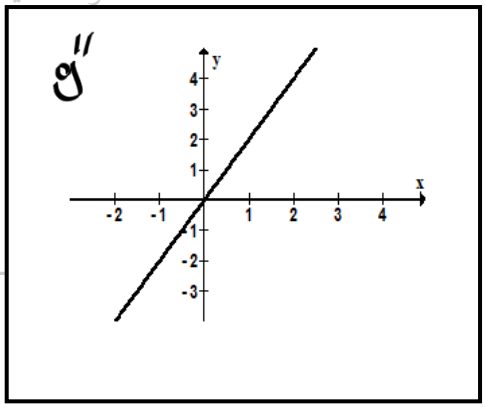
من اختبار المشتقة الثانية:

$g'(-1)=0$, $g''(-1)>0$ $\Rightarrow$ للدالة قيمة صغرى محلية عند $x=-1$

$g'(-3)=0$, $g''(-3)<0$ $\Rightarrow$ للدالة قيمة عظمى محلية عند $x=-3$

محمد عمر الخطيب

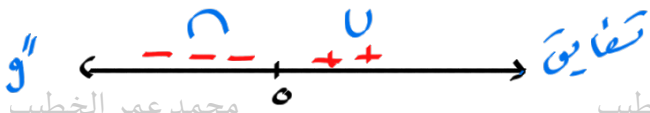
(1) اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة $g''(x)$



علماً بان $g(x)$ كثيرة حدود و $g'(-2)=g'(2)=0$

لإكمال الفراغات التالية

(أ) فتره التقعر للاعلى للدالة $g(x)$ هي ..... $(0,\infty)$



تقاعر

(ب) تقاط الانقلاب للدالة $g(x)$ عند ..... $x=0$

$g'(-2)=0$ عما ان

$g''(-2)<0$

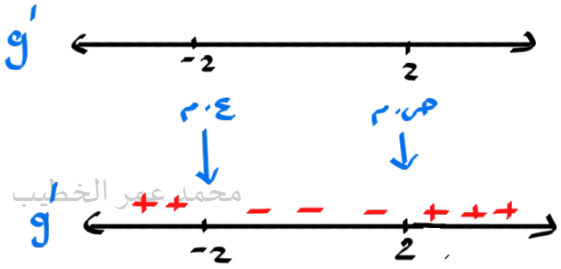
فان للدالة قيمة عظمى محليه

عند $x=-2$ من اختبار المشتقه الثانيه

(ج) النقاط الحرجة للداله $g(x)$ هي ..... $-2, 2$

(د) للدالة $g(x)$ قيم عظمى المحليه عند ..... $x=-2$

(هـ) للدالة $g(x)$ قيم صغرى المحليه عند ..... $x=2$

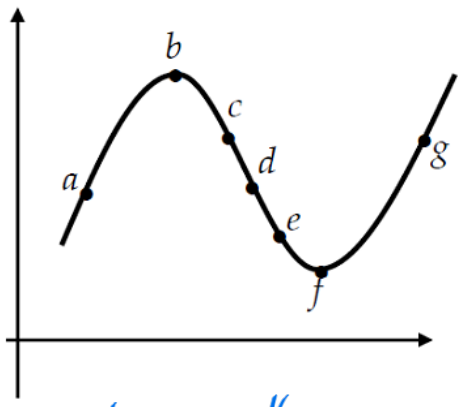


(و) فترة التزايد للدالة $g(x)$ هي ..... $(-\infty,-2)\cup(2,\infty)$

(ي) فترة التناقص للدالة $g(x)$ هي ..... $(-2,2)$

---

(2) اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة $f(x)$ لأكمال الجدول التالي



الشرط	الرمز
$f'=0, f''>0$	f
$f'=0, f''<0$	b
$f''=0$	d
$f'\times f''=0$	b, d, f
$f'\times f''>0$	g, c

$f'>0, f''>0$ او $f'<0, f''<0$

g

c

محمد عمر الخطيب

(1) إذا كانت الدالة $f(x)=ax^3-12x^2$ **لها نقطة انعطاف عند** $x=1$ **فما قيمة الثابت** a .

$f''(1)=0$ الشرط

$f'(x)=3ax^2-24x$

$f''(x)=6ax-12$

$f''(1)=0$

$6a(1)-12=0$

$6a=12$

$a=2$

---

(2) إذا كان للدالة $f(x)=x^3+ax^2+bx$ **قيمة صغرى محلية عند** $x=4$ **ونقطة انقلاب عند** $x=1$ **فاوجد قيمة الثوابت** a,b .

الشروط $f'(4)=0$

$f''(1)=0$

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

$f''(x)=6x+2a$

$f''(1)=0$

$6(1)+2a=0$

$a=-3$

$f'(4)=0$

$3(4)^2+2a(4)+b=0$

$48+2(-3)(4)+b=0$

$24+b=0$

$b=-24$

---

(3) إذا كان للدالة $f(x)=ax^4+bx^2+1$ **نقطة انعطاف عند النقطة** $(1,6)$ **فاوجد قيمة الثوابت** a,b ؟

الشروط $f(1)=6$

$f''(1)=0$

$f'(x)=4ax^3+2bx$

$f''(x)=12ax^2+2b$

$f(1)=6$

$a+b+1=6$

$a+b=5$ ---- ①

$f''(1)=0$

$12a+2b=0$

$6a+b=0$ --- ②

بالطرح

$6a+b=0$

$a+b=5$

$5a=-5$

$a=-1$

$a+b=5$

$-1+b=5$

$b=6$

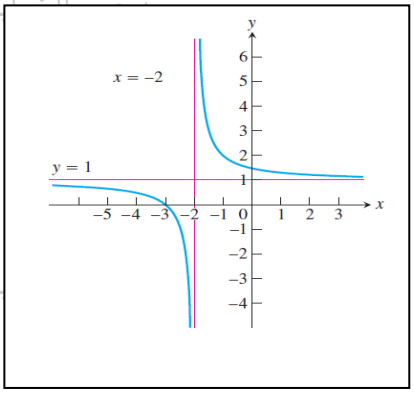
خطوط التقارب للدوال النسبية

$$f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}$$

(1) يجب كتابة الدالة النسبية في ابسط صورة قبل ايجاد خطوط التقارب واذا تم اختصار احد العوامل وليكن $x-a$ واختفى من المقام فان للدالة فجوة عند $x=a$ وليس خط تقارب رأسي

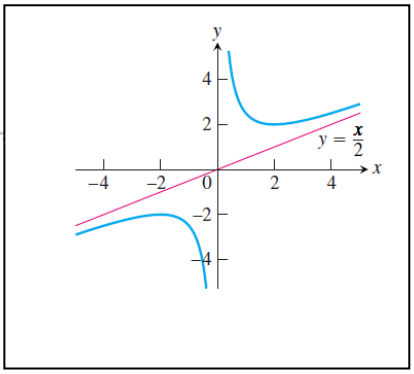
$x-a$ عامل غير مكرر

(2) يكون للدالة النسبية خطوط تقارب رأسية عند اصفار المقام وتكون معادلتة $x=k$



(3) يكون للدالة النسبية خطوط تقارب افقية اذا كانت درجة البسط اصغر من او تساوي درجة المقام وتكون معادلتة $y=l$

(4) يكون للدالة النسبية خط تقارب مائل اذا كانت درجة البسط اكبر من درجة المقام بواحد. وتكون معادلتة $y=a\,x+b$



ونستخدم القسمة المطولة او القسمة التركيبية لايجادة

خطوط التقارب للدوال غير النسبية

(1) يكون للدالة خطوط تقارب رأسية عند $x=k$

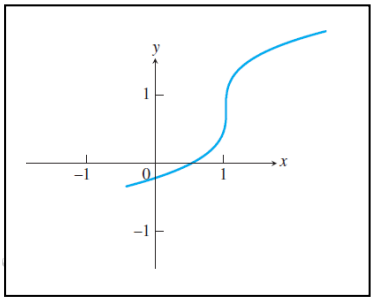
اذا كانت احدى الشروط التالية صحيحة

$$\lim_{x\to k} f(x)=\pm\infty,\quad \lim_{x\to k^+} f(x)=\pm\infty,\quad \lim_{x\to k^-} f(x)=\pm\infty$$

(2) يكون للدالة خطوط تقارب افقية عند $y=l$

لا يجوز ان يكون للدالة خط تقارب افقي ومائل في نفس الوقت

اذا كانت احد الشروط التالية صحيحة $\lim_{x\to\infty} f(x)=l$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=l$



المماس الرأسي

(1) يجب ان تكون الدالة متصلة عند هذه النقطة

(2) ان تكون النهاية من اليسار واليمين للمشتقة (الميل) اما كلاهما ملانهاي او سالب مالانهاية عند هذه النقطة

ملاحظة : يمكن استخدام قاعدة لوبتال

اوجد خطوط التقارب الرأسية والافقية او المائلة لكل من الدوال التالية

(1) $f(x)=\dfrac{3x-1}{x+1}$

خطوط التقارب الرأسية
اصفار المقام
$x+1=0$
$x=-1$

خطوط التقارب الافقية
نجد
$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{3x-1}{x+1}=3$
$y=3$

---

(2) $f(x)=\dfrac{2x}{x^2-1}$

الرأسية
$x^2-1=0$
$x=-1$, $x=1$

الافقية
$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x}{x^2-1}=0$
$y=0$

---

(3) $f(x)=4-\dfrac{1}{x+2}$

الرأسية
$x+2=0$
$x=-2$

الافقية
$\lim\limits_{x\to\pm\infty}4-\dfrac{1}{x+2}=4$
$y=4$

---

(4) $f(x)=x+\dfrac{1}{x-2}=\dfrac{x^2-2x+1}{x-2}$

الرأسية
$x-2=0$
$x=2$

المائلة
$y=x$

☆ يمكن توحيد المقامات ثم ايجاد الناتج بالقسمة

---

(5) $f(x)=\dfrac{x^2-2}{x+1}$

الرأسية
$x+1=0$
$x=-1$

المائلة
$y=x-1$

$$\begin{array}{r|l} x^2+0x-2 & x+1 \\ \hline -x^2-x & x-1 \\ \hline -x-2 & \\ +x+1 & \\ \hline -1 & \end{array}$$

---

(6) $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x^2-1}=\dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)}$

المحذوف
$x-1=0$
$x=1$

الرأسية
$x+1=0$
$x=-1$

المائلة
$y=x$

$$\begin{array}{r|l} x^2+x+1 & x+1 \\ \hline -x^2-x & x \\ \hline 1 & \end{array}$$

محمد عمر الخطيب

اوجد خطوط التقارب الرأسية والافقية لكل من الدوال التالية

(1) $f(x)=e^{-x^2}$

$=\frac{1}{e^{x^2}}$

الرأسية

$e^{x^2}=0$

لا يوجد حل

لا يوجد خطوط رأسية

الافقية

$\lim_{x\to\pm\infty} e^{-x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{e^{x^2}}=0$

$y=0$

---

(2) $f(x)=e^{1/x}$

الرأسية

$x=0$ (صورة السالب)

الافقية

$\lim_{x\to\pm\infty} e^{1/x}=e^0=1$

$y=1$

---

(3) $f(x)=xe^{-x}$

$=\frac{x}{e^x}$

الرأسية

$e^x=0$

لا يوجد حل

لا يوجد خطوط تقارب رأسية

الافقية

لوبتال

$\lim_{x\to\infty} xe^{-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x}=0$

$\lim_{x\to-\infty} xe^{-x}=-\infty$

$y=0$

---

(4) $f(x)=\ln(x-2)+3$

الرأسية

$x-2=0$

$x=2$

الافقية

لا يوجد

---

(5) $f(x)=\frac{\ln x}{x}$

$D=(0,\infty)$

الرأسية

$x=0$

الافقية

$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1/x}{1}=0$

$y=0$

---

(6) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

الرأسية

$\sqrt{x^2+1}=0$

$x^2+1=0$

لا يوجد حل

لا يوجد خطوط رأسية

الافقية

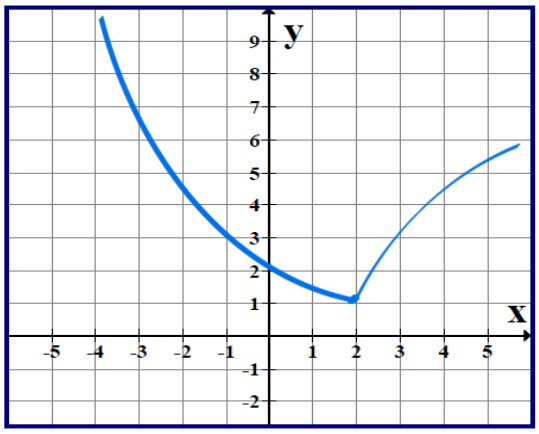
$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{|x|}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x}=1$

$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{|x|}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{-x}=-1$

$y=1$ $\quad y=-1$

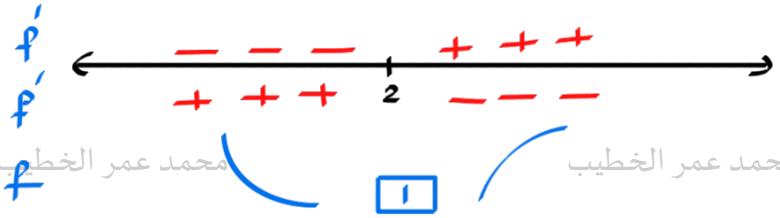
محمد عمر الخطيب

(1) ارسم منحنى تقريبي للدالة $f(x)$ المتصلة على R والتي تحقق الشروط التالية:



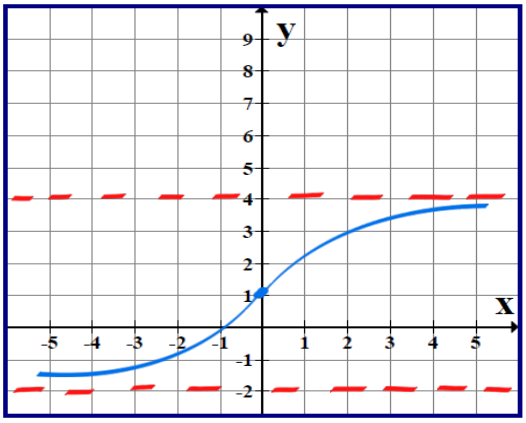
$$f(2)=1$$
$$f'(x)<0,\ f''(x)>0 \quad , \quad x<2$$
$$f'(x)>0,\ f''(x)<0 \quad , \quad x>2$$

☆ تحويل البيانات على الخط المزدوج

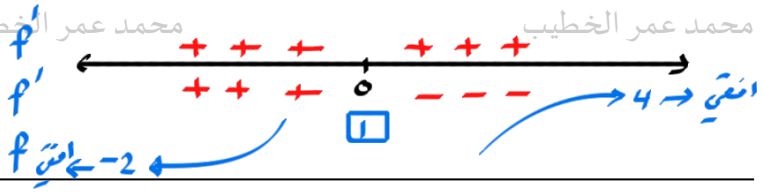


---

(2) ارسم منحنى تقريبي للدالة $f(x)$ المتصلة على R والتي تحقق الشروط التالية:

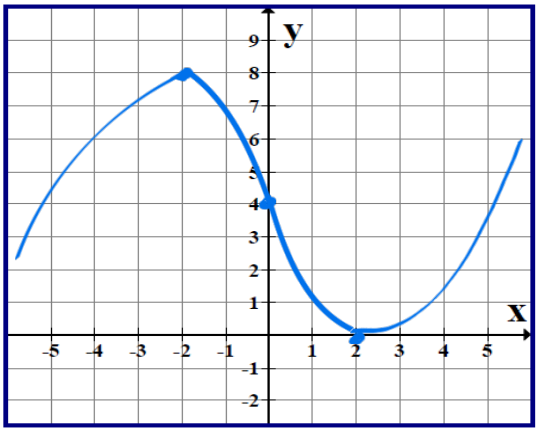


$$f(0)=1$$
$$f'(x)>0, \quad x\neq 0$$
$$f''(x)>0 \quad , \quad x<0$$
$$f''(x)<0 \quad , \quad x>0$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-2,\ \lim_{x\to\infty} f(x)=4,$$

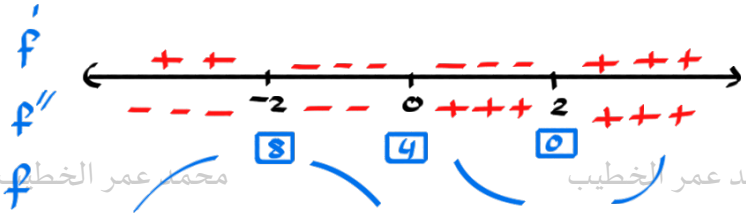


---

(3) ارسم منحنى تقريبي للدالة $f(x)$ المتصلة على R والتي تحقق الشروط التالية:

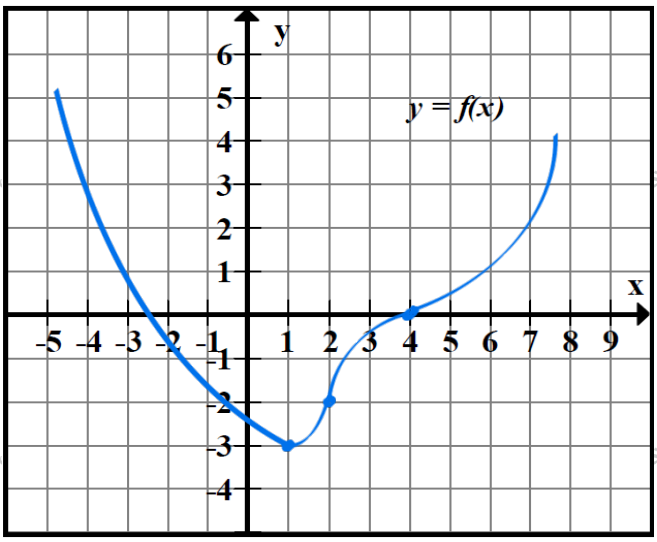


$$f(-2)=8,\ f(0)=4,\ f(2)=0$$
$$f'(-2)=f'(2)=0$$
$$f'(x)<0, \quad -2<x<2$$
$$f'(x)>0, \quad x<-2,\ x>2$$
$$f''(x)<0 \quad , \quad x<0$$
$$f''(x)>0 \quad , \quad x>0$$

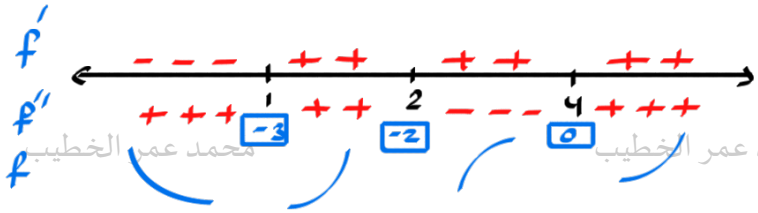


محمد عمر الخطيب

(1) ارسم منحنى تقريبي للدالة $f(x)$ المتصلة على R والتي تحقق الشروط التالية:



	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
$-\infty < x < 1$		−	+
$x = 1$	-3	0	+
$1 < x < 2$		+	+
$x = 2$	-2	+	0
$2 < x < 4$		+	−
$x = 4$	0	0	0
$4 < x < \infty$		+	+

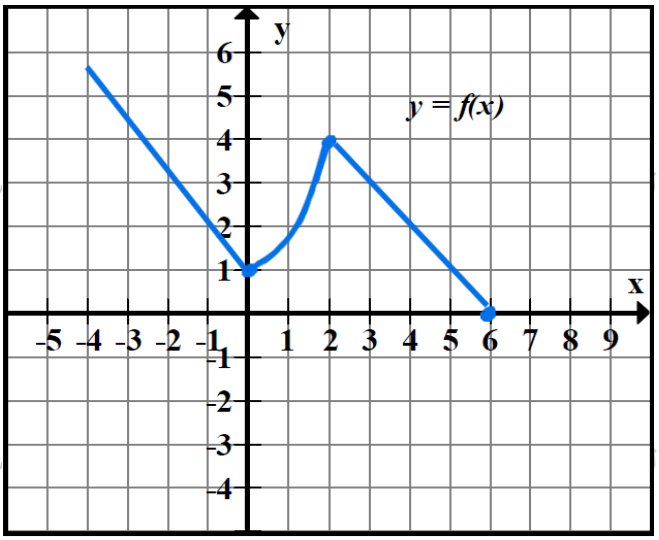


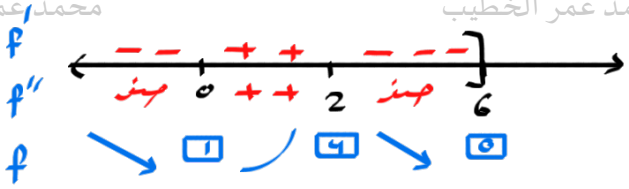
---

(2) اعتمد على الجداول التالية لرسم بيان تقريبي للدالة المتصلة $f(x)$

الفترات	$x < 0$	$0 < x < 2$	$2 < x < 6$
$f'(x)$	−	+	−
$f''(x)$	0	+	0

x	0	2	6
$f(x)$	1	4	0
$f'(x)$	غير موجودة	غير موجودة	− 1





* خطوط المستقيمة مهمة لان المشتقة الثانية عندها (لا يوجد تقعر)

ارسم منحنى الدالة $f(x) = -x^3 + 3x - 2$

مع تحديد جميع المميزات المهمة

المميزات المهمة.....تحليل الدالة

مجال الدالة

نقاط التقاطع مع المحاور

خطوط التقارب والفجوات

اشارة الدالة (في وجود خطوط تقارب راسية)

القيم القصوى المحلية والمطلقة

فترات التزايد والتناقص

فترات التقعر ونقاط الانعطاف

حسب السؤال

$f''(x) = -6x$

$f''(x) = 0$

$-6x = 0$

$x = 0$

f'' : + + + | 0 | − − −

$D = (-\infty, \infty)$

☆ نقاط التقاطع مع محور y هي -2

☆ نقاط التقاطع مع محور x هي اصفار الدالة

$x = -2, x = 1$

$f'(x) = -3x^2 + 3$

$f'(x) = 0$

$-3x^2 + 3 = 0$

$x = \pm 1$

f' : − − | −1 | + + | 1 | − − −

تناقص $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

تزايد $(-1, 1)$

قيمة صغرى محلية عند $x = -1$ وقيمتها -4

قيمة عظمى محلية عند $x = 1$ وقيمتها 0

للاعلى $(-\infty, 0)$

للاسفل $(0, \infty)$

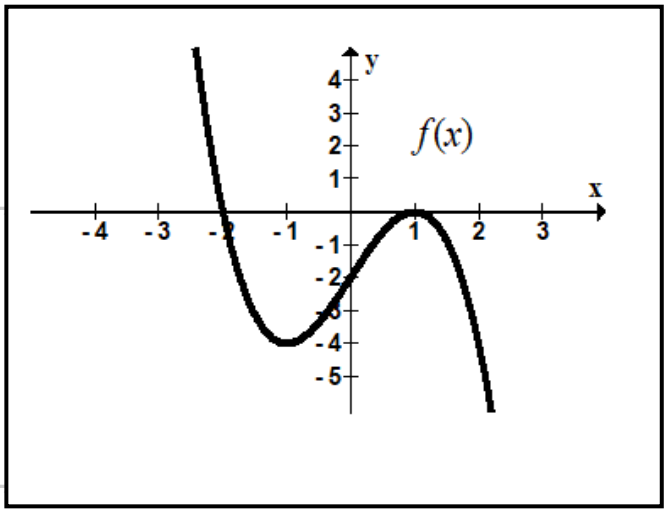
نقطة الانقلاب $(0, -2)$

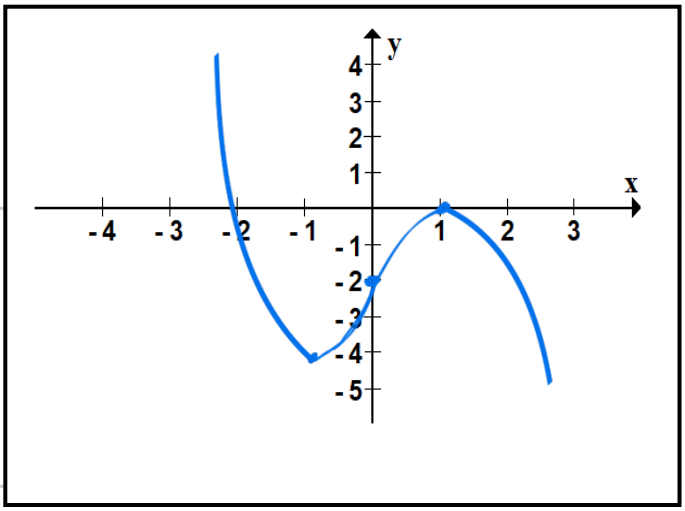
☆ الخط المزدوج

f' : − − − | −1 | + + + | 0 | + + + | 1 | − − −

f'' : + + + | −1 | + + | 0 | − − | 1 | − − −

f : ∪ (−4) ∩ (−2) ∪ (0)





ارسم منحنى الدالة $f(x)=\dfrac{2x-1}{x-1}$

مع تحديد جميع المميزات المهمة

المميزات المهمة.....تحليل الدالة

حسب السؤال

مجال الدالة

نقاط التقاطع مع المحاور

خطوط التقارب والفجوات

اشارة الدالة (في وجود خطوط تقارب راسية)

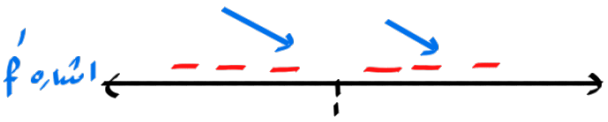
القيم القصوى المحلية والمطلقة

فترات التزايد والتناقص

فترات التقعر ونقاط الانعطاف

$f'(x)=\dfrac{2(x-1)-(2x-1)}{(x-1)^2}=\dfrac{-1}{(x-1)^2}$

اشارة f'

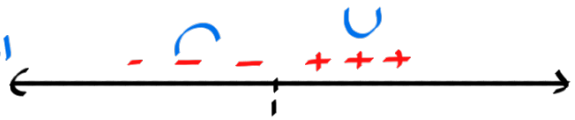


تناقص $(-\infty,1)\cup(1,\infty)$

$f'(x)=\dfrac{-1}{(x-1)^2}=-(x-1)^{-2}$

$f''(x)=2(x-1)^{-3}=\dfrac{2}{(x-1)^3}$

اشارة f''

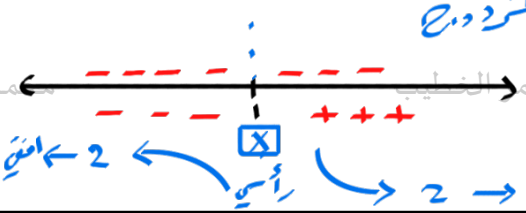


للاسفل $(-\infty,1)$

للاعلى $(1,\infty)$

لا يوجد نقاط انقلاب (الدالة غير متصلة عند $x=1$)

الخط المزدوج



f'' سالب ← 2 ← أسي ← 2 → موجب

$D=R/\{1\}$

نقاط التقاطع مع محور x

عندما يكون البسط = صفر

$x=1/2$

نقاط التقاطع مع محور y هي

وتكون عند ايجاد حيرة الصفر.

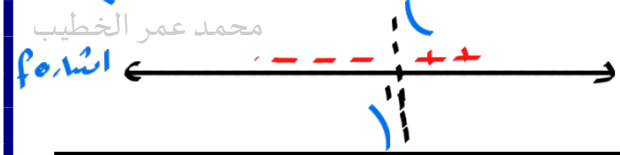
خط التقارب الرأسي $x=1$

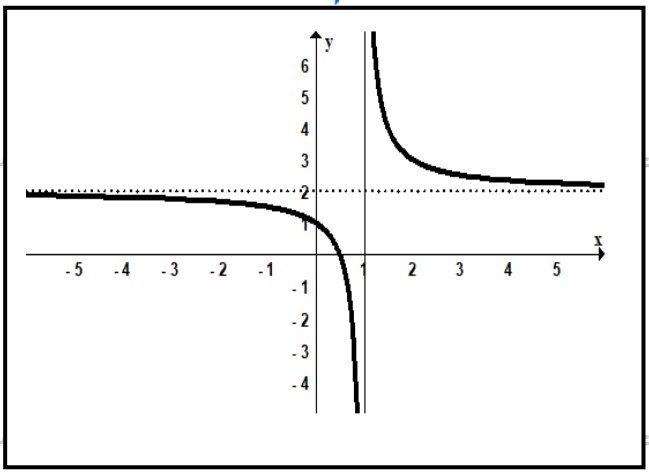
خط التقارب الافقي $y=2$

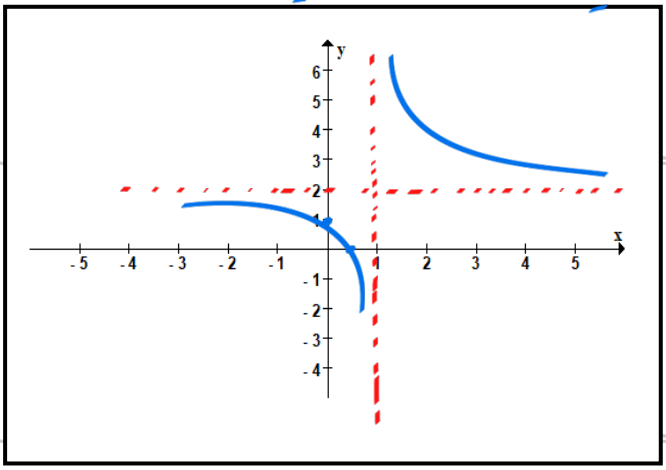
* نحدد اشارة f

(عند وجود خطوط تقارب راسية)

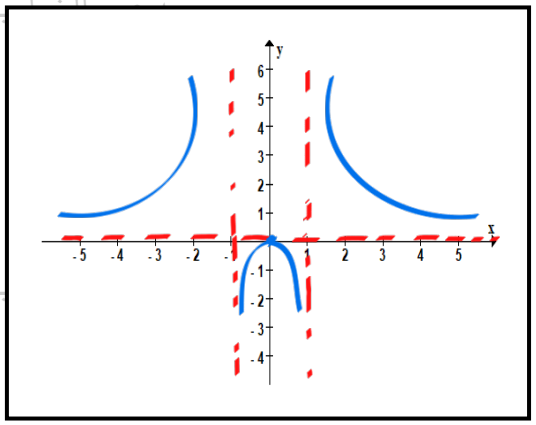
اشارة f





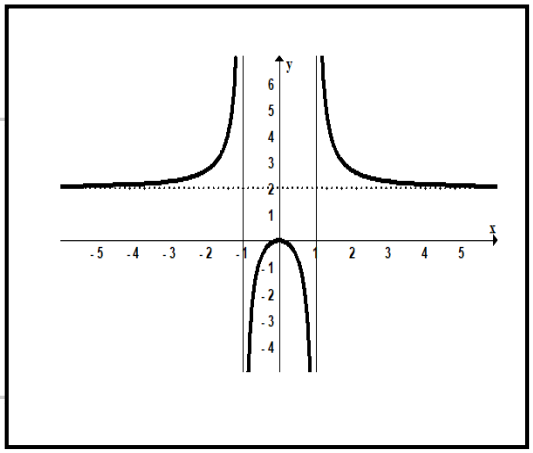


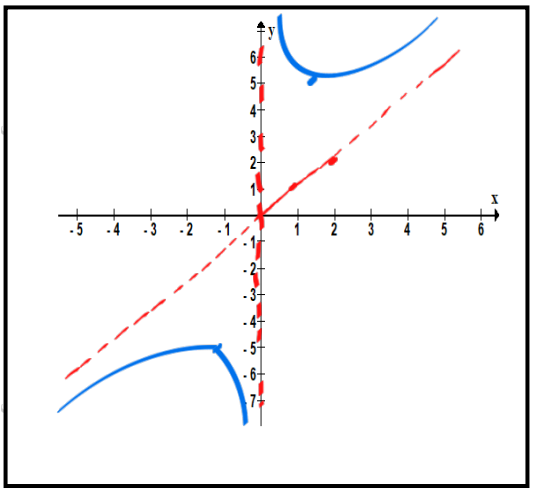
محمد عمر الخطيب



(1) ارسم منحنى الدالة $f(x)=\dfrac{2x^2}{x^2-1}$

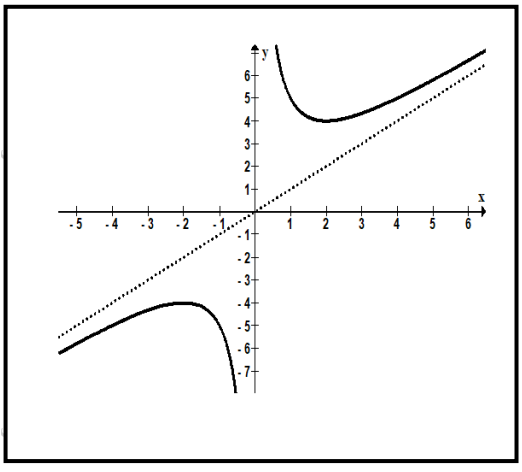
مع تحديد جميع المميزات المهمة





(2) ارسم منحنى الدالة $f(x)=x+\dfrac{4}{x}$

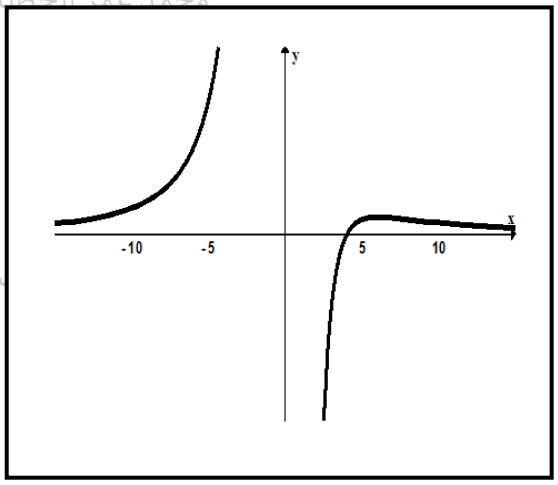
مع تحديد جميع المميزات المهمة



محمد عمر الخطيب

ارسم منحنى الدالة $f(x)=\dfrac{x-4}{x^3}$

مع تحديد جميع المميزات المهمة



حيث

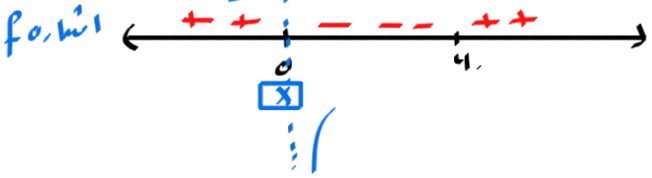
$$f'(x)=\frac{-2x+12}{x^4}\ ,\ f''(x)=\frac{6x-48}{x^5}$$

$D=R/\{0\}$

مقطع x هو 4 .

المقطعين هما $x=0$ ، $y=0$

إشارة f:



$f'(x)=\dfrac{-2x+12}{x^4}$

$f'(x)=0$ عند

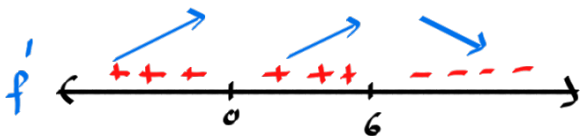
$-2x+12=0$

$x=6$

$f'(x)$ م.ع عند

$x=0$

خارج المجال



تزايد $(-\infty,0)\ ,\ (0,6)$

تناقص $(6,\infty)$

عظمى محلية $\frac{1}{108}$ عند $x=6$

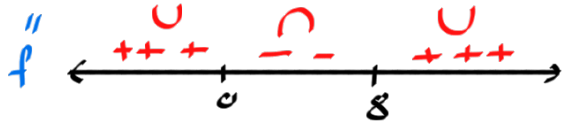
$f''(x)=\dfrac{6x-48}{x^5}$

$f''(x)$ م.ع عند $x=0$

$f''(x)=0$

$6x-48=0$

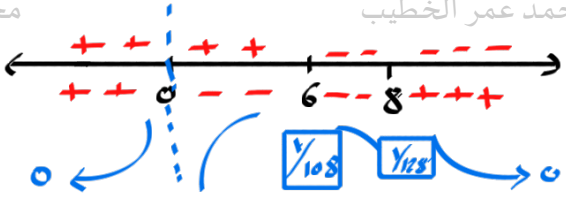
$x=8$

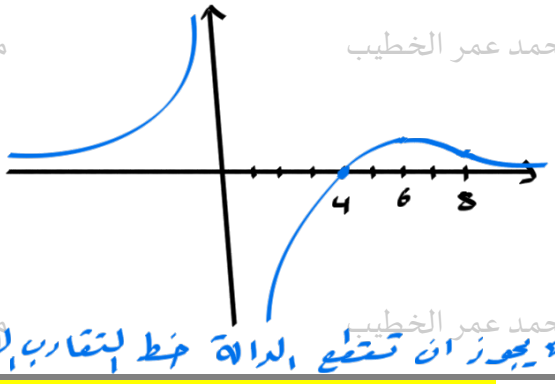


للأعلى $(-\infty,0)\cup(8,\infty)$

للأسفل $(0,8)$

نقطة الانقلاب فقط $(8,\frac{1}{128})$

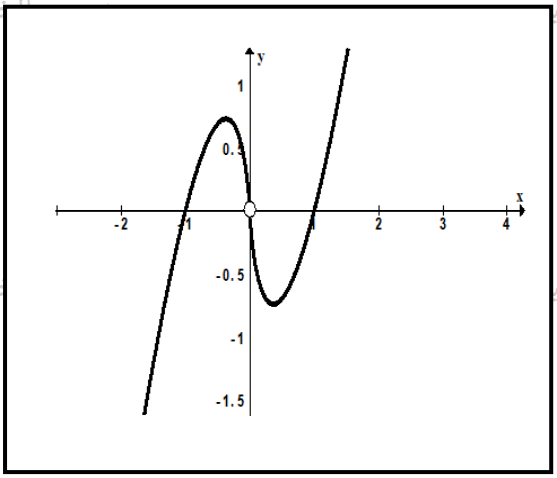




* يجوز أن تقطع الدالة خط التقارب الأفقي

ارسم منحنى الدالة $f(x)=x\ln x^2$

مع تحديد جميع المميزات المهمة



حيث

$$f'(x)=2+\ln x^2\ ,\ f''(x)=\frac{2}{x}$$

$D=\mathbb{R}/\{0\}$

مقاطع محور x

$x\ln x^2=0$

$x=0$ خارج المجال ، $\ln x^2=0$

$x^2=1$

$x=\pm 1$

دراسة رتابة النهايات عند حدود التعريف

$f'(x)=0$

$2+\ln x^2=0$

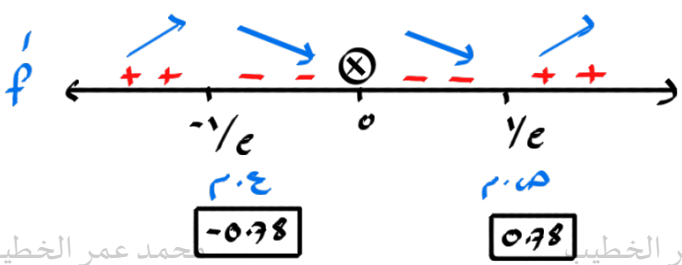
$\ln x^2=-2$

$2\ln|x|=-2$

$\ln|x|=-1$

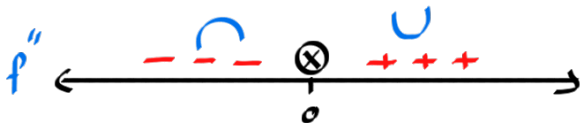
$|x|=e^{-1}=\frac{1}{e}$

$x=+\frac{1}{e}\ ,\ x=\frac{-1}{e}$

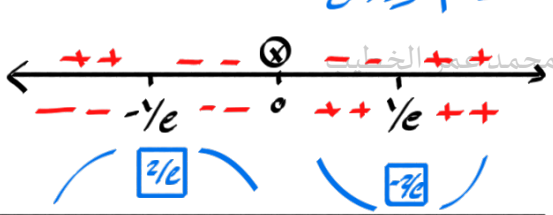


$f''(x)=0$ ، $f'(x)$ ع.م

$x=0$ لا يوجد حل



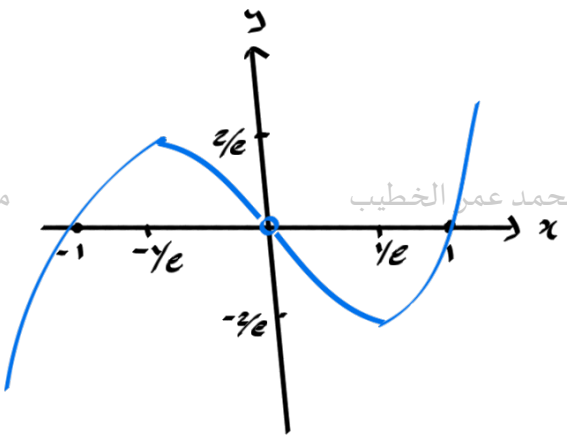
الخط المزدوج



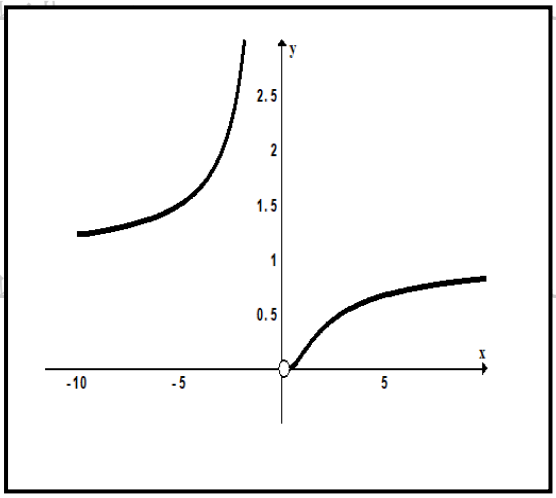
$\lim_{x\to 0^+} x\ln x^2 = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x^2}{1/x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{2/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0^+}-2x = 0$

$\lim_{x\to 0^-} x\ln x^2 = \lim_{x\to 0^-}\frac{\ln x^2}{1/x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{2/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0^-}-2x = 0$

لا نهايات



محمد عمر الخطيب



ارسم منحنى الدالة $f(x)=e^{-2/x}$

مع تحديد جميع المميزات المهمة

حيث

$$f'(x)=\frac{2}{x^2\,e^{2/x}} \quad , \quad f''(x)=\frac{4-4x}{x^2\,e^{2/x}}$$

D = R / {0}

لا يوجد مقاطع مع المحورين

$x=0$ خطوط التقارب الرأسية

خطوط التقارب الأفقية

$$\lim_{x\to\pm\infty} e^{-2/x} = e^{0} = 1$$

$y=1$

$$f'(x)=\frac{2}{x^2\,e^{2/x}}$$

$f'(x)=0$ لا يوجد حل

ع.م $f'(x)$

$x^2\,e^{2/x}=0$

$x=0$, $e^{2/x}=0$

لا يوجد حل , خارج المجال

ع.م $f''(x)$

$x=0$

خارج المجال

الخط المزدوج .

$$f''(x)=\frac{4-4x}{x^2\,e^{2/x}}$$

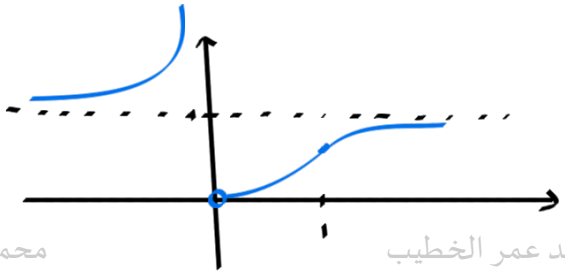
$f''(x)=0$

$4-4x=0$

$x=1$

f'	+	+	+	⊗	+	+	1	+	+	+
f''	+	+	+	0	+	+	1	−	−	−
f	↓ 1						$1/e^2$			↑ 1

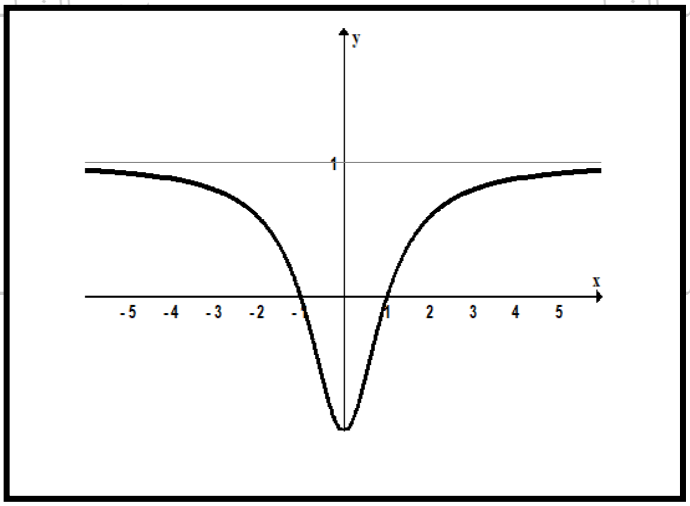
$$\lim_{x\to 0^+} e^{-2/x} = e^{-\infty} = 1/e^{\infty} = 0 \quad , \quad \lim_{x\to 0^-} e^{-2/x} = e^{\infty} = \infty$$



محمد عمر الخطيب

(1) ارسم منحنى الدالة $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

مع تحديد جميع المميزات المهمة



حيث

$$f'(x)=\frac{4x}{(x^2+1)^2}\ ,\ f''(x)=\frac{4-16x^2}{(x^2+1)^3}$$

متقاطع المحور x في $x=\pm1$

مقطع المحور y في $y=1$

خط مقارب أفقي

$f'(x)=0$

$4x=0$

$x=0$

ع.م $f'(x)$

$x^2+1=0$

لا يوجد حل

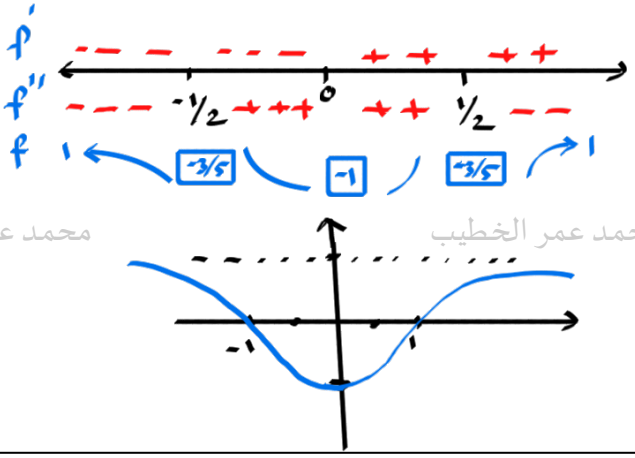
$f''(x)=0$

$4-16x^2=0$

$x=\pm\frac{1}{2}$

ع.م $f''(x)$

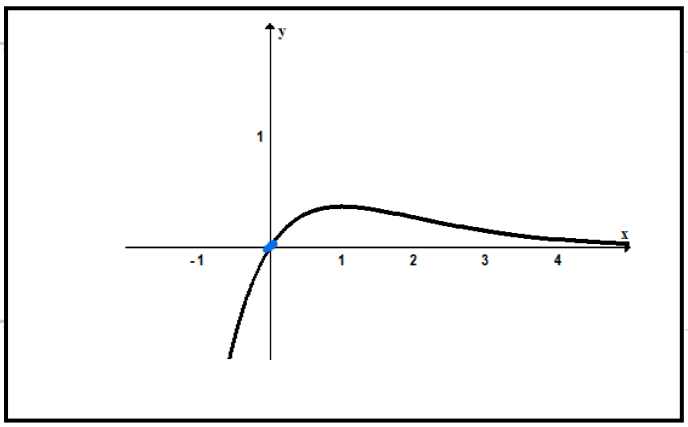
لا يوجد حل



---

(2) ارسم منحنى الدالة $f(x)=xe^{-x}$

مع تحديد جميع المميزات المهمة



حيث

$$f'(x)=\frac{1-x}{e^x}\ ,\ f''(x)=\frac{x-2}{e^x}$$

متقاطع مع المحور x هو 0

متقاطع مع المحور y هو 0

خط مقارب أفقي $y=0$

$\lim\limits_{x\to\infty} x\bar{e}^x = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{e^x} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{e^x} = 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} x\bar{e}^x = -\infty\cdot(\infty) = -\infty$

$f'(x)=0$

$x=1$

ع.م $f'(x)$

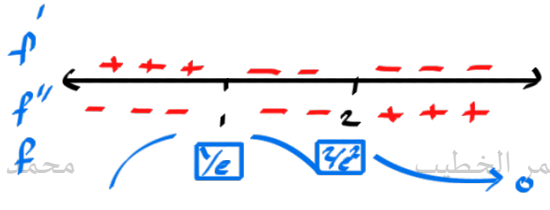
لا يوجد حل

$f''(x)=0$

$x=2$

ع.م $f''(x)$

لا يوجد حل



ارسم منحنى الدالة $f(x)=x^{5/3}-5x^{2/3}$ مع تحديد جميع المميزات المهمة

$D=(-\infty,\infty)$

متقطع محور y هو 0

متقطع محور x

$x^{5/3}-5x^{2/3}=0$

$x^{2/3}(x-5)=0$

$x=0,\ x=5$

$f'(x)=\frac{5}{3}x^{2/3}-\frac{10}{3}x^{-1/3}$

$=\frac{5}{3}x^{-1/3}(x-2)$

$=\frac{5(x-2)}{3x^{1/3}}$

$f'(x)=0$ ، $f'(x)$ غ.م

$x=2$ ، $x=0$

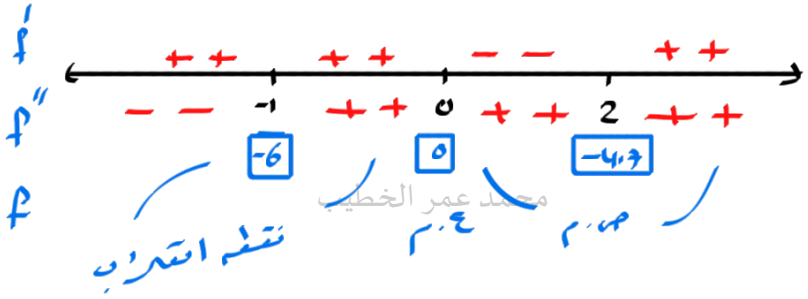
$f''(x)=\frac{10}{9}x^{-1/3}+\frac{10}{9}x^{-4/3}$

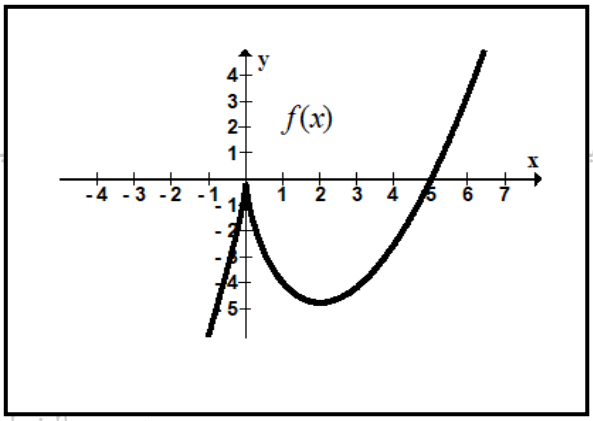
$=\frac{10}{9}x^{-4/3}(x+1)$

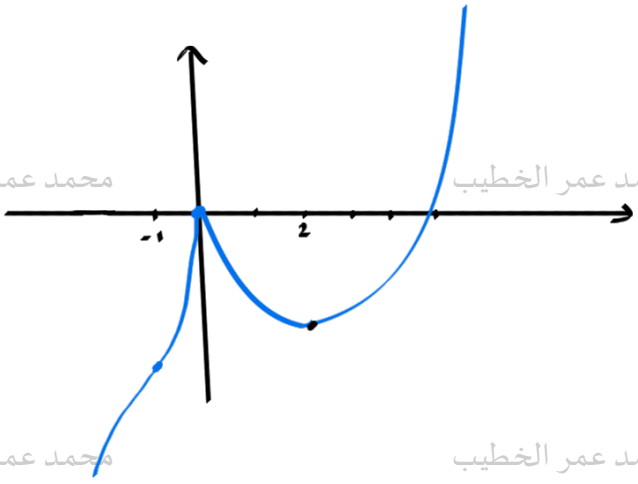
$=\frac{10(x+1)}{9x^{4/3}}$

$f''(x)=0$ ، $f''(x)$ غ.م

$x=-1$ ، $x=0$







محمد عمر الخطيب

ارسم منحنى الدالة $f(x)=x+\sin x$ مع تحديد جميع المميزات المهمة

$D=(-\infty,\infty)$

$f'(x)=1+\cos x$

$f'(x)=0$

$1+\cos x=0$

$\cos x=-1$

x	0	x
	π	

$x=\pi+2n\pi \quad , \quad n\in Z$

$x=\dots,-5\pi,-3\pi,-\pi,\pi,3\pi,\dots$

$f''(x)=-\sin x$

$f''(x)=0$

$-\sin x=0$

$\sin x=0$

x	0	
	π	

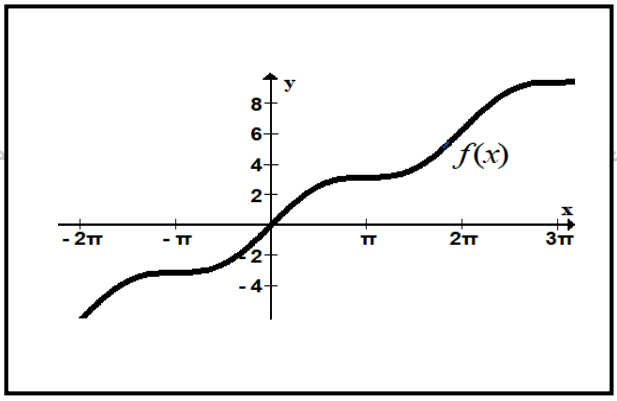
$x=0+n\pi=n\pi \quad , \quad n\in Z$

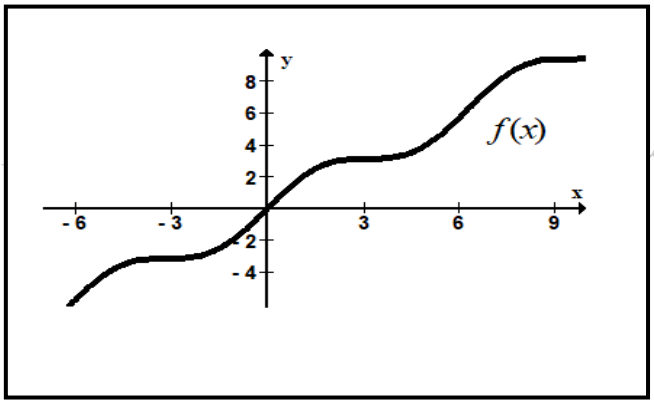
$x=\dots,-3\pi,-2\pi,-\pi,0,\pi,2\pi,\dots$

	-4π		-3π		-2π		$-\pi$		0		π		2π		3π		4π
f'	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
f''	+	+	+	+	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−
f	↗		↗		∩		↗		↗		∩		↗		↗		↗

☆ لا يوجد قيم قصوى محلية.

☆ نقاط الانعطاف عند $x=n\pi$

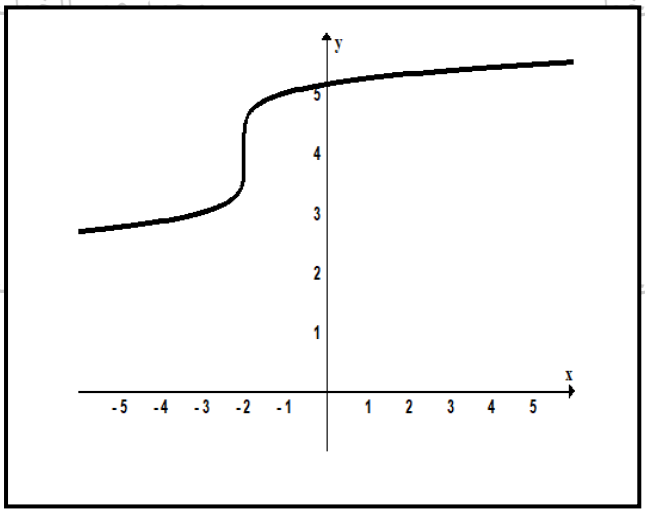




محمد عمر الخطيب

(1) ارسم منحنى الدالة $f(x)=(x+2)^{1/5}+4$

مع تحديد جميع المميزات المهمة



$f''(x)=\frac{-4}{25}(x+2)^{-9/5}=\frac{-4}{25(x+2)^{9/5}}$

$f''(x)=0$ ليس لها حل

$f''(x)$ غير معرفة عند $x=-2$

$D=(-\infty,\infty)$

$\sqrt[5]{2}+4=5.114$ هو y مقطع محور

$f'(x)=\frac{1}{5}(x+2)^{-4/5}=\frac{1}{5(x+2)^{4/5}}$

$f'(x)=0$ ليس لها حل

$f'(x)$ غير معرفة عند $x=-2$

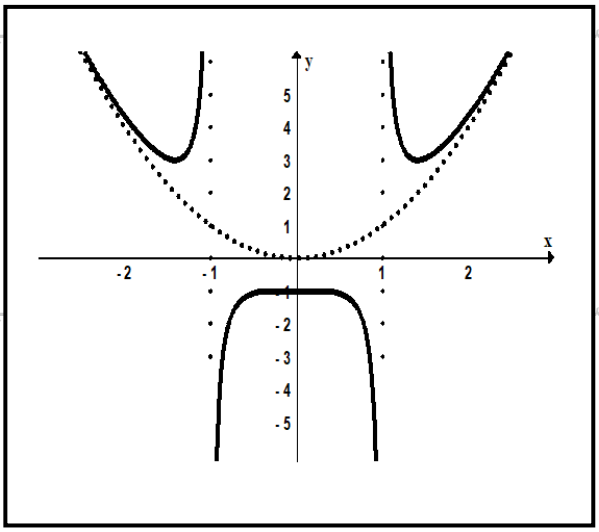
f'	+	+	+	+ + +
f''	+	+	+	-2 - - -
f	⌒		⌒	4 ⌓

الدالة مماس رأسي عند $x=-2$

---

(2) اوجد منحنى التقارب للدالة $f(x)=\frac{x^4-x^2+1}{x^2-1}$

ثم ارسم الدالة



مقطع محور y هو -1

خطوط التقارب الرأسية $x=\pm 1$

منحنى التقارب هو $y=x^2$

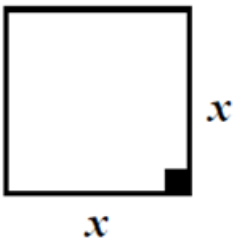
$$\begin{array}{r|l} x^2 & \\ \hline x^2-1 & x^4-x^2+1 \\ & 0x^4+x^2 \\ \hline & 1 \end{array}$$

اشارة f	+	+	‖	- - -	‖	+ +
	⌒		x		x	⌓

قوانين المساحات والحجوم

ملاحظة : تم نقل المسائل الاقتصادية المطروحة في الدرس السابع الى الدرس التاسع

(1) المربع



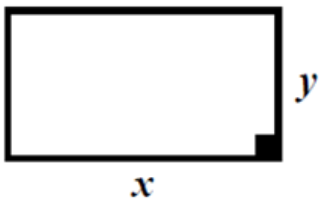
المساحة : $A = x^2$

المحيط : $P = 4x$

طول القطر : $d = \sqrt{2}\, x$

---

(2) المستطيل



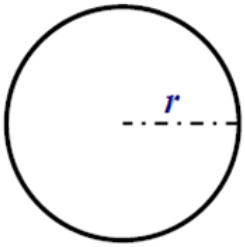
المساحة : $A = x \times y$

المحيط : $P = 2x + 2y$

طول القطر: $d = \sqrt{x^2 + y^2}$

---

(3) الدائرة

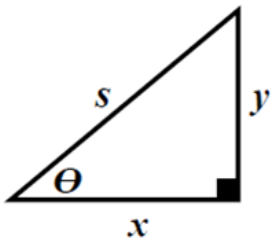


المساحة : $A = \pi r^2$

المحيط : $C = 2\pi r$

---

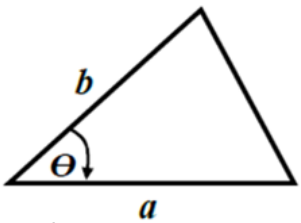
(4) المثلث



المساحة : $A = \frac{1}{2} x \times y$

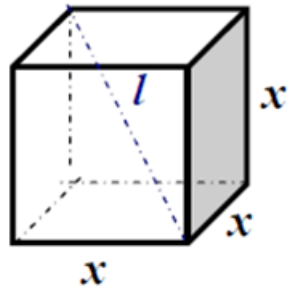
المحيط : $P = x + y + s$

طول الوتر: $s = \sqrt{x^2 + y^2}$



مساحة المثلث غير القائم : $A = \frac{1}{2} ab \sin\theta$

(5) المكعب



الحجم : $V = x^3$

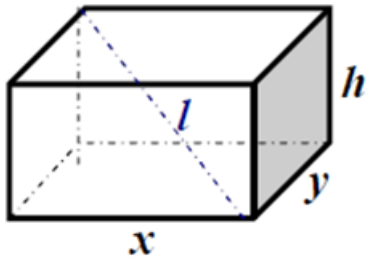
مساحة السطح الجانبية : $A = 4x^2$

مساحة السطح الكلية : $S = 6x^2$

طول القطر: $L = \sqrt{3}\ x$

---

(6) شبة المكعب



الحجم : $V = xyh$

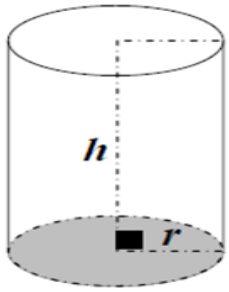
مساحة السطح الجانبية : $A = 2xh + 2yh$

مساحة السطح الكلية : $S = 2xy + 2xh + 2yh$

طول القطر: $L = \sqrt{x^2 + y^2 + h^2}$

---

(7) الاسطوانة



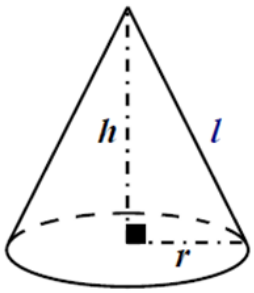
الحجم : $V = \pi r^2 h$

مساحة السطح الجانبية : $A = 2\pi rh$

مساحة السطح الكلية : $S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$

---

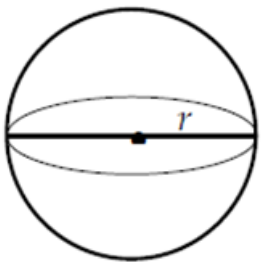
(8) المخروط



الحجم : $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

---

(9) الكرة



الحجم : $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

مساحة السطح الكلية : $S = 4\pi r^2$

خطوات حل مسائل القيم المثلى

اقراء المسالة

(1) ارسم شكلا توضيحياً

(2) حدد المتغيرات ورمّزها

اذا كانت بمتغيرين

(4) كتابة العلاقة المساعدة واجعل العلاقة الاساسية بمتغير واحد

اذا كانت بمتغير واحد

(3) اكتب العلاقة الاساسية ويستدل عليها من كلمة اكبر ما يمكن او اصغر ما يمكن

(5) اشتق الدالة الاساسية ثم اوجد الاعداد الحرجة

ملاحظة : لا يجوز اشتقاق الدالة الاساسية في حالة وجود متغيرين

(6) اختبر القيمة القصوى المطلقة

مجال مغلق...اختبار القيم

مجال مفتوح...
اختبار المشتقة الأولى
او اختبار المشتقة الثانية

(7) اخذ القرار (ايجاد المطلوب)

كلامات تدل على ان السؤال ...على القيم المثلى مثل .... اكبر ما يمكن ، اصغر ما يمكن ، اقصر ، اطول.....

عددين غير سالبين مجموعهما 30 ، اوجد العددين اذا كان حاصل ضرب مربع العدد الاول في العدد الثاني اكبر ما يمكن.

① ——

② نفرض العدد الأول x والعدد الثاني y

④ $x+y=30$

$y=30-x$

$0 \le x \le 30$ مجال مغلق

③ $f=x^2y$

$=x^2(30-x)$

$=30x^2-x^3$

سميت الدالة الاساسية وهي حاصل ضرب مربع العدد الأول في العدد الثاني

⑤ $f(x)=60x-3x^2$

$f'(x)=0$

$60x-3x^2=0 \Rightarrow x=0,\ x=20$

⑥ الاختبار (اختبار القيم)

$f(0)=0$

$f(30)=0$

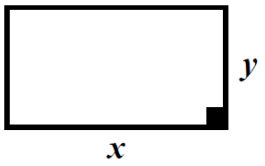
$f(15)=4000$ عظمى مطلقة

⑦ القرار

العددين هما 20 ، 10

محمد عمر الخطيب

(1) اوجد ابعاد مستطيل محيطة 24 متر لتكون مساحته اكبر ما يمكن.



$2x+2y=24$

$x+y=12$

$y=12-x$

$0 \le x \le 12$

$A = xy$

$= x(12-x)$

$= 12x - x^2$

$A' = 12 - 2x$

$A' = 0$

$12 - 2x = 0$

$x = 0 \ , \ x = 6$

$A(0) = 0$

$A(12) = 0$

$A(6) = 36$ عظمى مطلقة

6 , 6 الابعاد هي

x , $y = 12 - x$

---

(2) مزرعة مستطيلة الشكل تقع على حافة نهر مستقيم، يراد وضع سياج طوله 800 متر على الجوانب الثلاث الاخرى ما أكبر مساحة يمكن احاطتها.



$2x+y = 800$

$y = 800 - 2x$

$0 \le x \le 400$

$A = xy$

$= x(800-2x)$

$= 800x - 2x^2$

$A' = 800 - 4x$

$A' = 0$

$800 - 4x = 0$

$x = 200$

$A(0) = 0$

$A(400) = 0$

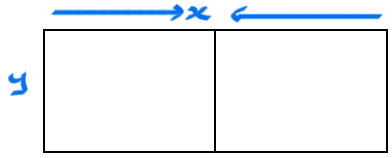
$A(200) = 80000$ عظمى مطلقة

200 , 400 الابعاد هي

80000 اكبر مساحة هي

---

(3) يراد عمل سياج حول اسطبل للخيول مستطيل الشكل ومقسوم الى حضرتين متلاصقين ومتطابقين في المساحة إذا كان طول السياج 120 ft اوجد ابعاد الاسطبل لتكون مساحة اكبر ما يمكن



$2x+3y = 120$

$3y = 120 - 2x$

$y = \frac{120-2x}{3}$

$= 40 - \frac{2}{3}x$

$0 \le x \le 60$

$A = xy$

$= x\left(40 - \frac{2}{3}x\right)$

$= 40x - \frac{2}{3}x^2$

$A' = 40 - \frac{4}{3}x$

$A' = 0$

$40 - \frac{4}{3}x = 0$

$-\frac{4}{3}x = -40$

$x = 30$

$A(0) = 0$

$A(60) = 0$

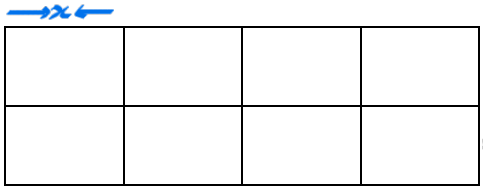
$A(30) = 600$

$x = 30$ عند 600 عظمى مطلقة

$y = 20$

30 , 20 الابعاد هي

(1) مزرعة ابقار مستطيلة الشكل، يراد تقسيمها بسياج طوله 720 متر الى 8 حظائر مستطيلة الشكل ومتساوية المساحة اوجد ابعاد الحظيرة الواحدة لتكون مجموع مساحات جميع الحظائر اكبر ما يمكن



$12x + 10y = 720$

$10y = 720 - 12x$

$y = 72 - 1.2x$

$0 \le x \le 60$

$A = 8xy$

$= 8x(72 - 1.2x)$

$= 576x - 9.6x^2$

$A' = 576 - 19.2x$

$A' = 0$

$576 - 19.2x = 0$

$x = \frac{576}{19.2} = 30$

$A(0) = 0$

$A(60) = 0$

$A(30) = 8640$

$x = 30$ عند 8640 عظمى مطلقة

ابعاد الحظيرة الواحدة هي

$x = 30$

$y = 72 - 1.2(30) = 36$.

---

(2) قطعة ارض مستطيلة الشكل مساحتها 400 متر مربع، اوجد طول أصغر سياج ممكن احاطة الارض بها من الجوانب الاربعة.



$xy = 400$

$y = \frac{400}{x}$

$x > 0$

$P = 2x + 2y$

$= 2x + 2 \cdot \frac{400}{x}$

$= 2x + \frac{800}{x}$

$P' = 2 - \frac{800}{x^2}$

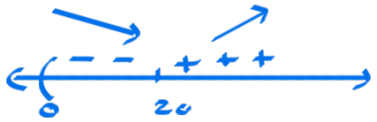
$= \frac{2x^2 - 800}{x^2}$

$P' = 0$

$2x^2 - 800 = 0$

$x = -20$ / $x = 20$ خارج المجال

اختبار المشتقة الاولى (بمجال مفتوح)



P' غ.م

$x = 0$ خارج المجال

الدالة متناقصة ثم متزايدة

عند $x = 20$ نهاية صغرى مطلقة

$P = 2(20) + \frac{800}{20}$

$= 80$ m.

طول اصغر سياج

---

(3) مزرعة مستطيلة الشكل تقع على حافة نهر مستقيم مساحتها 1800 قدم مربع ، يراد وضع سياج على الجوانب الثلاث الاخرى ما اصغر طول سياج يمكن احاطة الأرض به (القيمة الصغرى للمحيط)



$xy = 1800$

$y = \frac{1800}{x}$

$x > 0$.

$P = 2x + y$

$= 2x + \frac{1800}{x}$

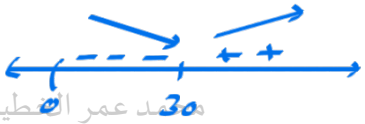
$P' = 2 - \frac{1800}{x^2}$

$= \frac{2x^2 - 1800}{x^2}$

$P' = 0$

$2x^2 - 1800 = 0$

$x = -30$ / $x = 30$



P' غ.م

$x = 0$

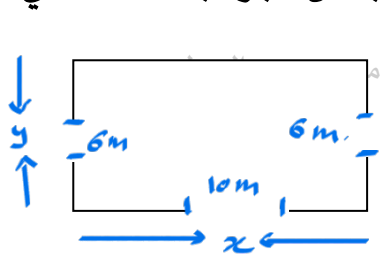
الدالة متناقصة ثم متزايدة

عند $x = 30$ نهاية صغرى مطلقة

طول اصغر سياج هو

$P = 2(30) + \frac{1800}{30} = 120$ ft

(1) صالة عرض مستطيلة الشكل مساحتها $800\ ft^2$ ، بها ثلاث ابواب من ثلاث جوانب عرض الباب الأول $10\ ft$ ، ومن الجهتين الباقية بابيين بعرض $6\ ft$ لكل منهم، اوجد طول اصغر جدار ممكن احاطة المعرض به من الجوانب الثلاث (التي تحتوي الابواب)



$xy = 800$

$y = \frac{800}{x}$

$x > 0$

$P = x + 2y - (6+6+10)$

$= x + 2 \cdot \frac{800}{x} - 22$

$= x + \frac{1600}{x} - 22$

$P' = 1 - \frac{1600}{x^2}$

$= \frac{x^2 - 1600}{x^2}$

$P' = 0$

$x^2 - 1600 = 0$

$x = -40 \quad / \quad \boxed{x = 40}$

P' غ.م

$x = 0$



الدالة تتناقص ثم تزايد

$x = 40$ وحيده عند

نهاية مطلقة من

$P = 40 + \frac{1600}{40} - 22 = 58$

طول اصغر سياج

---

(2) بين ان المستطيل ذي المساحة العظمى الذي محيطة قيمة ثابتة p يكون مربع طول ضلعة $\frac{p}{4}$ ومساحتة $A = \frac{p^2}{16}$.



$2x + 2y = P$

$x + y = P/2$

$y = \frac{P}{2} - x$

$0 < x < P/2$

$A = xy$

$= x\left(\frac{P}{2} - x\right)$

$= \frac{P}{2}x - x^2$

$A' = \frac{P}{2} - 2x$

$A' = 0$

$\frac{P}{2} - 2x = 0$

$2x = P/2$

$x = P/4$

اختبار القيم

$P(0) = 0$

$P(P/2) = 0$

$P(P/4) = \frac{P}{4}\left(\frac{P}{2} - \frac{P}{4}\right)$

$= \frac{P}{4}\left(\frac{P}{2}\right)$

$= P^2/8$

الدالة تتخذ قيمة عظمى مطلقة عند

$x = \frac{P}{4}$

$y = \frac{P}{2} - \frac{P}{4} = P/4$

بما ان $x = y$ فان الشكل مربع طول

$P/4$ طول ضلعه

---

(3) بين ان المستطيل ذي المحيط الاصغر ومساحتة قيمة ثابتة A يكون مربع طول ضلعة $\sqrt{A}$ ومحيطة $4\sqrt{A}$.



$xy = A$

$y = \frac{A}{x}$

$x > 0$

$P = 2x + 2y$

$= 2x + 2 \cdot \frac{A}{x}$

$= 2x + \frac{2A}{x}$

$P' = 2 - \frac{2A}{x^2}$

$= \frac{2x^2 - 2A}{x^2}$

$P' = 0$

$2x^2 - 2A = 0$

$x^2 = A$

$x = -\sqrt{A} \quad / \quad \boxed{x = \sqrt{A}}$

P' غ.م

$x = 0$

اختبار المشتقة الثانية

$P' = 2 - 2Ax^{-2}$

$P'' = 4Ax^{-3} = \frac{4A}{x^3}$

$P''(\sqrt{A}) = \frac{4A}{(\sqrt{A})^3} > 0$

الدالة تتخذ قيمة صغرى وحيده

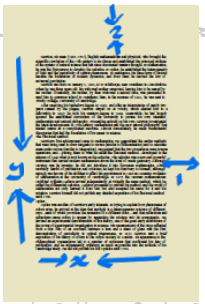
عند $x = \sqrt{A}$ نهاية مطلقة

$y = \frac{A}{\sqrt{A}} = \sqrt{A}$

بما ان $x = y$ فان الشكل مربع

طول ضلعه $\sqrt{A}$ ومحيطه $4\sqrt{A}$

(1) صفحة مستطيلة مطبوع عليها اعلان على شكل منطقة مستطيلة مساحته $98\ in^2$ ويوجد بالصفحة هوامش من الجانبين $1\ in$ و من الاعلى والاسفل $2\ in$ ليس مطبوع عليهم اوجد ابعاد الاعلان التي تحقق القيمة الصغرى لمساحة الصفحة كاملة ثم اوجد ابعاد الصفحة.



$xy = 98$

$y = \frac{98}{x}$

$x > 0$

ابعاد الاعلان x, y

ابعاد الصفحة $x+2, y+4$

مساحة الصفحة $A = (x+2)(y+4)$

$= (x+2)\left(\frac{98}{x}+4\right)$

$= 98 + 4x + \frac{196}{x} + 8$

$A' = 4 - \frac{196}{x^2}$

$= \frac{4x^2 - 196}{x^2}$

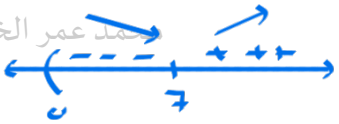
$A' = 0$

$4x^2 - 196 = 0$

$x = -7, \boxed{x = 7}$

A' م.ع

$x = 0$



دالة متصلة على $(0, 7)$

وجيده عند $x = 7$

نهاية صغرى مطلقة

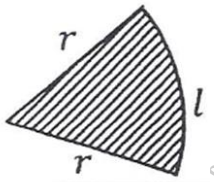
ابعاد الاعلان $7, 14$

ابعاد الصفحة $9, 18$ المطلوب

ابعاد الصفحة وليس ابعاد الاعلان

---

(2) قطاع دائري محيطه $12cm$ ، اوجد طول نصف قطر دائرته التي تجعل مساحته اكبر ما يمكن



مساحة القطاع الدائري $A = \frac{1}{2}rl$

$2r + L = 12$

$L = 12 - 2r$

$0 < r < 6$

$A = \frac{1}{2} r L$

$= \frac{1}{2} r(12 - 2r)$

$= 6r - r^2$

$A' = 6 - 2r$

$A' = 0$

$6 - 2r = 0$

$r = 3$

$A(0) = 0$

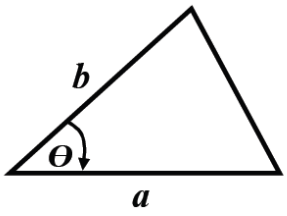
$A(6) = 0$

$A(3) = 9$

عظمى مطلقة 9 عند $r = 3$

---

(3) ضلعان في مثلث طولاهما a, b (ثوابت) والزاوية بينهما θ. اوجد قيمة الزاوية θ التي تجعل مساحة المثلث أكبر ما يمكن.



مساحة المثلث $= \frac{1}{2} a\, b \sin\theta$

$0 < \theta < \pi\ (180°)$

$A = \frac{1}{2} ab \sin\theta$.

ملاحظة a, b ثوابت

و الزاوية θ هي المتغير

$A' = \frac{1}{2} ab \cos\theta$.

$A' = 0$

$\frac{1}{2} ab \cos\theta = 0$

$\cos\theta = 0$

$\theta = \pi/2\ (90°)$

$A(0) = 0$

$A(\pi) = 0$

$A(\pi/2) = \frac{1}{2} ab \sin\pi/2$

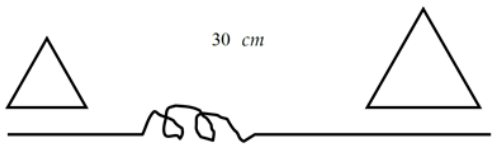
$= \frac{1}{2} ab$.

$\frac{1}{2} ab$ قيمة عظمى مطلقة

عند $x = \pi/2$

اكبر مساحة عندما يكون المثلث قائم

(1) سلك طوله 30 cm نريد ان نصنع منه مثلثين كل منهما متطابق الاضلاع ، حدد طول كل ضلع من اضلاع المثلث ليكون مجموع مساحتيهما اصغر ما يمكن.



مساحة المثلث المتطابق الذي طول ضلعة l هو

$$A=\frac{\sqrt{3}}{4}l^2$$

$3x+3y=30$

$x+y=10$

$y=10-x$

$0\le x\le 10$

$A=A_1+A_2$

$=\frac{\sqrt{3}}{4}x^2+\frac{\sqrt{3}}{4}y^2$

$=\frac{\sqrt{3}}{4}[x^2+y^2]$

$=\frac{\sqrt{3}}{4}[x^2+(10-x)^2]$

$=\frac{\sqrt{3}}{4}[x^2+100-20x+x^2]$

$=\frac{\sqrt{3}}{4}[2x^2-20x+100]$

$A'=\frac{\sqrt{3}}{4}[4x-20]$

$A'=\frac{\sqrt{3}}{4}[4x-20]=0$

$4x-20=0$

$x=5$

$A(0)=25\sqrt{3}$

$A(10)=25\sqrt{3}$

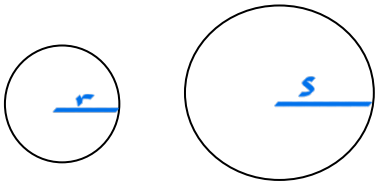
$A(5)=\frac{25\sqrt{3}}{4}$

حيث مطلقة عند $x=5$.

طول كل ضلع هو من اضلاع المثلث 5 ، 5 .

---

(2) قرصان دائريان مجموع قطريهما 28 cm أوجد طول نصف قطر كل منهما ليكون مجموع مساحتيهما أقل ما يمكن .



$2r+2s=28$

$r+s=14$

$s=14-r$

$0\le r\le 14$

$A=A_1+A_2$

$=\pi r^2+\pi s^2$

$=\pi r^2+\pi(14-r)^2$

$=\pi[r^2+(14-r)^2]$

$=\pi[r^2+196-28r+r^2]$

$=\pi[2r^2-28r+196]$

$A'=\pi[4r-28]$

$A'=0$

$\pi[4r-28]=0$

$4r-28=0$

$r=7$.

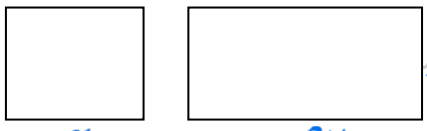
$A(0)=196\pi$

$A(14)=196\pi$

$A(7)=98\pi$

اقل ما يمكن عند $r=7$, $s=7$.

(1) سلك طوله 68 cm قسم إلى جزأين غير متساويين وثني الجزء الأول على شكل مربع والثاني على شكل مستطيل طوله ضعف عرضه . أوجد طول كل جزء ليكون مجموع مساحتي الشكلين أقل ما يمكن .



$4x + 6y = 68$

$2x + 3y = 34$

$3y = 34 - 2x$

$y = \frac{34-2x}{3}$

$0 \le x \le 17$.

$A = A_1 + A_2$

$= x^2 + 2y^2$

$= x^2 + 2\left(\frac{34-2x}{3}\right)^2$

$= x^2 + \frac{2}{9}(34-2x)^2$

$A' = 2x + \frac{2}{9} \cdot 2(34-2x)(-2)$

$= 2x - \frac{8}{9}(34-2x)$

$= 2x - \frac{272}{9} + \frac{16}{9}x$.

$= \frac{34}{9}x - \frac{272}{9}$

$A' = 0$

$\frac{34}{9}x + \frac{272}{9} = 0$

$x = 8$

$A(0) = 257$

$A(17) = 289$

$A(8) = 136$

اصغر ما هي عند $x = 8$. طول كل جزء من السلك هو 32 ، 36

---

(2) نافذه على شكل مستطيل يعلوها نصف دائرة، يراد احاطة الشكل بزخارف خشبية طولها $8 + \pi$ قدم . اوجد نصف قطر الدائرة بحيث تمر اكبر كمية للضوء من النافذة. (مساحة النافذة اكبر ما يمكن) (يجب وضع زخارف بين المستطيل ونصف الدائرة).



$A = A_1 + A_2$

$= \frac{1}{2}\pi r^2 + r \cdot 2y$.

$= \frac{1}{2}\pi r^2 + r \cdot (8 + \pi - 4r - \pi r)$

$= \frac{1}{2}\pi r^2 + 8r + \pi r - 4r^2 - \pi r^2$

$A' = \pi r + 8 + \pi - 8r - 2\pi r$.

$A' = 0$

$\pi r + 8 + \pi - 8r - 2\pi r = 0$

$8 + \pi - 8r - \pi r = 0$

$8 + \pi = 8r + \pi r$

$8 + \pi = (8 + \pi)r$

$r = \frac{8+\pi}{8+\pi} = 1$

$4r + \frac{1}{2}(2\pi r) + 2y = 8 + \pi$

$4r + \pi r + 2y = 8 + \pi$

$2y = 8 + \pi - 4r - \pi r$

$r > 0$

متى عظمى محلية وحيده عند $r = 1$ فهي مطلقة .

$r = 1$, $y = 2$.

محمد عمر الخطيب

(1) ما أكبر مساحة مستطيل قاعدته على محور السينات وراساه العلويان على القطع المكافئ $y = 12 - x^2$

$A = 2xy$

$= 2x(12 - x^2)$

$= 24x - 2x^3$

$A' = 24 - 6x^2$

$A' = 0$

$24 - 6x^2 = 0$

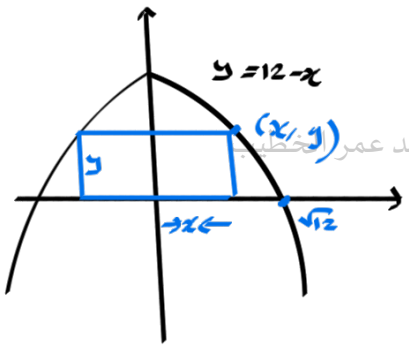
$x = -2, \boxed{x = 2}$

$A(0) = 0$

$A(\sqrt{12}) = 0$

$A(2) = 32$

أكبر مساحة هي 32



$0 \le x \le \sqrt{12}$

---

(2) ما أكبر مساحة مستطيل قاعدته على المستقيم $y = 3$ **وراساه السفليان على القطع المكافئ** $y = x^2$

$A = 2x(3 - y)$

$= 2x(3 - x^2)$

$= 6x - 2x^3$

$A' = 6 - 6x^2$

$A' = 0$

$6 - 6x^2 = 0$

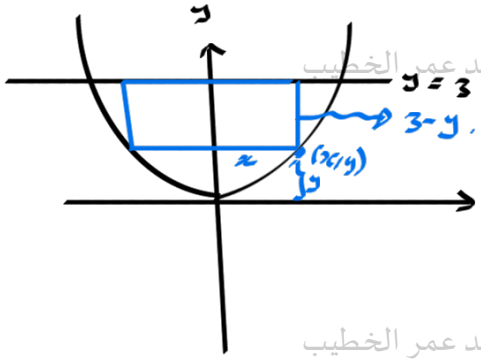
$x = -1, \boxed{x = 1}$

$A(0) = 0$

$A(\sqrt{3}) = 0$

$A(1) = 4$

أكبر مساحة هي 4



$y = x^2$

$0 \le x \le \sqrt{3}$ ← $x^2 = 3$

$x = \pm\sqrt{3}$

---

(3) ما أكبر محيط مستطيل قاعدته على محور السينات وراساه العلويان على القطع المكافئ $y = 4 - x^2$

$P = 4x + 2y$

$= 4x + 2(4 - x^2)$

$= 4x + 8 - 2x^2$

$P' = 4 - 4x$

$P' = 0$

$4 - 4x = 0$

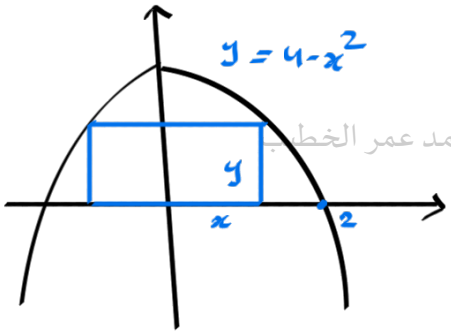
$x = 1$

$P(0) = 8$

$P(2) = 8$

$P(1) = 10$

المحيط هو 10

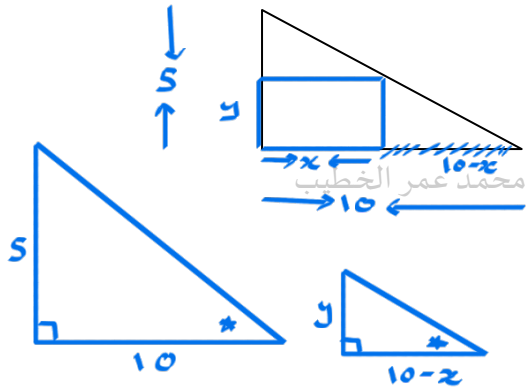


$y = 4 - x^2$

$0 \le x \le 2$

محمد عمر الخطيب

(1) ما أكبر مساحة مستطيل يمكن رسمة داخل مثلث قائم الزاوية طول قاعدتة 10 وارتفاعة 5



من تشابه المثلثات

$\frac{y}{10-x} = \frac{5}{10}$

$\frac{y}{10-x} = \frac{1}{2}$

$y = \frac{1}{2}(10-x) = 5 - \frac{1}{2}x$

$0 \le x \le 10$

$A = xy$

$= x(5 - \frac{1}{2}x)$

$= 5x - \frac{1}{2}x^2$

$A' = 5 - x$

$A' = 0$

$5 - x = 0$

$x = 5$

$A(0) = 0$

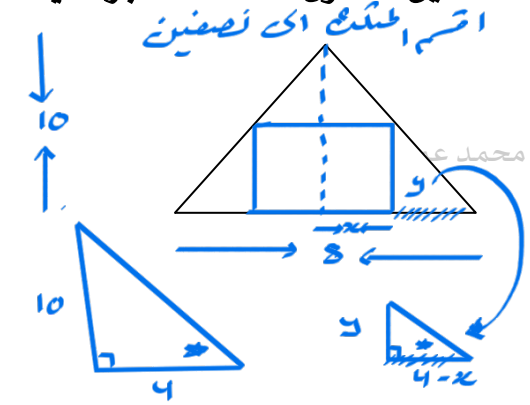
$A(10) = 0$

$A(5) = 12.5$

12.5 اكبر مساحة هي

---

(2) مثلث متساوي الساقين طول قاعدتة $8\ cm$ وطول ارتفاعة $10\ cm$ ، يراد رسم مستطيل داخل المثلث بحيث يقع احد بعدية على قاعدة المثلث ويقع كل من رأسيه الاخريين على على ساقي المثلث، اوجد بعدي المستطيل لتكون مساحتة اكبر ما يمكن



من التشابه

$\frac{y}{4-x} = \frac{10}{4}$

$y = \frac{10}{4}(4-x) = 10 - \frac{5}{2}x$

$0 \le x \le 4$

$A = 2xy$

$= 2x(10 - \frac{5}{2}x)$

$= 20x - 5x^2$

$A' = 20 - 10x$

$A' = 0$

$20 - 10x = 0$

$x = 2$

$A(0) = 0$

$A(4) = 0$

$A(2) = 20$

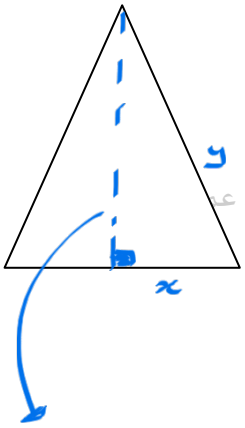
اكبر مساحة هي 20

وابعاد المستطيل هي 4,5

و ليس 2,5

محمد عمر الخطيب

(1) ما اكبر مساحة مثلث متساوي الضلعين محيطة يساوي $30\ cm$



$$A = \frac{1}{2}(2x)\sqrt{y^2-x^2}$$

$$= x\sqrt{(15-x)^2-x^2}$$

$$= x\sqrt{225-30x+x^2-x^2}$$

$$= x\sqrt{225-30x}$$

$$A' = 1\cdot\sqrt{225-30x} + x\cdot\frac{-30}{2\sqrt{225-30x}}$$

$$= \sqrt{225-30x} - \frac{15x}{\sqrt{225-30x}}$$

$$= \frac{225-30x-15x}{\sqrt{225-30x}}$$

$$= \frac{225-45x}{\sqrt{225-30x}}$$

$A' = 0$

$225-45x=0$

$x=5$

$A' = 0$

$225-30x=0$

$x=7.5$

$A(0)=0$

$A(7.5)=0$

$A(5)=5\sqrt{75}$

$5\sqrt{75}$ اكبر مساحة مثلث هي

الارتفاع $= \sqrt{y^2-x^2}$

$2x+2y=30$

$x+y=15$

$y=15-x$

$0 \le x \le 7.5$

لا يمكن ان يكون x يساوي 15

لانه يجب ان تكون $x<y$

---

(2) ما أقصر بعد للنقطة $(5,-1)$ **عن المستقيم** $y=2x-1$

$$S = \sqrt{(x-5)^2+(y+1)^2}$$

$$= \sqrt{(x-5)^2+(2x-1+1)^2}$$

$$= \sqrt{x^2-10x+25+4x^2}$$

$$= \sqrt{5x^2-10x+25}$$

$$S' = \frac{10x-10}{2\sqrt{5x^2-10x+25}}$$

$S' = 0$ و غ.م S

$10x-10=0$ $\quad 5x^2-10x+25=0$

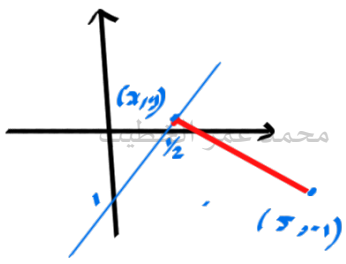
$x=1$ ليس جذر الحل.

$S(0)=5$

$S(5)=10$

$S(1)=\sqrt{20}$

$\sqrt{20}$ اقصر بعد هو

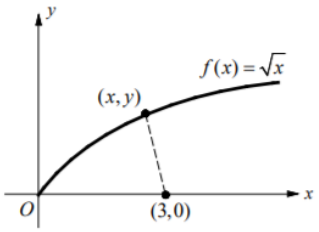


$y=2x-1$

$0 \le x \le 5$

محمد عمر الخطيب

(1) ما اقصر بعد للنقطة $(3,0)$ **عن المنحنى** $y=\sqrt{x}$



$y=\sqrt{x}$

$0 \le x \le 3$

$$s=\sqrt{(x-3)^2+(y-0)^2}$$

$$=\sqrt{x^2-6x+9+(\sqrt{x})^2}$$

$$=\sqrt{x^2-6x+9+x}$$

$$=\sqrt{x^2-5x+9}$$

$$s'=\frac{2x-5}{2\sqrt{x^2-5x+9}}$$

$s(0)=3$

$s(3)=\sqrt{3}=1.73$

$s(5/2)=\frac{\sqrt{11}}{2}=1.65$

اقصر بعد هو 1.65

$s'=0$

$2x-5=0$

$x=\frac{5}{2}$

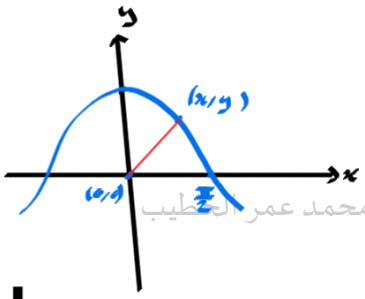
s' م.ع

$x^2-5x+9=0$

لا يوجد حل

---

(2) ما أقصر بعد للنقطة $(0,0)$ **عن الدالة** $y=\cos x$



$y=\cos x$

$0 \le x \le \pi/2$

$$s=\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}$$

$$=\sqrt{x^2+(\cos x)^2}$$

$$s'=\frac{2x+2\cos x(-\sin x)}{2\sqrt{x^2+\cos^2 x}}$$

$$=\frac{2x-2\sin x\cos x}{\sqrt{x^2+\cos^2 x}}$$

$s(0)=1$

$s(\pi/2)=\frac{\pi}{2}=1.57$

اقصر بعد هو 1

اقرب نقطة هي $(0,1)$

$s'=0$

$2x-2\sin x\cos x=0$

$x=0$ بالتجريب ☆

s' م.ع

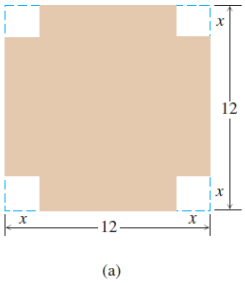
$x^2+\cos^2 x=0$

لا يوجد حل

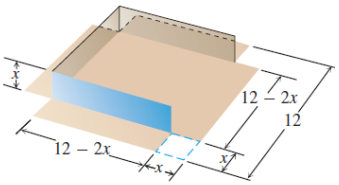
محمد عمر الخطيب

(1) يراد عمل صندوق على شكل شبه مكعب بدون غطاء من ورقة مربعة الشكل طول ضلعها $12in$

وذلك بقطع 4 مربعات متطابقة عند الرؤوس. اوجد أكبر حجم للصندوق؟



(a)



$$ح = (12-2x)(12-2x)\cdot x$$
$$= x(12-2x)^2$$
$$= x(144-48x+4x^2)$$
$$= 144x - 48x^2 + 4x^3$$
$$ح' = 144 - 96x + 12x^2$$
$$ح' = 0$$
$$x = 2 \quad , \quad x = 6$$

$ح(0) = 0$

$ح(6) = 0$

$ح(2) = 128$

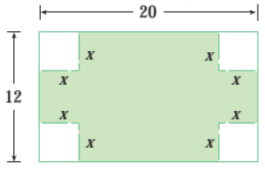
اكبر حجم هو 128 عند $x=2$

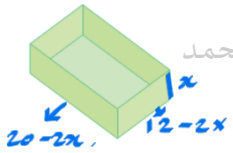
$0 \le x \le 6$

---

(2) يراد عمل صندوق على شكل شبه مكعب بدون غطاء من ورقة مستطيلة الشكل طول ضلعها $20in$

وعرضها $12in$ وذلك بقطع 4 مربعات متطابقة عند الرؤوس. اوجد دالة حجم الصندوق (بدون حل)





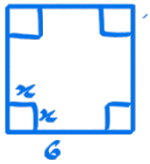
$ح = (20-2x)(12-2x)\cdot x$

---

(3) يراد عمل صندوق على شكل شبه مكعب بدون غطاء من ورقة مربعة الشكل ابعادها $6in, 6in$

وذلك بقص 4 مربعات متطابقة عند الرؤوس، طول ضلعه x . ثم عمل صندوق آخر مفتوح من الأعلى

والاسفل وذلك بلصق المربعات الأربع من الورق المتبقي اوجد قيمة x التي تجعل حجم الصندوقين اكبر ما يمكن







$$ح = ح_1 + ح_2$$
$$= x(6-2x)(6-2x) + x^3$$
$$= x(36-24x+4x^2) + x^3$$
$$= 36x - 24x^2 + 4x^3 + x^3$$
$$= 5x^3 - 24x^2 + 36x$$
$$ح' = 15x^2 - 48x + 36$$
$$ح' = 0$$
$$x = 1.2 \quad , \quad x = 2$$

$ح(0) = 0$

$ح(3) = 27$

$ح(2) = 16$

$ح(1.2) = 17.28$

حتى x لكي يكون

حجم الصندوقين اكبر ما يمكن عند $x=3$

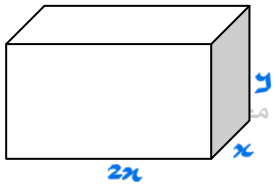
اي انه يتشكل صندوق واحد فقط

$0 \le x \le 3$

ملاحظة: حل دليل المعلم لهذا السؤال خطأ

محمد عمر الخطيب

(1) صندوق على شكل متوازي مستطيلات طول ضلع قاعدته يساوي ضعف عرضها ومجموع أبعاده الثلاثة $180cm$.أوجد أبعاده ليكون حجمه أكبر ما يمكن .



$2x+x+y=180$

$3x+y=180$

$y=180-3x$

$0\le x\le 60$

$V=2x\cdot x\cdot y$

$=2x^2(180-3x)$

$=360x^2-6x^3$

$V'=720x-18x^2$

$V'=0$

$x=0\ ,\ x=40$

$V(0)=0$

$V(60)=0$

$V(40)=192000$

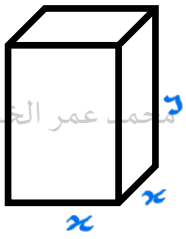
ابعاد الصندوق الذي يحصل الحجم الكبر سايكس هي

$80\ ,\ 40\ ,\ 60$

$2x\quad x\quad 180-3x$

---

(2) متوازي مستطيلات (صندوق شبة مكعب) من الصاج بدون غطاء ، قاعدته مربعة الشكل و سعته 32 متر مكعب أوجد أبعاده لتكون مساحته السطحية أقل ما يمكن .



$x^2y=32$

$y=\frac{32}{x^2}$

$x>0$

$S=x^2+4xy$

$=x^2+4x\cdot\frac{32}{x^2}$

$=x^2+\frac{128}{x}$

$S'=2x-\frac{128}{x^2}$

$=\frac{2x^3-128}{x^2}$

$S'=0$

$2x^3-128=0$

$x=4$

ع.م S'

$x=0$

خارج المجال



قيمة حرجة واحدة

عند $x=4$ نهاية صغرى

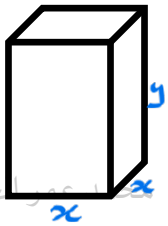
الابعاد هي

$4\ ,\ 4\ ,\ 2$

---

(3) يراد عمل خزان للمياه بغطاء على شكل متوازي مستطيلات قاعدته مربعة الشكل و سعته 16 متر مكعب وتكاليف صنع المتر المربع من قاعدته ضعف تكاليف صنع المتر المربع من جوانبه

أوجد ابعاد الخزان لتكون تكلفة صناعة الخزان اقل ما يمكن (اعتبر تكاليف المتر المربع من الجوانب هو 1 درهم)



$x^2y=16$

$y=\frac{16}{x^2}$

$x>0$

التكلفة = تكلفة الجوانب + تكلفة القاعدتين

السعر × المساحة + السعر × المساحة

$C=2x^2(2)+4xy(1)$

$=4x^2+4x\cdot\frac{16}{x^2}$

$=4x^2+\frac{64}{x}$

$C'=8x-\frac{64}{x^2}$

$=\frac{8x^3-64}{x^2}$

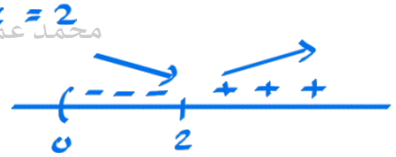
$S'=0$

$8x^3-64=0$

$x=2$

ع.م S'

$x=0$



قيمة حرجة واحدة

عند $x=2$ نهاية صغرى

ابعاد الخزان $2,2,4$

محمد عمر الخطيب

(1) يراد صنع علبة من المعدن على شكل اسطوانه دائرية قائمة مغلقة سعتها $128\pi\ cm^3$. اوجد ابعاد العلبة لتكون كمية المعدن المستخدم في صناعتها اقل ما يمكن.



ملاحظة: التكلفة اقل ما يمكن تكون عندما تكون المساحة السطحية اقل ما يمكن

$\pi r^2 h = 128\pi$

$h = \frac{128\pi}{\pi r^2}$

$h = \frac{128}{r^2}$

$r > 0$

$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h$

$= 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{128}{r^2}$

$= 2\pi r^2 + \frac{256\pi}{r}$

$S' = 4\pi r - \frac{256\pi}{r^2}$

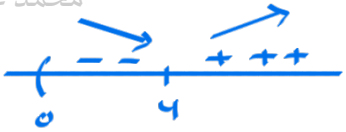
$= \frac{4\pi r^3 - 256\pi}{r^2}$

$S' = 0$

$4\pi r^3 - 256\pi = 0$

$4\pi(r^3 - 64) = 0$

$r = 0 \quad , r = 4$



ع.م S'

$r = 0$

خارج المجال

توجد قيمة حرجة واحدة

عند $r = 4$ نهاية عظمى

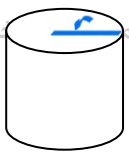
ابعاد العلبة هي

$r = 4$

$h = 8$

---

(2) يراد صنع علبة من المعدن على شكل اسطوانه دائرية قائمة مغلقة سعتها $32\pi\ fl\ oz$. بحيث ان سمك القاعدة والقمة ضعف سمك الجوانب اوجد ابعاد العلبة لتكون كمية المعدن المستخدم في صناعتها اقل ما يمكن.



$\pi r^2 h = 32\pi$

$h = \frac{32\pi}{\pi r^2}$

$h = \frac{32}{r^2}$

$r > 0$

$C = 2(2\pi r^2) + 2\pi r h$

$= 4\pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{32}{r^2}$

$= 4\pi r^2 + \frac{64\pi}{r}$

$C' = 8\pi r - \frac{64\pi}{r^2}$

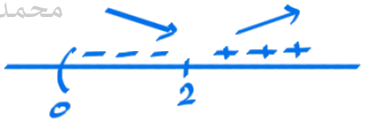
$= \frac{8\pi r^3 - 64\pi}{r^3}$

$C' = 0$

$8\pi r^3 - 64\pi = 0$

$8\pi(r^3 - 8) = 0$

$r = 2$



ع.م C'

$r = 0$

خارج المجال

توجد قيمة حرجة واحدة

عند $r = 2$ نهاية عظمى

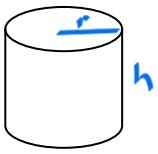
ابعاد العلبة

$r = 2$

$h = 8$

(1) يراد عمل اسطوانة بدون قاعدة وبدون غطاء من صفيحة مستطيلة الشكل محيطها $36\ cm$ اوجد ابعاد المستطيل لتكون حجم الاسطوانة اكبر ما يمكن.





$4\pi r + 2h = 36$

$2\pi r + h = 18$

$h = 18 - 2\pi r$

$0 < r \leq \frac{9}{\pi}$

$v = \pi r^2 h$

$= \pi r^2 (18 - 2\pi r)$

$= 18\pi r^2 - 2\pi^2 r^3$

$v' = 36\pi r - 6\pi^2 r^2$

$v' = 0$

$36\pi r - 6\pi^2 r^2 = 0$

$6\pi r (6 - \pi r) = 0$

$r = 0 \quad , \quad 6 - \pi r = 0$

$r = \frac{6}{\pi}$

$v(0) = 0$

$v(\frac{9}{\pi}) = 0$

$v(\frac{6}{\pi}) = 68.75$

عند قيمة r المطلقة

$x = \frac{6}{\pi}$

طول المستطيل

$2\pi r = 2\pi \cdot \frac{6}{\pi}$

$= 12$

عرض المستطيل

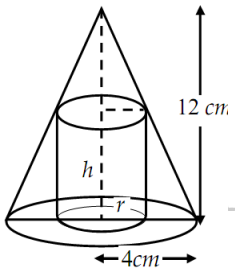
$h = 18 - 2\pi \cdot \frac{6}{\pi}$

$= 6$

ابعاد المستطيل هي $6, 12$

---

(2) الشكل المجاور يمثل مخروط دائرئ قائم نصف قطر قاعدته $4\ cm$ وارتفاعة $12\ cm$ رسم داخله اسطوانه دائرية قائمة بحيث يكون محور الاسطوانة ومحور المخروط متقابلين وكذلك القاعدتين .اوجد أكبر حجم لهذه الاسطوانة



$0 < r < 4$



$\frac{h}{12} = \frac{4-r}{4}$

$h = 12 \cdot \frac{4-r}{4}$

$= 3(4-r)$

$= 12 - 3r$

$0 < r < 4$

$v = \pi r^2 h$

$= \pi r^2 (12 - 3r)$

$= 12\pi r^2 - 3\pi r^3$

$v' = 24\pi r - 9\pi r^2$

$v' = 0$

$24\pi r - 9\pi r^2 = 0$

$3\pi r (8 - 3r) = 0$

$r = 0 \quad , \quad r = \frac{8}{3}$

$v(0) = 0$

$v(4) = 0$

$v(\frac{8}{3}) = \frac{256\pi}{9}$

$\frac{256\pi}{9}$ هو اكبر حجم

(1) اوجد حجم أكبر مخروط دائري قائم ناتج عن دوران مثلث قائم الزاوية وتره $5\ cm$ حول احد ضلعي القائمة.





$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$= \frac{1}{3}\pi (25 - h^2) h$$

$$= \frac{1}{3}\pi (25h - h^3)$$

$$V' = \frac{1}{3}\pi (25 - 3h^2)$$

$$V' = 0$$

$$25 - 3h^2 = 0$$

$$h = -\sqrt{\frac{25}{3}} \quad \text{مرفوض}, \quad h = \sqrt{\frac{25}{3}} = \frac{5}{\sqrt{3}}$$

$$V(0) = 0$$

$$V(5) = 0$$

$$V\left(\frac{5}{\sqrt{3}}\right) = 50.4$$

50.4 اكبر حجم هو

$$r^2 + h^2 = 25$$

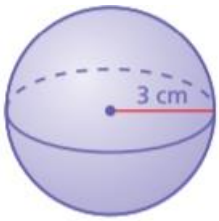
$$r^2 = 25 - h^2$$

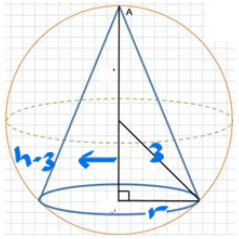
$$0 \le r \le 5$$

$$0 \le h \le 5$$

---

(2) اوجد حجم أكبر مخروط دائري قائم داخل كره نصف قطرها 3 وحدات.







$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$= \frac{1}{3}\pi (6h - h^2) \cdot h$$

$$= \frac{1}{3}\pi (6h^2 - h^3)$$

$$V' = \frac{1}{3}\pi (12h - 3h^2)$$

$$V' = 0$$

$$12h - 3h^2 = 0$$

$$h = 0, \quad h = 4$$

$$V(0) = 0$$

$$V(6) = 0$$

$$V(4) = \frac{32}{3}\pi$$

$\frac{32\pi}{3}$ اكبر حجم هو

$$r^2 + (h-3)^2 = 9$$

$$r^2 + h^2 - 6h + 9 = 9$$

$$r^2 = 6h - h^2$$

$$0 \le h < 6$$

يراد توصيل خط انابيب من منصة للبترول في البحر وتبعد 4 كيلو متر عن الشاطئ الى خزان للنفط يقع على الشاطئ ويبعد الى الشرق عن اقرب نقطة للمنصة من الشاطئ مسافة 8 كيلو متر. اذا علمت ان تكلفة مد كيلومتر في البحر هو 5 مليون درهم وعلى الشاطئ هو 3 مليون درهم .اوجد اقل تكلفة لمد خط الانابيب بين المنصة والخزان.

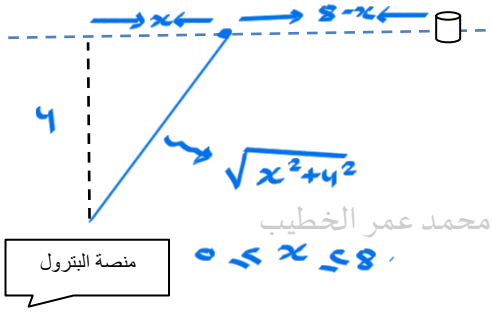
عين نقطة على الشاطئ

التكلفة الكلية = تكلفة البحر + تكلفة البر

$C = C_S + C_L$

$= 5\sqrt{x^2+16} + 3(8-x)$

البحر ← الوتر ، البر ← الطول



$0 \le x \le 8$

$C' = 5 \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2+16}} + 3(-1)$

$= \frac{5x}{\sqrt{x^2+16}} - 3$

$C' = 0$

$\frac{5x}{\sqrt{x^2+16}} - 3 = 0$

$\frac{5x}{\sqrt{x^2+16}} = 3$

$5x = 3\sqrt{x^2+16}$

$25x^2 = 9(x^2+16)$

$25x^2 = 9x^2 + 144$

$16x^2 = 144$

$x^2 = 9$

$x = -3 \quad , \quad x = 3$

مرفوض

$C(0) = 44$

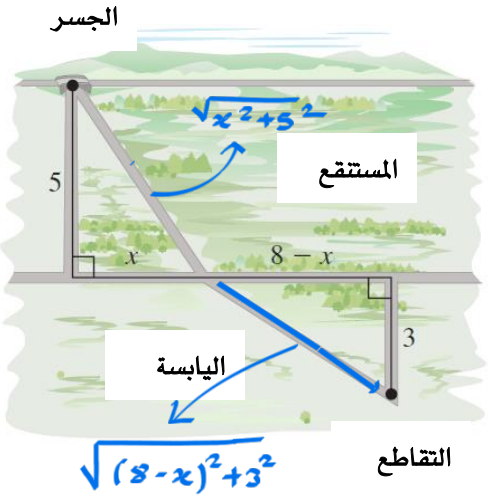
$C(8) = 44.7$

$C(3) = 40$

اقل تكلفة هي 40 مليون درهم

محمد عمر الخطيب

(1) يراد عمل طريق بين الجسر والتقاطع حيث يكون جزء من الطريق فوق المستنقع بتكلفة 10 مليون درهم للميل الواحد و 7 مليون درهم فوق الارض اليابسة للميل الواحد ، اكتب دالة التكلفة لعمل الطريق



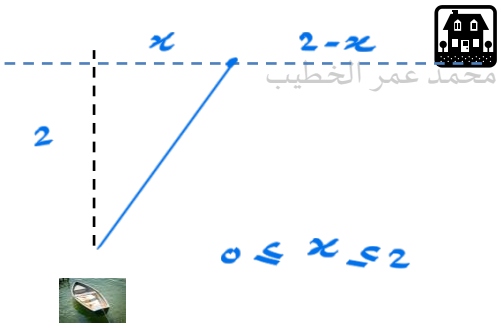
$C = C_S + C_L$

$= 10\sqrt{x^2+25} + 7\sqrt{(8-x)^2+9}$

---

(2) ابحر شخص في قاربه على بعد $2km$ من الشاطئ ، يريد الوصول الى بيته الذي يقع على الشاطئ والذي يبعد $2km$ عن اقرب نقطة للقارب من الشاطئ ، اذا علمت انه يمكنه التجديف بمعدل $2km/h$ والسير بمعدل $5km/h$. اوجد اقل زمن ممكن للوصول الى بيته

$\text{الزمن} = \frac{\text{المسافة}}{\text{السرعة}}$



$0 \le x \le 2$

$T = T_S + T_L$

$= \frac{\sqrt{x^2+4}}{2} + \frac{2-x}{5}$

$T' = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2+4}} + \frac{1}{5}(-1)$

$= \frac{x}{2\sqrt{x^2+4}} - \frac{1}{5}$

$T' = 0$

$\frac{x}{2\sqrt{x^2+4}} = \frac{1}{5}$

$5x = 2\sqrt{x^2+4}$

$25x^2 = 4(x^2+4)$

$25x^2 = 4x^2 + 16$

$21x^2 = 16$

$x^2 = \frac{16}{21}$

$x = -\frac{4}{\sqrt{21}}$ مرفوض ، $x = \frac{4}{\sqrt{21}}$

$T(0) = 2.4$

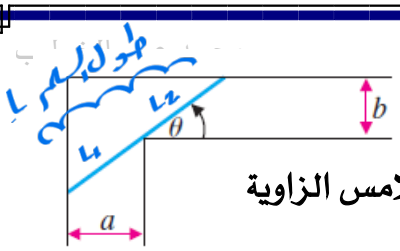
$T(2) = 2$

$T\left(\frac{4}{\sqrt{21}}\right) = 1.3$

اقل زمن هو 1.3 ساعة

محمد عمر الخطيب

(1) الشكل المجاور يمثل ممر بعرض $a = 5m$ من احدى الجهتين والجهه الاخرى بعرض $b = 4m$ اوجد طول اطول سلم ممكن ان يمر من الممر ويلامس الزاوية



السؤال من الكتاب ولكن فيه مشكلة رياضيه

طول السلم

$L = L_1 + L_2$

$= 5\sec\theta + 4\csc\theta$.

$L' = 5\sec\theta\tan\theta - 4\csc\theta\cot\theta$.

$L' = 0$

$5\sec\theta\tan\theta = 4\csc\theta\cdot\cot\theta$.

$\frac{\sec\theta\tan\theta}{\csc\theta\cot\theta} = \frac{4}{5}$

$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot\tan\theta = 4/5$

$\tan^3\theta = \frac{4}{5}$.

$\tan\theta = \sqrt[3]{\frac{4}{5}}$.

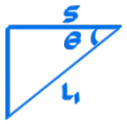
$\theta = \tan^{-1}\sqrt[3]{\frac{4}{5}} = 42.89^\circ$ او 0.748 راديان

طول السلم هو $L = 12.7\ ft$.

$\cos\theta = \frac{5}{L_1}$

$L_1 = \frac{5}{\cos\theta}$

$= 5\sec\theta$

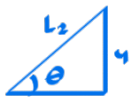


$\sin\theta = \frac{4}{L_2}$

$L_2 = \frac{4}{\sin\theta}$

$= \csc\theta$

$\theta > 0$

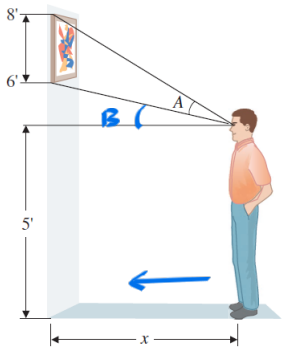


هذا حل دليل المعلم حيث يكون للدالة عند هذه النقطة مقرك رئيس عظمى.

---

(2) يقف رجل امام لوحة فنية ويقترب من اللوحه حتى يتمكن من رؤية اللوحة كاملة كما في الشكل المجاور اوجد قيمة x التي تجعل زاوية الرؤية A اوضح ما يمكن (قيمة الزاوية اكبر ما يمكن)

حيث $6'$ تمثل 6 اقدام



$\tan(A+B) = \frac{3}{x}$

$A + B = \tan^{-1}\left(\frac{3}{x}\right)$

$A = \tan^{-1}\left(\frac{3}{x}\right) - B$.

$= \tan^{-1}\left(\frac{3}{x}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$.

$= \cot^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) - \cot^{-1}(x)$

$A' = \frac{-1}{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2}\cdot\frac{1}{3} - \frac{-1}{1+x^2}$.

$= \frac{-1}{1+\frac{x^2}{9}}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{1+x^2}$

$A' = 0 \Rightarrow$

$\frac{-1}{3+\frac{x^2}{3}} = \frac{-1}{1+x^2}$

$1 + x^2 = 3 + \frac{x^2}{3}$.

$\frac{2}{3}x^2 = 2$

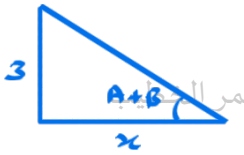
$x^2 = 3$.

$x = -\sqrt{3}, \quad x = \sqrt{3}$.

$\frac{+\ \nearrow\ \searrow\ -}{\sqrt{3}}$

نقطة عظمى محلية، وهيه عند $x = \sqrt{3}$ لأن الدالة

اوضح رؤية عند $x = \sqrt{3}$.





$\tan\beta = \frac{1}{x}$

$\beta = \tan^{-1}(1/x)$

$x > 0$

محمد عمر الخطيب

(1) تمثل العلاقة $P(v)=\frac{1}{v}+cv^3$ مقدار الطاقة التي يبذلها طائر حتى يسير بالسرعة v

حيث $c>0$ عدد ثابت . اوجد السرعة التي تحقق القيمة الصغرى للطاقة

$P=\frac{1}{v}+cv^3$

$P'=-\frac{1}{v^2}+3cv^2$

$P'=0$

$-\frac{1}{v^2}+3cv^2=0$

$-\frac{1}{v^2}=-3cv^2$

$1=3cv^4$

$v^4=\frac{1}{3c}$

$v=-\sqrt[4]{\frac{1}{3c}}$, $v=+\sqrt[4]{\frac{1}{3c}}$

مرفوض

P' م.ع

$v=0$ خارج المجال

$P'=-v^{-2}+3cv^2$

$P''=2v^{-3}+6cv$

$=\frac{2}{v^3}+6cv$

$P''\left(\sqrt[4]{\frac{1}{3c}}\right)>0$

قيمة صغرى محلية وحيدة

عند $x=+\sqrt[4]{\frac{1}{3c}}$

مهمة مطلقة .

---

(2) تمثل الدالة $R(x)=\frac{35x-x^2}{x^2+35}$ ارباح شركة بملايين الدراهم من بيع x سلعة بالالاف.

اوجد القيمة العظمى للربح

$R'(x)=\frac{(35-2x)(x^2+35)-(35x-x^2)(2x)}{(x^2+35)^2}$

$=\frac{35x^2+35^2-2x^3-70x-70x^2+2x^3}{(x^2+35)^2}$

$=\frac{-35x^2-70x-35^2}{(x^2+35)^2}$

$R'(x)=0$

$-35x^2-70x-35^2=0$

$x=-7$, $x=5$

مرفوض

R' : + + + 0 − − − 5

قيمة عظمى محلية وحيدة

عند $x=5$ مهمة مطلقة

اكبر ربح عند $x=5$

وبعني بيع 5000 سلعة

اكبر ربح

$R(5)=\frac{35(5)-5^2}{5^2+35}=2.5$

وبعني 2.5 مليون درهم .

(1) الغرض من السعال البشري هو زيادة تدفق الهواء الى الرئتين وذلك بازاحة جميع الجسيمات التي تسد القصبة الهوائية وتغير نصف قطر القصبة الهوائية. اذا علمت ان السرعة المتجهه لتدفق الهواء خلال القصبة الهوائي تعطى بالعلاقة $V(r)=cr^2(r_0-r)$ عند نصف قطر القصبة r ، حيث c عدد ثابت موجب و r_0 نصف قطر القصبة بدون اي ضغط (سعال) اوجد نصف قطر القصبة الهوائية التي تجعل السرعة المتجهه للهواء اكبر ما يمكن (هل القصبة في تمدد ام في انكماش حتى تكون السرعة المتجهه اكبر ما يمكن)

$v(r) = cr^2(r_0 - r)$ ، $r > 0$

$= c(r_0 r^2 - r^3)$

$v'(r) = c(2r_0 r - 3r^2) = cr(2r_0 - 3r)$

$v'(r) = 0$

$cr(2r_0 - 3r) = 0$

$r = 0$ مرفوض

$2r_0 - 3r = 0$

$r = \frac{2}{3}r_0$

$v'' = c(2r_0 - 6r)$

$v''(\frac{2}{3}r_0) =$

$c(2r_0 - 6 \cdot \frac{2}{3}r_0)$

$= c(2r_0 - 4r_0)$

$= c(-2r_0)$

$= -2cr_0 < 0$

يوجد عظمى محلية وحيده

عند $r = \frac{2}{3}r_0$

وهي مطلقة .

---

(2) تمثل الدالة $f(v) = v\,e^{-v/2}$ قوة احدى عظلات الجسم بعد انقباضها بسرعة مقدارها $v > 0$ ، اوجد السرعة التي تحقق القيمة العظمى للقوة

$f(v) = v\,e^{-v/2}$ ، $v > 0$

$f'(v) = 1 \cdot e^{-v/2} + v \cdot e^{-v/2} \cdot (-\frac{1}{2})$

$= e^{-v/2}[1 - \frac{v}{2}]$

$= \frac{1 - \frac{v}{2}}{e^{v/2}}$

$f'(v) = 0$

$1 - \frac{v}{2} = 0$

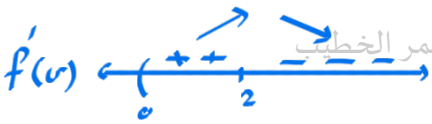
$1 = \frac{v}{2}$

$v = 2$

$f'(v)$ لا يوجد

$e^{v/2} = 0$

لا يوجد حل .



يوجد عظمى محلية وحيده

عند $v = 2$ وهي مطلقة .

محمد عمر الخطيب

(1) تمثل الدالة $f(t)=e^{-0.02t}-e^{-0.42t}$ تركيز الدواء في العضلات بعد t ساعة من اخذ الدواء

اوجد الزمن الذي يكون فية التركيز الدواء داخل العضلات اكبر ما يمكن

$$f'(t)=e^{-0.02t}(-0.02)-e^{-0.42t}(-0.42)$$

$$=-0.02e^{-0.02t}+0.42e^{-0.42t}$$

$$f'(t)=0$$

$$-0.02e^{-0.02t}+0.42e^{-0.42t}=0$$

$$0.42e^{-0.42t}=0.02e^{-0.02t}$$

$$\frac{0.42}{0.02}=\frac{e^{-0.02t}}{e^{-0.42t}}$$

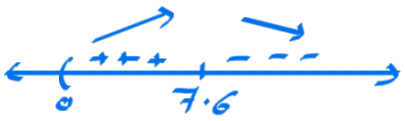
$$21=e^{0.4t}$$

$$\ln 21=\ln e^{0.4t}$$

$$\ln 21=0.4t$$

$$t=\frac{\ln 21}{0.4}$$

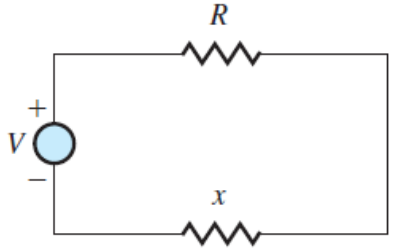
$t=7.6$ ساعة



قيمة عظمى محلية، حيث عند $t=7.6$ من موجبة الى سالبة

---

(2) تمثل العلاقة $p(x)=\frac{V^2x}{(R+x)^2}$ مقدار الطاقة المتصة في جهاز



كهربائي كما في الشكل حيث $V>0$ مقدارالجهد(ثابت)

و $R>0$ كمية المقاومة (ثابت) ، اوجد قيمة المقاومة x التي تحقق القيمة العظمى للطاقة المتصة.

$$p'(x)=\frac{V^2(R+x)^2-V^2x\cdot 2(R+x)}{(R+x)^4}$$

$$=\frac{V^2(R+x)[(R+x)-2x]}{(R+x)^4}$$

$$=\frac{V^2(R-x)}{(R+x)^3}$$

$p'(x)=0$

$V^2(R-x)=0$

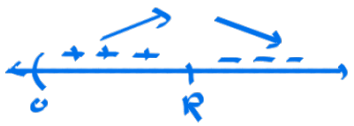
$V=0$ مرفوضة ، $R-x=0$

$x=R$

$p'(x)$ م.ع

$R+x=0$

$x=-R$ مرفوضة



قيمة عظمى محلية ، حيث عند $x=R$ من موجبة الى سالبة

محمد عمر الخطيب

(1) تمثل الدالة $Q(t)=-3t^3+18t^2+60t$ عدد السلع التي ينتجها عامل خلال الزمن t حيث تمثل $Q'(t)$ كفاءة العامل في اي لحظة . اوجد الزمن التي يكون فيها كفاءة العامل اكبر ما يمكن.

نجد اولاً دالة الكفاءة وهي مشتقة دالة عدد السلع .

$E(t)=Q'(t)=-9t^2+36t+60$.

نجد القيمة العظمى لدالة الكفاءة $E(t)$.

$E'(t)=-18t+36$.

$E'(t)=0$

$t=2$.

$E''(t)=-18$.

$E''(2)=-18<0$

قيمة عظمى محلية وحيدة عند $t=2$ من مطلقة.

---

(2) تمثل الدالة $T(x)=102-\frac{1}{54}(9x^2-x^3)$ درجة حرارة الجسم بعد تلقي الدواء بساعة واحدة حيث x كمية الجرعة المعطى بالميليغرام للمريض $0\le x\le 6$ وتمثل الدالة $T'(x)$ حساسية الجسم من الجرعة . اوجد الجرعة التي تحقق القيمة الصغرى للحساسية.

نجد اولاً دالة حساسية الجسم.

$E(x)=T'(x)$

$=-\frac{1}{54}(18x-3x^2)$

نجد القيمة الصغرى للدالة $E(x)$.

$E'(x)=-\frac{1}{54}(18-6x)$

$E'(x)=0$

$18-6x=0$

$x=3$.

$E(0)=0$

$E(6)=0$

$E(3)=-1/2$

القيمة الصغرى المطلقة عند

$x=3$.

خطوات حل مسائل المعدلات المرتبطة بالزمن

اقراء المسالة

(1) ارسم شكلا توضيحياً

(2) حدد المتغيرات ورمّزها

(3) اكتب المعطيات والمطلوب

(4) اكتب العلاقة الاساسية التي تربط المعطيات بالمطلوب

(5) اشتق الدالة الاساسية ضمنياً بالنسبة للزمن

اشتق كل المتغيرات بالنسبة للزمن

(6) عوض المعطيات لايجاد المطلوب

ملاحظة :

(1) يجوز اشتقاق الدالة الاساسية في حالة وجود متغيرين بشرط توفر معلومات عن المتغيرات او ابحث عن علاقة مساعدة للتخلص من احدهما

(2) اذا كانت قيمة المتغير تزيد فان معدل تغيره موجب

(3) اذا كانت قيمة المتغير تقل فان معدل تغيره سالب

ينتشر حريق في احدى الغابات بشكل دائري ،ويتزايد طول نصف قطر الحريق بمعدل $5m/\min$ اوجد معدل التغير في مساحة الحريق عندما يكون نصف قطره $200m$.

② + ①



③ $r'(t) = \frac{dr}{dt} = +5$

$A'(t) = \frac{dA}{dt}\Big| = ??$ عند $r=200$

④ $A = \pi r^2$

⑤ اشتق الطرفين ضمنيا بالنسبة للزمن

$\frac{dA}{dt} = 2\pi r \cdot \frac{dr}{dt}$

⑥ $\frac{dA}{dt}\Big|_{r=200} = 2\pi(200)\cdot 5$

$= 2000\pi \ m^2/\min$

$= 6233 \ m^2/\min$

(1) مثلث متساوي الأضلاع يزداد طول ضلعه بمقدار $0.1\,cm/s$ أوجد معدل التغير في مساحة المثلث عندما يكون طول ضلعه يساوي $\sqrt{3}\,cm$

$$A=\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$$

$$\frac{dA}{dt}=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 2x\cdot\frac{dx}{dt}$$

$$\left.\frac{dA}{dt}\right|_{x=\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 2\sqrt{3}\cdot(0.1)$$

$$=0.15\ cm^2/s$$



$$\frac{dx}{dt}=+0.1$$

$$\left.\frac{dA}{dt}\right|_{x=\sqrt{3}}=??$$

---

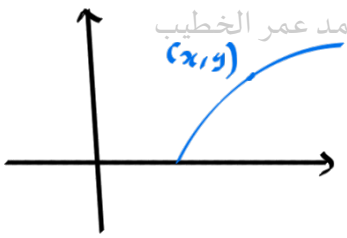
(2) تتحرك نقطة على منحنى معادلته $y=\sqrt{x^2-3}$ ، فإذا كان الاحداثي x للنقطة يزداد بمعدل $3\,unit/s$ أوجد معدل التغير في الإحداثي y عندما تكون $x=2$

$$y=\sqrt{x^2-3}$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{2x\cdot\frac{dx}{dt}}{2\sqrt{x^2-3}}$$

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{x=2}=\frac{(2)(3)}{\sqrt{2^2-3}}$$

$$=6\ u/s$$



$$\frac{dx}{dt}=+3$$

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{x=2}=??$$

---

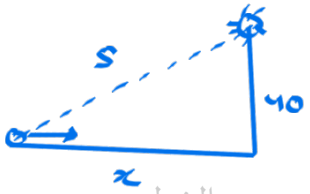
(3) تتحرك كرة بمعدل $1\,m/s$ على خط أفقي متجه نحو عمود ارتفاعه $40\,m$ ، أوجد معدل تغير المسافة بين الكرة وقمة العمود عندما تكون الكرة على بعد $30\,m$ من قاعدة العمود. (اهمل ارتفاع الكره)

$$s=\sqrt{x^2+40^2}$$

$$\frac{ds}{dt}=\frac{2x\cdot\frac{dx}{dt}}{2\sqrt{x^2+40^2}}$$

$$\frac{ds}{dt}=\frac{30(-1)}{\sqrt{30^2+40^2}}$$

$$=-0.6\ m/s$$



$$\frac{dx}{dt}=-1$$

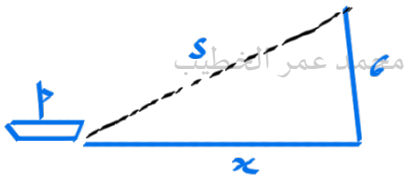
لأن المسافة تقل

$$\left.\frac{ds}{dt}\right|_{x=30}=??$$

(1) حوض (منصة) ارتفاعه $6\ ft$ عن منسوب الماء ، سحب رجل مركب بواسطة حبل بمعدل $2\ ft/s$

ويبقى القارب على مستوى سطح الماء

اوجد سرعة اقتراب المركب عندما يكون على بعد $20\ ft$ من اسفل الحوض



$$\frac{ds}{dt} = -2$$

$$\frac{dx}{dt}\Big| = ??$$

$x=20$

$s = \sqrt{20^2+6^2} = \sqrt{436}$

$$x = \sqrt{s^2-6^2}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{s\cdot\frac{ds}{dt}}{\sqrt{s^2-6^2}}$$

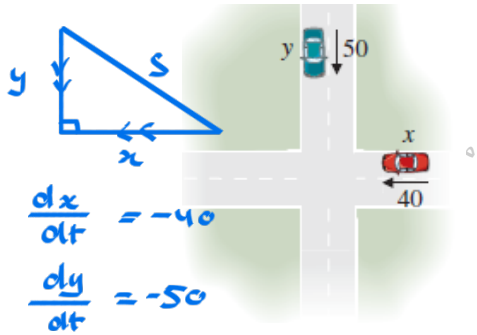
$$\frac{dx}{dt} = \frac{\sqrt{436}\cdot(-2)}{\sqrt{436-36}}$$

$$= -2.1\ ft/s$$

---

(2) تسير سيارة بسرعة $50km/h$ اتجاه الجنوب من نقطة تبعد $\frac{1}{2}km$ شمال التقاطع ، وتسير سيارة شرطة بسرعة $40km/h$ من نقطة تبعد $\frac{1}{4}km$ شرق التقاطع نفسه ، في هذه اللحظة يقيس رادار سيارة الشرطة المعدل الذي تتغير بها المسافة بين السيارتين ، اوجد ما هذه السرعة التي سيسجلها الرادار.

هل ستكون قياس الرادار لسرعة السيارة صحيح ؟ فسر ذلك



$$\frac{dx}{dt} = -40$$

$$\frac{dy}{dt} = -50$$

$$\frac{ds}{dt}\Big| = ??$$

$x=\frac{1}{4}$, $y=\frac{1}{2}$

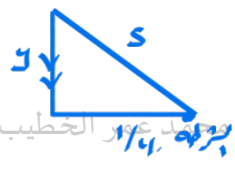
$$s = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{2x\cdot\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}}{2\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{ds}{dt}\Big|_{x=\frac{1}{4},\ y=\frac{1}{2}} = \frac{2(\frac{1}{4})(-40)+2(\frac{1}{2})(-50)}{2\sqrt{(\frac{1}{2})^2+(\frac{1}{4})^2}} = -62.6\ km/h$$

هذه القراءة خاطئة لان الرادار متحرك .

اذا كانت سيارة الشرطة واقفة كم سيكون قراءة الرادار



$$s = \sqrt{y^2+(\frac{1}{4})^2}$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{2y\cdot\frac{dy}{dt}}{2\sqrt{y^2+(\frac{1}{4})^2}}$$

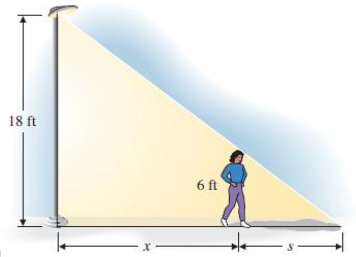
$$\frac{ds}{dt}\Big|_{y=\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}(-50)}{\sqrt{(\frac{1}{4})^2+(\frac{1}{2})^2}} = -44.7\ km/h$$

وهذه القراءة خاطئة لوجود زاوية بين السيارتين

(1) رجل طوله $6\ ft$ ويبعد $12\ ft$ عن عمود انارة ارتفاعة $18\ ft$

ويمشي مبتعداً عن العمود بمعدل $2\ ft/s$

أوجد معدل تغير طول ظل الرجل



من تشابه المثلثات

$$\frac{x+s}{s}=\frac{18}{6}$$

$$\frac{x+s}{s}=3$$

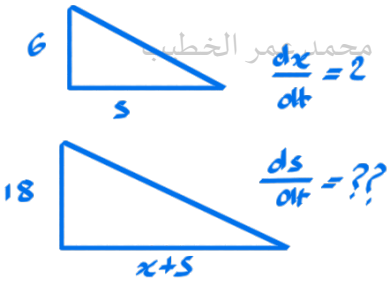
$$x+s=3s$$

$x=2s$

$$\frac{dx}{dt}=2\cdot\frac{ds}{dt}$$

$$2=2\cdot\frac{ds}{dt}$$

$$\frac{ds}{dt}=1$$



---

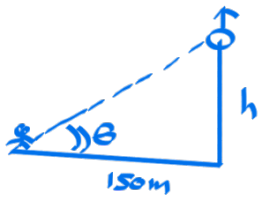
(2) يرتفع بالون راسياً للأعلى بمعدل $75m/\min$ ، اذا تم رصد البالون من مشاهد على الارض ويبعد $150m$ عن موقع البالون على الارض، اوجد معدل تغير زاوية المشاهد للبالون عندما يكون البالون على ارتفاع $150m$ من سطح الارض (اهمل ارتفاع الرجل)

$$\tan\theta=\frac{h}{150}$$

$$\theta=\tan^{-1}\left(\frac{h}{150}\right)$$

$$\frac{d\theta}{dt}=\frac{1}{\left(\frac{h}{150}\right)^2+1}\cdot\frac{1}{150}\cdot\frac{dh}{dt}$$

$$\left.\frac{d\theta}{dt}\right|_{h=150}=\frac{1}{\left(\frac{150}{150}\right)^2+1}\cdot\frac{1}{150}(75)=0.25\ rad/min$$



$\frac{dh}{dt}=75$

$\left.\frac{d\theta}{dt}\right|_{h=150}=??$

---

(3) يقف لاعب كرة البيسبول على بعد قدمين من اللوح الرئيس للكرة ويشاهد الكرة قادمة بتجاهه بشكل افقي وبسرعة متجهة $130\ ft/s$، ما معدل التغير في زاوية النظر للاعب لمتابعة الكرة عندما تعبر الكرة اللوح $(x=0)$

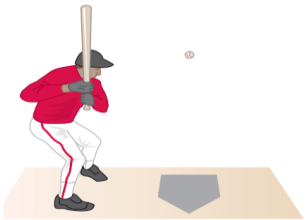
$$\tan\theta=\frac{x}{2}$$

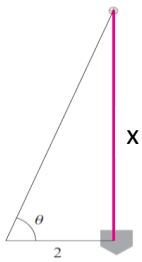
$$\theta=\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\frac{d\theta}{dt}=\frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{dx}{dt}$$

$$\left.\frac{d\theta}{dt}\right|_{x=0}=\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2}(-130)$$

$$=-65\ rad/s$$





$\frac{dx}{dt}=-130$

$\left.\frac{d\theta}{dt}\right|_{x=0}=??$

سلم طوله $10\ m$ ، موضوع احد طرفية على جدار منزل والطرف الأخر موضوع على الارض، ويتحرك بعيداً عن الحائط بمعدل $3\ m/s$

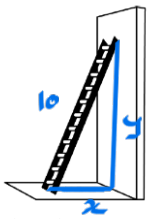
(أ) ما سرعة انزلاق الطرف العلوي للسلم عند اللحظة التي يكون فيها الطرف السفلي على بعد $8\ m$ من الحائط.

$$y = \sqrt{100 - x^2}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{-2x \frac{dx}{dt}}{2\sqrt{100-x^2}}$$

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{x=8} = \frac{-(8)(3)}{\sqrt{100-8^2}}$$

$$= -4\ m/s$$



$\frac{dx}{dt} = 3$

$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{x=8} = ??$

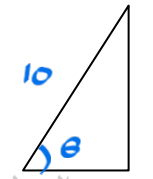
(ب) ما معدل التغير في الزاوية التي تقع بين السلم والارض عند اللحظة التي يكون فيها الطرف السفلي على بعد $8\ m$ من الحائط.

$$\cos\theta = \frac{x}{10}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{x}{10}\right)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{-1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{10}\right)^2}} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$\left.\frac{d\theta}{dt}\right|_{x=8} = \frac{-1}{\sqrt{1-\left(\frac{8}{10}\right)^2}} \cdot \frac{1}{10} \cdot 3 = -\frac{1}{2}\ rad/s$$



$\frac{dx}{dt} = 3$

$\left.\frac{d\theta}{dt}\right|_{x=8} = ??$

(ج) ما معدل التغير في مساحة المثلث الذي يتكون من السلم والحائط والارض عند اللحظة التي يكون فيها الطرف السفلي على بعد $8\ m$ من الحائط.

$$A = \frac{1}{2}xy$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} \cdot \frac{dx}{dt} \cdot y + \frac{1}{2}x \cdot \frac{dy}{dt}$$

$$\left.\frac{dA}{dt}\right|_{\substack{x=8 \\ y=6}} = \frac{1}{2}(3)(6) + \frac{1}{2}(8)(-4)$$

$$= -7\ m^2/s$$



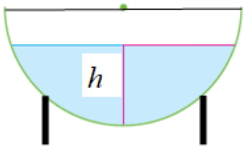
$\frac{dx}{dt} = 3$

$\frac{dy}{dt} = -4$

$\left.\frac{dA}{dt}\right|_{x=8}$

$y = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$

(1) يتدفق النفط الى خزان على شكل نصف كرة بمعدل $8m^3/s$ ، فاذا كان حجم النفط V في الخزان يعطي بالعلاقة



$$V=\frac{\pi}{3}h^2(36-h)$$

اوجد معدل تغير ارتفاع النفط بالخزان عندما يكون النفط على ارتفاع $4m$.

$V=\frac{\pi}{3}(36h^2-h^3)$

$\frac{dV}{dt}=\frac{\pi}{3}(72h\cdot\frac{dh}{dt}-3h^2\cdot\frac{dh}{dt})$

$=\frac{\pi}{3}(72h-3h^2)\frac{dh}{dt}$

$8=\frac{\pi}{3}(72\cdot 4-3\cdot(4)^2)\frac{dh}{dt}$

$8=\frac{\pi}{3}\cdot(240)\frac{dh}{dt}$

$\frac{dh}{dt}=\frac{3(8)}{240\pi}=\frac{1}{10\pi}$ m/s

$\frac{dV}{dt}=8$

$\left.\frac{dh}{dt}\right|_{h=4}=??$

---

(2) بالون كروي نفخ في غاز الهيليوم بمعدل $100\pi\ ft^3/\min$.

(أ) اوجد سرعة تزايد نصف قطر البالون عند اللحظة التي يكون فيها نصف القطر $5\ ft$.

$V=\frac{4}{3}\pi r^3$

$\frac{dV}{dt}=4\pi r^2\cdot\frac{dr}{dt}$

$100\pi=4\pi(5)^2\cdot\frac{dr}{dt}$

$\frac{dr}{dt}=\frac{100\pi}{100\pi}=1$ ft/min.



$\frac{dV}{dt}=100\pi$

$\left.\frac{dr}{dt}\right|_{r=5}=??$

(ب) اوجد سرعة تزايد مساحة البالون السطحية عند اللحظة التي يكون فيها نصف القطر $5\ ft$.

$S=4\pi r^2$

$\frac{dS}{dt}=8\pi r\cdot\frac{dr}{dt}$

$\frac{dS}{dt}=8\pi(5)(1)$

$=40\pi$ ft^2/min

$\frac{dr}{dt}=1$

$\left.\frac{d}{d}\right|_{5}=?$

قطرة ماء كروية تتبخر بمعدل $1\,cm^3/\min$ وتبقى تحافظ على شكلها

(أ) اوجد معدل تناقص نصف قطر قطرة الماء عند اللحظة التي يكون فيها نصف القطر $0.2\ cm$.

$V = \frac{4}{3}\pi r^3$

$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \cdot \frac{dr}{dt}$

$-1 = 4\pi (0.2)^2 \cdot \frac{dr}{dt}$

$\frac{dr}{dt} = \frac{-1}{4\pi(0.2)^2} \approx -2\ cm/min$



$\frac{dV}{dt} = -1$

$\left.\frac{dr}{dt}\right| = ??$, $r = 0.2$

(ب) اوجد سرعة تناقص المساحة السطحية لقطرة الماء عند اللحظة التي يكون فيها نصف القطر $0.2\ cm$.

$S = 4\pi r^2$

$\frac{dS}{dt} = 8\pi r \frac{dr}{dt}$

$\left.\frac{dS}{dt}\right| = 8\pi (0.2)(-2) = -10\ cm^2/min$, $r = 0.2$

$\frac{dr}{dt} = -2$

$\left.\frac{dS}{dt}\right| = ??$, $r = 0.2$

(ج) اذا كان معدل تبخر حجم قطرة الماء يتناسب مع المساحة السطحية لها ، فبين ان معدل تغير نصف القطر ثابت عند اي لحظة

$\frac{dV}{dt} \propto S$

$\frac{dV}{dt} = kS$

$\frac{dV}{dt} = k \cdot 4\pi r^2$

$4\pi r^2 \cdot \frac{dr}{dt} = k \cdot 4\pi r^2$

$\therefore \frac{dr}{dt} = k$

$\therefore$ معدل تغير نصف القطر ثابت (k)

ثابت التناسب k

$V = \frac{4}{3}\pi r^3$

$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \cdot \frac{dr}{dt}$

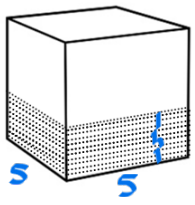
$S = 4\pi r^2$

محمد عمر الخطيب

(1) خزان مكعب الشكل مملوء بالماء طول ضلعه $5\,m$ يتسرب منه الماء بمعدل $2\,m^3/h$ ، أوجد معدل تغير ارتفاع الماء في الخزان.

ملاحظة: يجب التمييز بين حجم الماء في الخزان (وهو متغير) وحجم الخزان (وهو ثابت)

☆ المتغير هو ارتفاع الماء فقط وليس عرض وطول قاعدة الماء في الخزان



حجم الماء $V = 5 \cdot 5 \cdot h$

$V = 25h$

$\frac{dV}{dt} = -2$

$\frac{dh}{dt} = ??$

$\frac{dV}{dt} = 25 \cdot \frac{dh}{dt}$

$-2 = 25 \frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{-2}{25} = -0.08\ m/h$

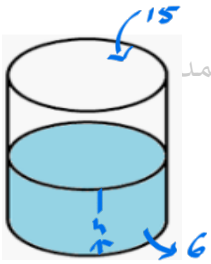
---

(2) خزان اسطواني الشكل نصف قطره $3\,ft$ وارتفاعة $5\,ft$ و يتدفق الماء له بمعدل $15\,ft^3/s$ ويتسرب منه بمعدل $6\,ft^3/s$.

نلاحظ ان نصف قطر الماء في الخزان ثابت.

(أ) اوجد معدل تغير ارتفاع الماء داخل الخزان

حجم الماء $V = \pi(3)^2 \cdot h = 9\pi h$



$\frac{dV}{dt} = 15 - 6 = 9$

$\frac{dh}{dt} = ??$

$\frac{dV}{dt} = 9\pi \cdot \frac{dh}{dt}$

$9 = 9\pi \cdot \frac{dh}{dt}$

$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{\pi} = 0.31\ ft/s$

(ب) اوجد معدل تغير مساحة سطح الماء داخل الخزان من الجهه العلوية (عند النظر من الاعلى)

سطح الماء دائرة مساحتها ثابتة

$A = \pi(3)^2 = 9\pi$

$\frac{dA}{dt} = 0$.

(ج) اوجد الزمن اللازم لملئ الخزان بنفس المعدل السابق

حجم الخزان كامل هو $V = \pi r^2 h = \pi(3)^2 \cdot 5 = 45\pi$

ومعدل تغير حجم الماء هو $9\,ft^3/h$.

عن تناسب

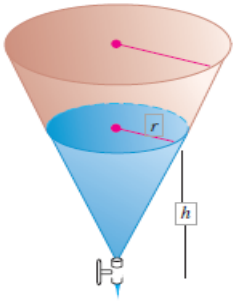
$9\,ft^3 \longrightarrow 1\,h$

$45\pi \longrightarrow t$.

$t = \frac{45\pi}{9} = 5\pi = 15.7\,h$.

يتسرب الماء من خزان على شكل مخروط قائم رأسه للاسفل بمعدل $10m^3/\min$ اذا كان ارتفاع الماء في المخروط يساوي طول قطر قاعدة الماء عند نفس اللحظة،

(أ) اوجد سرعة تغير نصف قطر الماء في المخروط عندما يكون نصف القطر $5m$.



ملاحظة: عندما يتغير حجم الماء في المخروط يتغير نصف قطر الماء وارتفاعه

حجم الماء $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$= \frac{1}{3}\pi r^2 (2r)$

$= \frac{2}{3}\pi r^3$

$\frac{dV}{dt} = 2\pi r^2 \cdot \frac{dr}{dt}$

$-10 = 2\pi (5)^2 \cdot \frac{dr}{dt}$

$\therefore \frac{dr}{dt} = \frac{-10}{50\pi} = \frac{-1}{5\pi}$ m/min

$h = 2r$

$\frac{dV}{dt} = -10$

$\left.\frac{dr}{dt}\right|_{r=5} = ??$

(ب) اوجد سرعة هبوط سطح الماء عند نفس اللحظة.

$h = 2r$

$\frac{dh}{dt} = 2 \cdot \frac{dr}{dt}$

$\left.\frac{dh}{dt}\right|_{r=5} = 2 \cdot \left(\frac{-1}{5\pi}\right) = \frac{-2}{5\pi}$ m/min.

$\frac{dr}{dt} = \frac{-1}{5\pi}$

$\left.\frac{dh}{dt}\right|_{r=5} = ??$

(ج) اوجد معدل تغير مساحة سطح الماء العلوية داخل الخزان (عند النظر من الاعلى) عند نفس اللحظة.

$A = \pi r^2$

$\frac{dA}{dt} = 2\pi r \cdot \frac{dr}{dt}$

$\left.\frac{dA}{dt}\right|_{r=5} = 2\pi (5)\left(\frac{-1}{5\pi}\right)$

$= -2$ m^2/min



$\frac{dr}{dt} = \frac{-1}{5\pi}$

$\left.\frac{dA}{dt}\right|_{r=5} = ??$

(1) ينسكب الرمل بمعدل $20\ ft^3/s$ ويشكل كومة مخروطية على الأرض بحيث يبقى الارتفاع ضعف نصف القطر، اوجد معدل تزايد نصف قطر الكومه عندما يصل ارتفاع الكومة $6\ ft$ الكومة



$$\frac{dv}{dt} = 20$$

$$\frac{dr}{dt}\Big| = ??$$

$h=6$

$h = 2r$

عندما $h=6$ فان $r=3$

$$v = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$= \frac{1}{3}\pi r^2 (2r)$$

$$= \frac{2}{3}\pi r^3$$

$$\frac{dv}{dt} = 2\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

$$20 = 2\pi (3)^2 \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{20}{18\pi} = \frac{10}{9\pi}\ ft/s$$

---

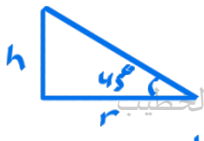
(2) ينسكب الرمل بمعدل $20\ ft^3/s$ ويشكل كومة مخروطية على الأرض بحيث تبقى زاوية المخروط مع المستوى الافقي 45° ، اوجد معدل تزايد نصف قطر الكومه عندما يصل ارتفاع الكومة $6\ ft$



$$\frac{dv}{dt} = 20$$

$$\frac{dr}{dt}\Big| = ??$$

$h=6$



$$\tan 45^\circ = \frac{h}{r}$$

$$1 = \frac{h}{r}$$

$$h = r$$

عندما $h=6$ فان $r=6$

$$v = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$= \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot r$$

$$= \frac{1}{3}\pi r^3$$

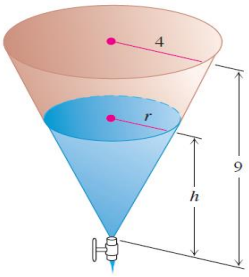
$$\frac{dv}{dt} = \pi r^2 \cdot \frac{dr}{dt}$$

$$20 = \pi (6)^2 \cdot \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{20}{36\pi} = \frac{5}{9\pi}\ ft/s$$

محمد عمر الخطيب

(1) خزان ماء مخروطي قائم رأسه للاسفل طول نصف قطر قاعدته $4m$ وارتفاعة $9m$ ، يصب فيه الماء بمعدل $17m^3/h$ ويتسرب الماء منه بمعدل $8m^3/h$ ، اوجد سرعة تغير نصف قطر الماء في المخروط عندما يكون نصف القطر $2m$



حجم الماء في الخزان

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h$$

$$= \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot \frac{9}{4}r$$

$$= \frac{3}{4}\pi r^3$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{9}{4}\pi r^2 \cdot \frac{dr}{dt}$$

$$9 = \frac{9}{4}\pi (2)^2 \cdot \frac{dr}{dt}$$

$$9 = \frac{9}{4}\pi \cdot 4 \cdot \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{\pi}\ m/h$$

$$\frac{dV}{dt} = 17 - 8 = 9$$

$$\left.\frac{dr}{dt}\right|_{r=2} = ??$$

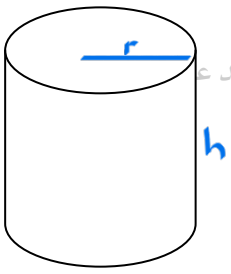


من التشابه

$$\frac{h}{9} = \frac{r}{4} \rightarrow h = \frac{9}{4}r$$

---

(2) اسطوانة دائرية قائمة تتمدد بالحرارة ، فإذا كان ارتفاعها $\frac{2}{3}$ قطر قاعدتها ، ويتغير نصف قطرها بمعدل $0.01\,ft/h$ أوجد معدل تغير حجمها وذلك عندما يكون طول نصف قطر قاعدتها $5\,ft$.



$$V = \pi r^2 h$$

$$= \pi r^2 \cdot \frac{4}{3}r$$

$$= \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \cdot \frac{dr}{dt}$$

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{r=4} = 4\pi (5)^2 \cdot (0.01)$$

$$= \pi\ ft^3/h$$

$$h = \frac{2}{3}(2r)$$

$$= \frac{4}{3}r$$

$$\frac{dr}{dt} = 0.01$$

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{r=5} = ??$$

مكعب ثلجي يتناقص طول ضلعة بمعدل $1cm/h$



(أ) اوجد معدل تغير حجمه عندما يكون طول ضلعه $10\,cm$

$V = x^3$

$\frac{dV}{dt} = 3x^2 \cdot \frac{dx}{dt}$

$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{x=10} = 3(10)^2 \cdot (-1) = -300\ cm^3/h.$

$\frac{dx}{dt} = -1$

$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{x=10} = ??$

(ب) اوجد معدل تغير مساحتة السطحية عندما يكون طول ضلعه $10\,cm$

$S = 6x^2$

$\frac{dS}{dt} = 12x \cdot \frac{dx}{dt}$

$\left.\frac{dS}{dt}\right|_{x=10} = 12(10)(-1) = -120\ cm^2/h.$

$\frac{dx}{dt} = -1$

$\left.\frac{dS}{dt}\right|_{x=10} = ??$

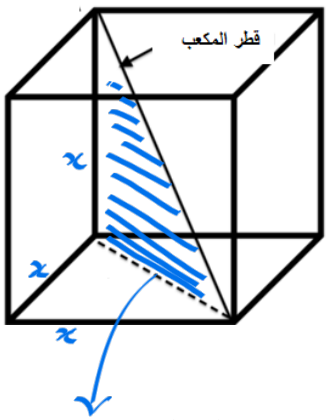
(ج) اوجد معدل تغير طول قطره عندما يكون طول ضلعه $10\,cm$

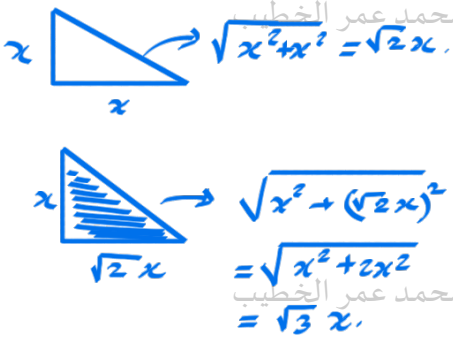
$L = \sqrt{3}\,x$

$\frac{dL}{dt} = \sqrt{3} \cdot \frac{dx}{dt}$

$= \sqrt{3}(-1)$

$= -\sqrt{3}\ cm/h.$

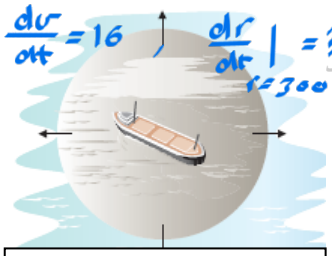




محمد عمر الخطيب

(1) يتسرب النفط من ناقلة بحرية بمعدل 120 جالون في الدقيقة وينتشر بشكل دائري بسمك $\frac{1}{4}''$ ،

اوجد معدل تزايد نصف قطر بقعة النفط عندما يكون نصف القطر $300\ ft$.



حجم بقعة البترول هو حجم اسطوانة ارتفاعها ثابت

$v = \pi r^2 h$

$= \pi r^2 \cdot \frac{1}{48}$

$= \frac{1}{48}\pi r^2$

$\frac{dv}{dt} = \frac{2}{48}\pi r \frac{dr}{dt}$

$16 = \frac{1}{24}\pi(300)\cdot\frac{dr}{dt}$

$\frac{dr}{dt} = \frac{16(24)}{300\pi} = 0.4\ ft/min$

$7.5\ gal = 1\ ft^3$

$120\ gal = 16\ ft^3$

$\frac{1}{4}'' = \frac{1}{4}in = \frac{1}{4}\times\frac{1}{12}ft = \frac{1}{48}'$

---

(2) يتسرب النفط من ناقلة بحرية بمعدل g جالون في الدقيقة وينتشر بشكل دائري بسمك $\frac{1}{4}''$ ،

(أ) اوجد قيمة g اذا كان معدل تزايد نصف قطر بقعة النفط هو $0.6\ ft/\min$ عند $r = 100\ ft$

$v = \pi r^2 \cdot h$

$= \pi r^2 \cdot \frac{1}{48}$

$= \frac{1}{48}\pi r^2$

$\frac{dv}{dt} = \frac{2}{48}\pi r \cdot \frac{dr}{dt}$

$\frac{g}{7.5} = \frac{1}{24}\pi(100)\cdot 0.6$

$g = 7.5 \cdot \frac{1}{24}\pi(100)\cdot 0.6$

$= 18.75\pi$

$= 58.9\ gal/min$



$\frac{dv}{dt} = g\ gal/min$

$= \frac{g}{7.5}\ ft^3/min$

$\frac{dr}{dt} = 0.6\ ft/min$

$g = ??$

(ب) اذا تضاعف سمك بقعة النفط فاوجد معدل تزايد نصف قطر بقعة النفط

حجم بقعة البترول بعد مضاعفة سمكها

$h = 2\cdot\frac{1}{48} = \frac{2}{48}\ ft$

$v = \pi r^2 \cdot \frac{2}{48}$

$= \frac{1}{24}\pi r^2$

$\frac{dv}{dt} = \frac{2}{24}\pi r \frac{dr}{dt}$

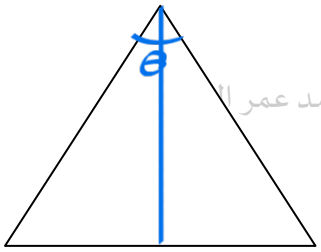
$18.75\pi = \frac{1}{12}\pi\cdot(100)\frac{dr}{dt}$

$\frac{dr}{dt} = \frac{1875\times 12}{100} = 0.3$

اي يضرب ضعف المعدل السابق .

(1) مثلث متساوي الساقين قاعدتة ثابتة طولها $8\ cm$ ، يزيد ارتفاع المثلث بمعدل $2\ cm$ لكل دقيقة

اوجد معدل التغير في زاوية رأس المثلث عندما يكون ارتفاعة $6\ cm$.



$$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{4}{h}$$

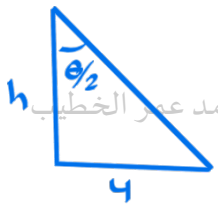
$$\frac{\theta}{2} = \tan^{-1}\left(\frac{4}{h}\right)$$

$$\theta = 2\tan^{-1}\left(\frac{4}{h}\right)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = 2\cdot\frac{1}{\left(\frac{4}{h}\right)^2+1}\cdot\frac{-4}{h^2}\cdot\frac{dh}{dt}$$

$$\left.\frac{d\theta}{dt}\right|_{h=6} = \frac{2}{\left(\frac{4}{6}\right)^2+1}\cdot\frac{-4}{6^2}\cdot(2)$$

$$= -0.3\ rad/min$$

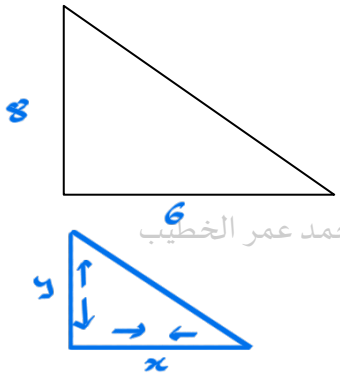


$$\frac{dh}{dt} = 2$$

$$\left.\frac{d\theta}{dt}\right|_{h=6} = ??$$

---

(2) في لحظة ما كان طولا القاعدة والارتفاع في مثلث قائم الزاوية هما $6\ cm$ و $8\ cm$ على الترتيب فإذا كان طول الضلع الأول ينقص بمعدل $1\ cm/min$ وكان طول الضلع الثاني يزداد بمعدل $2\ cm/min$. أوجد معدل التغير في مساحة المثلث بعد دقيقتين



$$A = \frac{1}{2}xy$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}\cdot\frac{dx}{dt}\cdot y + \frac{1}{2}\cdot x\cdot\frac{dy}{dt}$$

$$\left.\frac{dA}{dt}\right|_{t=2} = \frac{1}{2}\cdot(-1)(12) + \frac{1}{2}\cdot(4)(2)$$

$$= -2\ cm^2/min$$

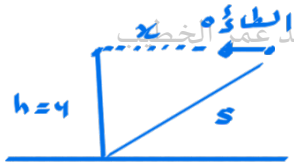
$$\frac{dx}{dt} = -1$$

$$\frac{dy}{dt} = 2$$

$$\left.\frac{dA}{dt}\right| = ??$$

$$t=2 \rightarrow \begin{cases} x = 6-2(1) = 4 \\ y = 8+2(2) = 12 \end{cases}$$

(1) تطير طائرة على ارتفاع ثابت قدرة $h=4$ ميل وتبعد افقياً $x=40$ ميل عن رادار يقع في المطار ، اذا كانت الطائرة تتجة افقيا نحو المطار والمسافة بين الطائرة والرادار هي $s(t)$ حيث $s'(t)=-240mi/h$ اوجد سرعة الطائرة



$$x^2+4^2=s^2$$

$$2x\frac{dx}{dt}=2s\frac{ds}{dt}$$

$$40\cdot\frac{dx}{dt}=\sqrt{1616}\cdot(-240)$$

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\sqrt{1616}\,(-240)}{40}$$

$$=-241\ mil/h.$$

$$\frac{ds}{dt}=-240\ mil/h$$

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=40}=??$$

عندما $x=40$

$$s=\sqrt{40^2+4^2}$$

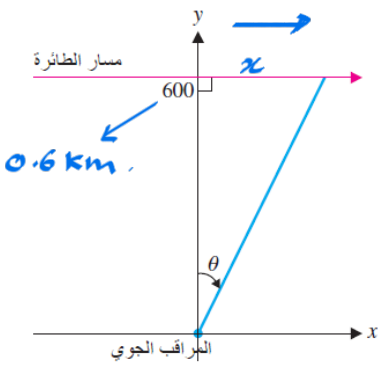
$$=\sqrt{1616}$$

---

(2) تطير طائرة بسرعة $540\ km/h$ على ارتفاع ثابت قدرة $600m$ عن سطح الارض وتمر فوق مراقب جوي ، اوجد <u>اكبر معدل للتغير</u> في الزاوية بين خط نظر المراقب والخط العمودي على مسار الطيران

هذا السؤال معدلات مرتبطة ثم يتم مثلي

* معدل التغير



$$\tan\theta=\frac{x}{0.6}$$

$$\sec^2\theta\cdot\frac{d\theta}{dt}=\frac{1}{0.6}\cdot\frac{dx}{dt}$$

$$\sec^2\theta\cdot\frac{d\theta}{dt}=\frac{1}{0.6}(540)$$

$$\sec^2\theta\,\frac{d\theta}{dt}=900$$

$$\frac{d\theta}{dt}=\frac{900}{\sec^2\theta}=900\cos^2\theta$$

$\therefore$ دالة معدل التغير هي

$$f(\theta)=900\cos^2\theta$$

نريد ايجاد اكبر قيمة لمعدل التغير

$$\frac{dx}{dt}=540$$

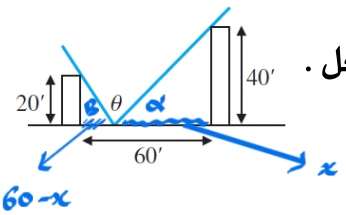
$$\frac{d\theta}{dt}=??$$

بما ان اكبر قيمة لـ $\cos^2\theta$ هو 1

فان اكبر قيمة لـ $f(\theta)$ هي 900 ,

اكبر معدل للتغير هو $900\ rad/h$

مبنيان ارتفاعهما $20\ ft$ و $40\ ft$ على التوالي والمسافة بينهما $60\ ft$ ، على فرض ان شدة الضوء في نقطة معينة تتناسب طردياً مع الزاوية θ كما في الشكل .



(أ) اذا تحرك شخص ما من اليمين الى اليسار بمعدل $4\ ft/s$

فما معدل تغير الزاوية θ عندما يكون الشخص في منتصف المسافة بين المبنيين

$\frac{dx}{dt} = 4$

$\left.\frac{d\beta}{dt}\right|_{x=30} = ??$

$\alpha + \beta + \beta = \pi$

$\beta = \pi - (\alpha + \beta)$

$= \pi - \tan^{-1}\left(\frac{40}{x}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{20}{60-x}\right)$

$\frac{d\beta}{dt} = -\frac{1}{\left(\frac{40}{x}\right)^2+1} \cdot \frac{-40}{x^2} \cdot \frac{dx}{dt} - \frac{1}{\left(\frac{20}{60-x}\right)^2+1} \cdot \frac{20}{(60-x)^2} \cdot \frac{dx}{dt}$

$\left.\frac{d\beta}{dt}\right|_{x=30} = 0.00246 \ rad/s$

$\tan\alpha = \frac{40}{x}$

$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{40}{x}\right)$

$\tan\beta = \frac{20}{60-x}$

$\beta = \tan^{-1}\left(\frac{20}{60-x}\right)$

(ب) اوجد الموقع الذي يكون قياس الزاوية θ اكبر ما يمكن ☆ هذا السؤال جزء ثاني

من الفقرة (أ) كان

$\beta = \pi - \tan^{-1}\left(\frac{40}{x}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{20}{60-x}\right)$

$\frac{d\beta}{dx} = -\frac{1}{\left(\frac{40}{x}\right)^2+1} \cdot \frac{-40}{x^2} - \frac{1}{\left(\frac{20}{60-x}\right)^2+1} \cdot \frac{20}{(60-x)^2}$

$= \frac{40}{\left(\frac{1600}{x^2}+1\right)x^2} - \frac{20}{\left(\frac{400}{(60-x)^2}+1\right)(60-x)^2}$

$= \frac{40}{1600+x^2} - \frac{20}{400+(60-x)^2}$

$\frac{d\theta}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{40}{1600+x^2} = \frac{20}{400+(60-x)^2}$

$\frac{2}{1600+x^2} = \frac{1}{400+3600-120x+x^2}$

$8000 - 240x + 2x^2 = 1600 + x^2$

$x^2 - 240x + 6400 = 0$

$x = 30.55 \ , \ x = 209.45$ مرفوض

∴ قياس الزاوية θ يكون اكبر ما يمكن عندما يكون الشخص على بعد 30.55 من المبنى الكبير .

ضخت مياه الى خزان كروي نصف قطره $60\ ft$ بمعدل ثابت $10\ f^3/s$

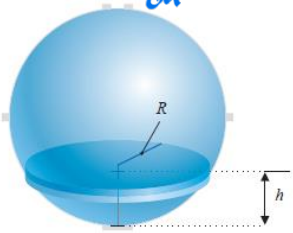
اوجد معدل تغير نصف قطر اعلى مستوى للمياه في الخزان عندما يمتلى الخزان الى النصف

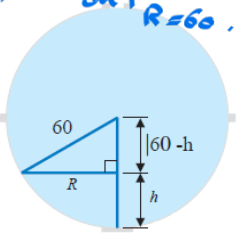
يعطى حجم الماء في الخزان الكروي الذي نصف قطره $60\ ft$ ونصف قطر مستوى سطح الماء R بالعلاقة

$$V(R)=\pi\left[60^2(60^2-R^2)^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{3}(60^2-R^2)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{3}\times 60^3\right]$$

$$\frac{dV}{dt}=\frac{dV}{dR}\times\frac{dR}{dt}\rightarrow\frac{dR}{dt}=\frac{dV/dt}{dV/dR}$$

$\frac{dV}{dt}=10$ ، $\left.\frac{dR}{dt}\right|_{R=60}=??$





نجد اولاً $\frac{dV}{dR}$

$$\frac{dV}{dR}=\pi\left[60^2\cdot\tfrac{1}{2}(60-R^2)^{-1/2}\cdot(-2R)\right]-\tfrac{1}{2}(60^2-R^2)^{1/2}(-2R)]$$

$$=\pi\left[\frac{-60^2R}{\sqrt{60-R^2}}+R\sqrt{60^2-R^2}\right]$$

$$=\pi\left[\frac{-60^2R+R(60^2-R^2)}{\sqrt{60^2-R^2}}\right]$$

$$=\frac{-\pi R^3}{\sqrt{60^2-R^2}}$$

$$\frac{dR}{dt}=\frac{dV/dt}{dV/dt}=\frac{-10}{\frac{-\pi R^3}{\sqrt{60^2-R^2}}}=\frac{-10\sqrt{60^2-R^2}}{\pi R^3}$$

$$\therefore\left.\frac{dR}{dt}\right|_{R=60}=\frac{-10\sqrt{60^2-60^2}}{\pi(60)^3}=0$$

ملاحظة:ممكن الحصول على جواب السؤال السابق مباشرة وهو صفر لان

معدل التغير كان متزايد (معدل التغير موجب) قبل الوصول الى المنتصف وبعد ذلك اصبح معدل التغير متناقص(معدل التغير سالب)

ضخت مياه الى خزان كروي نصف قطره $60\ ft$ بمعدل ثابت $10\ f^3/s$

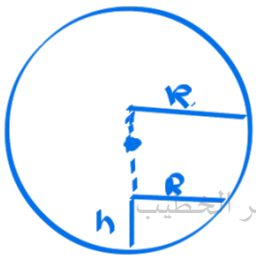
اوجد الارتفاع الذي عنده معدل التغير في الارتفاع يساوي معدل التغير في نصف القطر

تعطى العلاقة بين ارتفاع الماء h ونصف قطر سطح الماء R عند اي زمن بالعلاقات التالية

$$h(t) = 60 \pm \sqrt{60^2 - R^2} \quad , \quad R(t) = \sqrt{120h - h^2}$$

$h(t) = 60 \pm \sqrt{60^2 - R^2}$

$\frac{dh}{dt} = \pm \frac{-2R \cdot \frac{dR}{dt}}{2\sqrt{60^2 - R^2}}$



عند $\frac{dh}{dt} = \frac{dR}{dt}$

فان

$1 = \pm \frac{-R}{\sqrt{60^2 - R^2}}$

$\sqrt{60^2 - R^2} = \mp R$

$60^2 - R^2 = R^2$

$60^2 = 2R^2$

$R^2 = \frac{60^2}{2}$

$R = 30\sqrt{2} \quad , \quad R = -30\sqrt{2}$ مرفوض

$h = 60 \pm \sqrt{60^2 - (30\sqrt{2})^2}$

$h = 102.42 \quad , \quad h = 17.58$

الاقتصاد

القيمة العظمى للربح

نظريات مهمة في الاقتصاد

(1) القيمة العظمى للربح
(2) القيمة الصغرى لمتوسط التكلفة
(3) الطلب والسعر

(1) الدخل من بيع x قطعة بسعر القطعة الواحدة p هو $r(x)=x\times p$

الدخل الحدي $\frac{dr}{dx}$

(2) تكلفة انتاج x قطعة هو $c(x)$

التكلفة الحدية $\frac{dc}{dx}$

(3) الربح (الخسارة) من بيع x قطعة هو $p(x)=r(x)-c(x)$

الربح الحدي $\frac{dp}{dx}$

ملاحظة مهمة: دالة الدخل والتكلفة والربح هي دالة تراكمية اما الدخل الحدي والتكلفة الحدية والربح الحدي دالة حدية اي تحسب قيمة كل دالة عند قطعة واحدة فقط وليست تراكمية

ملاحظات مهمة

(1) التكلفة الفعلية لانتاج القطعة رقم x_n هو $C(x_n)-C(x_{n-1})$

(2) التكلفة الحدية لانتاج القطعة رقم x_n هو $C'(x_n)$

(3) عندما يكون الانتاج كبير فان التكلفة الفعلية لانتاج القطعة رقم x_n تقريبا يساوي التكلفة الحدية

(4) متوسط التكلفة للقطعة الواحدة يساوي $\bar{C}(x)=\frac{C(x)}{x}$

(5) عندما يكون $C''(x)<0$ فانه يعني ان تكلفة انتاج القطعة الواحدة يقل مع زيادة الانتاج ويدل ذلك على ان التصنيع على درجة كفاءة عالية

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

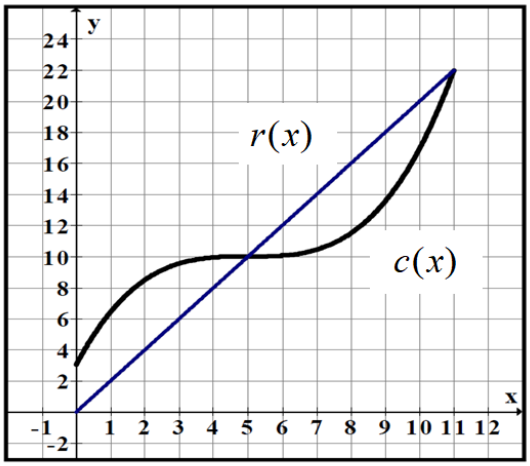
محمد عمر الخطيب

يمثل الشكل المجاور دالة الدخل $r(x)$

ودالة التكلفة $c(x)$ بملاين الدراهم

عند انتاج x جهاز كمبيوتر بالالاف الوحدات

لاحدى الشركات



(1) اوجد $C(0)$ وماذا تمثل

$C(0) = 3$

وهي تمثل التكلفة الابتدائية للمشروع وقيمتها 3 مليون درهم

---

(2) هل تحقق الشركة ربح ام خسارة عند انتاج 2000 قطعة

خسارة لان التكلفة اكثر من الدخل

---

(3) حدد قيمة الربح او الخسارة عند انتاج 2000 قطعة

الخسارة $= 4 - 8.2 = -4.2$ مليون

---

(4) حدد الفترة التي تحقق فيها الشركة خسارة

سنة $(0,5)$

---

(5) حدد الفترة التي تحقق فيها الشركة ربح

سنة $(5,11)$

---

(6) حدد القيمة التقريبية للانتاج التي تحقق فيها الشركة ربحية عظمى

الربح $= 16 - 12 = 4$ مليون

---

(7) اوجد $C(5)$ و $r(5)$ وماذا تلاحظ.

$C(5) = 10$

$r(5) = 10$

$C(5) = r(5)$

الدخل يساوي التكلفة (نقطة التعادل)

محمد عمر الخطيب

اذا كانت دالة التكلفة لأنتاج x لعبة تعطى بالعلاقة $C(x)=0.02x^2+8x+5000$

(1) اوجد تكلفة انتاج اول 100 قطعة.

$C(100)=0.02(100)^2+8(100)+5000=6000$

---

(2) اوجد التكلفة الفعلية لانتاج اللعبة رقم 100.

$C(100)-C(99)$

$=6000-5988.02$

$=11.98$

---

(3) اوجد التكلفة الحدية لانتاج اللعبة رقم 100.

$C'(x)=0.04x+8$

$C'(100)=0.04(100)+8=12$

---

(4) قارن بين التكلفة الفعلية لانتاج اللعبة رقم 100 والتكلفة الحدية لانتاج اللعبة رقم 100. وايهما اسهل بالحساب.

تقريباً متساوية

ولكن التكلفة الحدية اسهل بالحساب

---

(5) اوجد متوسط تكلفة انتاج القطعة الواحدة عند انتاج 100 قطعة

$\bar{C}(100)=\frac{C(100)}{100}=\frac{6000}{10}=60$

---

(6) اوجد متوسط تكلفة انتاج القطعة الواحدة عند انتاج 1000 قطعة

$\bar{C}(1000)=\frac{C(1000)}{1000}=\frac{33000}{1000}=33$

---

(7) قارن بين متوسط تكلفة القطعة الواحدة عند انتاج 100 قطعة وعند انتاج 1000 ماذا تلاحظ.

نلاحظ انه كلما زاد الانتاج فان متوسط تكلفة القطعة الواحدة تقل حسب هذه الدالة

(1) اذا كانت دالة التكلفة لأنتاج x وحدة تعطى بالعلاقة $C(x)=2x+5000$ ودالة الايردات تعطى بالعلاقة $R(x)=10x-0.001x^2$ اوجد القيمة العظمى للربح.

الربح = الدخل - التكلفة

$P(x)=R(x)-C(x)\quad ,x>0$

$=10x-0.001x^2-(2x+5000)$

$=-0.001x^2+8x-5000$

$P'(x)=-0.002x+8$

$P'(x)=0$

$-0.002x+8=0$

$x=4000$

$P''(x)=-0.002$

$P''(4000)=-0.002<0$

لدالة الربح قيمة عظمى محلية وحيدة عند $x=4000$ ومن مطلقة.

واكبر ربح هو

$P(4000)=11000$

---

(2) مصنع لانتاج دمى الاطفال، يبيع المصنع x دمية اسبوعيا بسعر الواحدة 20 درهم ،فاذا كانت دالة التكلفة لانتاج x لعبة تعطى بالعلاقة $C(x)=0.002x^2+8x+5000$ اوجد عدد القطع التي ينتجها المصنع ليحقق اكبر ربح.

عدد القطع x السعر

$R(x)=20x$

$P(x)=R(x)-C(x)\quad ,x>0$

$=20x-(0.002x^2+8x+5000)$

$=-0.002x^2+12x-5000$

$P'(x)=-0.004x+12$

$P'(x)=0$

$-0.004x+12=0$

$x=3000$

$P''(x)=-0.004$

$P''(3000)=-0.004<0$

لدالة الربح قيمة عظمى محلية وحيدة عند $x=30000$ ومن مطلقة.

اكبر ربح يتحقق عند انتاج 30000 قطعة.

محمد عمر الخطيب

القيمة الصغرى لمتوسط التكلفة

متوسط التكلفة للقطعة الواحدة يساوي التكلفة الكلية على عدد القطع أي ان $\bar{C}(x)=\frac{C(x)}{x}$

(1) لتكن $C(x)=x^3-6x^2+15x$ **تمثل دالة تكلفة انتاج** x **من الاجهزة بالالاف .**

اوجد مستوى الانتاج الذي يحقق القيمة الصغرى لمتوسط التكلفة.

$\bar{C}(x)=\frac{C(x)}{x}$ ، $x>0$

$=\frac{x^3-6x^2+15x}{x}$

$=x^2-6x+15$

$\bar{C}'(x)=2x-6$

$\bar{C}'(x)=0$

$2x-6=0$

$x=3$

$\bar{C}''(x)=2$

$\bar{C}''(3)=2>0$

للدالة قيمة صغرى محلية وحيدة عند $x=3$ وهي مطلقة

مستوى الانتاج الذي يحقق اقل تكلفة هو 3000 قطعة .

---

(2) لتكن $C(x)=0.02x^2+20x+1800$ **تمثل دالة تكلفة انتاج** x **من الاجهزة. اوجد مستوى الانتاج الذي يحقق القيمة الصغرى لمتوسط التكلفة.**

$\bar{C}(x)=\frac{C(x)}{x}$ ، $x>0$

$=\frac{0.02x^2+20x+1800}{x}$

$=0.02x+20+\frac{1800}{x}$

$\bar{C}'(x)=0.02-\frac{1800}{x^2}$ ،

$\bar{C}'(x)=0$

$0.02=\frac{1800}{x^2}$

$x^2=\frac{1800}{0.02}$

$x=90000$

$x=-300$ مرفوض ، $x=300$

$\bar{C}'$: $-\ -\ -$ (0) $+\ +\ +$ (300)

للدالة قيمة صغرى محلية وحيدة عند $x=300$ وهي مطلقة .

مستوى الانتاج الذي يحقق اقل تكلفة هو 300 قطعة .

$C'(x)$ غير معرف عند $x=0$ خارج المجال

محمد عمر الخطيب

(1) لتكن $C(x)=10\,e^{0.02x}$ تمثل دالة تكلفة انتاج x من الاجهزة بالالاف. اوجد مستوى الانتاج الذي يحقق القيمة الصغرى لمتوسط التكلفة.

$\bar{c}(x)=\frac{c(x)}{x}$ ، $x>0$

$=\frac{10\,e^{0.02x}}{x}$

$\bar{c}'(x)=\frac{10\,e^{0.02x}\cdot(0.02)x-10\,e^{0.02x}\cdot 1}{x^2}$

$=10\,e^{0.02x}\left(\frac{0.02x-1}{x^2}\right)$

$\bar{c}'(x)=0$ ، $\bar{c}'(x)$ م.ع

$0.02x-1=0$ ، $x=0$ خارج المجال

$x=50$

x	0		50	
$\bar{c}'$		$-$	0	$+$

للدالة قيمة صغرى محلية وحيدة عند $x=50$ هي مطلقة ويكون الإنتاج 5000 قطعة

---

(2) لتكن $C(x)=16000+200x+4x^{\frac{3}{2}}$ تمثل دالة تكلفة انتاج x من الاجهزة. اوجد مستوى الانتاج الذي يحقق القيمة الصغرى لمتوسط التكلفة.

$\bar{c}(x)=\frac{c(x)}{x}$

$=\frac{16000+200x+4x^{3/2}}{x}$

$=\frac{16000}{x}+200+4x^{1/2}$

$\bar{c}'(x)=\frac{-16000}{x^2}+2x^{-1/2}$

$\bar{c}'(x)=0$

$\frac{16000}{x^2}=2x^{-1/2}$

$16000=2x^{3/2}$

$8000=x^{3/2}$

$x=(8000)^{2/3}$

$=400$

$\bar{c}'(x)$ م.ع ، $x=0$ خارج المجال

x	0		400	
$\bar{c}'$		$-$	0	$+$

للدالة قيمة صغرى محلية وحيدة عند $x=400$ هي مطلقة ، الانتاج 400 مطلوب

---

(3) تمثل الدالة $\bar{C}(x)=10+\frac{100}{x}$ متوسط التكلفة لانتاج x من الاجهزة. إذا كان الانتاج الحالي 10 قطع ويزداد بمعدل جهزين سنويا، اوجد معدل التغير السنوي في متوسط التكلفة.

اصبحت متوسط التكلفة ثابتة تقريباً بالنسبة للزمن

$\bar{c}(x)=10+\frac{100}{x}$

$\frac{d}{dt}\bar{c}(x)=\frac{-100}{x^2}\cdot\frac{dx}{dt}$

$\frac{d}{dt}\Big|_{x=10}\bar{c}(x)=\frac{-100}{10^2}(2)$

$=-2$

عند زيادة الإنتاج 10 قطع سنوياً ستنخفض تكلفة القطعة الواحدة بمعدل 2 دينار سنوياً

محمد عمر الخطيب

(1) تمثل الدالة $p(x)=1.3-\frac{x}{2500}$ سعر علبة العصير الواحدة بالدرهم عند بيع x علبة . اوجد عدد القطع التي تحقق القيمة العظمى للدخل

الإيراد = السعر × عدد القطع

$R(x)=x\cdot p$

$=x\left(1.3-\frac{x}{2500}\right)$

$=1.3x-\frac{1}{2500}x^2$

$R'(x)=1.3-\frac{2}{2500}x$

$R'(x)=0$

$1.3=\frac{2}{2500}x$

$x=\frac{1.3(2500)}{2}=1625$

$R''(x)=-\frac{2}{2500}$

$R''(1625)=-\frac{2}{2500}<0$

الدالة قيمة عظمى محلية وحيدة عند $x=1625$ نهاية عظمى مطلقة

اكبر دخل عند انتاج 1625 قطعة

---

(2) تبيع مكتبة 20000 او اقل كتاب سنوياً من نوع واحد بربح 3 درهم لكل كتاب فاذا زاد عدد الكتب المباعة عن هذا العدد فان الربح يقل بـ 0.0001 درهم عن كل كتاب زيادة عن 20000 كتاب (مثلاً ربح الكتاب الواحد 2.9 درهم عند بيع 21000 كتاب).

ما عدد النسخ التي تبيعها المكتبة حتى تحقق اعلى ربح

العدد × الربح

$P(x)=[3-0.0001(x-20000)]x$

حيث $x>20000$.

$=3x-0.0001x(x-20000)$

$=3x-0.0001x^2+2x$

$=5x-0.0001x^2$

$P'(x)=5-0.0001x$

$P'(x)=0$

$x=25000$



الدالة قيمة عظمى محلية وحيدة عند $x=25000$ نهاية عظمى مطلقة

عدد الكتب التي تحقق اعلى ربح هي 25000

---

(3) اذا كانت سعر التذكرة الواحدة لحضور حفل هي 40 درهم ، ويتم خصم واحد درهم عن كل تذكرة بعد طلب 20 تذكرة بحد اقصى 50 تذكرة (مثلاً سعر التذكر 38 درهم عند شراء 22 تذكرة) اوجد عدد التذاكر التي تحقق القيمة العظمى لتكلفة التذاكر.

عدد التذاكر × السعر

$C(x)=[40-1(x-20)]\cdot x \quad , \quad 21\le x\le 50$

$=40x-x(x-20)$

$=40x-x^2+20x$

$=60x-x^2$

$C'(x)=60-2x$

$C'(x)=0$

$60-2x=0$

$x=30$

$C(21)=840$

$C(50)=500$

$C(30)=900$

عدد التذاكر هو 30 تذكرة

(1) دالة الطلب : هي دالة تمثل عدد السلع او القطع وهي دالة تعتمد على سعر القطعة وتكون على الشكل $x = f(p)$

(2) دالة الايراد او الدخل هي $R = p \times x = p \times f(p)$

(3) مرونة الطلب E هي دالة تعتمد على سعر السلعة وعدد السلع وتساوي $E = \frac{P}{f(P)} f'(P)$

(4) اذا كانت $E < -1$ يكون الطلب مرن اي ان السعر يزداد و دالة الايرادات تتناقص

أذا كانت دالة الطلب لسلعة معينة تعطى بالعلاقة $f(p) = 200(30 - p)$ حيث p سعر القطعة

$0 < P < 30$

(1) اوجد عدد القطع المطلوبة عند السعر 10 درهم.

$f(10) = 200(30-10) = 4000$ درهم

---

(2) اوجد عدد القطع المطلوبة عند السعر 25 درهم.

$f(25) = 200(30-25) = 1000$.

---

(3) اوجد الايرادات (الدخل) عند السعر 10 درهم وعند السعر 25 درهم وقارن بينهم

$R(x) = p \cdot x$

$= p \cdot f(p)$

$= p \cdot 200(30-p)$

$= 200p(30-p)$.

$R(10) = 200 \cdot 10\ (30-10) = 40000$

$R(25) = 200 \cdot 25\ (30-25) = 25000$

الايراد يقل مع زيادة السعر .

اي ان الطلب مرن على هذه السلعة .

اذا كانت دالة الطلب لسلعة معينة تعطى بالعلاقة $f(p)=200(30-p)$ حيث p سعر القطعة

$0<P<30$

(1) اوجد مرونة الطلب E

مرونة الطلب

$$E=\frac{P}{f(P)}f'(P)$$

$$E=\frac{P\cdot f'(P)}{f(P)}$$

$$=\frac{P\cdot 200(-1)}{200(30-P)}$$

$$=\frac{-P}{30-P}=\frac{P}{P-30}$$

---

(2) اوجد مدى الاسعار الذي يجعل الطلب مرن $E<-1$. (اوجد الفترة التي يكون فيها الطلب مرن)

$E<-1$

$\frac{P}{P-30}<-1$

$P>-(P-30)$

$P>-P+30$

☆ تقلب اشارة المتباينة عند الضرب في $P-30$ لان $P<30$ ستكون $P-30<0$

$2P>30$

$P>15$

مدى الاسعار هو

$15<P<30$

او $(15,30)$

الدخل او الايرادات

$$R=P\times f(P)$$

(3) اوجد دالة الايرادات ثم حدد الفترة التي يتزايد فيها الايراد.

(اوجد مدى الاسعار الذي يجعل الطلب غير مرن $E>-1$)

الايراد = السعر . عدد السلع (الطلب)

$R=P\cdot f(P)$

$=P\cdot 200(30-P)$

$=200P(30-P)$

$=200(30P-P^2)$

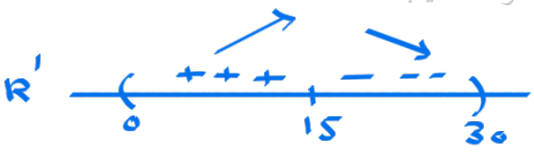
$R'=200(30-2P)$

$R'=0$

$200(30-2P)=0$

$30-2P=0$

$P=15$



الفترة التي تتزايد فيها الايرادات $(0,15)$ ص

☆ السعر يزيد والايرادات تزيد الطلب غير مرن.

تقوم احدى الشركات بتقدير مبيعاتها السنوية بالعلاقة $s(t) = 60 - 40e^{-0.05x(t)}$ حيث $x(t)$ بالالاف

تمثل كمية الانفاق بالالاف الدراهم على الاعلانات مع مرور الزمن t بالسنوات ، والجدول التالي يمثل حجم الانفاق لمدة اربع سنوات.

السنة t	1	2	3	4
تكلفة الاعلانات	14500	16000	18000	20000

(أ) قدر مقدار المبيعات عند السنة الثانية.

$$s(2) = 60 - 40e^{-0.05x(2)}$$

$$= 60 - 40e^{-0.05(16)}$$

$$= 42$$

نوضح لاكتبت 16000 في المعادلة .

مقدار المبيعات هو 42 ألف .

(ب) قدر معدل التغير في الانفاق على الاعلانات في السنة الرابعة.

$$x'(t) = \frac{dx}{dt} = m$$

$$= \frac{20-18}{4-3} = 2$$

مقدار التغير في المبيعات عند السنة الرابعة تقريبا 2000 درهم .

(ج) قدر معدل التغير في كمية المبيعات في السنة الرابعة.

$$s'(t) = \frac{ds}{dt} = -40e^{-0.05x(t)} \cdot (-0.05x'(t))$$

$$= 2x'(t)e^{-0.05x(t)}$$

$$s'(4) = 2x'(4)e^{-0.05x(4)}$$

$$= 2(2)e^{-0.05(20)}$$

$$= 1.47$$

مقدار التغير في المبيعات السنوية هو 1470 درهم .

(1) تحدد العلاقة $f(x)=\sqrt{2x}$ **حيث** $0\le x\le 8$ **كتلة أول** x **مترمن سلك معدني رقيق**

اوجد الكثافة الخطية للمعدن عندما $x=8$

> **الكثافة الخطية**
> **هي مشتقة الكتلة**
> $\rho(x)=m'(x)$

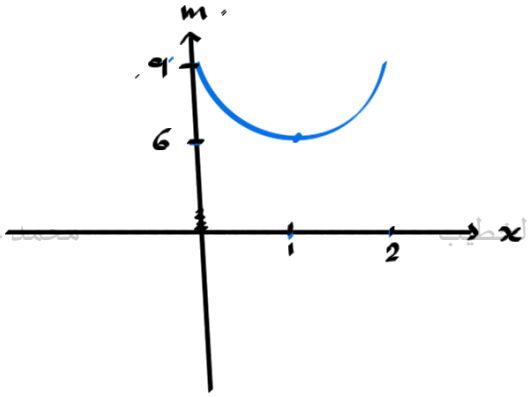
$$\rho(x)=f'(x)$$
$$=\frac{2}{2\sqrt{2x}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2x}}$$
$$\rho(8)=\frac{1}{\sqrt{16}}$$
$$=0.25$$

---

(2) تحدد العلاقة $m(x)=(x-1)^3+6x$ **حيث** $0\le x\le 2$ **كتلة أول** x **مترمن سلك معدني رقيق اوجد الكثافة الخطية ثم صف كيف تتوزع الكثافة على السلك**

$$\rho(x)=m'(x)$$
$$=3(x-1)^2+6$$

ترسم دالة الكثافة على الفترة $[0,2]$



من رسم دالة الكثافة نلاحظ من الرسم ان كثافة السلك لا تتوزع بانتظام على السلك وتكون الكتلة العظمى عند الاطراف والكتلة الصغرى في الوسط.

(1) أذا كان سرعة التفاعل $x'(t)$ لمادة معينة تعطى بالعلاقة $x'(t)=2x(t)\left[1-4x(t)\right]$ حيث $x(t)$

تقيس مقدار التركيز من درجة التشبع اوجد التركيز الذي تصل فيه سرعة التفاعل $x'(t)$ الى القيمة العظمى .

ملاحظة

$x(t)$ تمثل التركيز

و $x'(t)$ تعني معدل التغير في التركيز وهو سرعة التفاعل ويمكن اعتبارة دالة في التركيز

اي ان

$$x'(t)=f(x)$$

$f(x) = x'(t) = 2x[1-4x]$

$= 2x - 8x^2$.

نجد لقيمة العظمى للدالة $f(x)$

$f'(x) = 2-16x$.

$f'(x) = 0$

$x = 1/8$

$f''(x) = -16$

$f''(1/8) = -16 < 0$.

قيمة عظمى محلية وحيده عند $x=1/8$ فهي مطلقة

☆ تصل سرعة التفاعل $x(t)$ الى القيمة العظمى عندما يكون تركيز المادة $1/8$ درجة الاشباع .

---

(2) تحدد العلاقة $Q(t)=e^t(3\cos 2t+4\sin 2t)$ ، كمية الشحنة بالكولوم في دائرة كهربائية عند زمن معين، اوجد التيار بعد نصف ثانية .

التيار $I(t)=Q'(t)$

$I(t) = Q'(t) = e^t(3\cos 2t + 4\sin 2t) + e^t(-6\sin 2t + 8\cos 2t)$.

$I(1/2) = e^{1/2}(3\cos 1 + 4\sin 1) + e^{1/2}(-6\sin 1 + 8\cos 1)$

$= 7$ (تقريبا)

قانون بويل للغازات في درجة حرارة ثابتة هو $PV = c$ حيث ان P هو ضغط الغاز و V حجم الغاز والعدد c ثابت الغازات على اعتبار ان P و V دوال مترابطة بالزمن

(أ) بين ان $\frac{P'(t)}{V'(t)} = \frac{-c}{V^2}$

$P(t) \cdot V(t) = c$

اشتق الطرفين ضمنياً بالنسبة للزمن

$P'(t) \cdot V(t) + P(t) \cdot V'(t) = 0$

$P'(t) V(t) = -P(t) \cdot V'(t)$

بالقسمة على $V(t) \cdot V'(t)$

$\frac{P'(t) V(t)}{V(t) \cdot V'(t)} = \frac{-P(t) V'(t)}{V(t) \cdot V'(t)}$

ملاحظة $P \cdot V = c$, $P = c/V$

$\frac{P'(t)}{V'(t)} = \frac{-P(t)}{V(t)} = \frac{-c/V(t)}{V(t)} = \frac{-c}{V^2(t)} = \frac{-c}{V^2}$ #

(ب) اكتب P كدالة في V ثم اوجد $P'(V)$

$P = \frac{c}{V}$

اشتقاق عادي

$P(V) = \frac{c}{V}$,

$P'(V) = \frac{-c}{V^2}$.

(ج) قارن بين $P'(V)$ و $\frac{P'(t)}{V'(t)}$ من الفقرتين أ و ب

$\frac{P'(t)}{V'(t)} = \frac{-c}{V^2}$, من (أ)

$P'(V) = \frac{-c}{V^2}$ من (ب)

$\therefore P'(V) = \frac{P'(t)}{V'(t)}$

$\frac{dP}{dV} = \frac{\frac{dP}{dt}}{\frac{dV}{dt}}$

ملاحظة: المعادلات البارومترية

اذا كان $y = y(t)$, $x = x(t)$

فان $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$

(1) يرتبط f تردد اهتزاز اوتار الجيتار بالتوتر T (ثابت) الذي يشد به الوتر بالعلاقة $f=\frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\rho}}$

حيث ρ تمثل الكثافة (ثابت) و L طول الوتر

(أ) اوجد $f'(t)$ عندما يكون $L=\frac{1}{2}\ ft$ و $\sqrt{\frac{T}{\rho}}=220\ ft/s$ و $L'(t)=-4$

$f(t)=\frac{1}{2L}\cdot\sqrt{\frac{T}{\rho}}=\frac{1}{2L}\cdot 220=\frac{110}{L}$

$f'(t)=\frac{-110}{L^2}\cdot\frac{dL}{dt}$

عند $L=\frac{1}{2}$ فان

$f'(t)=\frac{-110}{(1/2)^2}\cdot(-4)$

$=1760$

دورة في الثانية.

(ب) اوجدالزمن المستغرق لرفع طبقة الصوت اوكتاف واحد (ضعف f)

بما ان معدل التغير 1760 دورة في الثانية

اي ان يتضاعف $\frac{1760}{220}=8$ مرات في الثانية الواحدة

لذلك يحتاج الى $\frac{1}{8}$ ثانية ليتضاعف مرة واحدة من 220 الى 440

لاحظ ان $f(t)$ عند $L=1/2$ تساوي

$f(t)=\frac{110}{1/2}=220$

---

(2) يعرف الرقم الهيدروجيني $P(x)$ بالعلاقة $P(x)=c+ln\frac{x}{1-x}$ حيث تمثل x كمية القاعدة المضافة الى الخليط لكسر الحامض و c عدد ثابت حيث $0<x<1$ ، اوجد قيمة x التي تجعل معدل تغيير الرقم الهيدروجيني صغير جدا.(قيمة صغرى مطلقة)

ملاحظة (معدل تغير الرقم الهيدروجني هو $P'(x)$ وممكن اعتبارها $g(x)$)

$P(x)=c+\ln\frac{x}{1-x}$

$=c+\ln x-\ln(1-x)$

$P'(x)=\frac{1}{x}-\frac{-1}{1-x}$

$=\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}$

$=\frac{1-x+x}{x(1-x)}$

$=\frac{1}{x-x^2}$

$g(x)=P'(x)=\frac{1}{x-x^2}$

نريد ايجاد قيمة x التي تجعل $g(x)$ اصغر ما يمكن

$g'(x)=\frac{-1(1-2x)}{(x-x^2)^2}=\frac{2x-1}{(x-x^2)^2}$

$g'(x)$ م.ع

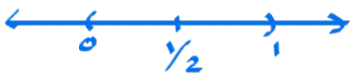
$x=0,\ x=1$

صار ع اكبر

$g'(x)=0$

$2x-1=0$

$x=1/2$



قيمة صغرى عليه , وهي 0 عند $x=\frac{1}{2}$ من اليمين

$P(x)$ يكبر $g(x)$ معدل تغير الرقم الهيدروجيني

السكان

(1) اذا كانت المعادلة اللوجستية للنمو السكاني تعطى بالعلاقة $p'(t)=4p(t)\left[5-p(t)\right]$ حيث $p(t)$ تمثل عدد السكان بالمليون مع مرور الزمن ، اوجد التعداد السكاني الذي يصل فيه معدل النمو الى القيمة العظمى.

$f(p)=p'(t)$ لتكن

$f(p)=4p[5-p]=20p-4p^2$

$f'(p)=20-8p$

$f'(p)=0$

$20-8p=0$

$p=2.5$

$f''(p)=-10$

$f''(2.5)=-10<0$

قيمة عظمى محلية وحيدة عند $p=2.5$ وهي مطلقة

يكون معدل النمو السكاني في ذروته عندما يكون عدد السكان 2.5 مليون

ملاحظة

$p(t)$ تمثل عدد السكان و

$p'(t)$ تعني معدل النمو السكاني ويمكن اعتبارها دالة في عدد السكان

اي ان $f(p)=p'(t)$

---

(2) تمثل الدالة $f(t)=\dfrac{70}{1+3e^{-0.2t}}$ نسبة عدد السكان التي تصلهم اشاعة معينة بعد الزمن t بالساعة

(أ) اوجد $f(2)$ وماذا تمثل

$f(2)=\dfrac{70}{1+3e^{-0.2(2)}}=23$

اي ان 23% من عدد السكان ستصلهم الاشاعة بعد ساعتين

(ب) اوجد $f'(t)$, وبين ان $f'(t)>0$

$f'(t)=\dfrac{-70(3e^{-0.2t})(-0.2)}{(1+3e^{-0.2t})^2}$

$=\dfrac{42e^{-0.2t}}{(1+3e^{-0.2t})^2}=\dfrac{42}{e^{0.2t}(1+3e^{-0.2t})^2}>0$

لان كل من البسط والمقام اعداد موجبة

(ج) اوجد $f'(2)$ وماذا تمثل .

$f'(2)=3.1$

اي ان معدل انتشار الاشاعة عند الساعة الثانية هي 3.1%

(د) الحد الأقصى لنسبة عدد السكان الذين ستصلهم الاشاعة .

بما ان $f'(t)>0$ فان الحد الاقصى لنسبة السكان الذين ستصلهم الاشاعة هي

$\lim\limits_{t\to\infty} f(t)$

$\lim\limits_{t\to\infty} f(t)=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{70}{1+3e^{-0.2t}}=\dfrac{70}{1+\frac{3}{e^{0.2t}}}=\dfrac{70}{1+0}=70$

الحد الاقصى 70% من عدد السكان

محمد عمر الخطيب

حل اسئلة الوحدة الرابعة

اجابات الدرس الثالث

① الاعداد الحرجة هي $2, 1, 0, -2, -3$

(B)

وعددها 5

② الاعداد الحرجة هي $0, 1, 4$

(C)

③ الاعداد الحرجة هي $x = -3$ مماس افقي

(C)

الحقيقة تساوي صفر او غير موجودة $x \in [-1, 1]$

④ الاعداد الحرجة هي $-1, 2$ نقاط التقاطع مع محور x

(B)

⑤

(B)

ع.م f'

$f' = 0$

$1 + x = 0$

$x = -1$

الاعداد الحرجة هي $-1, 0$

$D = (-\infty, \infty)$

$f(x) = 3x^{1/3} + \frac{3}{4}x^{4/3}$

$f'(x) = x^{-2/3} + x^{1/3}$

$= \frac{1}{x^{2/3}} + x^{1/3} = \frac{1+x}{x^{2/3}}$

⑥

(A)

ع.م f'

$f' = 0$

(1) $-4x = 0$

$x = 0$ ✓

(2) $2x - 4 = 0$

$x = 2$ ✓

الاعداد الحرجة هي $0, 2$

$D = (-\infty, \infty)$

f: $7 - 2x^2$ (5) $x^2 - 4x$ (عدم اتصال) (5, 1, -3)

f': $-4x$ (0) $2x - 4$ (1)

⑦

(C)

ع.م f'

$f' = 0$

$-2x^2 + 0.1 = 0$

$x^2 = \frac{0.1}{2}$

$x^2 = \frac{1}{20}$

$x = \pm\frac{1}{\sqrt{20}}$

ع.م f'

$e^{2x} = 0$

لا يوجد حل

الاعداد الحرجة هي $\pm\frac{1}{\sqrt{20}}$

$D = (-\infty, \infty)$

$f(x) = (x^2 + x + 0.45)e^{-2x}$

$f'(x) = (2x+1)e^{-2x} + (x^2+x+0.45)e^{-2x}(-2)$

$= e^{-2x}[2x + 1 - 2x^2 - 2x - 0.9]$

$= \frac{-2x^2 + 0.1}{e^{2x}}$

محمد عمر الخطيب

(8) (B)

$D = [0, 2\pi]$

$f(x) = x - \sin 2x$

$f'(x) = 1 - 2\cos 2x$

$f'(x) = 0$

$1 - 2\cos 2x = 0$

$\cos 2x = \frac{1}{2}$



$Q_1 \rightarrow 2x = \frac{\pi}{3} \rightarrow x = \frac{\pi}{6}$

$Q_4 \rightarrow 2x = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3} \rightarrow x = \frac{5\pi}{6}$

الاعداد الحرجة هي $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$

(9) (D)

$D = (-\infty, \infty)$

$f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 4x} = (x^3 - 4x)^{1/3}$

$f'(x) = \frac{1}{3}(x^3 - 4x)^{-2/3} \cdot (3x^2 - 4)$

$= \frac{3x^2 - 4}{3(x^3 - 4x)^{2/3}}$

$f' = 0$

$3x^2 - 4 = 0$

$x = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$

f' م.ع

$x^3 - 4x = 0$

$x = 0, \pm 2$

عدد الاعداد الحرجة هي 5

(10) (D)

$D = R \setminus \{-2\}$

$f(x) = \frac{2x^2}{x+2}$

$f'(x) = \frac{4x(x+2) - 2x^2(1)}{(x+2)^2}$

$= \frac{2x^2 + 8x}{(x+2)^2}$

$f' = 0$

$2x^2 + 8x = 0$

$x = 0, \ x = -4$

f' م.ع

$x + 2 = 0$

$x = -2 \notin D$

الاعداد الحرجة هي $-4, 0$

(11) (A)

$D = (-\infty, \infty)$

$f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$

$f'(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}(-1))$

$= \frac{1}{2}(e^x - \frac{1}{e^x})$

$= \frac{1}{2}(\frac{e^{2x} - 1}{e^x})$

$f' = 0$

$e^{2x} - 1 = 0$

$e^{2x} = 1$

$\ln e^{2x} = \ln 1$

$2x = 0$

$x = 0$

f' م.ع

$e^x = 0$

لا يوجد حل

الاعداد الحرجة هي $x = 0$

محمد عمر الخطيب

(12) A

$f(x) = x^2 e^{kx}$

$f'(x) = 2x e^{kx} + x^2 e^{kx} \cdot k$

$= e^{kx}(2x + kx^2)$

$f'(\frac{2}{3}) = 0$

$e^{k\cdot\frac{2}{3}}(2\cdot\frac{2}{3} + k\cdot(\frac{2}{3})^2) = 0$

$e^{\frac{2}{3}k}(\frac{4}{3} + \frac{4}{9}k) = 0$

$\therefore \frac{4}{3} + \frac{4}{9}k = 0$

$\frac{4}{9}k = -4/3 \Rightarrow \boxed{k = -3}$

(13) B

$f(x) = x^3 - cx$

$f'(x) = 3x^2 - c$

$f'(-1) = 0$

$3(-1)^2 - c = 0$

$3 - c = 0$

$\boxed{c = 3}$

(14) D

$D = [-2, 4]$

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 12$

$f'(x) = 3x^2 - 6x$

$f'(x) = 0$

$x = 0 \ , \ x = 2$

اختبار القيم

$f(-2) = -8$

$f(4) = \boxed{28}$

$f(0) = 12$

$f(2) = 8$

القيمة العظمى المطلقة هي 28 عند $x = 4$

(15) D

$f(x) = \sin^{-1} x \qquad D = [-1, 1]$

$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$f' = 0$ لا يوجد حل ، f' غ.م

$1 - x^2 = 0$

$x = \pm 1$

$f(-1) = \sin^{-1}(-1) = \frac{-\pi}{2}$

$f(1) = \sin^{-1}(1) = \frac{\pi}{2}$

القيمة العظمى المطلقة هي $\frac{\pi}{2}$ عند $x = 1$

(16) C

$f(x) = x^2 e^{-x} \ , \ D = [0, 4]$

$f'(x) = 2x e^{-x} + x^2 e^{-x}(-1)$

$= e^{-x}(2x - x^2)$

$= \frac{2x - x^2}{e^x}$

$f' = 0$ لا يوجد حل ، f' غ.م

$e^x = 0$

$2x - x^2 = 0$

$x = 0, 2$

$f(0) = 0$

$f(4) = 4^2 e^{-4} = \frac{16}{e^4} = 0.29$

$f(2) = 2^2 e^{-2} = \frac{4}{e^2} = 0.54$

القيمة العظمى المطلقة هي $\frac{4}{e^2}$ عند $x = 2$

(17) ©

$2x$: 0 إلى π

$2x = 0 + n\pi = n\pi \Rightarrow x = n\frac{\pi}{2}$

$x = 0 , \frac{\pi}{2} , \pi$

$f(0) = 0$

$f(\pi) = 1$

$f(\pi/2) = 0$

القيمة الصغرى المطلقة 0 عند $x = \frac{\pi}{2}$

$f(x) = \cos 2x \quad , \quad [0, \pi]$

$f'(x) = -\sin 2x \cdot 2$

$= -2 \sin 2x$

$f'(x) = 0$

$-2 \sin 2x = 0$

$\sin 2x = 0$

(18) ©

من الرسم القيمة الصغرى المطلقة

عند $x = 2$

$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$

$f'(x) = 0$

$6x^2 - 6x - 12 = 0$

$x = -1 , 2$

(19) Ⓐ

من الرسم القيمة العظمى المطلقة على الفترة $(-1, 1)$ تكون عند $x = 0$

(20) Ⓐ

من الرسم القيمة الصغرى المطلقة عند $x = \frac{2}{5}$

$f'(x) = 0$

$5x - 2 = 0$

$x = 2/5$

f' غير معرف

$x = 0$

$f(x) = 4x^{5/4} - 8x^{1/4}$

$f'(x) = 5x^{1/4} - 2x^{-3/4}$

$= x^{-3/4}\left(5\frac{x^{1/4}}{x^{-3/4}} - 2\right)$

$= x^{-3/4}(5x - 2)$

(21) Ⓐ

من الرسم للدالة قيمة عظمى محلية عند $x = 1$ لأن

$f(1) > f(x)$ لكل x في جوار العدد 1

(22) ©

$f(0) = 1$

$f(1) = e - 2 = 0.71$

$f(\ln 2) = 2 - 2\ln 2 = 0.61$

القيمة الصغرى المطلقة عند $x = \ln 2$

$g(x) = e^x - 2x \quad , \quad [0, 1]$

$g'(x) = e^x - 2$

$g'(x) = 0$

$e^x - 2 = 0$

$e^x = 2$

$x = \ln 2$

اجابات الدرس الثالث

(23) (A)

$f(-8) = (-8)^{2/3} = 4$

$f(1) = (1)^{2/3} = 1$

$f(0) = 0$

عظمى مطلقة عند $x=-8$

وصغرى مطلقة عند $x=0$

$f(x) = x^{2/3}$, $[-8, 1]$

$f'(x) = \frac{2}{3} x^{-1/3}$

$= \frac{2}{3x^{1/3}}$

f' م.ع $x=0$

$f'=0$ لا يوجد حل

(24) (C)

f' م.ع $x=0$

$f'=0$

$3x^2 - 18x$

$x=0$, $x=6$

$f(-2) = -12/5$

$f(2) = -12$

$f(0) = 0$

القيمة الصغرى المطلقة -12 عند $x=0$

$f(x) = \frac{3x^2}{x-3}$, $[-2, 2]$

$f'(x) = \frac{6x(x-3) - 3x^2(1)}{(x-3)^2}$

$= \frac{6x^2 - 18x - 3x^2}{(x-3)^2}$

$= \frac{3x^2 - 18x}{(x-3)^2}$

انتهت اجابات الدرس الثالث

محمد عمر الخطيب

حل أسئلة الوحدة الرابعة

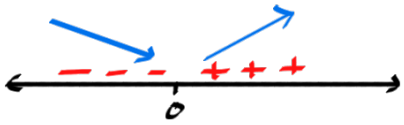
اجابات الدرس الرابع

① ⑤ بما ان $f(c) > f(x)$ لكل قيم x في جوار لهدد c
فان للدالة قيمة عظمى محلية عند $x = c$

---

② ⑤ الاعداد الحرجة هي $x = 0$

اشارة f'



فترة التزايد هي $(0, \infty)$

$f(x) = x^{2/3} - 1$, $(-\infty, \infty)$

$f'(x) = \frac{2}{3} x^{-1/3}$

$= \frac{2}{3 x^{1/3}}$

$f' = 0$ لا يوجد حل

f' غ.م $x = 0$

---

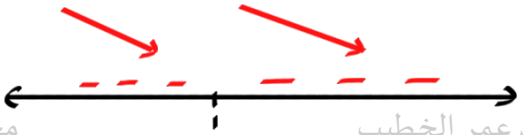
③ ⑬ $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 3x$, $(-\infty, \infty)$

$f'(x) = -3x^2 + 6x - 3$

$f'(x) = 0$

$-3x^2 + 6x - 3 = 0$

$x = 1$

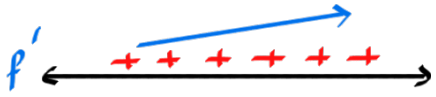


فترة التناقص $(-\infty, \infty)$

* لان الدالة متصلة لا تكتبها بشكل $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$

---

④ ⑤ لا يوجد اعداد حرجة



فترة التزايد هي $(-\infty, \infty)$

$f(x) = \tan^{-1} x$, $(-\infty, \infty)$

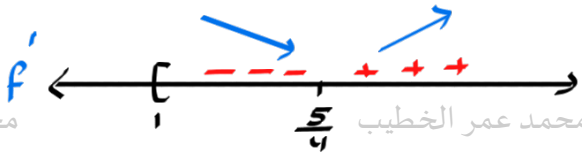
$f'(x) = \frac{1}{1 + x^2}$

$f' = 0$ لا يوجد حل

f' غ.م $1 + x^2 = 0$ لا يوجد حل

---

⑤ ⑬ الاعداد الحرجة هي $x = 1$, $x = \frac{5}{4}$



فترة التناقص هي $(1, \frac{5}{4})$

$f(x) = x - \sqrt{x-1}$, $[1, \infty)$

$f'(x) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$

$= \frac{2\sqrt{x-1} - 1}{2\sqrt{x-1}}$

$f' = 0$

$2\sqrt{x-1} - 1 = 0$

$2\sqrt{x-1} = 1$

$\sqrt{x-1} = \frac{1}{2}$

$x - 1 = \frac{1}{4}$

$x = \frac{5}{4}$

f' غ.م

$x - 1 = 0$

$x = 1$

⑥ د

$f(x) = \sin x - \cos x \quad , [0, \pi]$

$f'(x) = \cos x + \sin x$

$f'(x) = 0$

$\cos x + \sin x = 0$

$\sin x = -\cos x$

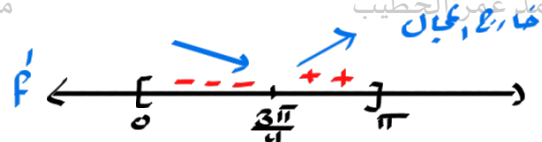
$\tan x = -1$

$x \leftarrow \pi/4$

$Q_2 \rightarrow x = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

$Q_4 \rightarrow x = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$

خارج الحلول



فترة التزايد هي $(\frac{3\pi}{4}, \pi)$

⑦ د

$f(x) = x + \frac{1}{x} \quad , D = R/\{0\}$

$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$

$= \frac{x^2 - 1}{x^2}$

$f' = 0$

$x^2 - 1 = 0$

$x = \pm 1$

f' م.ع

$x = 0$

الاعداد الحرجة هي $x = \pm 1$ فقط

لكنه يجب تعيين إشارة على خط الاعداد حتى نعرف متى حرجة.



فترة التناقص هي $(-1,0), (0,1)$

وليس $(-1,1)$

⑧ ب

$f(x) = \frac{\ln x}{x} \quad , D = (0, \infty)$

$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2}$

$= \frac{1 - \ln x}{x^2}$

$f' = 0$

$1 - \ln x = 0$

$\ln x = 1$

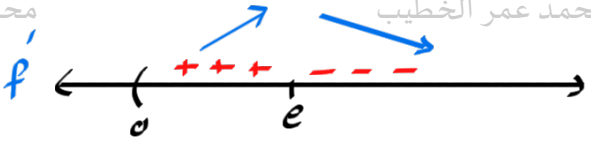
$x = e$

f' م.ع

$x^2 = 0$

$x = 0$

الاعداد الحرجة هي $x = e$



فترة التزايد هي $(0, e)$

⑨ ب

$f(x) = 4x^{3/4} - 8x^{1/4} \quad , D = [0, \infty)$

$f'(x) = 3x^{1/4} - 2x^{-3/4}$

$= 3x^{1/4} - \frac{2}{x^{3/4}}$

$= \frac{3x - 2}{x^{3/4}}$

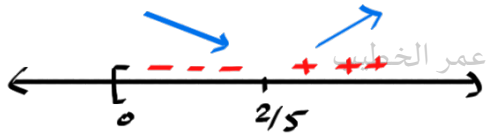
$f' = 0$

$3x - 2 = 0$

$x = 2/3$

f' م.ع

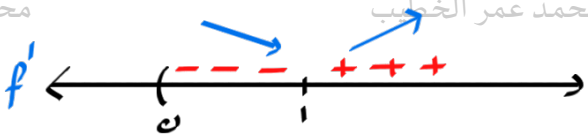
$x = 0$



القيمة الصغرى المحلية عند $x = \frac{2}{3}$.

(15) D

العداد الحرجة هي $x=1$



متزايدة هي $(0,1)$

$f(x)=\frac{1}{2}x^2-\ln x \quad , (0,\infty)$

$f'(x)=x-\frac{1}{x}$

$=\frac{x^2-1}{x^2}$

$f'=0$ $\quad f'=0$

$x^2-1=0$ $\quad x=0$

$x=\pm 1$

(11) B

f' م.ع

$x=0$

$f'=0$

$x^{2/3}-1=0$

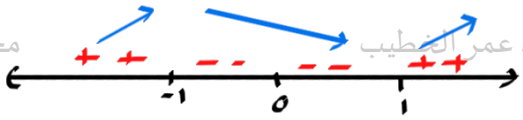
$x^{2/3}=1$

$(x^{2/3})^3=1$

$x^2=1$

$x=\pm 1$

العداد الحرجة هي $x=\pm 1, 0$



متناقصة هي $(-1, 1)$

$f(x)=x-3\sqrt[3]{x} \quad , (-\infty,\infty)$

$=x-3x^{1/3}$

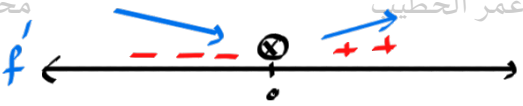
$f'(x)=1-x^{-2/3}$

$=1-\frac{1}{x^{2/3}}$

$=\frac{x^{2/3}-1}{x^{2/3}}$

(12) C

لا يوجد اعداد حرجة



متزايدة هي $(0,\infty)$

$f(x)=\ln|x| \quad , \quad D=R/\{0\}$

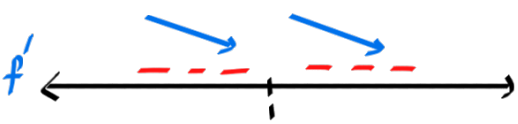
$f'(x)=\frac{1}{x}$

f' م.ع

$x=0$

(13) C

العداد الحرجة هي $x=1$



لا يوجد قيم قصوى محلية عند $x=1$

$f(x)=-x^3+3x^2-3x$

$f'(x)=-3x^2+6x-3$

$f'(x)=0$

$3x^2+6x-3=0$

$x=1$

محمد عمر الخطيب

حل أسئلة الوحدة الرابعة

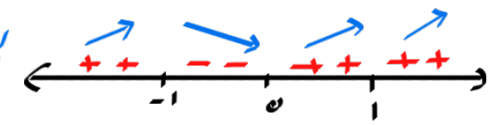
اجابات الدرس الرابع

(14) A

$f'(x) = x(x-3)^2(x+1)$

$f'(x) = 0$

الاعداد الحرجة هي $x = 0, 3, -1$



عظمى محلية عند $x = -1$

(15) A

$f(x) = 2x\sqrt{x+1}$, $D = [-1, \infty)$

$f'(x) = 2\cdot\sqrt{x+1} + 2x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$

$= 2\sqrt{x+1} + \frac{x}{\sqrt{x+1}}$

$= \frac{2(x+1)+x}{\sqrt{x+1}}$

$= \frac{3x+2}{\sqrt{x+1}}$

$f' = 0$

$3x+2 = 0$

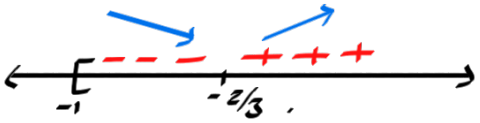
$x = \frac{-2}{3}$

ع.م f'

$x+1 = 0$

$x = -1$

الاعداد الحرجة هي $x = -1, \frac{-2}{3}$

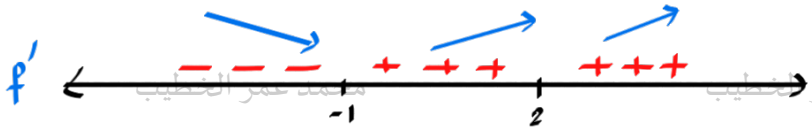


عظمى محلية عند $x = -1$

رغم انها طرف فترة [صب جواب دليل الحل]

(16) D

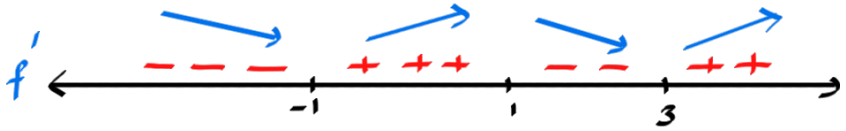
حول البسم الى خط اعداد (تطابق البسم مع الخط)



فترة التناقص هي $(-\infty, -1)$

(17) C

حول البسم الى خط اعداد (تطابق البسم مع الخط)



القيمة العظمى المحلية عند $x = 1$

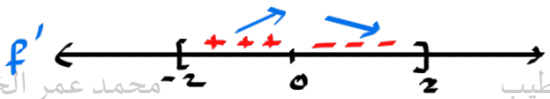
(18) B

من البسم السابق (سؤال 17)

القيمة الصغرى المحلية عند $x = -1, 3$

(19) ©

حول الرسم الى خط اعداد (تطابق الرسم مع الخط)



الدالة متزايدة على الفترة $(-2, 0)$

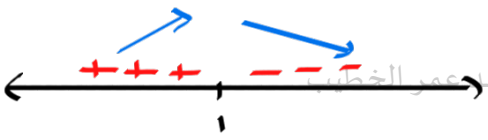
(20) ⓓ

الجملة الخاطئة هي $f(1) < g(2)$ لا يوجد علاقة بين f و g

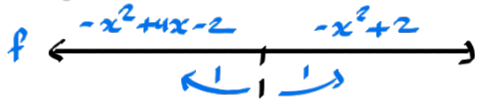
(21) (13)

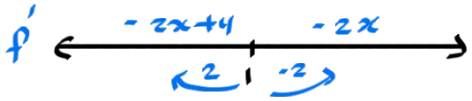
الاعداد الحرجة هي $x = 1$ فقط

اشارة f'



الدالة تبلغ عظمى محلية عند $x = 1$





$f' = 0$

1) $-2x+4=0$

$x = 2$

خارج المجال الشرعي

2) $-2x = 0$

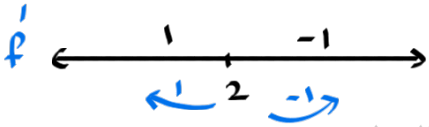
$x = 0$

خارج المجال الشرعي

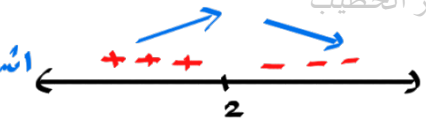
f' م.ع

$x = 1$

(22) ⓓ



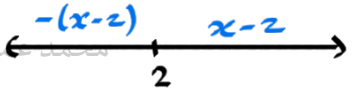
اشارة f'



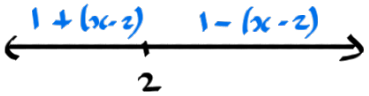
الدالة متناقصة على الفترة $(2, \infty)$

$f(x) = 1 - |x-2|$

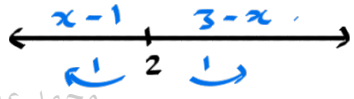
$|x-2|$



$1-|x-2|$



$1-|x-2|$



23 ©

$D = (-\infty, \infty)$

$f(x) = \sin^2 x = (\sin x)^2$

$f'(x) = 2(\sin x)\cdot\cos x = \sin 2x$

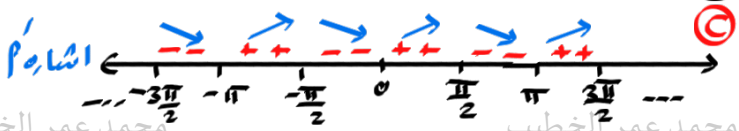
$f'(x) = 0$

$\sin 2x = 0$

$2x$ < 0 (يكمل) ، π (تأكد) ، لعرف π بينهما

$2x = 0 + n\pi \Rightarrow x = n\frac{\pi}{2}\ ,\ n \in Z$

اشارة f'



قيمة عظمى محلية (مطلقة) عند $x = n\frac{\pi}{2}$

24 ©

$f(x) = \frac{x}{x^4+1}$

$f'(x) = \frac{1(x^4+1) - x(4x^3)}{(x^4+1)^2}$

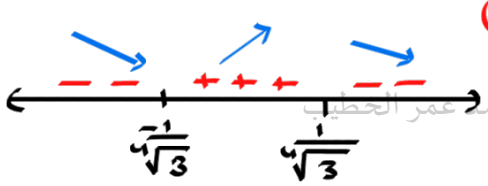
$= \frac{1 - 3x^4}{(x^4+1)^2}$

$f' = 0$

$1 - 3x^4 = 0$

$x^4 = 1/3$

$x = \pm\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$



للدالة قيمة صغرى محلية

عند $x = -\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$

25 Ⓓ

$f(x) = (x-1)^{1/3}\ ,\ (-\infty, \infty)$

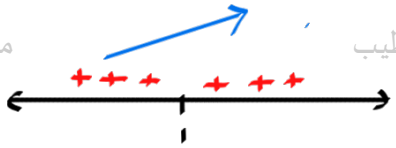
$f'(x) = \frac{1}{3}(x-1)^{-2/3}$

$= \frac{1}{3(x-1)^{2/3}}$

f' م.ع

$x - 1 = 0$

$x = 1$



لا يوجد للدالة قيم قصوى

☆ للدالة مماس رأسي عند $x = 1$

لأن (1) الدالة متصلة عند $x = 1$

(2) المشتقة عند $x = 1$ غير موجودة

(3) المشتقة لا تغير اشارتها عند $x = 1$

انتهت اجابات الدرس الرابع

محمد عمر الخطيب

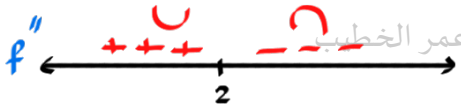
حل أسئلة الوحدة الرابعة

إجابات الدرس الخامس

① B

f'' غ.م

$x = 2$



مقعره للأسفل هي $(2, \infty)$

$f(x) = \frac{-2}{x-2}$, $D = R/\{2\}$

$f'(x) = \frac{2}{(x-2)^2} = 2(x-2)^{-2}$

$f''(x) = -4(x-2)^{-3} = \frac{-4}{(x-2)^3}$

---

② D

f'' غ.م

$x = 0$



ليس للدالة نقطة انقلاب

$f(x) = x + \frac{1}{x}$, $D = R/\{0\}$

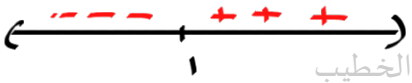
$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = 1 - x^{-2}$

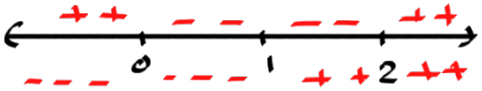
$f''(x) = 2x^{-3} = \frac{2}{x^3}$

---

③ A







الدالة متناقصة ، مقعره للأسفل .

عند النقطة $(0, 1)$

$f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 4$

$f'(x) = 6x^2 - 12x$

$f'(x) = 0$

$x = 0, 2$

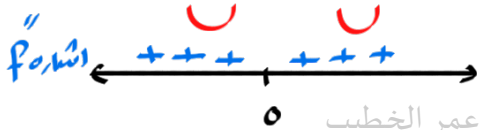
$f''(x) = 12x - 12$

$f'' = 0$

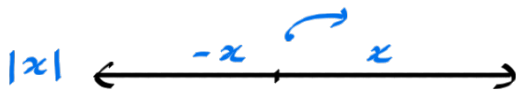
$x = 1$

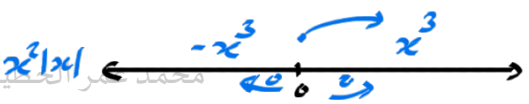
---

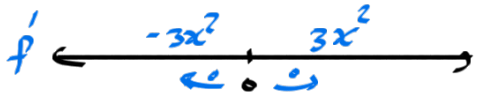
④ B

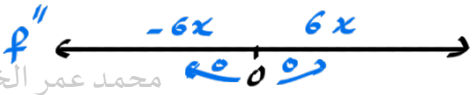


مقره التقعر للأعلى هي $(-\infty, \infty)$







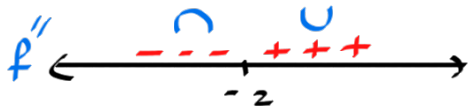


⑤ A

$f'' = 0$

$2e^x = 0$ ، $2+x=0$

لا يوجد حل ، $x=-2$



فترة التقعر للاسفل هي $(-\infty,-2)$

$f(x) = 2xe^x$

$f'(x) = 2\cdot e^x + 2xe^x$

$f''(x) = 2\cdot e^x + 2e^x + 2xe^x$

$= 4e^x + 2xe^x$

$= 2e^x(2+x)$

⑥ B

اشارة f' ، f'' موجبتين عندما تكون f متزايده ومقعره للاعلى

الفتره $(3,\infty)$

⑦ C

$h'' = 0$ عند نقطة الانقلاب $x = d$

⑧ B

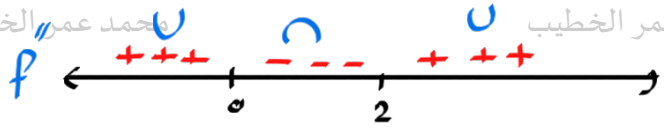
$h' = 0$ عاس افقي

$h'' > 0$ مقعره للاعلى

∴ النقطة هي f

⑨ A

ترسم خط f''

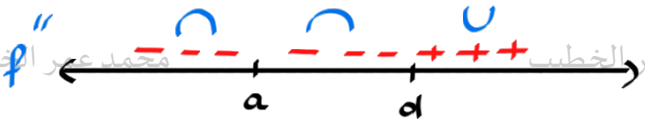


فترة التقعر للاعلى هي $(-\infty,0)\cup(2,\infty)$

⑩ B

نقطة الانعطاف

عند $x = d$

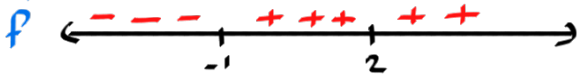


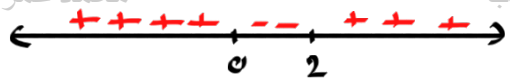
⑪ D

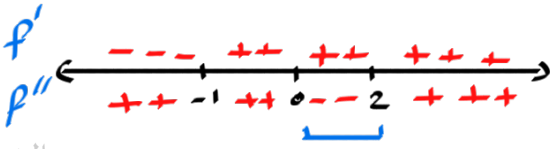
الدالة متزايده

ومقعره للاعلى

على الفترة $(0,2)$







(12) (A)

$f \longrightarrow C$ من الدرجة الثالثة

$f' \longrightarrow A$ من الدرجة الثانية

$f'' \longrightarrow B$ من الدرجة الأولى

(13) (D)

بما ان التمثيل البياني للمشتقة من الدرجة الثانية ∪

فان الدالة الاصل من الدرجة الثالثة ∩

(14) (D)

نلاحظ من الرسم

(1) الدالة f تقطع محور x عند $x=1$ فان $f(1)=0$

(2) الدالة f متزايدة دائماً فان $f'(1)>0$

(3) الدالة f مقعره لاسفل دائماً فان $f''(1)<0$

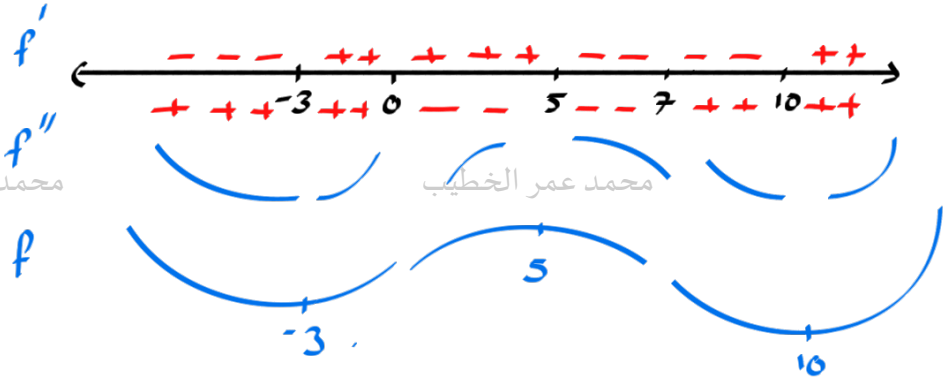
لذلك $f''(1) < f'(1) < f(1)$

(15) (D)

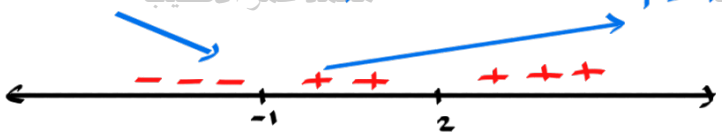
يمكن حل السؤال بأكثر من طريقة.

نلاحظ ان دالة المشتقة من درجة الثالثة ∩

اذن الدالة الاصلية من الدرجة الرابعة



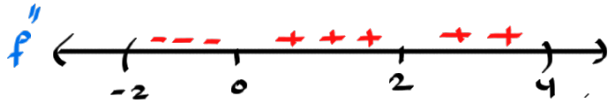
(16) (C)



بما ان الدالة متزايدة على الفترة $(-1,\infty)$ فان $f(0) < f(1)$

(17) B

نرسم خط f'' (تقاطع الرسم مع الخط)



منحنى التقعر للاسفل $(-2,0)$

(18) B

نرى خط ان

1) $f'(1)=0$ و من الرسم $f''(1)>0$ فان للدالة قيمة صغرى محلية عند $x=1$

2) $f'(-1)=0$ و من الرسم $f''(-1)<0$ فان للدالة قيمة عظمى محلية عند $x=-1$

(19) C

$f(x)=x^2+\frac{a}{x}$

$f'(x)=2x-\frac{a}{x^2}=2x-ax^{-2}$

$f''(x)=2+2ax^{-3}$

الشرط $f''(1)=0$

$2+2a(1)^{-3}=0$

$2+2a=0$

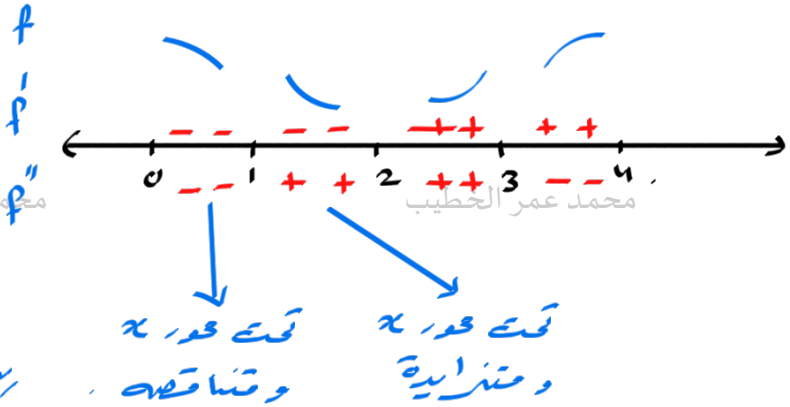
$a=-1$

(20) C

بما ان للدالة قيمة عظمى محلية عند $x=c$ حيث $f'(c)=0$ فان $f''(c)<0$

(21) D

يمكن حل السؤال بتأكد من طريقتين (ارسم الخط المزدوج)



ومن f'

(22) C

للدالة قيمة عظمى مطلقة عند $x=0$ على الفترة $(\infty,-1)$

(23) B

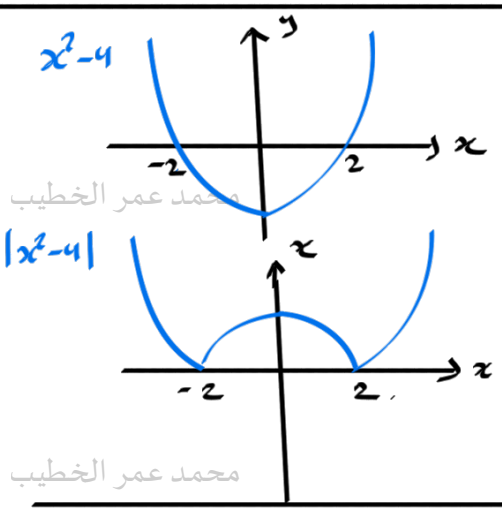
بما ان $f<0$ فان بيان الدالة f تحت محور x

$f'<0$ فان بيان الدالة f متناقصة دائما

$f''<0$ فان بيان الدالة f مقعره للاسفل دائما

(24) (D)

يمكن رسم الدالة $f(x)=|x^2-4|$ بسهولة.



من الرسم الدالة $f(x)$ متعرفة للاسفل على الفترة $(-2,2)$

☆ يمكن حل السؤال جبرياً

(25) (A)

$f(x)=x^3+ax^2+bx-2$

$f'(x)=3x^2+2ax+b$.

$f''(x)=6x+2a$.

$f''(-1)=0$

$6(-1)+2a=0 \Rightarrow a=3$

$f(1)=5$

$-1+a-b-2=5$

$-1+3-b-2=5$

$b=-5$

$a+b=-2$.

(26) (D)

$f(x)=x^4+bx^3+6x^2+12x+1$

$f'(x)=4x^3+3bx^2+12x+12$

$f''(x)=12x^2+6bx+12$.

بما ان للدالة تقطيتن انقلاب

فستكون للمشتقة الثانية (جذرين)

اي ان المميز

$\Delta=b^2-4ac$.

$\Delta=(6b)^2-4(12)(12)>0$

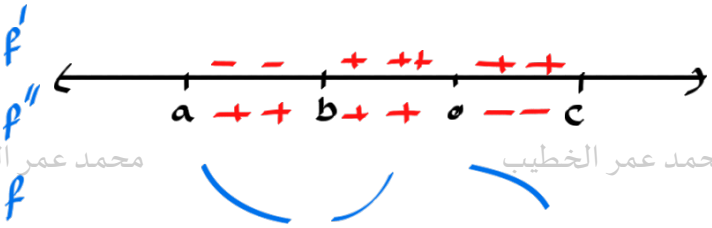
$36b^2-576>0$

$36b^2>576>0$

$b^2>16$.

انتهت اجابات الدرس الخامس

① Ⓐ ارسم الخط المتدرج



② Ⓒ من الرسم نلاحظ ان الدالة $f(x)$ لها خط تقارب رأسي معادلته $x=2$

وخط تقارب مائل معادلته $y=2$

لذلك فان الدالة يجب ان تكون فيها درجة البسط تساوي درجة المقام.

واصغار المقام فقط $x=2$

③ Ⓒ يكون للدالة خط تقارب مائل اذا كانت درجة البسط في الدالة اكبر من درجة المقام بواحد

④ Ⓒ (1) الدالة $f(x)$ دائماً موجبة لذلك الرسم يجب ان يكون فوق محور x

(2) للدالة خط تقارب افقي معادلته $y=0$ لان

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{e^x}=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{e^x}=\lim_{x\to-\infty}x^2e^{-x}=(\infty)(\infty)=\infty$$

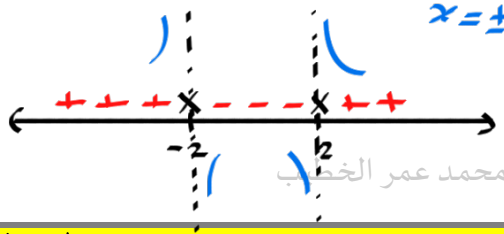
⑤ Ⓑ $f(x)=\frac{2x^2}{x^2-4}$

1) $f(0)=0$

2) خط تقارب افقي $y=2$

3) خطوط تقارب رأسية $x=\pm 2$

اشارة f

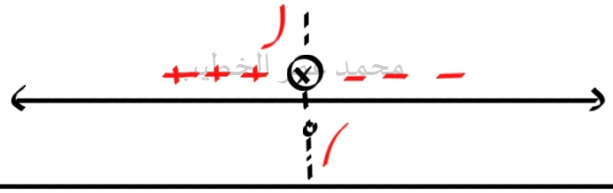


⑥ ©
1) $f(0) = 0$
2) للدالة خطوط تقارب افقية هي $y = \pm 2$ لان

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{|x|} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{x} = 2$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{|x|} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{-x} = -2.$$

⑦ Ⓐ
1) $f(0) = 4$
2) للدالة خط تقارب افقي $y = 0$.
3) للدالة خط تقارب رأسي معادلته $x = 0$



⑧ ©
من الرسم للدالة
1) خط تقارب رأسي $x = 0$
2) خط تقارب افقي $y = x$
3) $f(2) = 4$ ، $f(-2) = -4$

∴ الدالة $f(x) = x + \frac{4}{x}$

⑨ Ⓓ
من البيانات
1) الدالة $f(x)$ متصلة
2) لها نهاية عند $x = 0$
3) الدالة مقعرة للاسفل.

⑩ ©
السؤال صعب (من خارج الكتاب)

I ⟵ f
III ⟵ f'
II ⟵ f''

* ابدأ من II
هي المماس افقي عند نقطة
ميل الدوال الثانية متقطع عند x.
عند هذه النقطة الدالة تكون f''

(11) D

نلاحظ ان f'' من الدرجة الثانية فتكون الدالة الاصلية f من الدرجة الرابعة

ارسم خط f'' من اليمين



f ∪ ∩ ∪

---

(12) B

نلاحظ ان الخط III لا يقطع له مماس افقي عند نقطه وليس للدوال الثانية يقطع مع محور x عند هذه النقطة فيكون f''

الخط I له مماس افقي عند نقطه تقابل تقطع مع محور x للخط III

فيكون I للدالة f' .

$f'' \longrightarrow$ III
$f' \longrightarrow$ I
$f \longrightarrow$ II

---

(13) A

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$

$f'(x) = 3x^2 - 6x + 3$

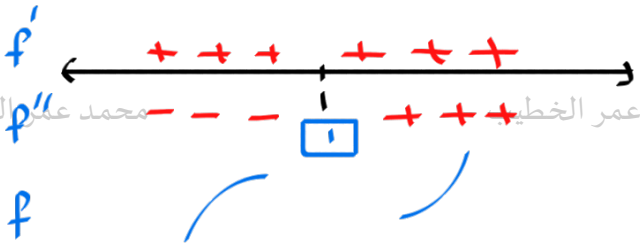
$f''(x) = 0$

$x = 1$

$f''(x) = 6x - 6$

$f''(x) = 0$

$x = 1$



---

(14) A

$f(x) = e^{-2/x}$

ا) الدالة $f(x)$ دائماً موجبة

ج) للدالة $f(x)$ خط تقارب افقي $y = 1$ لان

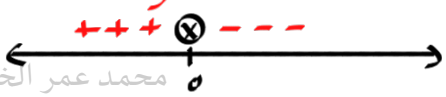
$\lim_{x \to \pm\infty} e^{-2/x} = e^0 = 1$

ج) للدالة خط تقارب رأسي $x = 0$

$\lim_{x \to 0^-} e^{-2/x} = e^{\infty} = \infty$

$\lim_{x \to 0^+} e^{-2/x} = e^{-\infty} = 0$

اشارة f



(15) (A)

1) $f(0)=0$

2) نلاحظ ان $f'(x)>0$ دائماً" يعني الدالة f دائما متزايدة.

$f(x) = x + \sin x$

$f'(x) = 1 + \cos x$.

$f'(x) > 0$

(16) (B)

$f(x) = x \ln x$, $D = (0, \infty)$

$f'(x) = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}$

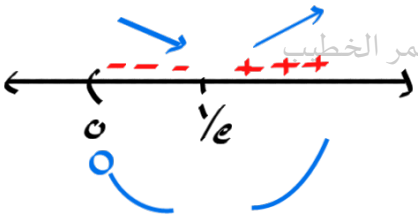
$= \ln x + 1$.

$f'(x) = 0$

$\ln x + 1 = 0$

$\ln x = -1$

$x = e^{-1} = 1/e$.



(17) (A)

$f(x) = x^4 - 3x^2 + 2$.

$f'(x) = 4x^3 - 6x$

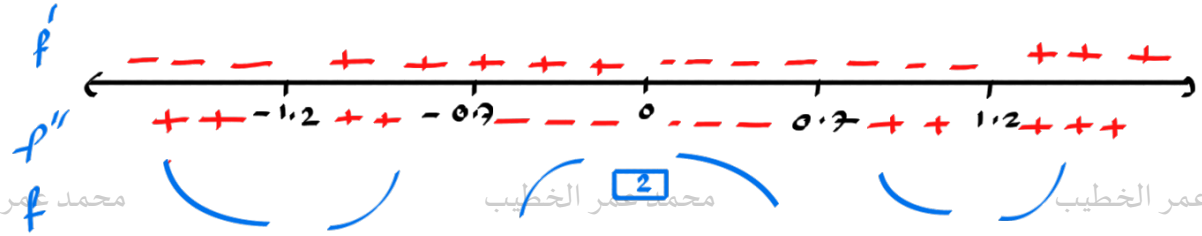
$f' = 0$

$x = 0$, $x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}} = \pm 1.2$

$f''(x) = 12x^2 - 6$.

$f'' = 0$

$x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} = \pm 0.7$.



(18) (C)

$f(x) = x^5 - 2x^3 + 1$

$f'(x) = 5x^4 - 6x^2$.

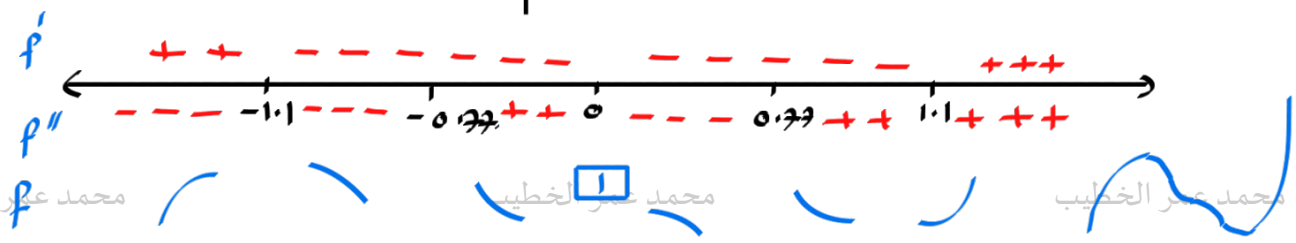
$f' = 0$

$x = 0$, $x = \pm\sqrt{\frac{6}{5}} = \pm 1.1$

$f''(x) = 20x^3 - 12x$

$f''(x) = 0$

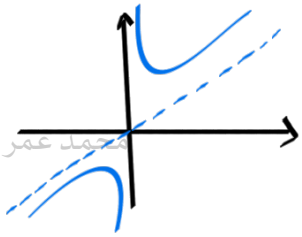
$x = 0$, $x = \pm\sqrt{\frac{3}{5}} = \pm 0.77$



محمد عمر الخطيب

(19) (C)

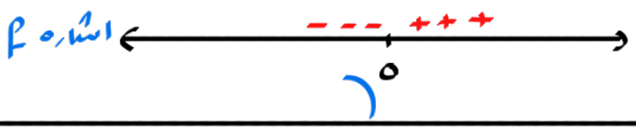
الدالة $f(x) = x + \frac{4}{x}$



1) لها خط تقارب مائل $y = x$

2) لها خط تقارب رأسي $x = 0$

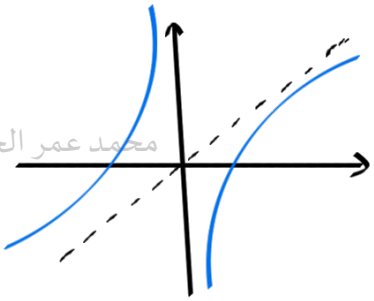
إشارة f:



---

(20) (D)

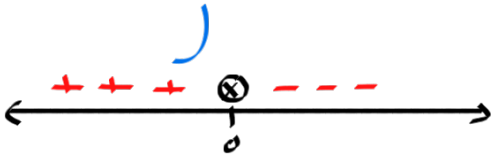
$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x} = \frac{x^2}{x} - \frac{4}{x} = x - \frac{4}{x}$



1) مقاطع x هي $x = \pm 1$

2) خط تقارب مائل معادلته $y = x$

3) خط تقارب رأسي معادلته $x = 0$



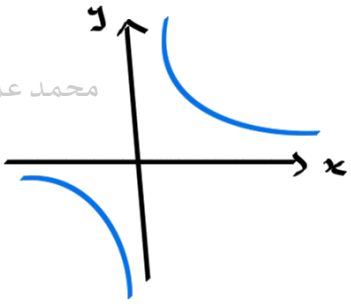
---

(21) (A)

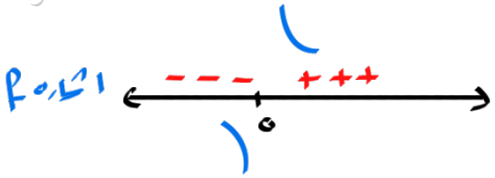
$f(x) = \frac{x^2 + 4}{x^3}$.

1) خط تقارب افقي $y = 0$

2) خط تقارب رأسي $x = 0$



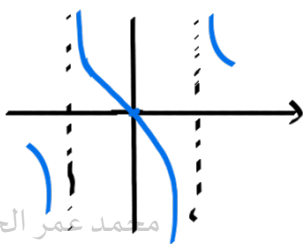
إشارة f:



---

(22) (A)

$f(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}$



1) مقطع محور x هو 0

2) خط تقارب افقي $y = 0$

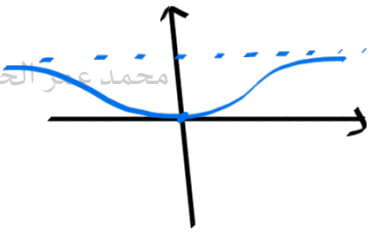
3) خطوط تقارب رأسية $x = \pm 1$

إشارة f:



23
A
1) مقطع محور x هو 0 .
2) خط تقارب افقي $y=2$
3) الدالة موجبة (الرسم فوق محور x)

$$f(x) = \frac{2x^2}{x^2+1}$$



24
A
1) مقطع محور y هو -1
2) مقاطع x هي $x = \frac{\pi}{4} + n\pi$.

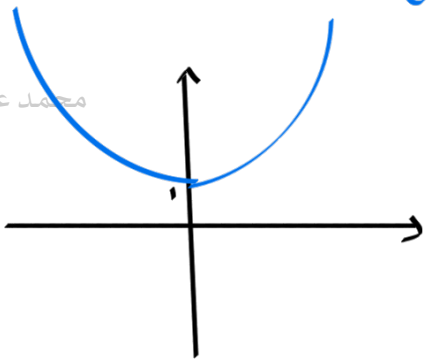
$$f(x) = \sin x - \cos x .$$
$$f(x) = 0$$
$$\sin x = \cos x$$
$$\tan x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + n\pi$$

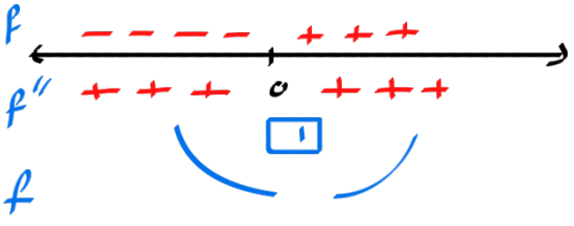
25
B

$$f(x) = \sqrt{x^2+1}$$
$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}$$
$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$
$$f'(x) = 0$$
$$x = 0$$

$$f'(x) = x(x^2+1)^{-1/2} .$$
$$f''(x) = 1 \cdot (x^2+1)^{-1/2} + x \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)(x^2+1)^{-3/2} \cdot 2x .$$
$$= \frac{1}{(x^2+1)^{1/2}} - \frac{x^2}{(x^2+1)^{3/2}} .$$
$$= \frac{x^2+1-x^2}{(x+1)^{3/2}}$$
$$= \frac{1}{(x^2+1)^{3/2}} .$$

ع.م f'' لا يوجد حل .
$f'' = 0$ لا يوجد حل





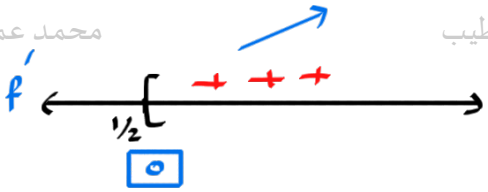
محمد عمر الخطيب

(26) ©

$f(x) = \sqrt{2x-1}$, $D = [\frac{1}{2}, \infty)$

$f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x-1}}$

$= \frac{1}{\sqrt{2x-1}}$



(27) (B)

$f(x) = \sqrt{x^3 - 3x^2 + 2x}$

$= (x^3 - 3x^2 + 2x)^{1/3}$

$f'(x) = \frac{1}{3}(x^3 - 3x^2 + 2x)^{-2/3} \cdot (3x^2 - 6x + 2)$

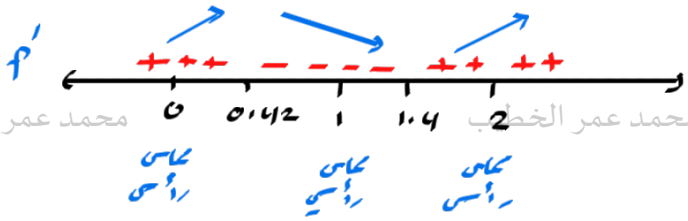
$= \frac{3x^2 - 6x + 2}{3(x^3 - 3x^2 + 2x)^{2/3}}$

$f' = 0$

$x = 1.57$, $x = 0.42$

f' غ.م

$x = 0, 1, 2$



(28) (B)

$f(x) = x^{5/3} - 5x^{2/3}$

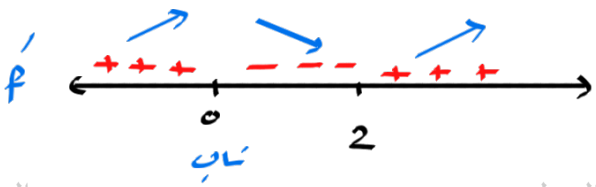
$f'(x) = \frac{5}{3}x^{2/3} - \frac{10}{3}x^{-1/3}$

$= \frac{5}{3}x^{-1/3}(x - 2)$

$= \frac{5(x-2)}{3x^{1/3}}$

$f' = 0$ f' غ.م

$x = 2$ $x = 0$



(29) (A)

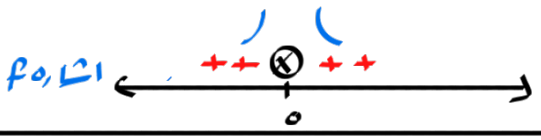
$f(x) = e^{1/x^2}$

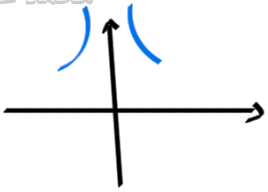
1) خط تقارب افقي $y = 0$

لان $\lim_{x \to \pm\infty} e^{1/x^2} = 0$

2) خط تقارب رأسي $x = 0$

اشارة f





(30) (A)

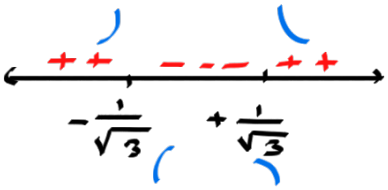
$f(x) = \frac{x^2+1}{3x^2-1}$

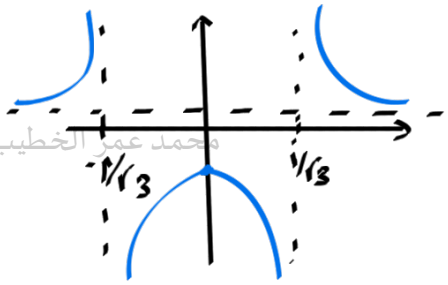
1) $f(0) = -1$

2) الافقي $y = 1/3$

3) الرأسي $x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$

اشارة f





(31) (B)

$f(x) = e^{1/x}$

1) الرأسي $x = 0$

2) الافقي $y = 1$

$\lim_{x \to \pm\infty} e^{1/x} = e^0 = 1$

(32) (B)

1) يجب ان تكون درجة البسط تساوي درجة المقام

2) اصفار المقام $x = 1$ ، $x = 2$

3) حاصل تسوية العلاقة 3 .

(33) (A)

1) درجة البسط اقل من درجة المقام

2) اصفار المقام $x = \pm 1$

(34) (C)

1) ليست دالة نسبية .

2) اصفار المقام $x = \pm 1$

انتهت اجابات الدرس السادس

محمد عمر الخطيب

حل أسئلة الوحدة الرابعة

اجابات الدرس السابع

①

A



$2x+y=$

$y = 600 - 2x$

$0 \le x \le 300$

$A = xy$

$= x(600-2x)$

$= 600x - 2x^2$

$A' = 600 - 4x$

$A' = 0$

$600 - 4x = 0$

$x = 150$

$A(0) = 0$

$A(300) = 0$

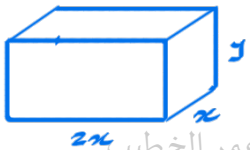
$A(150) = 45000$ عظمى مطلقة

150, 300 الابعاد هي

45000 اكبر مساحة هي

②

A



$2x + x + y = 45$

$3x + y = 45$

$y = 45 - 3x$

$0 \le x \le 15$

$v = 2x \cdot x \cdot y$

$= 2x^2(45 - 3x)$

$= 90x^2 - 6x^3$

$v' = 180x - 18x^2$

$v' = 0$

$x = 0 \quad , \quad x = 10$

$v(0) = 0$

$v(15) = 0$

$v(10) = 3000$

3000 اكبر مساحة هي

③

A

$v = (24-2x)(24-2x) \cdot x \quad , \quad 0 \le x \le 12$

$= x(24-2x)^2$

$= x(576 - 96x + 4x^2)$

$= 576x - 96x^2 + 4x^3$

$v' = 576 - 192x + 12x^2$

$v' = 0 \Rightarrow x = 4, \quad x = 12$

$v(0) = 0$

$v(12) = 0$

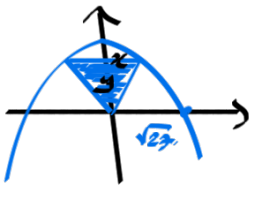
$v(4) = 1024$

الحجم هو 1024

عند $x = 4$

④

C



$0 \le x \le \sqrt{27}$

$A = \frac{1}{2}(2x) \cdot y$

$= x(27 - x^2)$

$= 27x - x^3$

$A' = 27 - 3x^2$

$A' = 0 \Rightarrow x = -3, \quad x = 3$

مرفوض

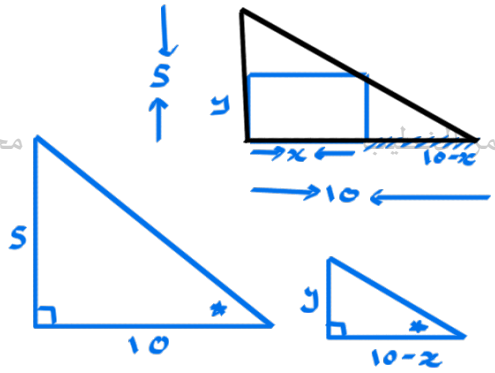
$v(0) = 0$

$v(\sqrt{27}) = 0$

$v(3) = 54$

54 اكبر مساحة هي

⑤ د



$A = xy$

$= x(5 - \frac{1}{2}x)$

$= 5x - \frac{1}{2}x^2$

$A' = 5 - x$

$A' = 0$

$5 - x = 0$

$x = 5$

$A(0) = 0$

$A(10) = 0$

$A(5) = 12.5$

أكبر مساحة هي 12.5

بالتشابه المثلثات

$\frac{y}{10-x} = \frac{5}{10}$

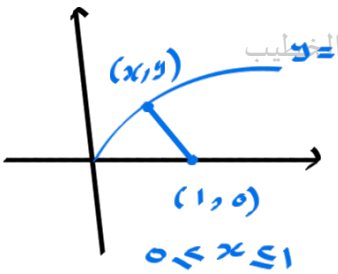
$\frac{y}{10-x} = \frac{1}{2}$

$y = \frac{1}{2}(10-x) = 5 - \frac{1}{2}x$

$0 \le x \le 10$

---

⑥ ج



$y = \sqrt{x}$

$0 \le x \le 1$

$s = \sqrt{(x-1)^2 + (y-0)^2}$

$= \sqrt{x^2 - 2x + 1 + (\sqrt{x})^2}$

$= \sqrt{x^2 - 2x + 1 + x}$

$= \sqrt{x^2 - x + 1}$

$s' = \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}}$

$s' = 0$

$2x - 1 = 0$

$x = \frac{1}{2}$

s' م.ع

$x^2 - x + 1 = 0$

لا يوجد حل

$s(0) = 1$

$s(1) = 1$

$s(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.86$

أقصر بعد هو $\frac{\sqrt{3}}{2}$

⑦ ⓒ

y | $\frac{A}{x}$

$xy = A$

$y = \frac{A}{x}$

$x > 0$

$P = 2x + 2y$

$= 2x + 2 \cdot \frac{A}{x}$

$= 2x + \frac{2A}{x}$

$P' = 2 - \frac{2A}{x^2}$

$= \frac{2x^2 - 2A}{x^2}$

$P' = 0$

$2x^2 - 2A = 0$

$x^2 = A$

$x = \sqrt{A}$, $x = -\sqrt{A}$

P' غ.م

$x = 0$

اختبار المشتقة الثانية

$P' = 2 - 2Ax^{-2}$

$P'' = 4Ax^{-3} = \frac{4A}{x^3}$

$P''(\sqrt{A}) = \frac{4A}{(\sqrt{A})^3} > 0$

الدالة لها قيمة حدية صغرى محلية وحيدة عند $x = \sqrt{A}$ هي مطلقة

$y = \frac{A}{\sqrt{A}} = \sqrt{A}$

بما أن $x = y$ فإن الشكل مربع طول ضلعه $\sqrt{A}$

⑧ Ⓓ

$0 < r < 1$

$S(r) = 2r^2(1-r) = 2r^2 - 2r^3$

$S'(r) = 4r - 6r^2$

$= 2r(2 - 3r)$

$S'(r) = 0$

$r = 0$, $r = \frac{2}{3}$

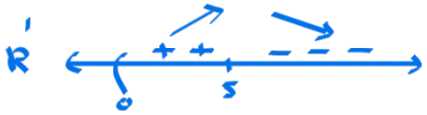
$S(0) = 0$

$S(1) = 0$

$S(\frac{2}{3}) = \frac{8}{27}$

أكبر مساحة تكون عندما يكون نصف القطر $r = \frac{2}{3}$

⑨ Ⓐ



قيمة عظمى محلية وحيدة عند $x = 5$ هي مطلقة

أكبر ربح عند $x = 5$

ربعين بيع 5000 سلعة

أكبر ربح

$R(5) = \frac{35(5) - 5^2}{5^2 + 35} = 2.5$

ربعين 2.5 مليون درهم

$R'(x) = \frac{(35 - 2x)(x^2 + 35) - (35x - x^2)(2x)}{(x^2 + 35)^2}$

$= \frac{35x^2 + 35^2 - 2x^3 - 70x - 70x^2 + 2x^3}{(x^2 + 35)^2}$

$= \frac{-35x^2 - 70x - 35^2}{(x^2 + 35)^2}$

$R'(x) = 0$

$-35x^2 - 70x - 35^2 = 0$

$x = -7$, $x = 5$

مرفوض

(15) (د)

$p' = -\frac{1}{s^2} + 3cs^2$

$p'' = \frac{2}{s^3} + 6cs$

$p''\left(\sqrt[4]{\frac{1}{3c}}\right) > 0$

نقطة صغرى محلية وحيدة عند $x = \sqrt[4]{\frac{1}{3c}}$

من نظرية.

$p = \frac{1}{s} + cs^3$

$p' = -\frac{1}{s^2} + 3cs^2$

$p' = 0$

$-\frac{1}{s^2} + 3cs^2 = 0$

$-\frac{1}{s^2} = -3cs^2$

$1 = 3cs^4$

$s^4 = \frac{1}{3c}$

$s = -\sqrt[4]{\frac{1}{3c}}, \quad s = +\sqrt[4]{\frac{1}{3c}}$

p' م.ع

$s = 0$

خارج المجال

(11) (د)

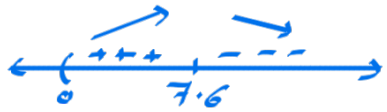
$21 = e^{0.4t}$

$\ln 21 = \ln e^{0.4t}$

$\ln 21 = 0.4t$

$t = \frac{\ln 21}{0.4}$

$t = 7.6$ يوم



نقطة عظمى محلية وحيدة عند $t = 7.6$ من نظرية.

$f'(t) = e^{-0.02t}(-0.02) - e^{-0.42t}(-0.42)$

$= -0.02e^{-0.02t} + 0.42e^{-0.42t}$

$f'(t) = 0$

$-0.02e^{-0.02t} + 0.42e^{-0.42t} = 0$

$0.42e^{-0.42t} = 0.02e^{-0.02t}$

$\frac{0.42}{0.02} = \frac{e^{-0.02t}}{e^{-0.42t}}$

(12) (أ)

$f(s) = se^{-s/2} \quad s > 0$

$f'(s) = 1 \cdot e^{-s/2} + s \cdot e^{-s/2}\left(-\frac{1}{2}\right)$

$= e^{-s/2}\left[1 - \frac{s}{2}\right]$

$= \frac{1 - \frac{s}{2}}{e^{s/2}}$

$f'(s)$ م.ع

$e^{s/2} = 0$

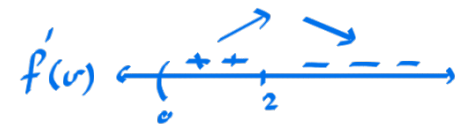
لا يوجد حل.

$f'(s) = 0$

$1 - \frac{s}{2} = 0$

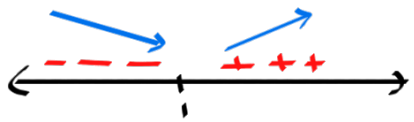
$1 = \frac{s}{2}$

$s = 2$



نقطة عظمى محلية وحيدة عند $s = 2$ من نظرية.

(13) ©



دالة التسارع تتغير من سالبة إلى موجبة عند $t=1$ مرة واحدة.

أقل تسارع $a(1)=9$.

$v(t)=t^3-3t^2+12t+4$

$a(t)=v'(t)=3t^2-6t+12$

$a'(t)=6t-6$

$a'(t)=0 \Rightarrow t=1$

(14) (B)

نجد أولاً دالة الكفاءة وهي مشتقة دالة عدد البكتيريا.

$E(t)=Q'(t)=-9t^2+36t+60$

نجد القيمة العظمى لدالة الكفاءة $E(t)$

$E'(t)=-18t+36$

$E'(t)=0$

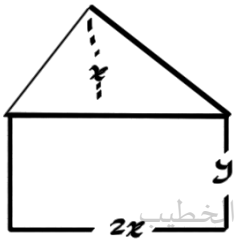
$t=2$

$E''(t)=-18$

$E''(2)=-18<0$

قيمة عظمى واحدة عند $t=2$ مرة واحدة.

(15) ©



$4x+2y=12$

$2x+y=6$

$y=6-2x$

$0\le x\le 3$.

$A=$ مساحة المستطيل $+$ مساحة المثلث

$=2xy+\frac{1}{2}(2x)x=2xy+x^2$

$=2x(6-2x)+x^2$

$=12x-4x^2+x^2$

$=12x-3x^2$

$A'=12-6x$

$A'=0$

$x=2$

$A(0)=0$

$A(3)=9$

$A(2)=12$

أكبر مساحة هي 12.

(16) (A)

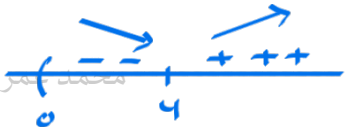


$\pi r^2 h = 128\pi$

$h = \frac{128\pi}{\pi r^2}$

$h = \frac{128}{r^2}$

$r > 0$



حيث حوفي محليه وحيده

عند $r = 4$ تكون مطلقة.

ابعاد العلبة هي

$r = 4$

$h = 8$

ملاحظة: التكلفة اقل ما يمكن كما مرّ

المساحة السطحية اقل ما يمكن

$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h$

$= 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{128}{r^2}$

$= 2\pi r^2 + \frac{256\pi}{r}$

$S' = 4\pi r - \frac{256\pi}{r^2}$

$= \frac{4\pi r^3 - 256\pi}{r^2}$

$S' = 0$

$4\pi r^3 - 256\pi = 0$

$4\pi(r^3 - 64) = 0$

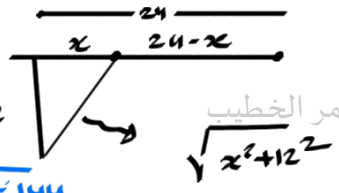
$r = 0 \quad , r = 4$

S' غ.م

$r = 0$

خارج المجال

(17) (A)



$0 \le x \le 24$

عين تقطع على الشاطئ

التكلفة الكلية = تكلفة البر + تكلفة البحر

$C = C_S + C_L$

$= 5\sqrt{x^2+12^2} + 3(24-x)$

كلفة البحر / طول البحر / كلفة البر / طول البر

$C' = 5 \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2+144}} + 3(-1)$

$= \frac{5x}{\sqrt{x^2+144}} - 3$

$C' = 0$

$\frac{5x}{\sqrt{x^2+144}} - 3 = 0$

$\frac{5x}{\sqrt{x^2+144}} = 3$

$5x = 3\sqrt{x^2+144}$

$25x^2 = 9(x^2+144)$

$25x^2 = 9x^2 + 9(144)$

$16x^2 = 9(144)$

$x^2 = 81$

$x = -9 \quad , x = 9$

مرفوض

$C(0) = 132$

$C(24) = 134.16$

$C(9) = 120$

اقل تكلفة هي 120 مليون درهم

انتهت اجابات الدرس السابع

محمد عمر الخطيب

①

B

$\frac{dv}{dt} = .$

$\left.\frac{dh}{dt}\right|_{h=} = ??$

$v = \frac{4}{3}(36h^2 - h^3)$

$\frac{dv}{dt} = \frac{4}{3}\left(72h \cdot \frac{dh}{dt} - 3h^2 \cdot \frac{dh}{dt}\right)$

$= \frac{4}{3}(72h - 3h^2)\frac{dh}{dt}$

$126 = \frac{4}{3}(72 \cdot 4 - 3 \cdot (3)^2)\frac{dh}{dt}$

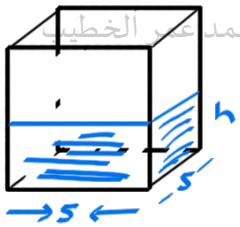
$126 = 252 \frac{dh}{dt}$

$\frac{dh}{dt} = \frac{126}{252} = \frac{1}{2}$ m/s

---

②

A



$\frac{dv}{dt} = -2$

$\frac{dh}{dt} = ??$

ملاحظة: يجب التمييز بين حجم الماء في الخزان (وهو متغير) وحجم الخزان (وهو ثابت)

☆ المتغير هو ارتفاع الماء فقط وليس عرض وطول قاعدة الماء في الخزان

حجم الماء

$v = 5 \cdot 5 \cdot h$

$v = 25h$

$\frac{dv}{dt} = 25 \cdot \frac{dh}{dt}$

$-2 = 25 \frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{-2}{25} = -0.08$ m/h

---

③

C



$\frac{dv}{dt} = -1$

$\left.\frac{dr}{dt}\right|_{r=0.2} = ??$

$v = \frac{4}{3}\pi r^3$

$\frac{dv}{dt} = 4\pi r^2 \cdot \frac{dr}{dt}$

$-1 = 4\pi (0.2)^2 \cdot \frac{dr}{dt}$

$\frac{dr}{dt} = \frac{-1}{4\pi(0.2)^2} \approx -2$ cm/min

اجابات الدرس الثامن

④ ©



$\frac{dr}{dt} = -2$

$\frac{dS}{dt}\Big|_{r=3} = ??$

$S = 4\pi r^2$

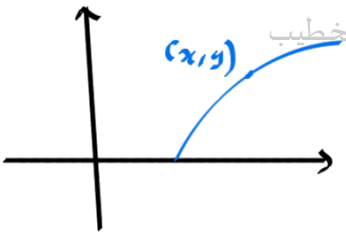
$\frac{dS}{dt} = 8\pi r \cdot \frac{dr}{dt}$

$\frac{dS}{dt}\Big|_{r=3} = 8\pi(3)\cdot(-2)$

$= -48\pi \ cm^2/h$

---

⑤ ©



$\frac{dx}{dt} = +3$

$\frac{dy}{dt}\Big|_{x=2} = ??$

$y = \sqrt{x^2-3}$

$\frac{dy}{dt} = \frac{2x\cdot\frac{dx}{dt}}{2\sqrt{x^2-3}}$

$\frac{dy}{dt}\Big|_{x=2} = \frac{(2)(3)}{\sqrt{2^2-3}}$

$= 6 \ u/s$

---

⑥ Ⓐ



$\frac{dx}{dt} = +0.1$

$\frac{dA}{dt}\Big|_{x=\sqrt{3}} = ??$

$A = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$

$\frac{dA}{dt} = \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 2x\cdot\frac{dx}{dt}$

$\frac{dA}{dt}\Big|_{x=\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 2\sqrt{3}\cdot(0.1)$

$= 0.15 \ cm^2/s$

---

⑦ Ⓓ



$\frac{dx}{dt} = 6$

$\frac{d\theta}{dt}\Big|_{x=9} = ??$

$\cos\theta = \frac{x}{15}$

$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{x}{15}\right)$

$\frac{d\theta}{dt} = \frac{-1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{15}\right)^2}}\cdot\frac{1}{15}\cdot\frac{dx}{dt}$

$\frac{d\theta}{dt}\Big|_{x=9} = \frac{-1}{\sqrt{1-\left(\frac{9}{15}\right)^2}}\cdot\frac{1}{15}(6) = -\frac{1}{2} \ rad/s$

محمد عمر الخطيب

⑧ د



$\frac{dv}{dt} = 20\ m^3/h$

$\left.\frac{dr}{dt}\right|_{r=100} = ??$

حجم بقعة الزيت (حجم الاسطوانة)

$v = \pi r^2 \cdot 0.02$

$= 0.02\pi r^2$

$\frac{dv}{dt} = 0.02\pi \cdot 2r \frac{dr}{dt}$

$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{r=100} = 0.02\pi\, 2(100) \frac{dr}{dt}$

$20 = 4\pi \frac{dr}{dt}$

$\frac{dr}{dt} = \frac{5}{\pi}\ m^3/h$

⑨ ج

$\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt}$

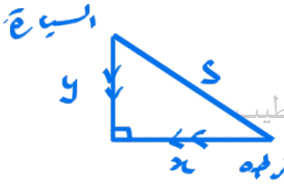
$y = x^2$

$\frac{dy}{dx} = 2x \cdot \frac{dx}{dt}$

$1 = 2x$

$x = 1/2 \Rightarrow y = \frac{1}{4} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$

⑩ د



$\frac{dy}{dt} = -30$

$\frac{dx}{dt} = -40$

$\left.\frac{ds}{dt}\right|_{x=\frac{1}{4},\ y=\frac{1}{3}} = ??$

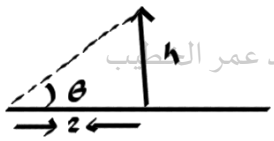
$s = \sqrt{x^2+y^2}$

$\frac{ds}{dt} = \frac{2x \cdot \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt}}{2\sqrt{x^2+y^2}}$

$\left.\frac{ds}{dt}\right|_{x=1/4,\ y=1/3} = \frac{2\left(\frac{1}{4}\right)(-40) + 2\left(\frac{1}{3}\right)(-30)}{2\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2}} = -48\ km/h$

هذه القراءة خاطئة لان السرعة متحركة.

(11) (B)



$\frac{dh}{dt} = 0.2$

$\left.\frac{d\theta}{dt}\right|_{h=1} = ??$

$\tan\theta = \frac{h}{2}$

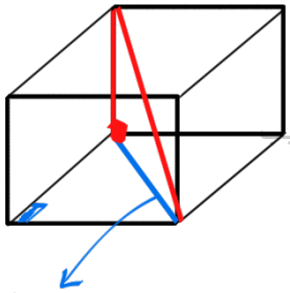
$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{h}{2}\right)$

$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{1+\left(\frac{h}{2}\right)^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{dh}{dt}$

$\left.\frac{d\theta}{dt}\right|_{t=1} = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2} \cdot \frac{1}{2}(0.2)$

$= 0.08 \text{ rad/s}$

(12) (B)

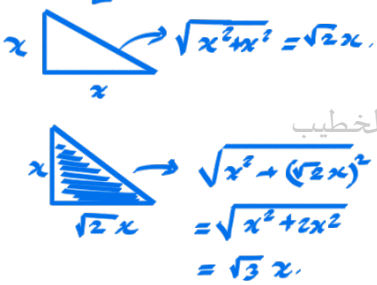


$L = \sqrt{3}\,x$

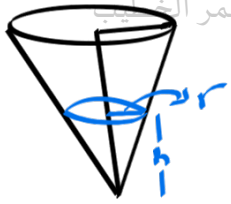
$\frac{dL}{dt} = \sqrt{3} \cdot \frac{dx}{dt}$

$= \sqrt{3}(-1)$

$= -\sqrt{3} \text{ cm/h}.$



(13) (B)



$\frac{dr}{dt} = \frac{dh}{dt} = -2$

$\left.\frac{dv}{dt}\right| = ??$
$r=3,$
$r=4$

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

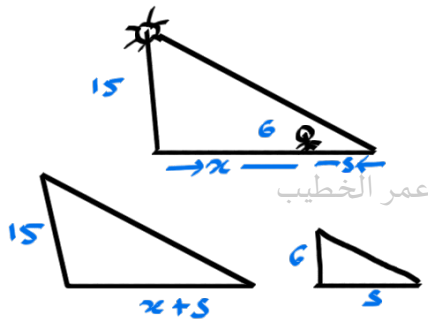
$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{3}\pi\left[2r \cdot \frac{dr}{dt}h + r^2 \cdot \frac{dh}{dt}\right]$

$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{\substack{r=3\\h=4}} = \frac{1}{3}\pi\left[2(3)\cdot(-2)(4) + (3)^2\cdot(-2)\right]$

$= -22\pi \text{ m}^3/\text{h}.$

محمد عمر الخطيب

(14) B



$\frac{dx}{dt} = 4.5$

$\frac{ds}{dt} = ??$

من المثلثين

$\frac{s}{6} = \frac{x+s}{15}$

$15s = 6x + 6s$

$9s = 6x$

$s = \frac{6}{9}x$

$s = \frac{2}{3}x$.

$\frac{ds}{dt} = \frac{2}{3} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{2}{3}(4.5) = 3$ ft/s

(15) B



$\frac{d\theta}{dt} = 0.6$

$\frac{dh}{dt} = ??$

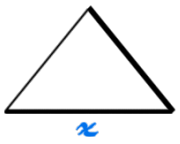
$\tan\theta = \frac{h}{800}$

$\sec^2\theta \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{800} \cdot \frac{dh}{dt}$.

$\sec^2 45^\circ \cdot (0.6) = \frac{1}{800} \cdot \frac{dh}{dt}$

$\frac{dh}{dt} = 800(0.6)\sec^2 45^\circ = 960$ m/s.

(16) B



$\frac{dx}{dt} = 2$

$\frac{dP}{dt} = ??$

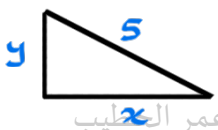
$P = 3x$

$\frac{dP}{dt} = 3 \cdot \frac{dx}{dt}$

$= 3(2)$

$= 6$ cm/s

(17) A



$\frac{dx}{dt} = 1$

$\left.\frac{dA}{dt}\right|_{x=3} = ??$

$A = \frac{1}{2}xy$

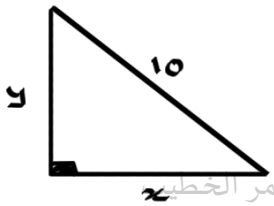
$= \frac{1}{2}x\sqrt{25-x^2}$

$= \frac{1}{2}\sqrt{25x^2 - x^4}$

$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} \cdot \frac{50x - 4x^3}{2\sqrt{25x^2 - x^4}} \cdot \frac{dx}{dt}$.

$\left.\frac{dA}{dt}\right|_{x=3} = \frac{1}{4} \cdot \frac{50(3) - 4(3)^3}{\sqrt{25(3^2) - 3^4}} = 0.87$ cm^2/s

(18) B



$\frac{dx}{dt} = 2$

$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{x=6} = ??$

$y = \sqrt{100 - x^2}$

$\frac{dy}{dt} = \frac{-2x \frac{dx}{dt}}{2\sqrt{100-x^2}}$

$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{x=6} = \frac{-2(6)(2)}{2\sqrt{100-6^2}}$

$= -1.5 \text{ cm/s}$

(19) B



$\frac{dv}{dt} = -10$

$\left.\frac{dA}{dt}\right|_{r=5} = ??$

نجد اولاً $\frac{dr}{dt}$

$v = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h$

$= \frac{1}{3}\pi r^2 (2r)$

$= \frac{2}{3}\pi r^3$

$\frac{dv}{dt} = 2\pi r^2 \cdot \frac{dr}{dt}$

$-10 = 2\pi (5)^2 \frac{dr}{dt}$

$\frac{dr}{dt} = -\frac{1}{5\pi}$ m/min

$A = \pi r^2$ مساحة الدائرة

$\frac{dA}{dt} = 2\pi r \cdot \frac{dr}{dt}$

$\frac{dA}{dt} = 2\pi(5) \cdot \frac{-1}{5\pi} = -2 \text{ m}^2/\text{min}$

(20) A



$\frac{dv}{dt} = 5$

$\left.\frac{dr}{dt}\right| = ??$

$h = 2$

$h = 2r$

$r = \frac{h}{2}$

$v = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$= \frac{1}{3}\pi \left(\frac{h}{2}\right)^2 \cdot h$

$= \frac{1}{3}\pi \frac{h^2}{4} \cdot h$

$= \frac{1}{12}\pi h^3$

$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{12}\pi 3h^2 \frac{dh}{dt}$

$5 = \frac{1}{12}\pi \cdot 3(2)^2 \frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{5}{\pi}$

(21) B



$\frac{dv}{dt} = 150 \text{ gal/m}$

$= \frac{150}{7.5}$

$= 20 \text{ ft}^3/\text{min}$

$\frac{dr}{dt}\Big| = ??$
$r = 300$

$v = \pi r^2 \cdot \frac{1}{30}$

$\frac{dv}{dt} = \frac{2}{30}\pi r \cdot \frac{dr}{dt}$

$20 = \frac{1}{15}\pi (300)\frac{dr}{dt}$

$20 = 20\pi \cdot \frac{dr}{dt}$

$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{\pi}$

(22) B

$r = \frac{1}{20}(3+h^2)$

$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{20} \cdot 2h \cdot \frac{dh}{dt}$

$-\frac{1}{5} = \frac{1}{10}(3)\frac{dh}{dt}$

$\frac{dh}{dt} = \frac{-2}{3} \text{ cm/s}$

(23) B

$f = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\rho}} = \frac{1}{2L} \cdot 220 = \frac{110}{L}$

$\frac{df}{dt} = -\frac{110}{L^2} \cdot \frac{dL}{dt}$

$\frac{df}{dt}\Big|_{L=1/2} = \frac{-110}{(1/2)^2} \cdot (-4) = 1760$ دورة/ثانية

(24) A

$p(t) \cdot v(t) = c$

$\frac{dp}{dt} \cdot v(t) + p(t) \cdot \frac{dv}{dt} = 0$

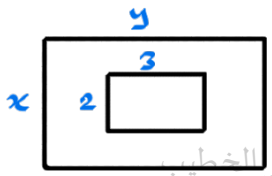
$\frac{dp}{dt} v(t) = -p(t) \cdot \frac{dv}{dt}$

$\frac{dp/dt}{dv/dt} = \frac{-p(t)}{v(t)} = \frac{-c/v(t)}{v(t)} = \frac{-c}{v^2(t)} \Rightarrow \frac{p'(t)}{v'(t)} = \frac{-c}{v^2(t)}$

$pv = c$

$p = c/v$

25 C



$\frac{dx}{dt} = 4$

$\left.\frac{dA}{dt}\right|_{x=8} = ??$

من التشابه

$\frac{x}{2} = \frac{y}{3}$

$y = \frac{3}{2}x$

$A = xy$

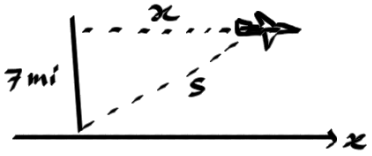
$= x \cdot \frac{3}{2}x$

$= \frac{3}{2}x^2$

$\frac{dA}{dt} = 3x \cdot \frac{dx}{dt}$

$\left.\frac{dA}{dt}\right|_{x=8} = 3(8)(4) = 96 \ cm^2/s$

26 A



$\frac{ds}{dt} = 300 \ mi/h$

$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{s=10}$

$x = \sqrt{s^2 - 7^2}$

$\frac{dx}{dt} = \frac{2s \cdot ds/dt}{2\sqrt{s^2-7^2}}$

$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{s=10} = \frac{10(300)}{\sqrt{10^2-7^2}} = 420 \ mi/h$

انتهت اجابات الدرس الثامن

① B
اكبر ترقى تقريباً بين الدخل والتكلفة عند $x = 8$
اي انتاج 8000 قطعة

② B
$C(100) - C(99)$
$= 6000 - 5988.02$
$= 11.98$

③ B
$C(x) = 0.02x^2 + 8x + 5000$
$C'(x) = 0.04x + 8$
$C'(100) = 0.04(100) + 8$
$= 12$

④ B
عدد القطع x السعر
$R(x) = 20x$
$P(x) = R(x) - C(x)$, $x > 0$
$= 20x - (0.002x^2 + 8x + 5000)$
$= -0.002x^2 + 12x - 5000$
$P'(x) = -0.004x + 12$
$P'(x) = 0$
$-0.004x + 12 = 0$
$x = 3000$

$P''(x) = -0.004$
$P''(30000) = -0.004 < 0$
الدالة ايرجح بتاخذ عظمى محلية
وحيدة عند $x = 30000$
من مطلقة
اكبر ربح يتحقق عند انتاج
30000 قطعة

⑤ C
$\bar{C}(x) = \frac{C(x)}{x}$, $x > 0$
$= \frac{10e^{0.02x}}{x}$
$\bar{C}'(x) = \frac{10e^{0.02x} \cdot (0.02)x - 10e^{0.02x} \cdot 1}{x^2}$
$= 10e^{0.02x}\left(\frac{0.02x - 1}{x^2}\right)$

$\bar{C}'(x) = 0$, $\bar{C}'(x)$ غير معرف
$0.02x - 1 = 0$
$x = 50$
$x = 0$
خارج المجال

$\bar{C}'$: $-$ $-$ | $+$ $+$ (عند 0 و 50)

الدالة بتاخذ صغرى محلية وحيدة عند $x = 50$
من مطلقة ويكون الانتاج 5000 قطعة

⑥ A

$f(p) = 400(20-p) \quad , \quad 0 \le p \le 20$

$R(p) = p \cdot f(p)$

$= 400p(20-p)$

$= 400(20p - p^2)$

$R'(p) = 400(20 - 2p)$

$R'(p) = 0 \Rightarrow p = 10$

$R(0) = 0$

$R(20) = 0$

$R(10) = 40000$

اكبر دخل عند $p = 10$

⑦ B

يجب ان يكون الطلب مرن $E < -1$

حفظ

⑧ A

$R = p \cdot f(p)$

$= 400p(20-p)$

$= 400(20p - p^2)$

$R' = 400(20 - 2p)$

$R' = 0 \Rightarrow p = 10$

R' : $+ +$ عند 0، $- -$ عند 20، 10

تكون دالة الايرادات متزايدة في الفترة $(0, 10)$

⑨ B

$f(p) = 400(20-p)$

$E = \dfrac{p f'(p)}{f(p)}$

$= \dfrac{p \cdot 400(-1)}{400(20-p)}$

$= \dfrac{-p}{20-p}$

الطلب مرن $E < -1$

$\dfrac{-p}{20-p} < -1$

$-p < -(20-p)$

$-p < -20 + p$

$-2p < -20$

$p > 10$

الفترة $(10, 20)$

⑩ B

الطلب مرن $E < -1$

وتكون

الاسعار في تزايد مع تناقص الايرادات .

(11)
(A)

الإيراد = السعر × عدد القطع

$R(x) = x \cdot P$

$= x\left(1.3 - \frac{x}{2500}\right)$

$= 1.3x - \frac{1}{2500}x^2$

$R'(x) = 1.3 - \frac{2}{2500}x$

$R'(x) = 0$

$1.3 = \frac{2}{2500}x$

$x = \frac{1.3(2500)}{2} = 1625$

$R''(x) = -\frac{2}{2500}$

$R''(1625) = -\frac{2}{2500} < 0$

الدالة متصلة عظمى محلية وحيدة عند عند $x = 1625$ نهاية عظمى مطلقة.

أكبر دخل عند انتاج 1625 قطعة

(12)
(A)

$s'(t) = \frac{ds}{dt} = -40\, e^{-0.05x(t)} \cdot \left(-0.05\, x'(t)\right)$

$= 2\, x'(t)\, e^{-0.05x(t)}$

$s'(4) = 2\, x'(4)\, e^{-0.05x(4)}$

$= 2(3)\, e^{-0.05(25)}$

$= 1.719$

ملاحظة

$x'(4) \approx m$

$= \frac{25-22}{4-3}$

$= 3$

مقدار التغير في المبيعات لستوية هو 1.719 درهم

(13)
(D)

$f'(x) = g(x)$

$= \frac{2}{2\sqrt{2x}}$

$= \frac{1}{\sqrt{2x}}$

$g(8) = \frac{1}{\sqrt{16}}$

$= \frac{1}{4}$

(14) (B)

ومن دالة الكثافة

نلاحظ من الرسم ان كثافة السلك

لا تتوزع بانتظام على السلك .

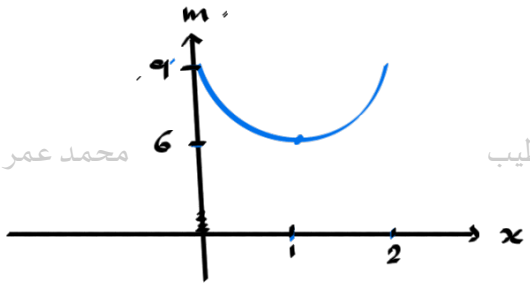
وتكون الكتلة العظمى عند الاطراف .

والكتلة الصغرى في الوسط .

$\rho(x) = m'(x)$

$= 3(x-1)^2 + 6$.

ترسم دالة الكثافة على الفترة $[0,2]$



(15) (D)

$f(x) = x'(t) = x[1-2x]$

$= x - 2x^2$.

$f(x)$ نجد القيمة العظمى للدالة

$f'(x) = 1 - 4x$.

$f'(x) = 0$

$x = 1/4$.

$f''(x) = -4$

$f''(1/4) = -4 < 0$.

قيمة عظمى محلية وحيده عند $x = 1/4$ من طلقة .

☆ تصل سرعة التفاعل $x'(t)$ الى القيمة العظمى

عندما يكون تركيز المادة $1/4$ درجة الاشباع .

(16) (C)

$f''(p) = -4 < 0$.

للدالة قيمة عظمى محلية

وحيده عند $p = 3$

من طلقة

عدد السكان 3 مليون

$P'(t) = 2P(t)[6 - P(t)]$

$f(p) = 2p(6-p)$

$= 12p - 2p^2$

$f'(p) = 12 - 4p$.

$f'(p) = 0 \Rightarrow p = 3$.

(17) (C)

$f'(2) = 3.1$

معدل انتشار الاشاعة

عندما $t = 2$ هو 3.1%

$f(t) = \frac{70}{1 + 3e^{-0.2t}}$.

$f'(t) = \frac{-70(3e^{-0.2t} \cdot (-0.2))}{(1+3e^{-0.2t})^2}$

(18)

(A)

$$f(t) = \frac{90}{1 + 4e^{-0.4t}}$$

$$f'(t) = \frac{-90(4e^{-0.4t} \cdot (-0.4))}{(1 + 4e^{-0.4t})}$$

$$f'(c) = 5.76.$$

انتهت اجابات الدرس التاسع

نتمنى لكم التوفيق والنجاح

KhateebAcademy.com

الصف الثاني عشر متقدم

2025/2024

الوحدة الخامسة

التـكامل

5 -1 الدوال الاصلية

5 -2 المجموع والرمز سيجما

5 -3 المساحة

5 -4 التكامل المحدود

5 -5 النظرية الأساسية لحساب التفاضل والتكامل

5 -6 التكامل بالتعويض

مع تمنياتي لكم بالنجاح والتفوق

إعداد : محمد عمر الخطيب

الدالة الاصلية

اذا كانت الدالة $f(x)=x^2+c$ حيث c عدد ثابت فان مشتقتها الدالة $f'(x)=2x$

نقول ان الدالة $f(x)=x^2+c$ هي الدالة الاصلية للدالة $f'(x)=2x$

ونعبر عما سبق بالرموز

$$\int 2x\ dx = x^2+c$$

ويقرء.... تكامل $2x$ هو x^2+c

او التكامل غير المحدود للدالة $f'(x)=2x$ بالنسبة للمتغير x هو $f(x)=x^2+c$

---

(1) اوجد الدالة الاصلية للدالة $f(t)=3t^2$ وعبرها عن ذلك بالرموز

نعلم ان مشتقة الدالة $F(t)=t^3+c$ حيث c عدد ثابت هي الدالة $f(t)=3t^2$

لذلك فان الدالة الاصلية للدالة $f(t)=3t^2$ هي الدالة $F(t)=t^3+c$

ونكتب ذلك بالرموز

$$\int 3t^2\ dt = t^3+c$$

---

(2) اوجد الدالة الاصلية للدالة $f(x)=1$ وعبر عن ذلك بالرموز

$$F(x)=\int f(x)\,dx=\int 1\,dx=x+c \Longrightarrow F(x)=x+c$$

---

(3) اوجد الدالة الاصلية للدالة $f(t)=1$ وعبر عن ذلك بالرموز

$$F(t)=\int f(t)\,dt=\int 1\,dt=t+c \Longrightarrow F(t)=t+c$$

---

(4) اوجد الدالة الاصلية للدالة $g(\theta)=\cos\theta$ وعبر عن ذلك بالرموز

$$G(\theta)=\int g(\theta)\,d\theta=\int \cos\theta\,d\theta=\sin\theta+c \Longrightarrow G(\theta)=\sin\theta+c$$

(1) اذا كانت $F(x)=\ln\left|\sec x+\tan x\right|$

(أ) اوجد $F'(x)$

$F(x)=\ln|\sec x+\tan x|$

$F'(x)=\dfrac{\sec x\tan x+\sec^2 x}{\sec x+\tan x}$

$=\dfrac{\sec x(\tan x+\sec x)}{\sec x+\tan x}=\sec x$

(ب) ما هي الدالة الاصلية للدالة $f(x)=\sec x$

$F(x)=\ln|\sec x+\tan x|+c$

---

(2) بين ان الدالة $F(x)=2x\ln(ex)-3x$ هي الدالة الاصلية للدالة $f(x)=1+\ln x^2$ ، $x>0$

$F'(x)=2\cdot\ln(ex)+2x\cdot\dfrac{e}{ex}-3$

$=2\ln(ex)+2-3$

$=2\ln(ex)-1$

$=2(\ln e+\ln x)-1$

$=2(1+\ln x)-1$

$=2+2\ln x-1$

$=1+2\ln x$

$=1+\ln x^2$ #

$\Rightarrow F'(x)=f(x)$

$\therefore$ الدالة $F(x)$ هي الدالة الاصلية للدالة $f(x)$

---

(3) اذا كان الدالة $F(x)=2\ln\left|x^3+5x+1\right|+c$ هي الدالة الاصلية للدالة

$f(x)=\dfrac{bx^2+10}{x^3+5x+1}$ فاوجد قيمة الثابت b

$F'(x)=f(x)$

$2\cdot\dfrac{3x^2+5}{x^3+5x+1}=\dfrac{bx^2+10}{x^3+5x+1}$

$\dfrac{6x^2+10}{x^3+5x+1}=\dfrac{bx^2+10}{x^3+5x+1}$

بالمقارنة $\boxed{b=6}$

محمد عمر الخطيب

التكامل غير المحدود

تعريف : التكامل غير المحدود

مجموعة كل الدوال الاصلية للدالة $f(x)$ هو التكامل غير المحدود للدالة f بالنسبة إلى x

ويرمز لها بالرمز $\int f(x)\,dx$

أي أن $\int f(x)\,dx = F(x)+C$

نظرية : اذا كانت الدالة $F(x)$ هي الدالة الاصلية للدالة $f(x)$ ، و الدالة $G(x)$ هي الدالة الاصلية للدالة $f(x)$ على الفترة I فان الفرق بين الدالتين ثابت

أي ان $G(x)=F(x)+c$ او $G(x)-F(x)=c$ حيث c عدد ثابت.

(1) بين ان الدالتان $F(x)=x^2(x^2+4)$ ، $G(x)=\frac{1}{4}(2x^2+4)^2$ هما دالتان كل منهما الدالة الاصلية لنفس الدالة

$G(x)-F(x)$

$=\frac{1}{4}(2x^2+4)^2-x^2(x^2+4)$

$=\frac{1}{4}(4x^4+16x^2+16)-x^4-4x^2$

$=x^4+4x^2+4-x^4-4x^2$

$=4$.

بما ان الفرق بين الدالتين ثابت لذلك كل منهم دالة اصلية للدالة $f(x)$

ممكن حل السؤال بايجاد كل من F' ، G' وتوضيح ان المشتقات متساوية .

ملاحظة : التكامل هو العملية العكسية للمشتقة اي ان المشتقة تلغي التكامل والتكامل يلغي المشتقة

$$\frac{d}{dx}\left[\int f(x)\,dx\right]=f(x) \quad \text{و} \quad \int\left[\frac{d}{dx}f(x)\right]dx=f(x)+c$$

(2) اذا كان $g(x)=x\sin x$ ، اوجد

$(a)\ \int g'(x)\,dx = g(x)+c = x\sin x+c$

يجب اضافة ثابت التكامل c

التكامل يلغي المشتقة

$(b)\ \frac{d}{dx}\int g(x)\,dx = g(x) = x\sin x$

المشتقة تلغي التكامل بدون c

قواعد التكـامل

ملاحظة: راجع قواعد الاشتقاق

(1) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad , n \neq -1 \qquad * \int a\, dx = ax + c \qquad * \int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + c$

(2) $\int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$

(3) $\int \sin x\, dx = -\cos x + c \qquad * \int \sin(ax+b)\, dx = \frac{-\cos(ax+b)}{a} + c$

(4) $\int \cos x\, dx = \sin x + c$

(5) $\int \sec^2 x\, dx = \tan x + c$

(6) $\int \csc^2 x\, dx = -\cot x + c$

(7) $\int \sec x \tan x\, dx = \sec x + c$

(8) $\int \csc x \cot x\, dx = -\csc x + c$

(9) $\int e^x\, dx = e^x + c \qquad * \int e^{ax+b}\, dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + c \qquad * \int f'(x)\, e^{f(x)}\, dx = e^{f(x)} + c$

(10) $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c \qquad * \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c$

(11) $\int \frac{1}{x^2+1} dx = \tan^{-1} x + c \qquad * \int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a} \tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$

(12) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sin^{-1} x + c \qquad * \int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$

(13) $\int \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}} dx = \sec^{-1} x + c \qquad * \int \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-a^2}} dx = \frac{1}{a} \sec^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$

خواص التكامل غير المحدود

(1) $\int k\, f(x)\, dx = k \int f(x)\, dx$

(2) $\int (f(x) \pm g(x))\, dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx$

يتوزع التكامل على الجمع والطرح

ولا يتوزع على الضرب او القسمة

محمد عمر الخطيب

اوجد التكاملات التالية (اوجد الدالة الاصلية)

(1) $\int 2x^4 \ dx = 2\frac{x^5}{5} + c = \frac{2}{5}x^5 + c.$

(2) $\int 3 \ dt = 3t + c$

(3) $\int x^{\frac{-4}{3}} \ dx = \frac{x^{-1/3}}{1/3} + c = -3x^{-1/3} + c.$

(4) $\int \frac{1}{x^2} \ dx = \int x^{-2} dx = \frac{x^{-1}}{-1} + c = \frac{-1}{x} + c.$

(5) $\int \sqrt[3]{x^2} \ dx = \int x^{2/3} dx = \frac{x^{5/3}}{5/3} + c = \frac{3}{5}x^{5/3} + c$

(6) $\int \frac{2}{\sqrt[5]{x}} \ dx = \int 2x^{-1/5} dx = 2\frac{x^{4/5}}{4/5} + c = 2 \cdot \frac{5}{4}x^{4/5} + c = \frac{5}{2}x^{4/5} + c.$

(7) $\int t\sqrt{t} \ dt = \int t \cdot t^{1/2} dt = \int t^{3/2} dt = \frac{2}{5}t^{5/2} + c.$

(8) $\int \frac{1}{2y} dy = \frac{1}{2}\int \frac{1}{y} dy = \frac{1}{2}\ln|y| + c$

(9) $\int (2x-1)^4 \ dx = \frac{(2x-1)^5}{5(2)} + c = \frac{1}{10}(2x-1)^5 + c.$

(10) $\int \frac{6}{(3x+2)^2} \ dx = \int 6(3x+2)^{-2} dx = 6\frac{(3x+2)^{-1}}{-1(3)} + c = \frac{-2}{(3x+2)} + c.$

قبل البدأ بالتكامل ...اسئل نفسك

(1) هل الدالة التي نريد ايجاد تكاملها هي ناتج جمع او طرح حدود وكل حدد قابل للتكامل

(2)هل الدالة التي نريد ايجاد تكاملها هي ناتج ضرب او قسمة ويمكن تحويلها الى جمع او طرح حدود وكل حدد قابل للتكامل

محمد عمر الخطيب

اوجد التكاملات التالية (اوجد الدالة الاصلية)

(1) $\int (4x^3 - 3x)\ dx$ $= \frac{4x^4}{4} - 3\frac{x^2}{2} + c = x^4 - \frac{3}{2}x^2 + c$

---

(2) $\int (3x^2 - \sqrt{x} + 2)\ dx$

$= \int (3x^2 - x^{1/2} + 2)\ dx$

$= \frac{3x^3}{3} - \frac{2}{3}x^{3/2} + 2x + c$

$= x^3 - \frac{2}{3}x^{3/2} + 2x + c$

---

(3) $\int (\frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \frac{5}{x^4} + \frac{1}{x})\ dx = \int x^{-1/3} - 5x^{-4} + \frac{1}{x}\ dx$

$= \frac{3}{2}x^{2/3} - 5\frac{x^{-3}}{-3} + \ln|x| + c$

$= \frac{3}{2}x^{2/3} + \frac{5}{3x^3} + \ln|x| + c$

---

(4) $\int t^2(t^3 - \frac{1}{t^2})\ dt = \int (t^5 - 1)\ dt$

$= \frac{t^6}{6} - t + c$

$= \frac{1}{6}t^6 - t + c$

---

(5) $\int x^{\frac{2}{3}}(x^{\frac{-4}{3}} - 3)\ dx = \int x^{-2/3} - 3x^{2/3}\ dx$

$= 3x^{1/3} - 3 \cdot \frac{3}{5}x^{5/3} + c$

$= 3x^{1/3} - \frac{9}{5}x^{5/3} + c$

محمد عمر الخطيب

اوجد التكاملات التالية (اوجد الدالة الاصلية)

(1) $\int \frac{x^4-3x+1}{x^2}\,dx$

استخدم المقدار

$= \int \frac{x^4}{x^2} - \frac{3x}{x^2} + \frac{1}{x^2}\,dx$

$= \int x^2 - \frac{3}{x} + x^{-2}\,dx$

$= \frac{1}{3}x^3 - 3\ln|x| + \frac{x^{-1}}{-1} + c$

$= \frac{1}{3}x^3 - 3\ln|x| - \frac{1}{x} + c$

---

(2) $\int \frac{x^{1/3}-3}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$

$= \int \frac{x^{1/3}}{x^{2/3}} - \frac{3}{x^{2/3}}\,dx$

$= \int x^{-1/3} - 3x^{-2/3}\,dx$

$= \frac{3}{2}x^{2/3} - 3 \cdot 3x^{1/3} + c$

$= \frac{3}{2}x^{2/3} - 9x^{1/3} + c$

---

(3) $\int \frac{x+2x^{3/4}}{x^{5/4}}\,dx$

$= \int \frac{x}{x^{5/4}} + \frac{2x^{3/4}}{x^{5/4}}\,dx$

$= \int x^{-1/4} + 2x^{-1/2}\,dx$

$= \frac{4}{3}x^{3/4} + 2 \cdot 2x^{1/2} + c$

$= \frac{4}{3}x^{3/4} + 4x^{1/2} + c$

---

(4) $\int \frac{t^2-1}{1-t}\,dt$

$= \int \frac{(t-1)(t+1)}{1-t}\,dt$

$= \int -(t+1)\,dt$

$= -\left(\frac{t^2}{2} + t\right) + c$

$= -\frac{1}{2}t^2 - t + c$

---

(5) $\int \frac{x-4}{\sqrt{x}-2}\,dx$

مرافق

$= \int \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} \times \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2}\,dx$

$= \int \frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{x-4}\,dx$

$= \int \sqrt{x} + 2\,dx$

$= \int x^{1/2} + 2\,dx$

$= \frac{2}{3}x^{3/2} + 2x + c$

محمد عمر الخطيب

اوجد التكاملات التالية

(1) $\int (3\sin x - \cos 4x)\ dx$ $= -3\cos x - \frac{\sin 4x}{4} + c$

---

(2) $\int \sec x(\tan x - \sec x)\ dx$ $= \int \sec x \tan x - \sec^2 x\ dx$

$= \sec x - \tan x + c$

---

(3) $\int (\sec 2x \tan 2x + \csc^2 5x)\ dx$ $= \frac{\sec 2x}{2} - \frac{\cot 5x}{5} + c$

---

(4) $\int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x \cot x}\ dx$ $= \int \frac{1}{\cos x \cot x}\ dx$

$= \int \sec x \tan x\ dx$

$= \sec x + c$

---

(5) $\int \csc x(\sec x \tan x - \cot x)\ dx$

$= \int (\csc x \sec x \tan x - \csc x \cot x)dx$

$= \int (\sec^2 x - \csc x \cot x)\ dx = \tan x + \csc x + c$

توضيح

$\csc x \cdot \sec x \tan x$

$= \frac{1}{\sin x} \cdot \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{\cos x}$

$= \frac{1}{\cos^2 x}$

$= \sec^2 x$

---

(6) $\int \frac{2\sin x}{\cos^2 x}\ dx$

$= \int 2\sec x \tan x\ dx$

$= 2\sec x + c$

توضيح

$\frac{2\sin x}{\cos^2 x}$

$= 2\frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos x}$

$= 2\sec x \cdot \tan x$

---

(7) $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x}\ dx$

$= \int \csc x \cdot \cot x\ dx$

$= -\csc x + c$

توضيح

$\frac{\cos x}{\sin^2 x}$

$= \frac{1}{\sin x} \cdot \frac{\cos x}{\sin x}$

$= \csc x \cot x$

محمد عمر الخطيب

اوجد التكاملات التالية:

(1) $\int (e^x + \frac{1}{x} - \cos 2x + 1)\ dx$ $= e^x + \ln|x| - \frac{\sin 2x}{2} + x + c$

---

(2) $\int (2x + x\sqrt{x} + e^{2x} - \sin 3x)\ dx$

$= \int 2x + x^{3/2} + e^{2x} - \sin 3x\ dx$

$= x^2 + \frac{2}{5}x^{5/2} + \frac{e^{2x}}{2} + \frac{\cos 3x}{3} + c$

$= x^2 + \frac{2}{5}x^{5/2} + \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{3}\cos 3x + c$

---

(3) $\int (2x^{-1} + \frac{1}{\sqrt{e^{2x}}} - x)\ dx$

$= \int \frac{2}{x} + \frac{1}{(e^{2x})^{1/2}} - x\ dx$

$= \int \frac{2}{x} + \frac{1}{e^x} - x\ dx$

$= \int \frac{2}{x} + e^{-x} - x\ dx$

$= 2\ln|x| - e^{-x} - \frac{x^2}{2} + c$

---

(4) $\int e^x(2e^x - 3)\ dx$

$= \int 2e^{2x} - 3e^x\ dx$

$= 2\frac{e^{2x}}{2} - 3e^x + c$

$= e^{2x} - 3e^x + c$

---

(5) $\int (e^x - e^{-x})^2\ dx$

$= \int (e^x)^2 - 2e^x \cdot e^{-x} + (e^{-x})^2\ dx$

$= \int e^{2x} - 2 + e^{-2x}\ dx$

$= \frac{e^{2x}}{2} - 2x + \frac{e^{-2x}}{2} + c$

$= \frac{1}{2}e^{2x} - 2x + \frac{1}{2}e^{-2x} + c$

---

(6) $\int \frac{e^x + 3}{e^x}\ dx = \int \frac{e^x}{e^x} + \frac{3}{e^x}\ dx = \int 1 + 3e^{-x}\ dx = x - 3e^{-x} + c$

---

(7) $\int \frac{e^{2x} - 2e^{3x}}{e^{3x}}\ dx = \int \frac{e^{2x}}{e^{3x}} - \frac{2e^{3x}}{e^{3x}}\ dx = \int e^{-x} - 2\ dx = -e^{-x} - 2x + c$

محمد عمر الخطيب

اوجد التكاملات التالية:

(1) $\int \frac{e^x}{e^x+3}\,dx$ = $\ln|e^x+3|+c$ — ابسط مشتقة المقام

(2) $\int \frac{3}{3x-2}\,dx$ = $\ln|3x-2|+c$.

(3) $\int \frac{x}{x^2+1}\,dx$ = $\frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx$ = $\frac{1}{2}\ln|x^2+1|+c$. — تحتاج تعديل ليصبح ابسط مشتقة المقام

(4) $\int \frac{-7}{2x+1}\,dx$ = $-7\int \frac{1}{2x+1}\,dx$ = $\frac{-7}{2}\int \frac{2}{2x+1}\,dx$ = $\frac{-7}{2}\ln|2x+1|+c$

(5) $\int \frac{2x+1}{x(x+1)}\,dx$ = $\int \frac{2x+1}{x^2+x}\,dx$ = $\ln|x^2+x|+c$.

(6) $\int \frac{5x^3}{x^4-5}\,dx$ = $5\int \frac{x^3}{x^4-5}\,dx$ = $\frac{5}{4}\int \frac{4x^3}{x^4-5}\,dx$ = $\frac{5}{4}\ln|x^4-5|+c$.

(7) $\int \frac{\sec^2 x}{\tan x}\,dx$ = $\ln|\tan x|+c$.

(8) $\int \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\,dx$ = $\ln|e^x+e^{-x}|+c$

(9) $\int \cot x\,dx$ = $\int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx$ = $\ln|\sin x|+c$.

(10) $\int \tan 2x\,dx$ = $\int \frac{\sin 2x}{\cos 2x}\,dx$ = $\frac{-1}{2}\int \frac{-2\sin 2x}{\cos 2x}\,dx$ = $\frac{-1}{2}\ln|\cos 2x|+c$

(11) $\int (\cot x+\tan x)\,dx$

= $\int \frac{\cos x}{\sin x}+\frac{\sin x}{\cos x}\,dx$

= $\int \frac{\cos x}{\sin x}-\frac{-\sin x}{\cos x}\,dx$

= $\ln|\sin x|-\ln|\cos x|+c$

= $\ln\left|\frac{\sin x}{\cos x}\right|+c$ = $\ln|\tan x|+c$.

محمد عمر الخطيب

اوجد التكاملات التالية:

(1) $\int e^{2x+1}\ dx$ = خطيه $\frac{e^{2x+1}}{2} + c = \frac{1}{2} e^{2x+1} + c$

---

(2) $\int \cos x\, e^{\sin x}\ dx$ = مشتقه الاس موجوده $e^{\sin x} + c$

---

(3) $\int \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}}\ dx$ = $e^{\sqrt{x}} + c$.

---

(4) $\int x\, e^{x^2}\ dx$ $= \frac{1}{2}\int 2x\, e^{x^2} dx = \frac{1}{2} e^{x^2} + c$.

---

(5) $\int \frac{e^{\tan x}}{1-\sin^2 x}\ dx$

$= \int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}\ dx$

$= \int \sec^2 x\, e^{\tan x}\ dx$

$= e^{\tan x} + c$.

---

(6) $\int e^{x^2+\ln x}\ dx$

$= \int e^{x^2} \cdot e^{\ln x}\ dx$

$= \int e^{x^2} \cdot x\ dx$

$= \int x\, e^{x^2} dx$

$= \frac{1}{2}\int 2x\, e^{x^2} dx$

$= \frac{1}{2} e^{x^2} + c$.

محمد عمر الخطيب

اوجد التكاملات التالية

(1) $\int \frac{3}{x^2+1}\,dx = 3\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = 3\tan^{-1}x + c$

---

(2) $\int \frac{x}{x^3+x}\,dx = \int \frac{x}{x(x^2+1)}\,dx = \int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \tan^{-1}x + c$

---

(3) $\int \frac{x+1}{x^2+1}\,dx = \int \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1}\,dx$

$= \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx + \int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + \tan^{-1}x + c$

---

(4) $\int \frac{5}{\sqrt{4-4x^2}}\,dx = \int \frac{5}{2\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{5}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

$= \frac{5}{2}\sin^{-1}x + c$

---

(5) $\int \frac{-2}{\sqrt{x^4-x^2}}\,dx = \int \frac{-2}{\sqrt{x^2(x^2-1)}}\,dx = \int \frac{-2}{\sqrt{x^2}\sqrt{x^2-1}}\,dx$

$= \int \frac{-2}{|x|\sqrt{x^2-1}}\,dx$

$= -2\sec^{-1}x + c$

او $= 2\csc^{-1}x + c$

---

(6) $\int \sqrt{(x-\frac{1}{x})^2+4}\,dx \qquad , x>0$

$= \int \sqrt{(x+\frac{1}{x})^2}\,dx$

$= \int |x+\frac{1}{x}|\,dx$ لاحظ $x>0$

$= \int x + \frac{1}{x}\,dx$

$= \frac{1}{2}x^2 + \ln x + c$

توضيح

$(x-\frac{1}{x})^2+4$

$= x^2 - 2x\cdot\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + 4$

$= x^2 - 2 + \frac{1}{x^2} + 4$

$= x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$

$= (x+\frac{1}{x})^2$

(1) $\int \sin^2 5x + \cos^2 5x \quad dx = \int 1 \quad dx = x + c$

(2) $\int \tan^2 x \quad dx = \int \sec^2 x - 1 \quad dx = \tan x - x + c$

(3) $\int \cos^2 x - \sin^2 x \quad dx = \int \cos 2x \, dx = \frac{\sin 2x}{2} + c = \frac{1}{2}\sin 2x + c$

(4) $\int 2\sin x \cos x \quad dx = \int \sin 2x \, dx = -\frac{\cos 2x}{2} + c = -\frac{1}{2}\cos 2x + c$

(5) $\int \sin^2 x \quad dx = \int \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)\, dx$

$= \frac{1}{2}\left(x - \frac{\sin 2x}{2}\right) + c = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + c.$

★ متطابقة
$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$

(6) $\int \cos^2 3x \quad dx$ ضعف الزاوية

$= \int \frac{1}{2}(1 + \cos 6x)\, dx$

$= \frac{1}{2}\left(x + \frac{\sin 6x}{6} + c\right)$

$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}\sin 6x + c.$

★ متطابقة
$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$

(7) $\int \frac{1}{1 + \cos 2x} \quad dx$

يمكن حل السؤال بمتطابقة او بالمرافق

$= \int \frac{1}{2\cos^2 x} \, dx$

$= \frac{1}{2}\int \sec^2 x \, dx$

$= \frac{1}{2}\tan x + c.$

★ متطابقة
$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$
$2\cos^2 x = 1 + \cos 2x$

محمد عمر الخطيب

اوجد التكاملات التالية

(1) $\int \frac{\sin^2 x}{1-\cos x}\, dx$

$= \int \frac{1-\cos x}{1-\cos x}\, dx$

$= \int \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{1-\cos x}$

$= \int 1+\cos x\, dx$

$= x + \sin x + c.$

---

(2) $\int \frac{1+\sin 2x}{\sin x+\cos x}\, dx$

توضيح

$1+\sin 2x$

$= \sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x$

$= \sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x$

$= (\sin x + \cos x)^2$

$= \int \frac{(\sin x+\cos x)^2}{\sin x+\cos x}\, dx$

$= \int (\sin x + \cos x)\, dx$

$= -\cos x + \sin x + c.$

---

(3) $\int \sqrt{\frac{1-\cos 2x}{2}}\, dx, \quad x \in [0, \pi]$

توضيح

$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$

$2\sin^2 x = 1-\cos 2x.$

$= \int \sqrt{\frac{2\sin^2 x}{2}}\, dx$

$= \int |\sin x|\, dx$

$= \int \sin x\, dx = -\cos x + c.$

---

(4) $\int \frac{\tan x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}\, dx, \quad x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

في الربع الثاني $\cos x$ سالب

$= \int \frac{\tan}{\sqrt{\cos^2 x}}\, dx$

$= \int \frac{\tan x}{|\cos x|}\, dx$

$= \int \frac{\tan x}{-\cos x}\, dx$

$= \int -\sec x \tan x\, dx$

$= -\sec x + c.$

تكاملات خاصة

اوجد التكاملات التالية

(1) $\int \frac{1}{1+\sin x}\ dx$

نوحد

$\frac{1}{1+\sin x} \times \frac{1-\sin x}{1-\sin x}$

$= \frac{1-\sin x}{1-\sin^2 x}$

$= \frac{1-\sin x}{\cos^2 x}$

$= \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\sin x}{\cos^2 x}$

$= \sec^2 x - \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{\cos x}$

$= \sec^2 x - \sec x \tan x$

$= \int \sec^2 x - \sec x \tan x\ dx$

$= \tan x - \sec x + c$

---

(2) $\int \sec x\ dx \times \frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x}$

البسط مشتقة المقام

$= \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x}\ dx$

$= \ln|\sec x + \tan x| + c$

---

(3) $\int \csc x\ dx \times \frac{\csc x - \cot x}{\csc x - \cot x}$

البسط مشتقة المقام

$= \int \frac{\csc^2 x - \csc x \cot x}{\csc x - \cot x}\ dx = \ln|\csc x - \cot x| + c$

---

(4) $\int \frac{1}{e^{-x}+1}\ dx \times \frac{e^x}{e^x}$

$= \int \frac{e^x}{e^{-x}\cdot e^x + e^x}\ dx = \int \frac{e^x}{1+e^x}\ dx = \ln|1+e^x| + c$

---

(5) $\int \frac{1}{e^x+1}\ dx$ $\frac{e^{-x}}{e^{-x}}$

$= \int \frac{1}{e^x \cdot e^{-x} + e^{-x}}$

$= \int \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\ dx$

$= -\int \frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}}\ dx$

$= -\ln|1+e^{-x}| + c$

مساعدة:

اضرب و اقسم على e^{-x}

او اضف واطرح للبسط e^x

محمد عمر الخطيب

(1) اوجد التكاملات التالية

يمكن كتابة الدالة النسبية $f(x)$ التي فيها درجة البسط اكبر من او تساوي درجة المقام على الشكل التالي

$$f(x) = \text{الناتج} + \frac{\text{الباقي}}{\text{المقسوم عليه}}$$

(a) $\int \frac{2x+3}{x+7}\,dx$

$= \int 2 + \frac{-11}{x+7}\,dx$

$= 2x - 11\ln|x+7| + c$

$$\begin{array}{r|l} & 2 \\ x+7 & 2x+3 \\ \ominus & 2x \oplus 14 \\ \hline & -11 \end{array}$$

(b) $\int \frac{x^2+2}{x^2+1}\,dx$

$= \int 1 + \frac{1}{x^2+1}\,dx$

$= x + \tan^{-1}x + c$

$$\begin{array}{r|l} & 1 \\ x^2+1 & x^2+2 \\ \ominus & x^2 \oplus 1 \\ \hline & 1 \end{array}$$

يمكنك حل السؤال بالطريقة التالية (بالتشارك)

$$\frac{x^2+2}{x^2+1} = \frac{x^2+1+1}{x^2+1} = \frac{x^2+1}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1} = 1 + \frac{1}{x^2+1}$$

---

(2) اوجد الدالة الاصلية $F(x)$ للدالة $f(x)$

الحل بالتخمين

(a) $f(x) = 2x\cos x^2$ $= \frac{d}{dx}(\sin x^2)$

$\int 2x\cos x^2\,dx = \int \frac{d}{dx}(\sin x^2)\,dx$

$= \sin x^2 + c$

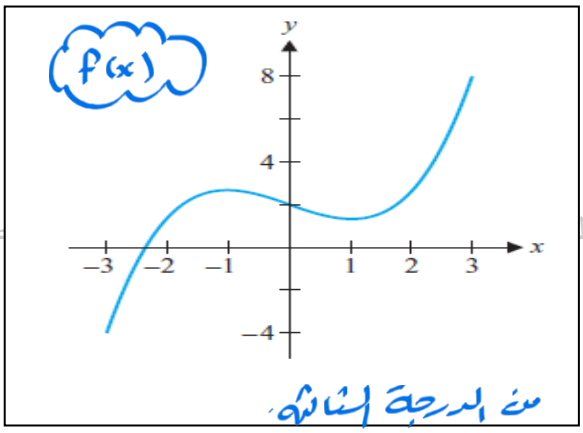
(b) $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\sin x + \sqrt{x}\cos x$ $= \frac{d}{dx}[\sqrt{x}\ \sin x]$

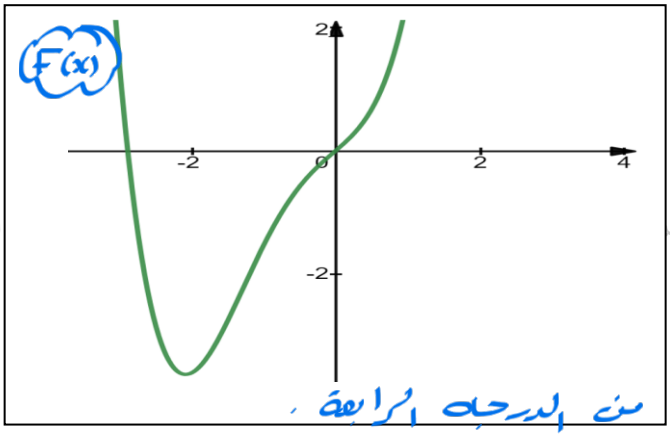
$\int \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin x + \sqrt{x}\cos x\right)dx = \int \frac{d}{dx}[\sqrt{x}\ \sin x]$

$= \sqrt{x}\ \sin x + c$

محمد عمر الخطيب

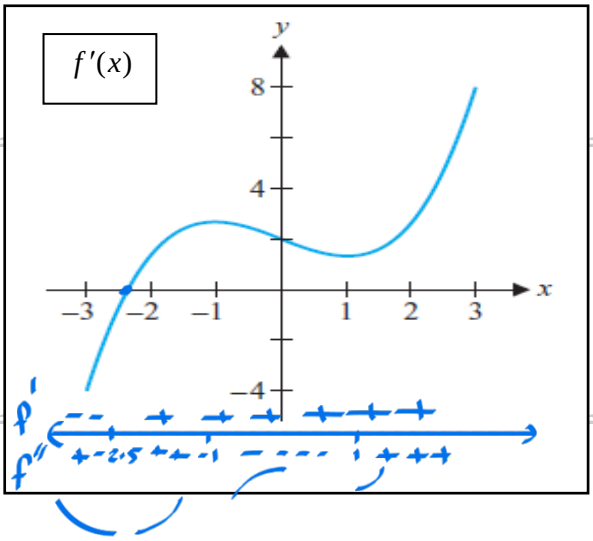
(1) عين الدالة $f(x)$ وعين الدالة الاصلية لها

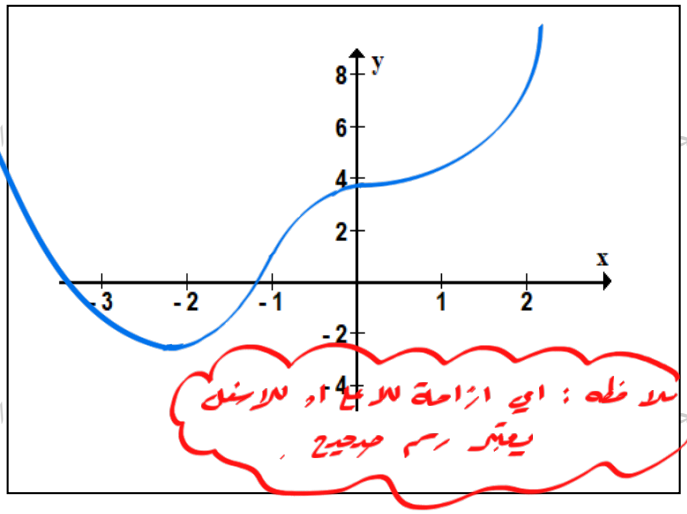


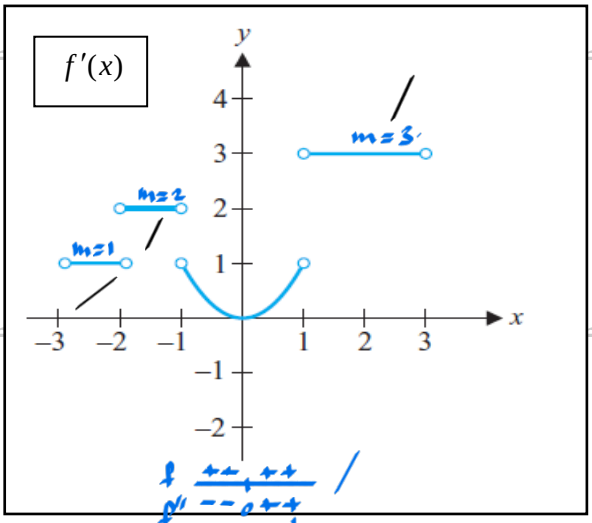


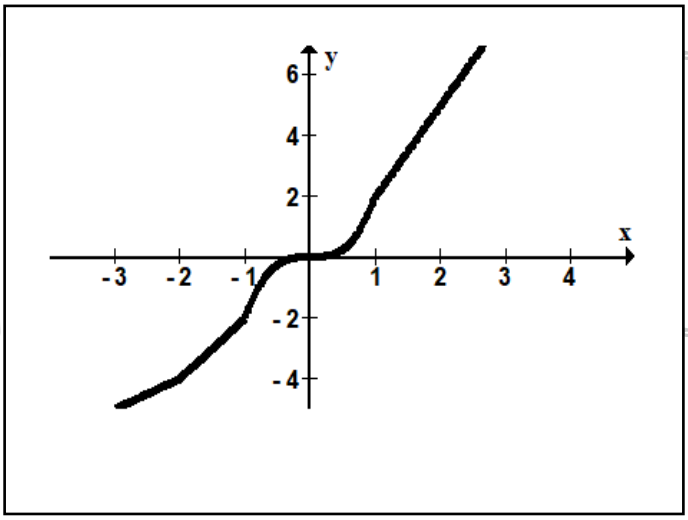
يوجد اجابات صحيحة اخرى

(2) الشكل المجاور يمثل بيان الدالة $f'(x)$ ارسم بيان الدالة الاصلية $f(x)$









اوجد قيمة كل مما يلي

يمكنك التأكد من الجواب باستخدام الآلة الحاسبة.

(1) $\int_1^3 (2x-1)\,dx = \left[x^2 - x\right]_1^3 = (3^2-3)-(1^2-1) = 6$

---

(2) $\int_0^2 3x(x+2)\,dx = \int_0^2 3x^2+6x\,dx$

$= \left[x^3+3x\right]_0^2 = 20-0 = 20$

---

(3) $\int_0^{\ln 2} e^x\,dx = \left[e^x\right]_0^{\ln 2} = e^{\ln 2} - e^0 = 2-1 = 1$

---

(4) $\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx = \left[\tan^{-1} x\right]_0^1 = \tan^{-1}1 - \tan^{-1}0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$

---

(5) $\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\left[\ln|x^2+1|\right]_0^1 = \frac{1}{2}\ln 2 = \ln\sqrt{2}$

---

(6) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sec^2 x\,dx = \left[\tan x\right]_{\pi/6}^{\pi/3} = \tan\frac{\pi}{3} - \tan\frac{\pi}{6} = \sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

---

(7) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x - \cos 3x\,dx = \left[\frac{-\cos 2x}{2} - \frac{\sin 3x}{3}\right]_0^{\pi/2}$

$= \left(-\frac{\cos\pi}{2} - \frac{\sin 3\pi/2}{3}\right) - \left(\frac{-\cos 0}{2} - \frac{\sin 0}{3}\right) = \frac{4}{3}$

اوجد الدالة $f(x)$ التي تحقق

(1) $f'(x) = 3x^2 - e^x$

$f(x) = \int 3x^2 - e^x \, dx$

$= x^3 - e^x + c$

---

(2) $f'(x) = \sqrt{x} + \sin 2x$

$f(x) = \int \sqrt{x} + \sin 2x \, dx$

$= \int x^{1/2} + \sin 2x \, dx$

$= \frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{\cos 2x}{2} + c = \frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{1}{2}\cos 2x + c$

---

(3) $f'(x) = \sec^2 x - \csc^2 x$

$f(x) = \int \sec^2 x - \csc^2 x \, dx$

$= \tan x + \cot x + c$

---

(4) $f''(x) = 12x + \cos 3x$

$f'(x) = \int 12x + \cos 3x \, dx$

$= \frac{12x^2}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + c_1$

$= 6x^2 + \frac{1}{3}\sin 3x + c_1$

$f(x) = \int (6x^2 + \frac{1}{3}\sin 3x + c_1) \, dx$

$= 6\frac{x^3}{3} + \frac{1}{3}\left(-\frac{\cos 3x}{3}\right) + c_1 x + c_2$

$= 2x^3 - \frac{1}{9}\cos 3x + c_1 x + c_2$

محمد عمر الخطيب

اوجد الدالة $f(x)$ التي تحقق الشروط التالية

(1) $f'(x) = 3e^x + 2x \qquad f(0) = 4$

$f(x) = \int 3e^x + 2x \, dx$

$= 3e^x + x^2 + c$

لايجاد الثابت c نستخدم الشرط

$f(0) = 4$

$3e^0 + 0 + c = 4$

$3 + c = 4$

$c = 1$

$\therefore f(x) = 3e^x + x^2 + 1$

---

(2) $f'(x) = \frac{1}{x^2} + 2x \qquad f(1) = 4$

$f(x) = \int \frac{1}{x^2} + 2x \, dx$

$= \int x^{-2} + 2x \, dx$

$= \frac{x^{-1}}{-1} + x^2 + c$

$= \frac{-1}{x} + x^2 + c$

$f(1) = 4$

$-\frac{1}{1} + 1 + c = 4$

$c = 4$

$\therefore f(x) = \frac{-1}{x} + x^2 + 4$

---

(3) $f'(x) = \sec^2 x \qquad f(\frac{\pi}{4}) = -1$

$f(x) = \int \sec^2 x \, dx$

$= \tan x + c$

$f(\frac{\pi}{4}) = -1$

$\tan \frac{\pi}{4} + c = -1$

$1 + c = -1$

$c = -2$

$\therefore f(x) = \tan x - 2$

---

(4) $f'(x) = \cos x + \sin x \qquad f(\pi) = 1$

$f(x) = \int \cos x + \sin x \, dx$

$= \sin x - \cos x + c$

$f(\pi) = 1$

$\sin \pi - \cos \pi + c = 1$

$0 - (-1) + c = 1$

$1 + c = 1$

$c = 0$

$\therefore f(x) = \sin x - \cos x$

محمد عمر الخطيب

اوجد الدالة $f(x)$ التي تحقق الشروط التالية

(1) $f''(x)=12x^2+4e^{2x}$ $\quad f(0)=3$, $f'(0)=2$

$f'(x)=\int 12x^2+4e^{2x}\,dx$

$=12\frac{x^3}{3}+4\frac{e^{2x}}{2}+c_1$

$=4x^3+2e^{2x}+c_1$

$f'(0)=2$

$0+2e^0+c_1=2$

$2+c_1=2$

$c_1=0$

$\therefore f'(x)=4x^3+2e^{2x}$

$f(x)=\int 4x^3+2e^{2x}\,dx$

$=4\frac{x^4}{4}+2\frac{e^{2x}}{2}+c_2$

$=x^4+e^{2x}+c_2$

$f(0)=3$

$0+e^0+c_2=3$

$1+c_2=3$

$c_2=2$

$\therefore f(x)=x^4+e^{2x}+2$

---

(2) $f''(t)=2t+2$ $\quad f(0)=2$, $f(3)=2$

$f'(t)=\int 2t+2\,dt$

$=t^2+2t+c_1$

لكيلا استخدام اله اشرح الآن .

$f(t)=\int t^2+2t+c_1\,dt$

$=\frac{1}{3}t^3+t^2+c_1t+c_2$

$f(0)=2$

$c_2=2$

$f(3)=2$

$\frac{1}{3}(3)^3+3^2+c_1(3)+c_2=2$

$9+9+3c_1+2=2$

$3c_1=-18$

$c_1=-6$

$\therefore f(t)=\frac{1}{3}t^3+t^2-6t+2$

التطبيقات

الدالة المكانية ⟸ دالة السرعة المتجهة ⟸ دالة التسارع

بالاشتقاق

الدالة المكانية ⟹ دالة السرعة المتجهة ⟹ دالة التسارع

بالتكامل

(1) حدد الدالة المكانية $s(t)$ لدالة السرعة المتجهة $v(t)=10t+5$ حيث $s(0)=10$

$s(t)=\int v(t)\,dt$

$=\int 10t+5\ dt$

$=5t^2+5t+c$

$s(0)=10$

$c=10$

$\therefore s(t)=5t^2+5t+10$

---

(2) حدد الدالة المكانية $s(t)$ لدالة السرعة المتجهة $v(t)=3e^{-t}-2$ حيث $s(0)=0$

$s(t)=\int v(t)\,dt$

$=\int 3e^{-t}-2\ dt$

$=3\frac{e^{-t}}{-1}-2t+c$

$=-\frac{3}{e^t}-2t+c$

$s(0)=0$

$-\frac{3}{e^0}-0+c=0$

$-3+c=0$

$c=3$

$\therefore s(t)=\frac{-3}{e^t}-2t+3$

---

(3) حدد الدالة المكانية اذا كانت دالة التسارع $a(t)=t^2+1$ والسرعة المتجهة الابتدائية $v(0)=4$ والموقع الابتدائي $s(0)=0$

$v(t)=\int a(t)\,dt$

$=\int t^2+1\ dt$

$=\frac{1}{3}t^3+t+c$

$v(0)=4$

$c=4$

$v(t)=\frac{1}{3}t^3+t+4$

$s(t)=\int v(t)\,dt$

$=\int \frac{1}{3}t^3+t+4\ dt$

$=\frac{1}{3}\frac{t^4}{4}+\frac{t^2}{2}+4t+c$

$=\frac{1}{12}t^4+\frac{1}{2}t^2+4t+c$

$s(0)=0$

$c=0$

$\therefore s(t)=\frac{1}{12}t^4+\frac{1}{2}t^2+4t$

(1) حدد الدالة المكانية لدالة التسارع $a(t)=3\sin t$ حيث $s(0)=0, v(0)=4$

$$v(t)=\int a(t)\,dt$$
$$=\int 3\sin t\,dt$$
$$=-3\cos t+c_1$$
$$v(0)=4$$
$$-3\cos 0+c_1=4$$
$$-3+c_1=4$$
$$c_1=7$$
$$v(t)=-3\cos t+7$$

$$s(t)=\int v(t)\,dt$$
$$=\int -3\cos t+7\,dt$$
$$=-3\sin t+7t+c_2$$
$$s(0)=0$$
$$c_2=0$$
$$\therefore s(t)=-3\sin t+7t$$

---

(2) سقط جسم من ارتفاع برج الشيخ خليفة عن ارتفاع $828m$ اذا كان تسارع الجسم بعد t ثانية يعطى بالعلاقة $a(t)=-9.8\ m/s^2$ و السرعة الابتدائية للجسم هي $-30m/s$ ، اوجد الدالة المكانية للجسم ثم اوجد ارتفاع الجسم عن الارض بعد 10 ثواني من بدء الحركة.

$a(t)=-9.8$, $v(0)=-30$, $s(0)=828$

$$v(t)=\int a(t)\,dt$$
$$=\int -9.8\,dt$$
$$=-9.8t+c_1$$
$$v(0)=-30$$
$$c_1=-30$$
$$v(t)=-9.8t-30$$

$$s(t)=\int -9.8t-30\,dt$$
$$=-4.9t^2-30t+c_2$$
$$s(0)=828$$
$$c_2=828$$
$$s(t)=-4.9t^2-30t+828$$
$$s(10)=-4.9(10)^2-30(10)+828$$
$$=38\ m$$

---

(3) قذف جسم افقياً للأعلى من ارتفاع $80\ ft$ اذا كان تسارع الجسم ثابت هو $a(t)=-32\ ft/s^2$ و السرعة الابتدائية للجسم هي $64\ ft/s$ ، اوجد اقصى ارتفاع يصل اليه الجسم.

$a(t)=-32$, $v(0)=64$, $s(0)=80$

$$v(t)=\int -32\,dt$$
$$=-32t+c_1$$
$$v(0)=64$$
$$c_1=64$$
$$v(t)=-32t+64$$
$$s(t)=\int -32t+64\,dt$$
$$=-16t^2+64t+c_2$$
$$s(0)=80$$
$$c_2=80$$
$$s(t)=-16t^2+64t+80$$

لايجاد اقصى ارتفاع نجد اكرمن عندما $v=0$

$$-32t+64=0$$
$$t=2$$
$$s(2)=144\ ft$$

(1) اذا كانت سيارة تتسارع من $20m/s$ الى $60m/s$ في 4 ثواني ، اوجد المسافة التي تقطعها السيارة خلال اول 5 ثواني ، علماً بان التسارع ثابت وبداية الحركة عند الموضع صفر.

☆ يمكنه حل السؤال بأكثر من طريقة

معلومات السؤال

$a(t) = g$

$v(0) = 20$

$v(4) = 60$

$s(0) = 0$

$v(t) = \int a(t)\,dt$

$= \int g\,dt$

$= gt + c_1$

الشرط

$v(0) = 20$

$c_1 = 20$

$v(t) = gt + 20$

$v(4) = 60$

$4g + c_1 = 60$

$4g + 20 = 60$

$g = 10$

$v(t) = 10t + 20$

$s(t) = \int 10t + 20\,dt$

$= 5t^2 + 20t + c_2$

$s(0) = 0$

$c_2 = 0$

$s(t) = 5t^2 + 20t$

$s(5) = 225$

---

(2) اذا كانت دالة السرعة المتجهة لجسم يتحرك على خط مستقيم يعطى بالعلاقة $v(t) = -s(t)$ حيث $s(0) = e$ فأوجد دالة الوضع $s(t)$

☆ السؤال من خارج الكتاب

$v(t) = -s(t)$

$s'(t) = -s(t)$

بالقسمة على $s(t)$

$\frac{s'(t)}{s(t)} = -1$

$\int \frac{s'(t)}{s(t)}\,dt = \int -1\,dt$

$\ln|s(t)| = -t + c$

$s(t) = e^{-t+c}$

$s(0) = e$

$e^{0+c} = e$

$c = 1$

$s(t) = e^{-t+1}$

(1) اوجد الدالة $f(x)$ التي لها ميل المماس عند اي نقطة $m = 2x$ و تمر بالنقطة $(2,5)$

$f'(x) = m = 2x$, $f(2) = 5$

$f(x) = \int 2x \, dx$

$= x^2 + c$.

$f(2) = 5$

$4 + c = 5$

$c = 1$

$\therefore f(x) = x^2 + 1$.

---

(2) اوجد الدالة $f(x)$ التي تمر بالنقطة $(0,1)$ ولها مماس افقي عند نفس النقطة حيث $f''(x) = 6x$

$f''(x) = 6x$, $f'(0) = 0$, $f(0) = 1$

$f'(x) = \int 6x \, dx$

$= 3x^2 + c_1$.

$f'(0) = 0$

$c_1 = 0$

$\therefore f'(x) = 3x^2$

$f(x) = \int 3x^2 \, dx$

$= x^3 + c_2$.

$f(0) = 1$

$c_2 = 1$

$f(x) = x^3 + 1$.

---

(3) يكلف طباعة الكتاب الأول 1600 درهم وتعطى التكلفة الحدية لطباعة x نسخة من نفس النوع بالعلاقة $c'(x) = \frac{200}{\sqrt{x}}$ ، اوجد تكلفة طباعة 400 كتاب. السؤال من خارج الكتاب

$c'(x) = \frac{200}{\sqrt{x}}$, $c(1) = 1600$

$c(x) = \int c'(x) \, dx$

$= \int \frac{200}{\sqrt{x}} \, dx$

$= \int 200 \, x^{-1/2} \, dx$

$= 200 \cdot 2x^{1/2} + c$

$= 400\sqrt{x} + c$.

$c(1) = 1600$

$400\sqrt{1} + c = 1600$

$c = 1200$

$c(x) = 400\sqrt{x} + 1200$

$c(400) = 400\sqrt{400} + 1200$

$= 9200$ درهم

خزان للماء يحتوي على 288 لترو تتغير كمية الماء في الخزان بمعدل $f(t)=4t-t^2$ لتر في الدقيقة

(أ) اكتب المعادلة التفاضلية التي تنمذج معدل كمية الماء $v(t)$ بالخزان عند الزمن t مع الشروط

$v'(t)=4t-t^2$, $v(0)=288$

(ب) اوجد كمية الماء $v(t)$ بالخزان عند اي زمن .

$v(t)=\int v'(t)\,dt$

$=\int 4t-t^2\,dt$

$=2t^2-\frac{t^3}{3}+c$

$v(0)=288$

$c=288$

$v(t)=2t^2-\frac{1}{3}t^3+288$

(ج) اوجد كمية الماء بالخزان بعد 9 دقائق.

$v(9)=2(9)^2-\frac{1}{3}(9)^3+288=207$ لتر

(د) حدد الزمن الذي يصبح فيه الخزان فارغ.

$v(0)$

$2t^2-\frac{1}{3}t^3+288=0$

$6t^2-t^3+864=0$

$-t^3+6t^2+864=0$

$t^3-6t^2-864=0$

$t=12$ min.

(هـ) حدد الفترة التي يتزايد فيها مستوى الماء ومتى يتناقص

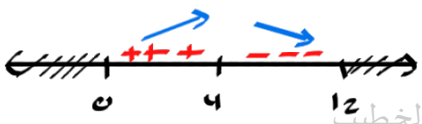
$v(t)$. حجم الماء في الخزان

$v'(t)=4t-t^2$

$v'(t)=0$

$4t-t^2=0$

$t=0,\ t=4$



حجم الماء يتزايد في الفترة الزمنية $(0,4)$

حجم الماء يتناقص في الفترة الزمنية $(4,12)$

رمز المجموع (سيجما) $\sum$

(1) المتتالية العددية : هي مجموعة من الاعداد بترتيب معين

وهي اما تكون منتهيه مثل $2,5,8,11,14,17,20$ او غير منهية مثل $1,1,2,3,5,8,13,21,\ldots$

ويمكن كتابة حدود المتتالية في بعض المتتاليات على شكل دالة مجالها مجموعة الاعداد الطبعية

مثلاً يمكن كتابة حدود المتتالية $2,5,8,11,14,17,20,\ldots$ بالدالة $a_i = 3i-1$ حيث $i \geq 1$

(2) المتسلسلة العددية : هي مجموع لمتتالية من الحدود

وهي اما تكون منتهيه مثل $2+5+8+11+14$ او غير منهية مثل $1+2+4+8+16+\ldots$

ويمكن كتابة المسلسلة في بعض الاحيان بطريقة مختصرة واستخدام رمز المجموع سيجما $\sum$

مثلاً يمكن كتابة $2+5+8+11+\ldots+59 = \sum_{i=1}^{20} 3i-1$

اكتب كل مما يلي بدون استخدام رمز المجموع (سيجما) $\sum$

(1) $\sum_{i=1}^{7} 2i+1 = 3+5+7+9+11+13$

عوض $i=1$ بالدالة $2i+1$ — عوض $i=7$

(2) $\sum_{i=1}^{10} i^2-3i = (-2)+(-2)+0+10+\ldots+70$

(3) $\sum_{n=1}^{10} (n-2)(n+2) = \sum_{n=1}^{10} n^2-4 = -3+0+5+\ldots+96$

(4) $\sum_{i=2}^{100} (-1)^i \frac{1}{i} = \frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{100}$

(5) $\sum_{i=1}^{20} \sin(\frac{\pi}{2}i) = 1+0-1+1+0+\ldots+0$

(6) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{i!}{e^i} = \frac{1}{e}+\frac{2}{e^2}+\frac{6}{e^3}+\frac{24}{e^4}+\ldots$

محمد عمر الخطيب

اكتب كل مما يلي باستخدام رمز المجموع (سيجما) $\sum$

المتسلسلة الحسابية

اذا كان الفرق بين اي حددين متتالين ثابت

تسمى مسلسلة حسابية ويكون الحد العام

للمتسلسلة الحسابية هو

$a_i = a_1 + (i-1)d$.

حيث a_1 الحد الأول

$d = a_2 - a_1$ الاساس (الفرق)

المتسلسلة الهندسية

اذا كان قسمة اي حددين متتالين ثابت

تسمى متسلسلة هندسية ويكون الحد العام

للمتسلسلة الهندسية هو

$a_i = a_1 \times r^{i-1}$.

حيث a_1 الحد الأول

$r = \frac{a_2}{a_1}$ الاساس (النسبة)

(1) $3+6+9+12+15+\ldots+99$

$= \sum_{i=1}^{33} 3i$

للحد الأخير: $3i = 99$, $i = 33$

المتسلسلة حسابية: $a_1 = 3$, $d = 3$, $a_i = 3+(i-1)(3) = 3i$

---

(2) $2+9+16+23+30+\ldots+149$

$= \sum_{i=1}^{22} 7i-5$

للحد الأخير: $7i-5 = 149$, $i = 22$

المتسلسلة حسابية: $a_1 = 2$, $d = 7$, $a_i = 2+(i-1)(7) = 7i-5$

---

(3) $0.4+0.8+1.2+1.6+2.0+\ldots+20$

$= \sum_{i=1}^{50} 0.4i$

للحد الأخير: $0.4i = 20$, $i = 50$

المتسلسلة حسابية: $a_1 = 0.4$, $d = 0.4$, $a_i = 0.4+(i-1)(0.4) = 0.4i$

---

(4) $2.05+2.15+2.25+2.35+\ldots+6.75$

$= \sum_{i=1}^{48} 1.95+0.1i$

للحد الأخير: $1.95+0.1i = 6.75$, $i = 48$

المتسلسلة حسابية: $a_1 = 2.05$, $d = 0.1$, $a_i = 2.05+(i-1)(0.1) = 1.95+0.1i$

---

(5) $1\times2+2\times3+3\times4+4\times5+5\times6+\ldots+20\times21$ $= \sum_{i=1}^{20} i(i+1)$

---

(6) $\sqrt{2-1}+\sqrt{3-1}+\sqrt{4-1}+\ldots+\sqrt{100-1}$ $= \sum_{i=2}^{100} \sqrt{i-1}$

---

(7) $1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\frac{1}{25}-\ldots-\frac{1}{400}$ $= \sum_{i=1}^{50} (-1)^{i+1} \frac{1}{i^2}$

---

(8) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{1024}$ $= \sum_{i=1}^{10} \left(\frac{1}{2}\right)^i$

هندسية: $a_1 = 1/2$, $r = \frac{1/4}{1/2} = 1/2$, $a_i = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^i$

محمد عمر الخطيب

خواص وقوانين المجموع (سيجما)

اذا كانت n عدد صحيح موجب و a,b,c اعداد حقيقية فان

(1) $\sum_{i=1}^{n} c = nc$ $\qquad$ $\sum_{i=1}^{20} 3 = 20\times 3 = 60$

(2) $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ $\qquad$ $\sum_{i=1}^{20} i = \frac{20(21)}{2} = 210$

(3) $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ $\qquad$ $\sum_{i=1}^{20} i^2 = \frac{20(21)(41)}{6} = 2870$

(4) $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$ $\qquad$ $\sum_{i=1}^{20} i^3 = \left[\frac{20(21)}{2}\right]^2 = 44100$

المتسلسلات الهندسية المنتهية

$$a + ar + ar^2 + \ldots + ar^n$$

الحد الأول مكان i=0 — عدد الحدود (n-0)+1

(5) $\sum_{i=0}^{n} a r^i = \frac{a(1-r^{n+1})}{1-r} \quad , r \neq 1$

عدد الحدود (n-1)+1

او $\sum_{i=1}^{n} a r^i = \frac{ar(1-r^{n})}{1-r} \quad , r \neq 1$

الاس (عدد الحدود)

(الأساس -1) × الحد الاول

الاساس -1

المتسلسلة الهندسية غير المنتهية

الحد الأول مكان i=m

$$\sum_{i=m}^{\infty} a r^i = \frac{a\, r^m}{1-r} \quad , \quad |r| < 1$$

خواص المجموع

(1) $\sum_{i=1}^{n} (c\, a_i \pm d\, b_i) = c\sum_{i=1}^{n} a_i \pm d\sum_{i=1}^{n} b_i$

(2) $\sum_{i=1}^{m-1} a_i + \sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i \Leftrightarrow \sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{m-1} a_i$ $\quad or \quad \sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{i=0}^{n-m} a_{i+m}$

محمد عمر الخطيب

(1) اكتب كل الحدود واحسب المجموع

ملاحظة:
يمكن استخدام الرمز Σ عما بالآلة الحاسبة لايجاد المجموع.

$(a)\ \sum_{i=1}^{5}(4i+2) =$ $6+10+14+18+22 = 70$.

$(b)\ \sum_{i=3}^{7}(i^2+i) =$ $12+20+30+42+56 = 160$.

(2) استخدم قواعد المجموع لحساب

$(a)\ \sum_{i=1}^{25}3 =$ $3(25) = 75$

$(b)\ \sum_{i=1}^{15}(2i-3) =$ $2\sum_{i=1}^{15} i - \sum_{i=1}^{15} 3 = 2\cdot\frac{15(16)}{2} - 3(15) = 195$

$(c)\ \sum_{i=1}^{20}(5-i) =$ $\sum_{i=1}^{20} 5 - \sum_{i=1}^{20} i = 5(20) - \frac{20(21)}{2} = -110$.

$(d)\ \sum_{i=1}^{125}(i^2+i+5) =$ $\sum_{i=1}^{125} i^2 + \sum_{i=1}^{125} i + \sum_{i=1}^{125} 5$

$= \frac{125(126)(251)}{6} + \frac{125(126)}{2} + 5(125) = 667375$

$(e)\ \sum_{i=1}^{20} i(i-3) =$ $\sum_{i=1}^{20} i^2 - 3i = \sum_{i=1}^{20} i^2 - 3\sum_{i=1}^{20} i$

$= \frac{20(21)(41)}{6} - 3\ \frac{20(21)}{2} = 2240$

$(f)\ \sum_{i=1}^{10} i^3 =$ $\left[\frac{10(11)}{2}\right]^2 = 3025$.

محمد عمر الخطيب

استخدم قواعد المجموع لحساب

نجد متتابعة البداية عند $i=0$ ونضيف لها واحد صحيح

(1) $\sum_{i=0}^{100}(5i+2) =$ $2 + \sum_{i=1}^{100} 5i+2 = 2 + 5\frac{100(101)}{2} + 2(100)$

$= 25452.$

---

(2) $\sum_{i=5}^{20}(5i+2) =$ $\sum_{i=1}^{20} 5i+2 - \sum_{i=1}^{4} 5i+2.$

$= 5\frac{20(21)}{2} + 2(20) - \left[5\cdot\frac{4(5)}{2} + 2(4)\right]$

$= 1032.$

---

(3) $\sum_{i=4}^{20}(i-3)(i+3) =$ $\sum_{i=4}^{20}(i^2-9) = \sum_{i=1}^{20} i^2-9 - \sum_{i=1}^{3} i^2-9.$

$= \frac{20(21)(41)}{6} - 9(20) - \left[\frac{3(4)(7)}{6} - 9(3)\right]$

$= 2703$

---

(4) $\sum_{i=0}^{n}(k^2+1) =$ $1 + \sum_{i=1}^{n}(k^2+1)$

$= 1 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + n$

---

(5) $\sum_{i=1}^{10} 3\times 2^i =$ $\frac{6(1-2^{10})}{1-2} = 6138$

هندسية

$a_1 = 6$

$r = 2$

عدد الحدود $= 10-1+1 = 10$

---

(6) $\sum_{i=0}^{8} 4\times 2^{-i} =$ $\sum_{i=0}^{8} 4\left(\frac{1}{2}\right)^i = \frac{4(1-(1/2)^9)}{1-1/2}$

$= \frac{511}{64}$

هندسية

$a_1 = 4$

$r = 1/2$

عدد الحدود $= 8-0+1 = 9$

---

(7) $\sum_{i=1}^{\infty} e^{-i} =$ $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{e^i} = \sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{e}\right)^i = \frac{1/e}{1-1/e}$

$= \frac{1}{e-1}$

هندسية غير منتهية.

$a_1 = 1/e$

$r = 1/e$

محمد عمر الخطيب

(1) اذا كان $f(x)=2x-3$ **فاوجد**

$f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(50)$

$f(x)=2x-3$

$f(i)=2i-3$

$$=\sum_{i=1}^{50} f(i)$$

$$=\sum_{i=1}^{50} 2i-3 \;=\; 2\cdot\frac{50(51)}{2}-3(50)=2400$$

---

(2) احسب مجموع قيم الدالة $f(x)=3x+5$ **عند**

$x=0.4\ ,0.8\ ,\ 1.2\ ,1.6\ ,\ 2.0\ ,2.4\ ,2.8\ ,3.2\ ,3.6\ ,\ldots,40$

المطلوب

$f(0.4)+f(0.8)+\cdots+f(40)$

$$=\sum_{i=1}^{100} f(0.4i)$$

$$=\sum_{i=1}^{100} 1.2i+5$$

$$=1.2\,\frac{100(101)}{2}+5(100)=6560$$

☆ قيم x هي متتالية حسابية

$a_1=0.4\ ,\ d=0.4$

$a_i=a_1+(i-1)d$

$=0.4+(i-1)(0.4)$

$=0.4i$

☆ لمعرفة حد i الاخيره

$0.4i=40$

$i=100$

$f(x)=3x+5$

$f(0.4i)$

$=3(0.4i)+5$

$=1.2i+5$

---

(3) احسب المجموع بالصيغة $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$ **لقيم** x_i **المعطاه**

$f(x)=x^2+4x$ $\quad x=2\ ,4\ ,6\ ,8\ ,10\ ,\ldots,100$

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$$

$$=\sum_{i=1}^{50} f(2i)\cdot(2)$$

$$=2\sum_{i=1}^{50}(4i^2+8i)$$

$$=8\,\frac{50(51)(101)}{6}+16\,\frac{50(51)}{2}$$

$$=363\,800$$

$\Delta x=4-2=2$

$f(2i)=$

$(2i)^2+4(2i)$

$=4i^2+8i$

قيم x متتالية حسابية

$a_1=2\ ,\ d=2$

$a_i=2+(i-1)(2)$

$=2i$

$2i=100$

$i=50$

اوجد ناتج كل مايلي واحسب نهاية المجموع عندما تقترب n من ∞

(1) $\sum_{i=1}^{n} \frac{5i}{n^2} = \frac{5}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i$

$= \frac{5}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2}$

$= \frac{5(n+1)}{2n}$

$\therefore \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{5i}{n^2}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{5(n+1)}{2n} = \frac{5}{2}$

عكسيا استخدام قاعدة لوبتال

---

(2) $\sum_{i=1}^{n} \frac{2i^2}{n^3} = \frac{2}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2$

$= \frac{2}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$= \frac{(n+1)(2n+1)}{3n^2}$

$= \frac{2n^2+3n+1}{3n^2}$

$\therefore \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{2i^2}{n^3}$

$= \lim \frac{2n^2+3n+1}{3n^2}$

$= \frac{2}{3}$

---

(3) $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\left[(\frac{i}{n})^2 + 2(\frac{i}{n})\right]$

$= \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{i^2}{n^2} + 2\frac{i}{n}\right]$

$= \frac{1}{n}\left[\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i^2 + \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} i\right]$

$= \frac{1}{n}\left[\frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{2}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2}\right]$

$= \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} + \frac{n+1}{n}$

$\therefore \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\left[(\frac{i}{n})^2 + 2(\frac{i}{n})\right]$

$= \lim \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} + \frac{n+1}{n}$

$= \frac{2}{6} + 1$

$= \frac{4}{3}$

محمد عمر الخطيب

اوجد ناتج كل مايلي واحسب نهاية المجموع عندما تقترب n من ∞

(1) $\sum_{i=1}^{n} 2\times 3^{-i} = \sum_{i=1}^{n} 2\left(\frac{1}{3}\right)^{i}$

هندسية

$a_1 = 2/3$

$r = 1/3$

عدد الحدود

$n-1+1 = n$

$= \frac{\frac{2}{3}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\right)}{1-1/3}$

$= \frac{\frac{2}{3}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\right)}{2/3}$

$= 1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n}$

$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 2\times 3^{-i}$

$= \lim_{n\to\infty} 1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n}$

قاعدة b

$= 1-0$

$= 1$

---

(2) $\sum_{i=1}^{n} e^{\frac{2i}{n}} \frac{2}{n}$

هذا السؤال صعب وعميق حله عجز معلومات المدرس الرابع بطريقة اسهل

$\sum_{i=1}^{n} e^{2i/n} \cdot \frac{2}{n}$

هندسية

$a_1 = \frac{2}{n} e^{2/n}$

$r = e^{2/n}$

عدد الحدود

$n-1+1 = n$

$= \sum_{i=1}^{n} \left(e^{2/n}\right)^{i} \cdot \frac{2}{n}$

$= \frac{\frac{2}{n} e^{2/n}\left(1-\left(e^{2/n}\right)^{n}\right)}{1-e^{2/n}}$

$= \frac{2}{n} e^{2/n} \frac{1-e^{2}}{1-e^{2/n}}$.

$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} e^{2i/n} \cdot \frac{2}{n}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} e^{2/n} \frac{1-e^{2}}{1-e^{2/n}}$.

$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{n}\left(1-e^{2}\right)}{\frac{1-e^{2/n}}{e^{2/n}}}$.

$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{n}\left(1-e^{2}\right)}{\frac{1}{e^{2/n}}-1} \left(\frac{0}{0}\right)$

باستخدام قاعدة لوبتال

$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{n}\left(1-e^{2}\right)}{e^{-2/n}-1}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{-2}{n^2}\left(1-e^{2}\right)}{e^{-2/n}\left(\frac{2}{n^2}\right)}$

$= \frac{-\left(1-e^{2}\right)}{e^{0}}$

$= -\left(1-e^{2}\right)$

$= e^{2}-1$ #

مجموع ريمان لحساب المساحة

التجزئة المنتظمة

تسمى المجموعة $\{x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots x_n\}$ تجزئة منتظمة للفترة $[a,b]$ اذا تحققت الشروط التالية

(1) $x_0 = a$ و $x_n = b$

(2) $x_i < x_{i+1}$ لكل قيم i

(3) $\Delta x_i = \Delta x = x_{i+1} - x_i$ قيمة ثابتة لكل قيم i

مثال: المجموعة $\{2,4,6,8,10\}$ هي تجزئة منتظمة للفترة $[2,10]$

تسمى كل فترة $[x_{i-1}, x_i]$ فترة جزئية للتجزئة ويكون عدد الفترات الجزئية هو n

وعدد عناصر التجزئة هو $n+1$

ملاحظات مهمة

(1) طول الفترة الكلية للتجزئة هي $b-a$

(2) طول الفترة الجزئية للتجزئة المنتظمة هي $\Delta x = x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$

(3) العنصر x_i في التجزئة هو العنصر الذي ترتيبه $i+1$ (مثلا x_6 هو العنصر السابع)

(4) الفترة الجزئية التي ترتيبها i هي الفترة $[x_{i-1}, x_i]$ (مثلا $[x_5, x_6]$ هي الفترة الجزئية السادسة)

(5) نقاط القيم هي $c_1, c_2, c_3, \ldots c_n$ حيث c_i تقع في الفترة الجزئية $[x_{i-1}, x_i]$

(6) يمكن ايجاد اي عنصر في التجزئة بالعلاقة $x_i = a + \Delta x(i) = a + \frac{b-a}{n} i$ لكل قيم i

يسمى المقدار $\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x$ مجموع ريمان للدالة $f(x)$ على الفترة $[a,b]$ حيث x_i هي عناصر التجزئة و c_i هي نقاط القيم

محمد عمر الخطيب

(1) اكتب التجزئة المنتظمة التي عدد فتراتها الجزئية 10 للفترة $[0,2]$

$n = 10$

طول الفترة الجزئية $\Delta x = \frac{b-a}{n}$

$= \frac{2-0}{10} = 0.2$

∴ التجزئة $P = \{0 \xrightarrow{+0.2} 0.2 \xrightarrow{+0.2} 0.4, \dots, 2\}$

ملاحظة عدد عناصر التجزئة هي 11 عنصر.

---

(2) اكتب التجزئة المنتظمة التي عدد عناصرها 25 للفترة $[1,13]$

عدد العناصر 25

∴ $n = 24$

$\Delta x = \frac{13-1}{24} = \frac{1}{2}$

$P = \{1, 1.5, 2, 2.5, \dots, 13\}$

---

(3) اكتب التجزئة المنتظمة التي عدد فتراتها الجزئية n للفترة $[0,3]$

$\Delta x = \frac{3-0}{n} = \frac{3}{n}$

$P = \{0 \xrightarrow{+\frac{1}{n}} \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \dots, 3\}$

---

(4) اكتب العنصر السابع في التجزئة المنتظمة التي عدد عناصرها 31 للفترة $[2,5]$

$n = 30$

العنصر السابع هو x_6.

$x_i = a + \frac{b-a}{n}(i)$

$x_6 = 2 + \frac{5-2}{30}(6)$

$= 2.6$

---

(5) اكتب الفترة الجزئية العاشرة في التجزئة المنتظمة التي عدد فتراتها الجزئية 40 للفترة $[1,3]$

$n = 40$

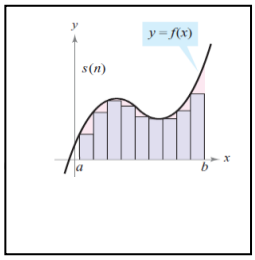
الفترة الجزئية العاشرة هي $[x_9, x_{10}]$

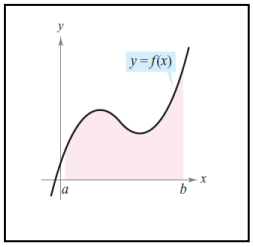
$x_9 = 1 + \frac{3-1}{40}(9) = 1.45$

$x_{10} = 1 + \frac{3-1}{40}(10) = 1.50$

الفترة الجزئية العاشرة هي $[1.45, 1.50]$

تقريب المساحات





- المساحة
  - بالتقريب
    - المستطيلات
      - التقريب من اليسار
      - من المنتصف
      - من اليمين
    - شبه المنحرف
    - سمبسون
  - بدقة
    - قواعد التكامل
    - نهاية مجموع ريمان

يسمى المقدار $\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x$ مجموع ريمان للدالة $f(x)$ على الفترة $[a,b]$ حيث x_i هي عناصر التجزئة و c_i هي نقاط القيم

لتقريب المساحة نستخدم قانون مجموع ريمان

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)$$

من اليسار

$$c_i = x_{i-1}$$

من المنتصف

$$c_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2} = x_{i-\frac{1}{2}}$$

من اليمين

$$c_i = x_i$$

طريقة التقريب باستخدام المستطيلات

هناك ثلاث طرق شائعة لتقريب المساحة تحت المنحنى باستخدام طريقة التقريب بالمستطيلات :

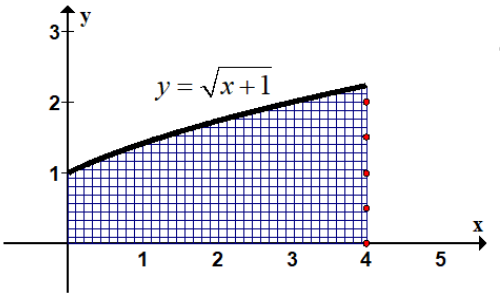
(1) التقريب اليساري L (قاعدة النقطة اليسرى)

$$c_i = x_{i-1}$$

نستطيع أن نحسب المساحة تحت المنحنى عن طريق رسم مستطيلات تمس أركانها اليسرى المنحنى

وتسمى هذه الطريقة طريقة تقريب المستطيلات من الجهة اليسرى

اوجد قيمة تقريبية لمساحة المنطقة المحصورة بالمنحنى $f(x)=\sqrt{x+1}$ ومحور السينات على الفترة $[0,4]$ باستخدام اربع مستطيلات حيث قواعد القيم هي نقطة النهاية اليسرى



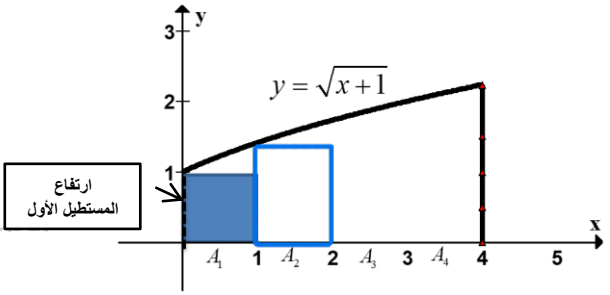
عدد الفترات الجزئية = عدد المستطيلات = 4

طول الفترة الجزئية = عرض المستطيل

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{4-0}{4} = 1$$

عناصر التجزئة $p: 0, 1, 2, 3, 4$

نقاط القيم (من جهة اليسار) $c_i: 0, 1, 2, 3$

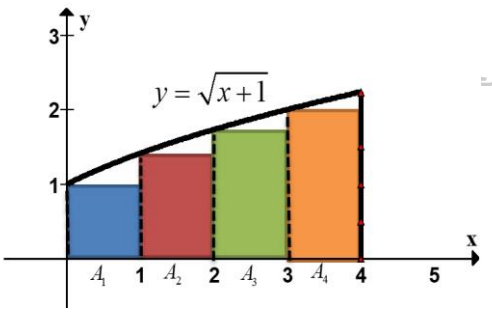


$$A \approx A_1 + A_2 + A_3 + A_4$$
$$= 1\times f(c_1) + 1\times f(c_2) + 1\times f(c_3) + 1\times f(c_4)$$
$$= 1\times f(0) + 1\times f(1) + 1\times f(2) + 1\times f(3)$$

$= 1\times\sqrt{1} + 1\times\sqrt{2} + 1\times\sqrt{3} + 1\times\sqrt{4}$

$= 6.14$

$\therefore A_L = 6.14$



$c_i = x_i$

(2) التقريب اليميني R (قاعدة النقطة اليمنى)

نستطيع أن نحسب المساحة تحت المنحنى عن طريق رسم مستطيلات تمس أركانها اليمنى المنحنى

وتسمى طريقة تقريب المستطيلات من الجهة اليمنى.

اوجد قيمة تقريبية لمساحة المنطقة المحصورة بالمنحنى $f(x)=\sqrt{x+1}$ ومحور السينات على الفترة $[0,4]$ باستخدام اربع مستطيلات حيث قواعد القيم هي نقطة النهاية اليمنى

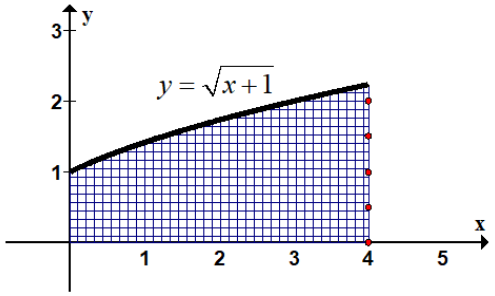
عدد الفترات الجزئية = عدد المستطيلات = 4

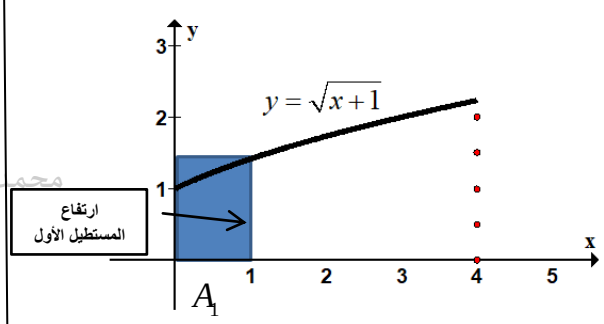
طول الفترة الجزئية = عرض المستطيل

$$\Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{4-0}{4}=1$$

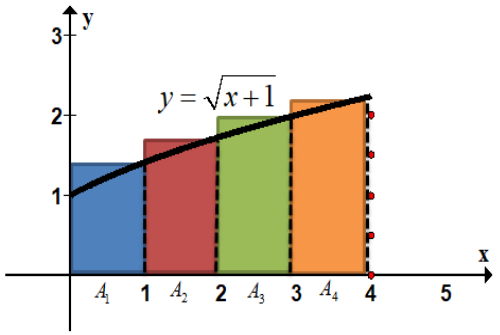
عناصر التجزئة $p:0,1,2,3,4$

نقاط القيم (من جهة اليمين) $c_i: 1,2,3,4$





$$A \approx A_1+A_2+A_3+A_4$$
$$=1\times f(1)+1\times f(2)+1\times f(3)+1\times f(4)$$
$$=1\times\sqrt{2}+1\times\sqrt{3}+1\times\sqrt{4}+1\times\sqrt{5}$$
$$=7.38$$
$$\therefore A_R=7.38$$



$$c_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2} = x_{i-\frac{1}{2}}$$

(3) التقريب المنتصفي M (قاعدة نقطة المنتصف)

نستطيع أن نحسب المساحة تحت المنحنى عن طريق رسم مستطيلات تقطع المنحنى في نقطة المنتصف

وتسمى هذه الطريقة طريقة تقريب المستطيلات باستخدام نقطة المنتصف

اوجد قيمة تقريبية لمساحة المنطقة المحصورة بالمنحنى $f(x) = \sqrt{x+1}$ ومحور السينات على الفترة $[0,4]$ باستخدام اربع مستطيلات حيث قواعد القيم هي نقطة النهاية المنتصف

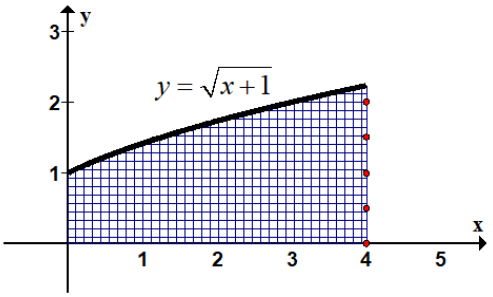
عدد الفترات الجزئية = عدد المستطيلات = 4

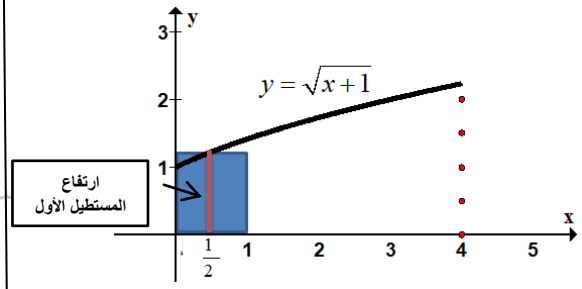
طول الفترة الجزئية = عرض المستطيل

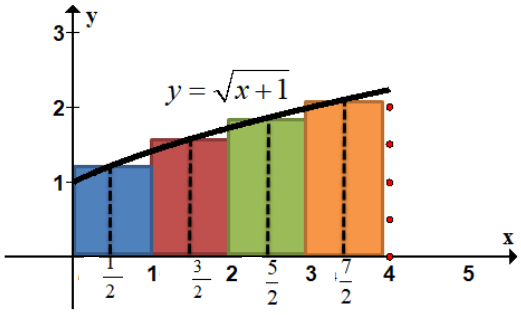
$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{4-0}{4} = 1$$

عناصر التجزئة $p: 0, 1, 2, 3, 4$

نقاط القيم (من جهة اليمين) $c_i : \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}$







$$A \approx A_1 + A_2 + A_3 + A_4$$

$$= 1 \times f(\frac{1}{2}) + 1 \times f(\frac{3}{2}) + 1 \times f(\frac{5}{2}) + 1 \times f(\frac{7}{2})$$

$$= 1 \times \sqrt{1.5} + 1 \times \sqrt{2.5} + 1 \times \sqrt{3.5} + 1 \times \sqrt{4.5}$$

$$= 6.8$$

$$\therefore A_M = 6.8$$

اوجد قيمة تقريبية لمساحة المنطقة المحصورة بالمنحنى $f(x)=2x-x^2$ ومحور السينات على الفترة $[0,2]$ باستخدام اربع مستطيلات حيث

$n=4$

$\Delta x=\frac{2-0}{4}=\frac{1}{2}$

(1) قواعد القيم هي نقطة النهاية اليسرى

$P=\{0,\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},2\}$

$ci=0,\frac{1}{2},1,\frac{3}{2}$ (اليسار) وعددها 4.

ملاحظة: اولاً اكتب التجزئة

$AL=\Delta x[f(0)+f(\frac{1}{2})+f(1)+f(1.5)]$

$=\frac{1}{2}[0+\frac{3}{2}+1+\frac{3}{4}]$

$=1.25$

---

(2) قواعد القيم هي نقطة النهاية اليمنى

$n=4$

$\Delta x=\frac{2-0}{4}=\frac{1}{2}$

$P=\{0,\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},2\}$

$ci=\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},2$ (اليمين) وعددها 4.

$AL=\Delta x[f(\frac{1}{2})+f(1)+f(1.5)+f(2)]$

$=\frac{1}{2}[\frac{3}{2}+1+\frac{3}{4}+0]$

$=1.25$

---

(3) قواعد القيم هي نقطة المنتصف

$n=4$

$\Delta x=\frac{2-0}{4}=\frac{1}{2}$

$P=\{0,\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},2\}$

$ci=\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{5}{4},\frac{7}{4}$ وعددها 4 (المتوسطات)

$AL=\Delta x[f(\frac{1}{4})+f(\frac{3}{4})+f(\frac{5}{4})+f(\frac{7}{4})]$

$=\frac{1}{2}[0.4375+0.9375+0.9375+0.4375]$

$=1.375$

اوجد قيمة تقريبية لمساحة المنطقة المحصورة بالمنحنى $f(x)=\cos x$ ومحور السينات على الفترة $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ باستخدام اربع مستطيلات حيث

$n=4$

$\Delta x=\frac{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}}{2}=\frac{\pi}{4}$

$P=\{-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{4},0,\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\}$

(1) قواعد القيم هي نقطة النهاية اليسرى

ملاحظة: اولاً اكتب التجزئة

$AL=\Delta x[f(-\frac{\pi}{2})+f(-\frac{\pi}{4})+f(0)+f(\frac{\pi}{4})]$

$=\frac{\pi}{4}[0+\frac{\sqrt{2}}{2}+1+\frac{\sqrt{2}}{2}]$

$=1.9$

---

(2) قواعد القيم هي نقطة النهاية اليمنى

$n=4$

$\Delta x=\frac{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}}{2}=\frac{\pi}{4}$

$P=\{-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{4},0,\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\}$

$AL=\Delta x[f(-\frac{\pi}{4})+f(0)+f(\frac{\pi}{4})+f(\frac{\pi}{2})]$

$=\frac{\pi}{4}[\frac{\sqrt{2}}{2}+1+\frac{\sqrt{2}}{2}+0]$

$=1.9$

(1) اعتمد على الجدول المجاور في تقدير قيمة مساحة المنطقة المحصورة بالمنحنى $f(x)$ ومحور السينات على الفترة $[0,1]$ حيث قواعد القيم هي نقطة النهاية اليمنى

x	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
$f(x)$	2.0	2.2	1.6	1.4	1.6	2.0

$$A_R = \Delta x \left[f(0.2) + f(0.4) + f(0.6) + f(0.8) + f(1) \right]$$

$$= 0.2 \left[2.2 + 1.6 + 1.4 + 1.6 + 2.0 \right]$$

$$= 1.76$$

---

(2) اعتمد على الجدول المجاور في تقدير قيمة مساحة المنطقة المحصورة بالمنحنى $f(x)$ ومحور السينات على الفترة $[0,0.5]$ حيث قواعد القيم هي نقطة النهاية اليسرى

x	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$f(x)$	2.0	2.4	2.6	2.7	2.6	2.4

$$A_L = \Delta x \left[f(0) + f(0.1) + f(0.2) + f(0.3) + f(0.4) \right]$$

$$= 0.1 \left[2.0 + 2.4 + 2.6 + 2.7 + 2.6 \right]$$

$$= 1.23$$

---

(3) اعتمد على الجدول المجاور في تقدير قيمة مساحة المنطقة المحصورة بالمنحنى $f(x)$ ومحور x على الفترة $[1,2.6]$ حيث قواعد القيم هي نقطة النهاية اليمنى

x	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2	2.4	2.6
$f(x)$	0.0	0.4	0.6	0.8	1.2	1.4	1.2	1.4	1.0

$$A_R = \Delta x \left[f(1.2) + f(1.4) + f(1.6) + f(1.8) + f(2) + f(2.2) + f(2.4) + f(2.6) \right]$$

$$= 0.2 \left[0.4 + 0.6 + 0.8 + 1.2 + 1.4 + 1.2 + 1.4 + 1 \right]$$

$$= 1.6$$

محمد عمر الخطيب

اوجد قيمة تقريبية لمساحة المنطقة المحصورة بالمنحنى $f(x)=2x$ ومحور السينات على الفترة $[0,4]$

(1) باستخدام 16 مستطيل حيث قواعد القيم هي نقطة النهاية اليمنى $c_i = x_i$

ملاحظة: عندما يكون عدد المستطيلات قليل نستخدم طريقة التجزئة وغير ذلك نستخدم قانون مجموع ريمان

$$A_R = \sum_{i=1}^{16} f(c_i)\,\Delta x$$

$$= \sum_{i=1}^{16} \frac{1}{2} i \cdot \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{8} \sum_{i=1}^{16} i$$

$$= \frac{1}{8} \cdot \frac{16(17)}{2} = 17$$

$\Delta x = \frac{4-0}{16} = \frac{1}{4}$

$c_i = x_i = a + \Delta x\, i$

$= 0 + \frac{1}{4} i = \frac{1}{4} i$

$f(c_i) = 2c_i$

$= 2\left(\frac{1}{4} i\right)$

$= \frac{1}{2} i$

---

(2) باستخدام 24 مستطيل حيث قواعد القيم هي نقطة النهاية اليسرى $c_i = x_{i-1}$

$$A_L = \sum_{i=1}^{24} f(c_i)\,\Delta x$$

$$= \sum_{i=1}^{24} \frac{1}{3}(i-1) \cdot \frac{1}{6}$$

$$= \frac{1}{18} \sum_{i=1}^{24} (i-1)$$

$$= \frac{1}{18}\left[\frac{24(25)}{2} - 24(1)\right] = 15.33$$

$\Delta x = \frac{4-0}{24} = \frac{1}{6}$

$c_i = x_{i-1} = a + \Delta x(i-1)$

$= 0 + \frac{1}{6}(i-1)$

$f(c_i) = 2c_i$

$= 2 \cdot \frac{1}{6}(i-1)$

$= \frac{1}{3}(i-1)$

---

(3) باستخدام 8 مستطيلات حيث قواعد القيم هي نقطة المنتصف $c_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2} = x_{i-\frac{1}{2}}$

$$A_M = \sum_{i=1}^{8} f(c_i)\,\Delta x$$

$$= \sum_{i=1}^{8} \left(i - \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{8} \left(i - \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{8(9)}{2} - 8\left(\frac{1}{2}\right)\right] = 16$$

هذا اصل تقريب

$\Delta x = \frac{4-0}{8} = \frac{1}{2}$

$c_i = x_{i-\frac{1}{2}} = a + \Delta x\left(i - \frac{1}{2}\right)$

$= 0 + \frac{1}{2}\left(i - \frac{1}{2}\right)$

$f(c_i) = 2c_i$

$= 2 \cdot \frac{1}{2}\left(i - \frac{1}{2}\right)$

$= i - \frac{1}{2}$

محمد عمر الخطيب

تعريف المساحة

المساحة (بدقة) هي نهاية مجموع ريمان

اذا كانت الدالة $f(x)$ متصلة على الفترة $[a,b]$ حيث $f(x)\geq 0$ فان المساحة A تحتى منحنى الدالة وفوق محور السينات تعطى بالصيغة

$$A=\lim_{n\to\infty} A_n$$

$$A_n=\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x=\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

ملاحظة : عندما تكون n كبيرة فان $c_i=x_i$

واذا كانت $f(x)\leq 0$ فان المساحة A فوق منحنى الدالة وتحت محور السينات تعطى بالصيغة

$$A=\lim_{n\to\infty} A_n$$

$$A_n=\sum_{i=1}^{n} -f(c_i)\Delta x=\sum_{i=1}^{n} -f(x_i)\Delta x$$

اوجد المساحة تحت المستقيم $f(x)=2x$ وفوق محور السينات على الفترة $[1,4]$

باستخدام تعريف المساحة (نهاية مجموع ريمان)

$$A_n=\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left(2+\frac{6}{n}i\right)\cdot\frac{3}{n}$$

$$=\frac{3}{n}\left[\sum_{i=1}^{n}2+\frac{6}{n}\sum_{i=1}^{n}i\right]$$

$$=\frac{3}{n}\left[2n+\frac{6}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\right]$$

$$=6+\frac{9(n+1)}{n}$$

$$A=\lim_{n\to\infty} A_n=\lim_{n\to\infty} 6+\frac{9(n+1)}{n}=6+9=15$$

$\therefore A=15$

$\Delta x=\frac{3}{n}$

$c_i=x_i=a+\Delta x\, i$

$=1+\frac{3}{n}i$

$f(c_i)=2c_i$

$=2\left(1+\frac{3}{n}i\right)$

$=2+\frac{6}{n}i$

(1) اوجد المساحة تحت المنحنى $f(x)=3x^2$ وفوق محور السينات (x) على الفترة $[0,4]$

باستخدام تعريف المساحة (نهاية مجموع ريمان)

$$An=\sum_{i=1}^{n} f(ci)\,\Delta x$$

$$=\sum_{i=1}^{n} \frac{48}{n^2} i^2 \cdot \frac{4}{n}$$

$$=\frac{192}{n^3}\left[\sum_{i=1}^{n} i^2\right]$$

$$=\frac{192}{n^3}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]$$

$$=\frac{32(n+1)(2n+1)}{n^2}$$

$$A=\lim_{n\to\infty} An=\lim_{n\to\infty}\frac{32(n+1)(2n+1)}{n^2}$$

$$=32(2)$$

$$=64$$

$$A=64$$

$\Delta x=\frac{4}{n}$

$ci=xi=a+\Delta x\, i$

$=0+\frac{4}{n} i$

$=\frac{4}{n} i$

$f(ci)=3ci^2$

$=3\left(\frac{4}{n} i\right)^2$

$=3\cdot\frac{16}{n^2} i^2$

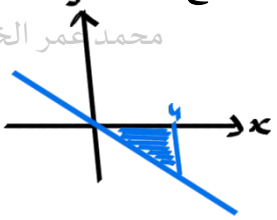
$=\frac{48}{n^2} i^2$

---

(2) اوجد المساحة فوق الدالة $f(x)=-2x$ وتحت محور السينات (x) على الفترة $[0,4]$

باستخدام تعريف المساحة (نهاية مجموع ريمان)

بما ان الدالة سالبة على الفترة $[0,4]$ فان



$$An=\sum_{i=1}^{n} -f(ci)\,\Delta x$$

$$=\sum_{i=1}^{n} -\left(-\frac{8}{n} i\right)\cdot\frac{4}{n}$$

$$=\frac{32}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i=\frac{32}{n^2}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]=\frac{16(n+1)}{n}$$

$$A=\lim_{n\to\infty} An=\lim_{n\to\infty}\frac{16(n+1)}{n}=16$$

$\Delta x=\frac{4}{n}$

$ci=xi=a+\Delta x\, i$

$=0+\frac{4}{n} i$

$=\frac{4}{n} i$

$f(ci)=-2ci$

$=-2\left(\frac{4}{n} i\right)$

$=-\frac{8}{n} i$

(1) اذا كان $f(x)=2x-2x^2$ دالة معرفة على الفترة $[0,1]$ حيث $A_n=\dfrac{2(n+1)(n-1)}{3n^2}$

فأوجد المساحة المحصورة بين الدالة ومحور x

$A=\lim\limits_{n\to\infty} A_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2(n+1)(n-1)}{3n^2}=\dfrac{2}{3}$.

$\therefore$ المطلوب $=\dfrac{2}{3}$

---

(2) اذا كان $f(x)$ دالة متصلة و $f(x)\geq 0$ على الفترة $[0,1]$ حيث $A_n=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(\dfrac{i}{n})^2$

فاوجد المساحة المحصورة بين الدالة $f(x)$ ومحور x على الفترة $[0,1]$

$A_n=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{i^2}{n^2}$

$=\dfrac{1}{n^3}\sum\limits_{i=1}^{n} i^2$

$=\dfrac{1}{n^3}\cdot\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$=\dfrac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$

$A=\lim\limits_{n\to\infty} A_n$

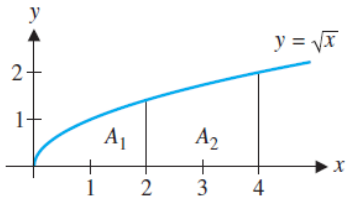
$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$

$=\dfrac{1}{3}$.

$\therefore$ المطلوب $=\dfrac{1}{3}$

---

(3) اعتمد على الشكل المجاور في تحديد قيمة $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{2}\sqrt{1+\dfrac{i}{n}}\dfrac{2}{n}$ بدلالة A_1 او A_2



$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{2}\sqrt{1+\dfrac{i}{n}}\cdot\dfrac{2}{n}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{2+\dfrac{2}{n}i}\cdot\dfrac{2}{n}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}\ \Delta x$.

$=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i)\ \Delta x\ ,\ [2,4]$

$=A_2$

$\Delta x=\dfrac{2}{n}=\dfrac{b-a}{n}$

$\therefore b-a=2$

$\Longrightarrow$

$a=0$, $b=2$

$x_i=0+\dfrac{2}{n}i$

$=\dfrac{2}{n}i$

$f(x_i)=\sqrt{2+x_i}$

$f(x)=\sqrt{2+x}$

هذا ليس صحيح لان المطلوب $\sqrt{x}$

$a=2$, $b=4$

$x_i=2+\dfrac{2}{n}i$

$f(x_i)=\sqrt{x_i}$

$f(x)=\sqrt{x}$ ✓

التكامل المحدود

ملاحظة: تم تقديم جزء من الدرس الخامس في هذا الدرس

اذا كانت الدالة $f(x)$ معرفة على الفترة $[a,b]$ فان التكامل المحدود للدالة f من a الى b هو

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} R_n$$

$$R_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \frac{b-a}{n}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

بشرط وجود النهاية، ونقول ان الدالة قابلة للتكامل

ملاحظة : اذا كانت الدالة متصلة على الفترة $[a,b]$ فان الدالة قابلة للتكامل على نفس الفترة

عبر عن التكامل في كل مما يلي بصورة نهاية مجموع ريمان

$$\int_a^b \to \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}$$

ملاحظة: $x \to x_i = c_i$

$dx \to \Delta x$

(1) $\int_0^2 (3x^2-1)\,dx$

$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(3x_i^2-1)\Delta x$

$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[3\left(\frac{2}{n}i\right)^2-1\right]\cdot\frac{2}{n}$

$\Delta x = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n}$

$c_i = x_i = 0+\frac{2}{n}i$

$= \frac{2}{n}i$

---

(2) $\int_0^1 \sin(\pi x)\,dx$

$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(\sin \pi x_i)\,\Delta x$

$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sin\left(\pi\cdot\frac{1}{n}i\right)\cdot\frac{1}{n}$

$\Delta x = \frac{1}{n}$

$x_i = 0+\frac{1}{n}i$

$= \frac{1}{n}i$

محمد عمر الخطيب

(1) اذا كان $f(x)$ دالة متصلة على الفترة $[0,3]$ حيث $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = \frac{5}{2} + \frac{3-n}{2n}$

فأوجد $\int_0^3 f(x)\,dx$

$$\int_0^3 f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(xi)\,\Delta x.$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{5}{2} + \frac{3-n}{2n}$$

$$= \frac{5}{2} - \frac{1}{2}$$

$$= 2$$

---

(2) إذا كان $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \frac{(n+1)(2n+1)}{4n^2}$ على الفترة $[0,2]$ فاوجد $\int_0^2 f(x)\,dx$

$$\int_0^2 f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(xi)\,\Delta x.$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(2n+1)}{4n^2}$$

$$= \frac{2}{4}$$

$$= \frac{1}{2}$$

---

(3) إذا كان $R_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 2(1+\frac{i}{n})$ على الفترة $[1,2]$ فاوجد $\int_1^2 f(x)\,dx$

$$\int_1^2 f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} R_n$$

$$= \lim_{n\to\infty} 2 + \frac{n+1}{n}$$

$$= 2 + 1$$

$$= 3.$$

$$R_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} 2\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n} 2 + \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{n} i \right]$$

$$= \frac{1}{n}\left[2n + \frac{2}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} \right]$$

$$= 2 + \frac{n+1}{n}.$$

محمد عمر الخطيب

عبر عن النهاية في كل مما يلي بصورة تكامل محدود

(1) $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(\sin^2 c_i + c_i)\Delta x$, $[0,\pi]$ والتجزئة على الفترة

الفترة موجودة

$= \int_0^{\pi} (\sin^2 x + x)\, dx$

$\int_a^b \to \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}$

ملاحظة: $x \to x_i = c_i$

$dx \to \Delta x$

---

(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\frac{i}{n})^2$

الفترة غير موجودة

$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(\frac{i}{n})^2 \cdot \frac{1}{n}$

$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2 \cdot \Delta x$

$= \int_0^1 x^2\, dx$

$\Delta x = \frac{1}{n}$

$a = 0$

$b - a = 1$

$\therefore b = 1$

$x_i = 0 + \frac{1}{n} i$

$x_i = \frac{1}{n} i$

1. نجرب $a = 0$ ونجد b من خلال

$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{n} \to$

$b - a = 1 \to b = 1$

2. اوجد $x_i = a + \Delta x\, i$

$x_i = 0 + \frac{1}{n} i = \frac{i}{n}$

3. استبدل Δx بـ $\frac{1}{n}$

و استبدل x_i بـ $\frac{1}{n} i$

---

(3) $\lim_{n\to\infty}\frac{f(\frac{1}{n}) + f(\frac{2}{n}) + f(\frac{3}{n}) + \cdots + f(\frac{n}{n})}{n}$

$= \lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n} f(\frac{i}{n})}{n}$

$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\frac{i}{n}) \cdot \frac{1}{n}$

$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \int_0^1 f(x)\, dx$

$\Delta x = \frac{1}{n}$

$\therefore b - a = 1 \Rightarrow a = 0, b = 1$

$x_i = \frac{1}{n} i$

الفترة $[0,1]$

---

(4) $\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n^2} + \frac{n+2}{n^2} + \frac{n+3}{n^2} + \ldots + \frac{2n}{n^2}$

يوجد أكثر من طريقة لحل السؤال

$= \lim_{n\to\infty}\sum \frac{n+i}{n^2}$

$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{n+i}{n} \cdot \frac{1}{n}$

$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(1+\frac{i}{n}) \cdot \frac{1}{n}$

$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(1+x_i) \cdot \frac{1}{n}$

$= \int_0^1 (1+x)\, dx$

$= \frac{3}{2}$

$\Delta x = \frac{1}{n}$

$\therefore b - a = 1$

$a = 0$

$b = 1$

$x_i = 0 + \frac{1}{n} i$

$= \frac{1}{n} i$

الفترة $[0,1]$

(1) $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} e^{\frac{2i}{n}}\,\frac{2}{n}$

راجع سؤال 2 صفحة 222 من الملزمة
هذا راح نناقش السؤال لكن بطريقة اسهل

$= \lim_{x\to\infty}\sum_{i=1}^{n} e^{x}\cdot\Delta x$

$= \int_0^2 e^x\,dx$

$= e^x\Big]_0^2$

$= e^2 - 1$

$\Delta x = \frac{2}{n}$

$b-a = 2$

$\Rightarrow a=0\ ,\ b=2$

$x_i = 0 + \frac{2}{n}i$

$= \frac{2}{n}i$

الفترة $[0,2]$

---

(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\sin\frac{3\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{n}\right]$

$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\left(\frac{\pi i}{n}\right)$

$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sin\left(\pi\cdot\frac{i}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}$

$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sin(\pi\cdot x_i)\,\Delta x$

$= \int_0^1 \sin(\pi x)\,dx$

$= -\frac{\cos(\pi x)}{\pi}\Big]_0^1$

$= \frac{2}{\pi}$

$\Delta x = \frac{1}{n}$

$b-a = 1$

$a=0 \Rightarrow b=1$

$x_i = 0 + \frac{1}{n}i$

$= \frac{1}{n}i$

والفترة $[0,1]$

محمد عمر الخطيب

اوجد قيمة التكامل بحساب نهاية مجموع ريمان (تعريف التكامل المحدود)

(1) $\int_0^1 2x\,dx = \lim_{n\to\infty} R_n$

$\Delta x = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}$

$x_i = 0 + \frac{1}{n} i$

$= \frac{1}{n} i$

$f(x) = 2x$

$f(x_i) = 2x_i$

$= 2(\frac{1}{n} i)$

$= \frac{2}{n} i$

$R_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$

$= \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{n} i \cdot \frac{1}{n}$

$= \frac{2}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i$

$= \frac{2}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{n}$

$\lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1 \Rightarrow \int_0^1 2x\,dx = 1$

---

(2) $\int_0^3 (4x+1)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$

$\Delta x = \frac{3-0}{n} = \frac{3}{n}$

$x_i = 0 + \frac{3}{n} i$

$= \frac{3}{n} i$

$f(x) = 4x + 1$

$f(x_i) = 4x_i + 1$

$= 4(\frac{3}{n} i) + 1$

$= \frac{12}{n} i + 1$

$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (\frac{12}{n} i + 1) \cdot \frac{3}{n}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n} \sum_{i=1}^{n} (\frac{12}{n} i + 1)$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n} \left[\frac{12}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} + n(1) \right]$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{18(n+1)}{n} + 3$

$= 18 + 3$

$= 21$

$\therefore \int_0^3 (4x+1)\,dx = 21$

(1) $\int_0^2 x^2\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$

$= \lim_{n\to\infty} \sum \left(\frac{4}{n^2} i^2\right).\frac{2}{n}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{8}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{8}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$= \lim \frac{8(n+1)(2n+1)}{6n^2}$

$= \frac{16}{6} = 8/3$.

$\therefore \int_0^2 x^2\,dx = 8/3$.

$\Delta x = \frac{2}{n}$

$x_i = 0 + \frac{2}{n} i$

$= \frac{2}{n} i$

$f(x) = x^2$

$f(x_i) = x_i^2$

$= \left(\frac{2}{n} i\right)^2$

$= \frac{4}{n^2} i^2$

---

(2) $\int_{-2}^{2} (x^2 - 1)\,dx = \lim_{n\to\infty} R_n$

$R_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$

$= \sum_{i=1}^{n} \left(3 - \frac{16}{n} i + \frac{16}{n^2} i^2\right) \frac{4}{n}$

$= \sum_{i=1}^{n} \frac{12}{n} - \frac{64}{n^2} i + \frac{64}{n^3} i^2$

$= \frac{12}{n} \cdot n - \frac{64}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} + \frac{64}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$= 12 - \frac{32(n+1)}{n} + \frac{32(n+1)(2n+1)}{3n^2}$

$\lim_{n\to\infty} R_n = 12 - 32 + \frac{32(2)}{3} = \frac{4}{3}$.

$\therefore \int_{-2}^{2} (x^2 - 1)\,dx = \frac{4}{3}$.

$\Delta x = \frac{2 - -2}{n} = \frac{4}{n}$

$x_i = -2 + \frac{4}{n} i$

$f(x) = x^2$

$f(x_i) = (x_i)^2$

$= \left(-2 + \frac{4}{n} i\right)^2 - 1$

$= 4 - \frac{16}{n} i + \frac{16}{n^2} i^2 - 1$

$= 3 - \frac{16}{n} i + \frac{16}{n^2} i^2$

خواص التكاملات المحدودة

(1)خاصية التوزيع على الجمع والطرح

$$\int_a^b (m\ f(x)+k\ g(x))dx = m\int_a^b f(x)\,dx + k\int_a^b g(x)\,dx$$

(2)خاصية التكامل على نقطة

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

(3)خاصية الثابت

$$\int_a^b c\,dx = c(b-a)$$

(4)خاصية الترتيب

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

(5)خاصية الاضافة (تكامل الدوال المتفرعة)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

(6)خاصية السيادة اذا كانت $f(x) \geq g(x)$ لكل x على الفترة $[a,b]$

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$$ فان

(7)خاصية الاحاطة اذا كانت

القيمة العظمى المطلقة للدالة $f(x)$ على الفترة $[a,b]$ هي $M = Max(f)$

والقيمة الصغرى المطلقة للدالة $f(x)$ على الفترة $[a,b]$ هي $m = Min(f)$

$$(b-a)m \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq (b-a)M$$ فان

محمد عمر الخطيب

ايجاد التكامل المحدود

يمكن البدء لمن حلك بالاستخدام الآلة الحاسبة .

اوجد قيمة كل مما يلي

(1) $\int_1^3 (4x+1)\,dx =$ $2x^2+x\Big]_1^3 = [2(3)^2+3]-[2(1)^2+1] = 18$

---

(2) $\int_2^5 3x(x+2)\,dx =$ $\int_2^5 3x^2+6x\,dx$

$= x^3+3x^2\Big]_2^5$

$= [5^3+3(5)^2]-[2^3+3(2)^2]$

$= 180$

---

(3) $\int_0^{\ln 2} e^{2x}\,dx =$ $\frac{e^{2x}}{2}\Big]_0^{Ln2} = \frac{1}{2}[e^{2Ln2}-e^0]$

$= 3/2$

---

(4) $\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx =$ $\tan^{-1}x\Big]_0^1 = \tan^{-1}1-\tan^{-1}0 = \frac{\pi}{4}$

---

(5) $\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx =$ $\frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}Ln|x^2+1|\Big]_0^1$

$= \frac{1}{2}[Ln2-Ln1]$

$= \frac{1}{2}Ln2 = Ln\sqrt{2}$

---

(6) $\int_0^1 (x^5+x^{\frac{1}{5}})\,dx =$ $\frac{x^6}{6}+\frac{5}{6}x^{6/5}\Big]_0^1$

$= \frac{1}{6}+\frac{5}{6}$

$= 1$

محمد عمر الخطيب

اوجد قيمة كل مما يلي

(1) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sec^2 x\, dx = \tan x \Big]_{\pi/6}^{\pi/3} = \tan\frac{\pi}{3} - \tan\frac{\pi}{6} = \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

---

(2) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan x\, dx = \int_{0}^{\pi/4} \frac{\sin x}{\cos x}\, dx = -\int_{0}^{\pi/4} \frac{-\sin x}{\cos x}\, dx$

$= -\ln|\cos x|\Big]_{0}^{\pi/4}$

$= -\left[\ln\cos\frac{\pi}{4} - \ln\cos 0\right] = -\ln\frac{1}{\sqrt{2}} = \ln\sqrt{2}$

---

(3) $\int_{0}^{1} xe^{x^2}\, dx = \frac{1}{2}\int 2x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} e^{x^2}\Big]_{0}^{1} = \frac{1}{2}(e - e^0) = \frac{1}{2}(e-1)$

---

(4) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x - \cos 3x\, dx = \frac{-\cos 2x}{2} - \frac{\sin 3x}{3}\Big]_{0}^{\pi/2}$

$= \left[-\frac{\cos\pi/2}{2} - \frac{\sin 3\pi/2}{3}\right] - \left[\frac{-\cos 0}{2} - \frac{\sin 0}{3}\right]$

$= \frac{4}{3}$.

---

(5) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\, dx = \int_{0}^{\pi/2} \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)\, dx$

$= \frac{1}{2}\left(x - \frac{\sin 2x}{2}\right)\Big]_{0}^{\pi/2}$

$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\sin\pi}{2}\right) - \left(0 - \frac{\sin 0}{2}\right)\right]$

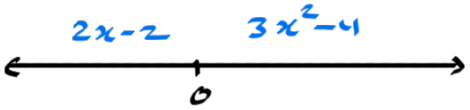
$= \frac{\pi}{4}$

محمد عمر الخطيب

تكامل الدوال المتفرعة

(1) اذا كانت $f(x)=\begin{cases}3x^2-2 & x\geq 0\\ 2x-2 & x<0\end{cases}$ **فأوجد** $\int_{-2}^{4} f(x)\,dx$

$$\int_{-2}^{4} f(x)\,dx=\int_{-2}^{0} f(x)\,dx+\int_{0}^{4} f(x)\,dx$$



تجزئة التكامل عند نقطة التفرع

$$=\int_{-2}^{0}(2x-2)\,dx+\int_{0}^{4}3x^2-2\,dx$$

$$=\left[x^2-2x\right]_{-2}^{0}+\left[x^3-2x\right]_{0}^{4}$$

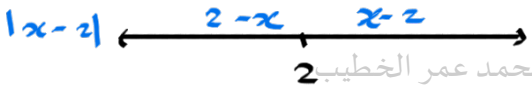
$$=-8+56$$

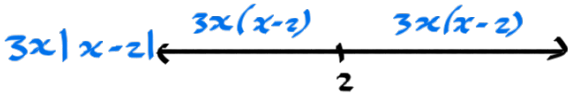
$$=48$$

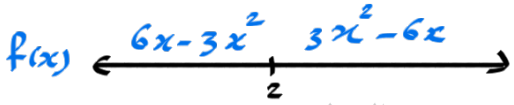
---

(2) اذا كانت $f(x)=3x|x-2|$ **فاوجد** $\int_{0}^{4} f(x)\,dx$

$$\int_{0}^{4} f(x)\,dx=\int_{0}^{2} f(x)\,dx+\int_{2}^{4} f(x)\,dx$$







$$=\int_{0}^{2}(6x-3x^2)\,dx+\int_{2}^{4}(3x^2-6x)\,dx$$

$$=\left[3x^2-x^3\right]_{0}^{2}+\left[x^3-3x^2\right]_{2}^{4}$$

$$=4+20=24$$

---

(3) اذا كانت $f(x)=2\left[x+3\right]$ **فاوجد** $\int_{-1}^{2} f(x)\,dx$

$$\int_{-1}^{2} 2\,[x+3]\,dx$$

$$[x]=\begin{cases}-1 & -1\leq x<0\\ 0 & 0\leq x<1\\ 1 & 1\leq x<2\end{cases}$$

↓

اجمع لقيم الدالة العدد 3 ، اضربي في 2

$$2[x+3]=\begin{cases}4 & -1\leq x<0\\ 6 & 0\leq x<1\\ 8 & 1\leq x<2\end{cases}$$

$$=\int_{-1}^{0}4\,dx+\int_{0}^{1}6\,dx+\int_{1}^{2}8\,dx$$

$$=4+6+8$$

$$=18$$

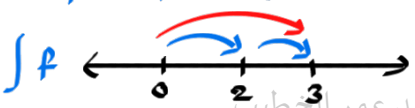
محمد عمر الخطيب

(1) اكتب $\int_0^2 f(x)\,dx + \int_2^3 f(x)\,dx$ **بصورة تكامل منفرد**

$\int_0^2 f(x)\,dx + \int_2^3 f(x)\,dx$

$= \int_0^3 f(x)\,dx$

ممكن الحل باستخدام خط الأعداد



---

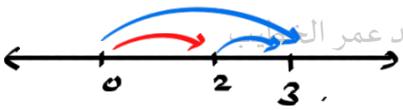
(2) اكتب $\int_0^3 f(x)\,dx - \int_2^3 f(x)\,dx$ **بصورة تكامل منفرد**

$\int_0^3 f(x)\,dx - \int_2^3 f(x)\,dx$

$= \int_0^2 f(x)\,dx + \int_2^3 f(x)\,dx - \int_2^3 f(x)\,dx$

$= \int_0^2 f(x)\,dx$

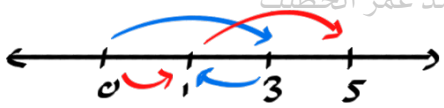
ممكن الحل باستخدام خط الأعداد



---

(3) اكتب $\int_0^3 f(x)\,dx + \int_3^1 f(x)\,dx + \int_1^5 f(x)\,dx$ **بصورة تكامل منفرد**

$\int_0^3 f(x)\,dx + \int_3^1 f(x)\,dx + \int_1^5 f(x)\,dx = \int_0^5 f(x)\,dx$



$\int_0^3 + \int_3^1 + \int_1^5 = \int_0^1 + \int_1^3 - \int_3^1 + \int_1^5 = \int_0^1 + \int_1^5 = \int_0^5$

---

(4) اذا كان $\int_1^3 f(x)\,dx = 3$ و $\int_1^3 g(x)\,dx = -2$ **فاوجد**

$(a) \int_1^3 [f(x)+g(x)]\,dx = \int_1^3 f(x)\,dx + \int_1^3 g(x)\,dx = 3 - 2 = 1$

$(b) \int_1^3 [f(x)-g(x)]\,dx = \int_1^3 f(x)\,dx - \int_1^3 g(x)\,dx = 3 - (-2) = 5$

$(c) \int_1^3 [2f(x)-g(x)]\,dx = 2\int_1^3 f(x)\,dx - \int_1^3 g(x)\,dx = 2(3) - (-2) = 8$

$(d) \int_1^3 [4g(x)-3f(x)]\,dx = 4\int_1^3 g(x)\,dx - 3\int_1^3 f(x)\,dx = 4(-2) - 3(3) = -17$

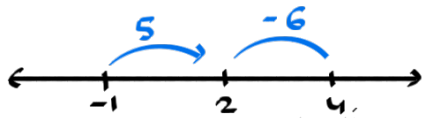
محمد عمر الخطيب

(1) اذا كان $\int_2^4 f(x)\,dx = -6$ ، $\int_{-1}^{2} 3f(x)\,dx = 15$ **فاوجد** $\int_{-1}^{4} f(x)\,dx$

$$\int_{-1}^{4} f(x)\,dx = \int_{-1}^{2} f(x)\,dx + \int_{2}^{4} f(x)\,dx$$

$$= 5 + (-6)$$

$$= -1$$



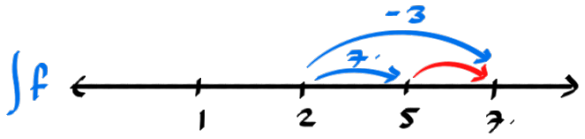
---

(2) اذا كانت $\int_2^5 f(x)\,dx = 7$ ، $\int_2^7 f(x)\,dx = -3$ ، $\int_1^7 f(x)\,dx = 10$ **فأوجد**

(a) $\int_2^2 f(x)\,dx = 0$

(b) $\int_5^7 f(x)\,dx = \int_2^7 f\,dx - \int_2^5 f\,dx$

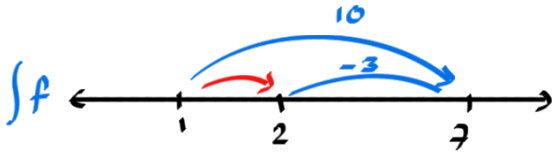
$= -3 - 7 = -10$



(c) $\int_1^2 f(x)\,dx = \int_1^7 f\,dx - \int_2^7 f\,dx$

$= 10 - (-3)$

$= 13$



---

(3) اذا كانت $f(x)$ **دالة متصلة حيث** $\int_2^{2x} f(t)\,dt = 4x^2 + bx - 1$ **فأوجد قيمة** b

نختار قيمة x تكون مناسبة مثل $x = 1$

$$\int_2^2 f(t)\,dt = 4(1)^2 - b(1) - 1$$

$$0 = 4 - b - 1 \Rightarrow b = -3$$

محمد عمر الخطيب

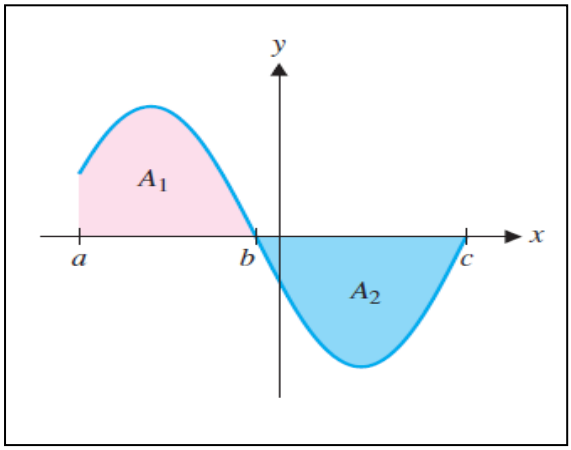
العلاقة بين المساحة والتكامل

(1) اذا كانت الدالة فوق محور السينات $f(x) \geq 0$

فان قيمة المساحة المحصور بالدالة ومحور السينات

تساوي قيمة التكامل المحدود على الفترة

$$A_1 = \int_a^b f(x)\,dx$$



(2) اذا كانت الدالة تحت محور السينات $f(x) \leq 0$

فان قيمة المساحة المحصور بالدالة ومحور السينات

تساوي سالب قيمة التكامل المحدود على الفترة

$$A_2 = -\int_b^c f(x)\,dx$$

A_1 , A_2 هذه اعداد تمثل المساحة

فتكون دائماً موجبة

(3) المساحة المحصورة بين الدالة ومحور x هي $A = A_1 + A_2$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

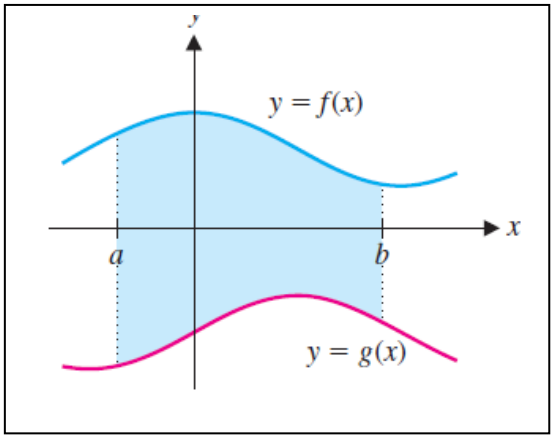
بشكل عام

اذا كانت كل من $f(x)$ و $g(x)$ دوال متصلة على الفترة $[a,b]$ حيث $f(x) \geq g(x)$ فان

المساحة المحصورة بين المنحنين تعطى بالتكامل

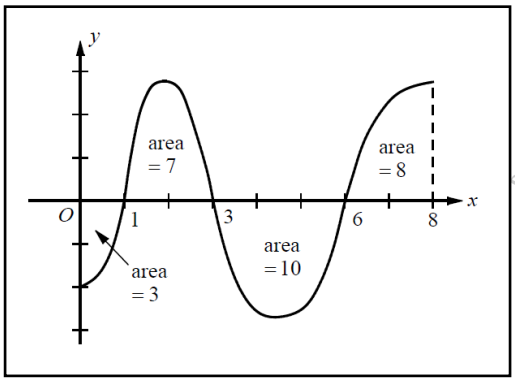
$$A = \int_a^b [\text{ الدالة الأعلى } - \text{ الدالة الأدنى }]\,dx$$

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$$



ملاحظة: يعتبر محور x (السينات) دالة معادلتها $y = 0$

(1) استخدم التمثيل البياني المجاور للدالة $f(x)$ والمساحات المحددة في ايجاد قيمة التكاملات التالية



$(a)\ \int_0^1 f(x)\,dx$ = -3

$(b)\ \int_0^3 f(x)\,dx$ = -3 + 7 = 4

$(c)\ \int_0^8 f(x)\,dx$ = -3 + 7 + (-10) + 8 = 2

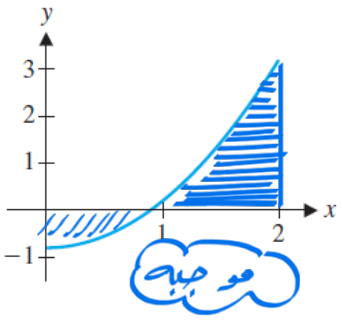
(d) المساحة المحصورة بالدالة ومحور x

A = 3 + 7 + 10 + 8 = 28

---

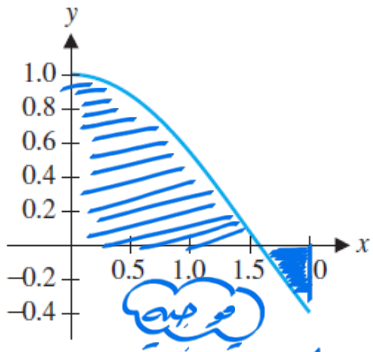
(2) استخدم التمثيل البياني المجاور لتحديد اذا كان قيمة التكامل $\int_0^2 f(x)\,dx$ موجبة ام سالبة

a.



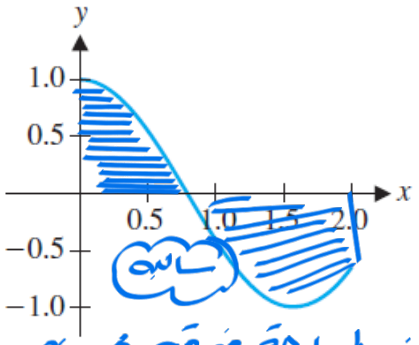
لان المساحة فوق محور x اكبر من المساحة تحت محور x

b.



لان المساحة فوق محور x اكبر من المساحة تحت محور x

c.



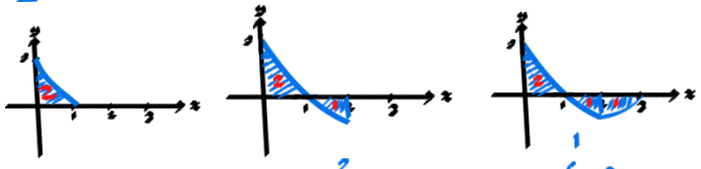
لان المساحة فوق محور x اقل من المساحة تحت محور x

---

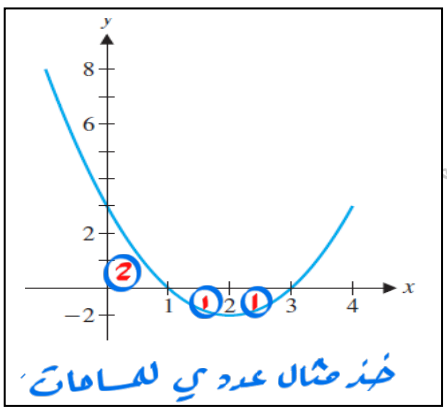
(3) استخدم التمثيل البياني لترتيب القيم التالية تصاعدياً

$\int_0^1 f(x)\,dx$, $\int_0^2 f(x)\,dx$, $\int_0^3 f(x)\,dx$

= 2 = 2 − 1 = 1 = 2 − 2 = 0



$\int_0^3 f(x)\,dx < \int_0^2 f(x)\,dx < \int_0^1 f(x)\,dx$



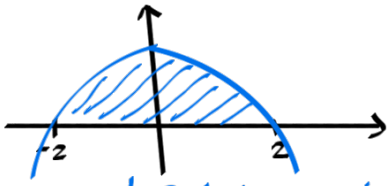
(1) اكتب التكامل الذي يعبر عن المساحة المحصورة فوق محور x وتحت المنحنى $f(x)=4-x^2$

$$A=\int_{-2}^{2} 4-x^2\ dx$$

$$=4x-\frac{x^3}{3}\Big]_{-2}^{2}=\frac{32}{3}$$

$y_1=4-x^2$

$y_2=0$



نجد نقاط التقاطع مع محور x

$4-x^2=0 \Rightarrow x=\pm 2$

---

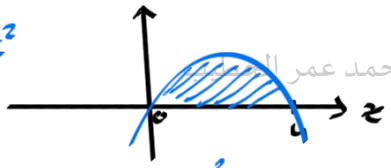
(2) اكتب التكامل الذي يعبر عن المساحة المحصورة فوف محور x وتحت المنحنى $f(x)=4x-x^2$

$$A=\int_{0}^{4} 4x-x^2\ dx$$

$$=2x^2-\frac{x^3}{3}\Big]_{0}^{4}=\frac{32}{3}$$

$y_1=4x-x^2$

$y_2=0$



$4x-x^2=0$

$x=0\ ,\ x=4$

---

(3) اكتب التكامل الذي يعبر عن المساحة المحصورة تحت محور x وفوق المنحنى $f(x)=x^2-4$

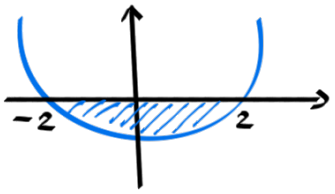
$$A=\int_{-2}^{2} 0-(x^2-4)\ dx$$

$$=-\int_{-2}^{2} x^2-4\ dx=\frac{32}{3}$$

بما ان المساحة تحت محور x

$y_1=0$

$y_2=x^2-4$



---

(4) اكتب التكامل الذي يعبر عن المساحة المحصورة بين الدالة $f(x)=\sin x$ ومحور x على الفترة $[0,\pi]$

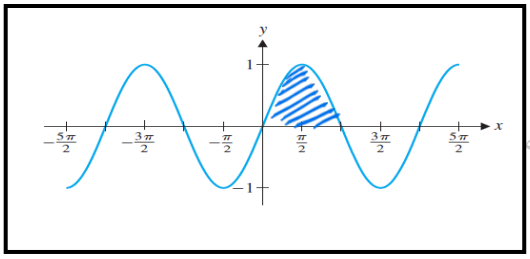
$$A=\int_{0}^{\pi} \sin x\ dx$$

$$=-\cos x\Big]_{0}^{\pi}$$

$$=2$$

$y_1=\sin x$

$y_2=0$



---

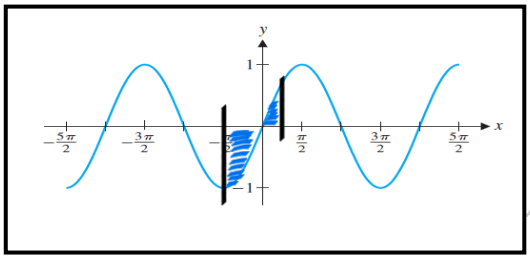
(5) اكتب التكامل الذي يعبر عن المساحة المحصورة بين الدالة $f(x)=\sin x$ محور x على الفترة $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}\right]$

★ تجزئة المساحة

$$A=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} 0-\sin x\ dx+\int_{0}^{\pi/4} \sin x-0\ dx$$

$$=-\int_{-\pi/2}^{0} \sin x\ dx+\int_{0}^{\pi/4} \sin x\ dx$$

$$=1+1-\frac{\sqrt{2}}{2}=2-\frac{\sqrt{2}}{2}$$



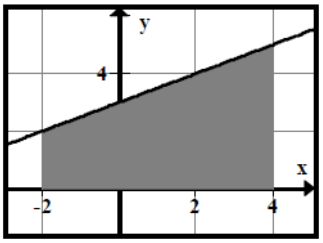
محمد عمر الخطيب

(1) استخدم قوانين (المساحات) في ايجاد

عندما المساحة فوق المحور x سالب

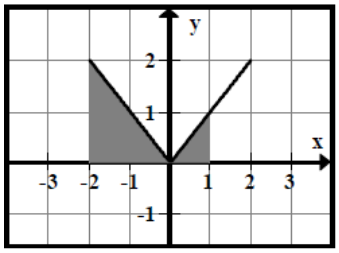
$(a)\ \int_{-2}^{4}(\frac{1}{2}x+3)\,dx$ = مساحة شبه منحرف

$=\frac{1}{2}(2+5)\cdot(6)=21$



$(b)\ \int_{-2}^{1}|x|\,dx = \frac{1}{2}(2)(2)+\frac{1}{2}(1)(1)$

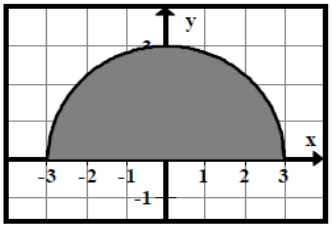
$=5/2$



$(c)\ \int_{-3}^{3}\sqrt{9-x^2}\,dx$ = مساحة نصف دائرة نصف قطرها 3

$=\frac{1}{2}\pi(3)^2$

$=\frac{9\pi}{2}$

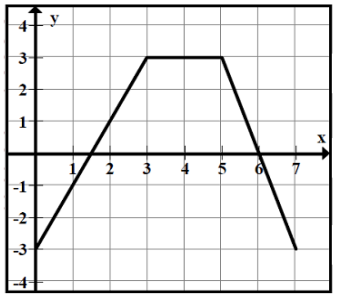


---

(2) اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة f ، في ايجاد

يتم حذف المساحات المتشابهة التي تقع فوق محور x وتحت محور x .

$(a)\ \int_{0}^{7}f(x)\,dx = 2(3)=6$



$(b)\ \int_{0}^{7}|f(x)|\,dx = \frac{1}{2}(1.5)(3)+\frac{1}{2}(4.5+2)\times 3+\frac{1}{2}(1)(3)$

$=13.5$

---

(3) اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة f ، في ايجاد

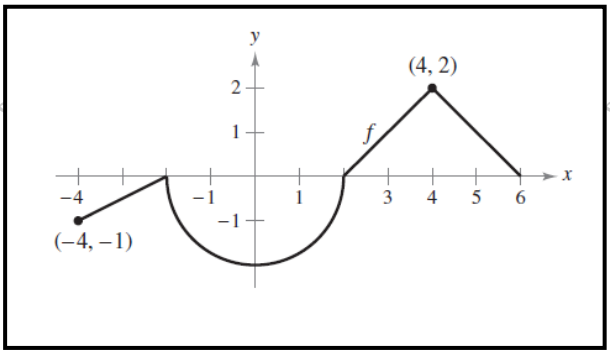
$(a)\ \int_{-4}^{6}f(x)\,dx$

$=-\frac{1}{2}(2)(1)-\frac{1}{2}\pi(2)^2+\frac{1}{2}(4)(2)$

$=3-2\pi$

$(b)\ \int_{-4}^{0}f(x)\,dx = -\frac{1}{2}(2)(1)-\frac{1}{4}\pi(2)^2$

$=-1-\pi$



محمد عمر الخطيب

نظرية القيمة المتوسطة في التكامل

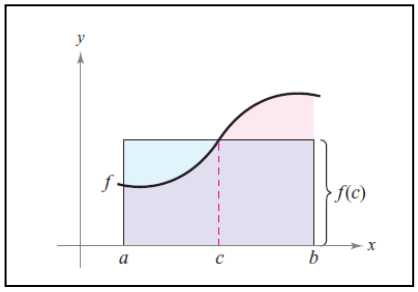
اذا كانت الدالة f قابلة للتكامل على الفترة $[a,b]$ فان القيمة المتوسطة للدالة f تساوي

$$f_{ave} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

نظريةالقيمة المتوسطة في التكامل

اذا كانت الدالة متصلة على الفترة $[a,b]$ فانة يوجد عدد مثل c ينتمي الى الفترة (a,b) بحيث

$$f(c) = f_{ave} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$



اي ان المساحة تحت المنحنى $f(x)$ وفوق محور السينات على الفترة $[a,b]$ تساوي مساحة مستطيل احد ابعادة $b-a$ والبعد الثاني هو $f(c)$ حيث c تنتمي الى الفترة (a,b)

ويمكن استخدام هذه المتباينة لتقدير التكامل $(b-a)M \quad \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \quad (b-a)m$

حيث $m = Min(f)$, $M = Max(f)$

اوجد القيمة المتوسطة للدالة $f(x) = 2x - x^2$ على الفترة $[0,3]$

$$f_{ave} = \frac{1}{3-0}\int_0^3 2x - x^2\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big]_0^3$$

$$= 0$$

(1) اوجد القيمة المتوسطة للدالة $f(x)=2x+1$ على الفترة $[0,4]$ ثم اوجد قيمة c التي تحقق النظرية

$$f_{ave}=\frac{1}{4}\int_0^4 (2x+1)\,dx$$

$$=\frac{1}{4}\left(x^2+x\right)\Big]_0^4$$

$$=\frac{1}{4}[20]$$

$$=5$$

ايجاد c حيث

$$f(c)=f_{ave}$$

$$2c+1=5$$

$$2c=4$$

$$c=2 \in (0,4) \checkmark$$

---

(2) اذا كانت $f(x)=3x^2$ فأوجد قيمة c التي تحقق نظرية القيمة المتوسطة للتكامل على الفترة $[0,2]$

$$f_{ave}=\frac{1}{2}\int_0^2 3x^2\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\,x^3\Big]_0^2$$

$$=4$$

$$f(c)=f_{ave}$$

$$3c^2=4$$

$$c^2=\frac{4}{3}$$

$$c=-\frac{2}{\sqrt{3}} \notin (0,2) \times$$

$$c=\frac{2}{\sqrt{3}} \in (0,2) \checkmark$$

---

(3) اذا كانت $f(x)=\sin x$ فأوجد قيمة c التي تحقق نظرية القيمة المتوسطة للتكامل على الفترة $[0,2\pi]$

$$f_{ave}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin x\,dx$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[-\cos x\right]_0^{2\pi}$$

$$=0$$

$$f(c)=f_{ave}$$

$$\sin c=0 \Rightarrow c=n\pi$$

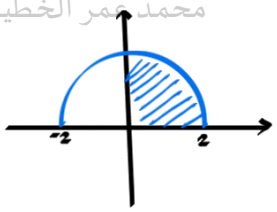
$$c=0 \notin (0,2\pi) \times$$

$$c=2\pi \in (0,2\pi) \times$$

$$c=\pi \in (0,2\pi) \checkmark$$

فقط $c=\pi$

محمد عمر الخطيب



(1) اوجد القيمة المتوسطة للدالة $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ على الفترة $[0,2]$

ثم اوجد قيمة c التي تحقق نظرية القيمة المتوسطة للتكامل على الفترة $[0,2]$

$$f_{ave}=\frac{1}{2}\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$$

هذا التكامل يساوي ربع مساحة دائرة نصف قطرها 2

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\pi(2)^2$$

$$=\frac{\pi}{2}$$

$$f(c)=f_{ave}$$

$$\sqrt{4-c^2}=\frac{\pi}{2}$$

$$4-c^2=\frac{\pi^2}{4}$$

$$c^2=4-\frac{\pi^2}{4}$$

$$c=-\sqrt{4-\frac{\pi^2}{4}}=-1.23\notin(0,2)\ \times$$

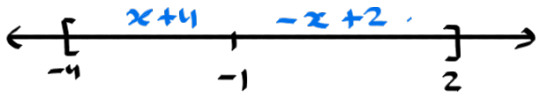
$$c=\sqrt{4-\frac{\pi^2}{4}}=1.23\in(0,2)\ \checkmark$$

---

(2) اذا كانت

$$f(x)=\begin{cases}x+4 & -4\le x\le -1\\ -x+2 & -1<x\le 2\end{cases}$$

فاوجد قيمة c التي تحقق نظرية القيمة المتوسطة للتكامل على الفترة $[-4,2]$



$$f_{ave}=\frac{1}{2-(-4)}\int_{-4}^{2} f(x)\,dx$$

$$=\frac{1}{6}\left[\int_{-4}^{-1} x+4\,dx+\int_{-1}^{2} -x+2\,dx\right]$$

$$=\frac{1}{6}\left[\left(\frac{x^2}{2}+4x\right)_{-4}^{-1}+\left(-\frac{x^2}{2}+2x\right)_{-1}^{2}\right]$$

$$=\frac{3}{2}$$

$f(c)=f_{ave}$

i) $x<-1 \longrightarrow D_1=(-4,-1)$

$f(c)=f_{ave}$

$$c+4=\frac{3}{2}$$

$$c=-5/2\in(-4,-1)\ \checkmark$$

ii) $x>-1 \longrightarrow D_2(-1,2)$

$f(c)=f_{ave}$

$$-x+2=\frac{3}{2}$$

$$-x=-\frac{1}{2}$$

$$c=\frac{1}{2}\in(-1,2)\ \checkmark$$

يوجد قيمتين للعدد c هما $-\frac{5}{2},\frac{1}{2}$

محمد عمر الخطيب

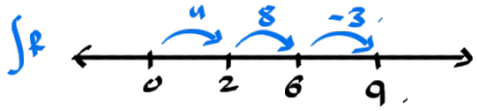
(1) اذا كان $\int_9^6 f(x)\,dx = 3$ ، $\int_2^6 2f(x)\,dx = 16$ ، $\int_0^2 f(x)\,dx = 4$

فاوجد القيمة المتوسطة للدالة $f(x)$ على الفترة $[0,9]$

$$f_{ave} = \frac{1}{9-0}\int_0^9 f(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{9}\left[4 + 8 + (-3)\right]$$

$$= 1$$



$$\int_0^9 = \int_0^2 + \int_2^6 + \int_6^9$$

$$= 4 + \frac{16}{2} + (-3)$$

$$= 9$$

---

(2) اذا كانت القيمة المتوسطة للدالة $f(x)$ على الفترة $[0,2]$ هي 3 والقيمة المتوسطة للدالة $f(x)$ على الفترة $[2,5]$ هي 7 فاوجد القيمة المتوسطة للدالة $f(x)$ على الفترة $[0,5]$

$$f_{ave} = \frac{1}{5}\int_0^5 f(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{5}\left[\int_0^2 f(x)\,dx + \int_2^5 f(x)\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{5}\left[6 + 21\right]$$

$$= \frac{27}{5} = 5.4$$

لاحظ ان

1) $\frac{1}{2}\int_0^2 f(x) = 3$

$\int_0^2 f(x) = 6$

2) $\frac{1}{3}\int_2^4 f(x) = 7$

$\int_2^4 f(x) = 21$

---

(3) اذا كانت $f(x)$ دالة متصلة على الفترة $[1,4]$ وكانت القيمة المتوسطة للدالة f تساوي 1

فأوجد قيمة $\int_1^4 (2x - 5f(x))\,dx$

$$\int_1^4 2x - 5f(x)\,dx$$

$$= \int_1^4 2x\,dx - 5\int_1^4 f(x)\,dx$$

$$= x^2\Big]_1^4 - 5(3)$$

$$= 15 - 15$$

$$= 0$$

لاحظ ان

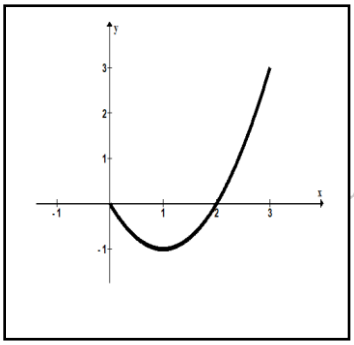
$$f_{ave} = \frac{1}{3}\int_1^4 f(x)\,dx$$

$$1 = \frac{1}{3}\int_1^4 f(x)\,dx$$

$$\therefore \int_1^4 f(x)\,dx = 3$$

محمد عمر الخطيب

(1) بالاعتماد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة f ، بين ان $-3 \le \int_0^3 f(x)\,dx \le 9$



$m \le f(x) \le M$

$-1 \le f(x) \le 3$

$\int_0^3 -1\,dx \le \int_0^3 f(x)\,dx \le \int_0^3 3\,dx$

$-3 \le \int_0^1 f(x)\,dx \le 9$ #

∴ التكامل يقع بين -3 و 9.

---

(2) بين ان $\pi \le \int_0^{\pi} \sqrt{1+\sin x}\,dx \le \sqrt{2}\pi$ باستخدام نظرية القيمة المتوسطة في التكامل

$0 \le x \le \pi$ (الربع الأول والثاني)

$0 \le \sin x \le 1$

$1 \le 1+\sin x \le 2$

$1 \le \sqrt{1+\sin x} \le \sqrt{2}$

$\int_0^{\pi} 1\,dx \le \int_0^{\pi} \sqrt{1+\sin x}\,dx \le \int_0^{\pi} \sqrt{2}\,dx$

$\pi \le \int_0^{\pi} \sqrt{1+\sin x}\,dx \le \sqrt{2}\pi$

∴ الحد الأدنى والحد الأعلى للتكامل هما π , $\sqrt{2}\pi$

يكمن حل السؤال بأكثر من طريقة.

* إيجاد القيمة الصغرى والعظمى المطلقة ثم استخدام نظرية السؤال السابق

---

(3) بين ان $\int_{-1}^{1} \sqrt{1+x^2}\,dx$ يقع بين 2 و $2\sqrt{2}$ باستخدام نظرية القيمة المتوسطة في التكامل

$-1 \le x \le 1$

$0 \le x^2 \le 1$

$1 \le 1+x^2 \le 1+1$

$1 \le \sqrt{1+x^2} \le \sqrt{2}$

$\int_{-1}^{1} 1\,dx \le \int_{-1}^{1} \sqrt{1+x^2}\,dx \le \int_{-1}^{1} \sqrt{2}\,dx$

$2 \le \int_{-1}^{1} \sqrt{1+x^2}\,dx \le 2\sqrt{2}$

∴ التكامل يقع بين 2 و $2\sqrt{2}$

محمد عمر الخطيب

(1) اوجد حدود مناسبة للتكامل $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ **باستخدام نظرية القيمة المتوسطة في التكامل**

(استخدم نظرية القيمة المتوسطة في التكامل لتقدر قيمة التكامل)

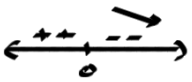
الطريقة الأولى

$f(x) = e^{-x^2}$

$f'(x) = -2x\,e^{-x^2}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$

الدالة متناقصة على $(0,1)$



$f(1) \le f(x) \le f(0)$

$e^{-1} \le e^{-x^2} \le 1$

$\int_0^1 e^{-1}\,dx \le \int_0^1 e^{-x^2}\,dx \le \int_0^1 1\,dx$

الطريقة الثانية

نجد m , M

$0 \le x \le 1$

$0 \le x^2 \le 1$

$-1 \le -x^2 \le 0$

$e^{-1} \le e^{-x^2} \le e^0$

$\int_0^1 e^{-1}\,dx \le \int_0^1 e^{-x^2}\,dx \le \int_0^1 1\,dx$

$\frac{1}{e} \le \int_0^1 e^{-x^2}\,dx \le 1$

التكامل يقع بين $\frac{1}{e}$ و 1

وتقريباً يساوي 0.68 او بجواب الدرس 0.74

---

(2) اوجد حدود مناسبة للتكامل $\int_{-1}^{1} \frac{3}{x^3+2}\,dx$ **باستخدام نظرية القيمة المتوسطة في التكامل**

(استخدم نظرية القيمة المتوسطة في التكامل لتقدر قيمة التكامل)

$f'(x) = \frac{-3(3x^2)}{(x^3+2)^2} = \frac{-3x^2}{(x^3+2)^2} \le 0$

يساوي صفر عندما x

$\therefore$ الدالة متناقصة

$f(1) \le f(x) \le f(-1)$

$1 \le f(x) \le 3$

$\int_{-1}^{1} 1\,dx \le \int_{-1}^{1} f(x)\,dx \le \int_{-1}^{1} 3\,dx$

$2 \le \int_{-1}^{1} f(x)\,dx \le 6$

الحد الادنى , الحد الاعلى للتكامل هما

$2 , 6$

---

(3) اوجد حدود مناسبة للتكامل $\int_{\pi/3}^{\pi/2} 3\cos x^2\,dx$ **باستخدام نظرية القيمة المتوسطة في التكامل**

$f(x) = 3\cos x^2$

$f'(x) = -6x \sin x^2$



الدالة f متناقصة على الفترة $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$

$f(\frac{\pi}{2}) \le f(x) \le f(\pi/3)$

$3\cos\frac{\pi^2}{4} \le 3\cos x^2 \le 3\cos\frac{\pi^2}{9}$

$\int_{\pi/3}^{\pi/2} 3\cos\frac{\pi^2}{4} \le \int_{\pi/3}^{\pi/2} 3\cos x^2\,dx \le \int_{\pi/3}^{\pi/2} 3\cos\frac{\pi^2}{9}\,dx$

$\frac{\pi}{2}\cos^2\frac{\pi}{4} \le \int_{\pi/3}^{\pi/2} 3\cos x^2\,dx \le \frac{\pi}{2}\cos^2\frac{\pi}{9}$

حدود التكامل هي -1.23 , 0.72

محمد عمر الخطيب

(1) تمثل الدالة $T(t)=30-2\pi\cos(\frac{\pi}{8}t)$ درجة حرارة احدى المدن خلال السنة بالسيلسيوس حيث t الشهور على مدار العام، احسب متوسط درجة حرارة المدينة خلال العام

الفترة $[0,12]$

$$T_{ave}=\frac{1}{12}\int_0^{12}30-2\pi\cos\left(\frac{\pi}{8}t\right)dt$$

$$=\frac{1}{12}\left[30-2\pi\,\frac{\sin(\frac{\pi}{8}t)}{\pi/8}\right]_0^{12}$$

$$=\frac{1}{12}(376)=31.3\,^{\circ}C$$

---

(2) تمثل الدالة $B(t)=400-0.3t$ معدل مواليد احدى المدن بالالاف

والدالة $D(t)=396+0.2t$ معدل الوفيات لنفس المدينة بالالاف

حيث تمثل t الشهور

$p(t)$	عدد السكان
$p'(t)$	معدل التغير في عدد السكان
$p'(t)=B(t)-D(t)$	
صافي التغير في عدد السكان	
$\Delta p=\int_0^{12}p'(t)\,dt$	

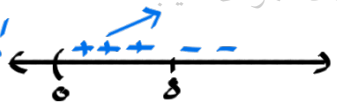
(أ) حدد الفترات التي يتزايد ويتناقص فيها عدد السكان خلال السنة

$$p'(t)=B(t)-D(t)$$

$$=400-0.3t-(396+0.2t)$$

$$=4-0.5t$$

$p'(t)=0 \Rightarrow t=8$



فترة التزايد هي $(0,8)$

(ب) حدد الشهر الذي يصل فيه عدد السكان الى ذروته

الشهر الثامن

(ج)اوجد صافي التغير في عدد السكان خلال سنة

$$\Delta p=\int_0^{12}p'(t)\,dt=\int_0^{12}(4-0.5t)\,dt=4t-\frac{1}{4}t\Big]_0^{12}=12$$

تزداد عدد السكان 12 الف نسمة سنوياً

(د) احسب متوسط صافي التغير في عدد السكان الشهري

$$P_{ave}=\frac{1}{12}\int_0^{12}p'(t)\,dt=\frac{1}{12}(12)=1$$

عدد السكان تزداد شهرياً الف نسمة تقريباً

تمثل الدالة $v(t)=6-2t$ السرعة المتجهة لجسم يتحرك على خط مستقيم افقي من (نقطة الاصل)

$v(t)=s'(t)=6-2t \quad , \quad s(0)=0$

(أ) حدد الدالة المكانية للجسم في اي لحظة

$s(t)=\int v(t)\,dt$

$=\int 6-2t \; dt$

$=6t-t^2+c$

$s(0)=0$

$c=0$

$\therefore s(t)=6t-t^2$

(ب) اوجد موقع الجسم بعد مرور 2 ثانية

$s(2)=6(2)-2^2=8$

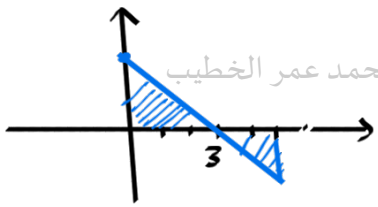
(ج) اوجد الازاحة للجسم بعد مرور 5 ثواني

الازاحة تساوي التكامل

$\Delta s=s(5)-s(0)=\int_0^5 6-2t\,dt=6t-t^2\Big]_0^5=5$

(د) اوجد المسافة التي يقطعها الجسم بعد مرور 5 ثواني

المسافة تساوي المساحة



بما ان المسافة تساوي المساحة

لذلك يجب ان نعمل تجزئة للتكامل عند $x=3$

$\text{المسافة}=\int_0^3 (6-2t)\,dt+\int_3^5 0-(6-2t)\,dt$

$=6t-t^2\Big]_0^3+t^2-6t\Big]_3^5$

$=9+4=13$

النظرية الاساسية لحساب التفاضل والتكامل (الجزء الاول)

محمد عمر الخطيب

اذا كانت الدالة f متصلة على الفترة $[a,b]$ و $F(x)$ هي الدالة الاصلية لـ f فان

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

(1) إذا كانت $F(x) = x\ln x - x + c$ الدالة الاصلية للدالة $f(x)$ فاوجد

$$\int_1^e f(x)\,dx$$

$= F(e) - F(1)$

$= (e\ln e - e + c) - (1\cdot \ln 1 - 1 + c)$

$= 1$

او

$$\int_1^e f(x)\,dx = F(x)\Big]_1^e = x\ln x - x + c\Big]_1^e = 1$$

---

(2) إذا كانت $F(x)$ الدالة الاصلية للدالة $f(x) = 3x^2 + 5$ حيث $F(2) = 5$ فأوجد $F(1)$

$$\int_1^2 (3x^2+5)\,dx = F(x)\Big]_1^2$$

$x^3 + 5x\Big]_1^2 = F(2) - F(1)$

$12 = 5 - F(1)$

$\therefore F(1) = -7$

محمد عمر الخطيب

اوجد قيمة كل مما يلي

(1) $\int_1^3 (3x^2+1)\,dx =$ $x^3 + x \Big]_1^3 = (3^3+3) - (1^3+1) = 28$

---

(2) $\int_1^4 (x\sqrt{x} + \frac{3}{x})\,dx =$ $\int_1^4 x^{3/2} + \frac{3}{x}\,dx$

$= \frac{2}{5}x^{5/2} + 3\ln|x| \Big]_1^4 = \frac{62}{5} + 3\ln 4.$

---

(3) $\int_0^1 (6e^{-2x}+4)\,dx =$ $\frac{6e^{-2x}}{-2} + 4x \Big]_0^1 = 7 - \frac{3}{e^2}$

---

(4) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx =$ $3\sin^{-1}x \Big]_0^{1/2} = 3\left[\sin^{-1}\tfrac{1}{2} - \sin^{-1}0\right] = 3\cdot\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$

---

(5) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x\,dx =$ $\tan x \Big]_0^{\pi/4} = \tan\frac{\pi}{4} - \tan 0 = 1$

---

(6) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx =$ $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}(1+\cos 2x)\,dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{\sin 2x}{2}\right)\Big]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}$

---

(7) $\int_0^t (e^{x/2})^2\,dx =$ $\int_0^t e^x\,dx = e^x \Big]_0^t = e^t - 1$

---

(8) $\int_0^t (\sin^2 x + \cos^2 x)\,dx =$ $\int_0^t 1\,dx = x \Big]_0^t = t.$

محمد عمر الخطيب

النظرية الاساسية لحساب التفاضل والتكامل (الجزء الثاني)

الحالة الأولى: الحد الأعلى x

إذا كانت الدالة f متصلة على الفترة $[a,b]$ و كانت $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ فان

$$F'(x)=f(x)$$

(1) اوجد $F'(x)$ في كل مما يلي

$(a)\quad F(x)=\int_1^x (t^2+2t+1)\,dt \Rightarrow F'(x)=x^2+2x+1$

$(b)\quad F(x)=\int_2^x \sin^2 t\,dt \Rightarrow F'(x)=\sin^2 x$

$(c)\quad F(x)=\int_x^1 te^{2t}\,dt = -\int_1^x te^{2t}\,dt \Rightarrow F'(x)=-xe^{2x}$

$(d)\quad F(x)=\int_0^{\pi/4} \tan t\,dt \Rightarrow F'(x)=0$

هذا ، لتكامل ثابت لذلك المشتقة صفر .

---

(2) اذا كان $\int_0^x f(t)\,dt = x\ln x - x$ ، فاوجد $f(e)$

اشتق الطرفين للحصول على $f(x)$

$\int_0^x f(t)\,dt = x\ln x - x$

$f(x) = 1\cdot\ln x + x\cdot\frac{1}{x} - 1$

$= \ln x + 1 - 1$

$= \ln x$

$f(e) = \ln e$

$= 1+1$

$= 2$

---

(3) اذا كان $F(x)=\int_1^x \sqrt{4t^2-1}\,dt$ ، فاوجد $F(1)$ ، $F'(1)$

$F(1) = \int_1^1 \sqrt{4t^2-1}\,dt = 0$

$F'(x) = \sqrt{4x^2-1} \Rightarrow F'(1) = \sqrt{4(1)^2-1} = \sqrt{3}$

الحالة الثانية: الحد الأعلى $g(x)$ (استخدام قاعدة السلسلة والنظرية الاساسية)

اذا كانت الدالة f متصلة على الفترة $[a,b]$ و كانت $F(x)=\int_a^{g(x)} f(t)\,dt$ فان

$$F'(x)=f(g(x))\times g'(x)$$

اوجد $F'(x)$ في كل مما يلي

(1) $F(x)=\int_1^{x^2}(t^3+2)\,dt$ $\Rightarrow$ مشتقة الحد الأعلى

$F'(x)=((x^2)^3+2)\cdot(2x)$

$=(x^6+2)\cdot 2x$

$=2x^7+4x$

---

(2) $F(x)=\int_0^{\sin x}\tan t\,dt$

$F'(x)=\tan(\sin x)\cdot\cos x$

$=\cos x\cdot\tan(\sin x)$

---

(3) $F(x)=\int_{\sqrt{x}}^{1} e^{t^2}\,dt=-\int_1^{\sqrt{x}} e^{t^2}\,dt$

$F'(x)=-e^{(\sqrt{x})^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{-e^x}{2\sqrt{x}}$

---

(4) $F(x)=\int_1^{xe^x}\sin t\,dt$ $\Rightarrow$ مشتقة الحد الأعلى (الفرق) تابعة

$F(x)=\sin(xe^x)\cdot(1\cdot e^x+x\cdot e^x)$

$=(1+x)e^x\sin(xe^x)$

الحالة الثالثة : الحد الادنى و الحد الاعلى متغيرات (الحالة العامة)

اذا كانت الدالة f متصلة على الفترة $[a,b]$ و كانت $F(x)=\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\,dt$

فان $F'(x)=f(g(x))\times g'(x)-f(h(x))\times h'(x)$

او ممكن كتابة الدالة التكاملية

$$F(x)=\int_{h(x)}^{c} f(t)\,dt+\int_{c}^{g(x)} f(t)\,dt=\int_{c}^{g(x)} f(t)\,dt-\int_{c}^{h(x)} f(t)\,dt$$

وتطبيق الحالة الثانية

اوجد $F'(x)$ في كل مما يلي

ممكن حل السؤال بطريقتين

(1) $F(x)=\int_{x}^{\sin x}(t^3+2)\,dt$

$= \int_{c}^{\sin x}(t^3+2)\,dt - \int_{c}^{x} t^3+2\,dt$

$F(x) = [(\sin x)^3+2]\cdot\cos x - [x^3+2]\cdot(1)$

$= \sin^3 x\cos x + 2\cos x - x^3 - 2$

☆ نفترض c اي ثابت معروف عندك السائل

---

(2) $F(x)=\int_{\sqrt{x}}^{x^2}\cos t\,dt$

$= \int_{c}^{x^2}\cos t\,dt - \int_{c}^{\sqrt{x}}\cos t\,dt$

$F'(x) = \cos x^2\,(2x) - \cos\sqrt{x}\cdot\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$

$= 2x\cos x^2 - \frac{1}{2\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}$

---

(3) $F(x)=\int_{\sin x}^{\cos x}\frac{1}{t^2+1}\,dt$

$= \int_{c}^{\cos x}\frac{1}{t^2+1}\,dt - \int_{c}^{\sin x}\frac{1}{t^2+1}\,dt$

$F'(x) = \frac{1}{\cos^2 x+1}\cdot(-\sin x) - \frac{1}{\sin^2 x+1}\cdot(\cos x)$

$= \frac{-\sin x}{\cos^2 x+1} - \frac{\cos x}{\sin^2 x+1}$

محمد عمر الخطيب

اوجد $F'(x)$ في كل مما يلي

(1) $F(x)=\int_{2x}^{\sqrt{x}} \tan 3t\ dt$ $= \int_c^{\sqrt{x}} \tan 3t\ dt - \int_c^{2x} \tan 3t\ dt$

$F'(x) = \tan 3\sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - \tan 3(2x) \cdot (2)$

$= \frac{1}{2\sqrt{x}} \tan 3\sqrt{x} - 2\tan 6x$.

---

(2) $F(x)=\int_{x}^{\sin^{-1}x} \sin t\ dt$ $= \int_c^{\sin^{-1}x} \sin t\ dt - \int_c^{x} \sin t\ dt$

$F'(x) = \sin(\sin^{-1}x) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \sin x$.

$= x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \sin x = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \sin x$.

---

(3) $F(x)=\int_{e^{4\sqrt{x}}}^{e^{2x}} \ln t\ dt$ $= \int_c^{e^{2x}} \ln t\ dt - \int_c^{e^{4\sqrt{x}}} \ln t\ dt$

$F'(x) = \ln e^{2x} \cdot e^{2x} \cdot 2 - \ln e^{4\sqrt{x}} \cdot e^{4\sqrt{x}} \cdot \frac{4}{2\sqrt{x}}$

$= 2x\, e^{2x} \cdot 2 - 4\sqrt{x}\, e^{4\sqrt{x}} \cdot \frac{4}{2\sqrt{x}}$

$= 4x\, e^{2x} - 8\, e^{4\sqrt{x}}$.

---

(4) $F(x)=\int_{2-x}^{xe^x} 3t\ dt$ $= \int_c^{xe^x} 3t\ dt - \int_c^{2-x} 3t\ dt$.

$F(x) = 3(xe^x) \cdot [1 \cdot e^x + xe^x] - 3(2-x)(-1)$

$= 3xe^x \cdot e^x(1+x) + 3(2-x)$

$= 3x(1+x)e^{2x} - 3x + 6$.

(1) اذا كان $F(x)=\int_{\sin x}^{\cos x}\sqrt{1-t^2}\,dt$ ، حيث $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ فاثبت ان $F'(x)=-1$

$$F(x)=\int_{c}^{\cos x}\sqrt{1-t^2}\,dt-\int_{c}^{\sin x}\sqrt{1-t^2}\,dt$$

$$F'(x)=\sqrt{1-\cos^2 x}\cdot(-\sin x)-\sqrt{1-\sin^2 x}\,(\cos x)$$

$$=\sqrt{\sin^2 x}\,(-\sin x)-\sqrt{\cos^2 x}\cdot\cos x$$

$$=|\sin x|(-\sin x)-|\cos x|\cdot\cos x$$

$$=\sin x(-\sin x)-\cos x(\cos x)$$

$$=-\sin^2 x-\cos^2 x=-(\sin^2 x+\cos^2 x)=-1(1)=-1\quad\#$$

---

(2) اذا كان $F(x)=x+\int_{\tan x}^{0}\frac{1}{t^2+1}\,dt$ ، فاثبت ان $F'(x)=0$

$$F(x)=x-\int_{0}^{\tan x}\frac{1}{t^2+1}\,dt$$

$$F'(x)=1-\frac{1}{\tan^2 x+1}\cdot\sec^2 x$$

$$=1-\frac{1}{\sec^2 x}\cdot\sec^2 x$$

$$=1-1$$

$$=0\quad\#$$

---

(3) اذا كان $g(x)=\int_{0}^{3x}\left(\int_{0}^{u}\sin t\,dt\right)du$ ، فأوجد $g''(x)$

$$g(x)=\int_{0}^{3x}\left(\int_{0}^{u}\sin t\,dt\right)du$$

مساعدة: افرض

$$f(u)=\int_{0}^{u}\sin t\,dt$$

$$\therefore\ g(x)=\int_{0}^{3x}f(u)\,du$$

$$\therefore\ g'(x)=f(3x)\cdot 3=3f(3x)$$

$$=3\int_{0}^{3x}\sin t\,.\,dt$$

$$\therefore\ g''(x)=3\sin 3x\cdot 3=9\sin 3x.$$

يمكن حل السؤال بأكثر من طريقة.

(1) اعتمد على الجدول التالي في ايجاد $h'(3)$ حيث

$$h(x)=\int_{1}^{g(x)} f(t)\,dt$$

x	$f(x)$	$g(x)$	$g'(x)$
1	6	2	5
3	16	4	2
4	−1	6	7

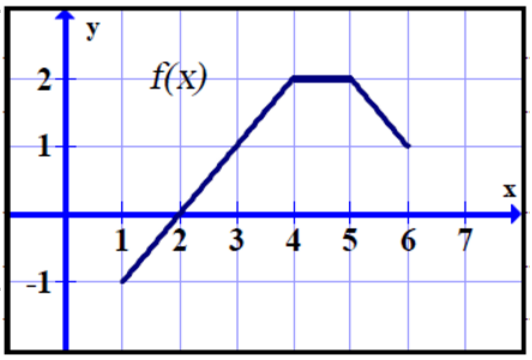
$h'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$

$= f(g(3)) \cdot g'(3)$

$= f(4) \cdot 2 = (-1)(2) = -2$

---

(2) اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة $f(x)$



المتصلة على الفترة $[1,6]$ حيث $\mathrm{H}(x)=\int_{1}^{x} f(t)\,dt$

اشتق الطرفين

$H'(x) = f(x)$

في الاجابة عن الاسئلة التالية

(a) $\mathrm{H}(3) = \int_{1}^{3} f(t)\,dt = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$

(b) $\mathrm{H}(6) = \int_{1}^{6} f(t)\,dt = \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 5\right) = 5$

(c) $\mathrm{H}'(3) = f'(3) = 1$

(d) اوجد القيمة المتوسطة للدالة $f(x)$ على الفترة $[1,6]$

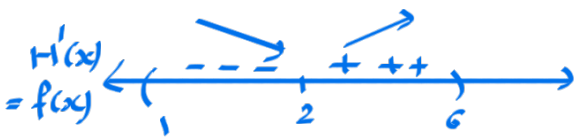
$f_{ave} = \frac{1}{6-1}\int_{1}^{6} f(t)\,dt = \frac{1}{5}(5) = 1$

(e) اوجد قيمة c التي تحقق القيمة المتوسطة للدالة $f(x)$ على الفترة $[1,6]$

$f(c) = f_{ave} \Rightarrow f(c) = 1 \Rightarrow c = 3,\ c = 6 \notin (1,6)$

من الرسم — مرفوض

(f) اوجد فترة التزايد للدالة $\mathrm{H}(x)$ على الفترة $[1,6]$

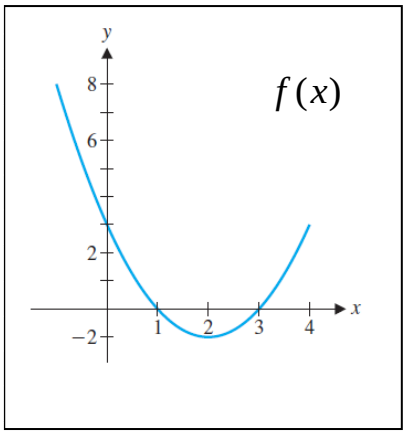


$(2,6)$ هي $H(x)$ تتزايد للدالة

(g) اوجد قيمة x التي عندها للدالة $\mathrm{H}(x)$ قيمة صغرى محلية على الفترة $[1,6]$

عند $x=2$ قيمة صغرى محلية وتساوي $H(2) = -\frac{1}{2}$

(1) اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة $f(x)$ المتصلة على R حيث



$$H(x)=\int_0^x f(t)\,dt$$

في الاجابة عن الاسئلة التالية

(أ) اوجد الاعداد الحرجة للدالة $H(x)$ ..... $x=1\ ,\ x=3$

(ب) اوجد فترة التزايد للدالة $H(x)$ ..... $(-\infty,1)\cup(3,\infty)$



(ج) اوجد فترة التناقص للدالة $H(x)$ ..... $(1,3)$

(د) اوجد قيمة x التي عندها للدالة $H(x)$ قيمة عظمى محلية..... $x=1$

(هـ) اوجد قيمة x التي عندها للدالة $H(x)$ قيمة صغرى محلية..... $x=3$



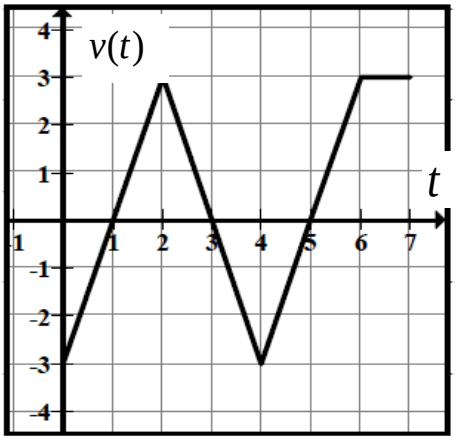
(و) اوجد فترة التقعر للاعلى للدالة $H(x)$ ..... $(2,\infty)$

(ي) اوجد فترة التقعر للاسفل للدالة $H(x)$ ..... $(-\infty,2)$

(ل) اوجد قيمة x التي عندها للدالة $H(x)$ نقطة انقلاب..... $x=2$

---

(2) اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل السرعة المتجهة $v(t)$ لجسم يتحرك على خط مستقيم



حيث دالة الموضع $s(t)=\int_0^t v(x)\,dx$

في الاجابة عن الاسئلة التالية

$s(t)=s'(t)$

(أ) اوجد سرعة الجسم عند $t=5$ ..... $s(5)=0$ (سا ش)

(ب) اوجد تسارع الجسم عند $t=5$ ..... $s'(5)=3$ (سا ش)

(ج) اوجد موقع الجسم عند $t=7$ ..... $s(7)=\int_0^7 s(t)\,dt=3$

(د) اوجد المسافة التي يقطعها الجسم خلال 7 ثواني..... 12

المسافة = المساحة

$=\frac{1}{2}(1)(3)+\frac{1}{2}(2)(3)+\frac{1}{2}(2)(3)+\frac{1}{2}(1)(3)+(1)(3)=12$

الازاحة هي التكامل
المسافة هي المساحة

محمد عمر الخطيب

(1) اوجد معادلة المماس للدالة y عند $x=2$ حيث $y=\int_2^x \cos(\pi t^3)\,dt$

$f(2)=\int_2^2 \cos(\pi t^3)\,dt=0$

$f'(x)=\cos \pi x^3$

$m=f'(2)=\cos 8\pi=1$

∴ معادلة المماس هي

$y-0=1(x-2)$

$y=x-2$

ميل = 1 ، نقطة $(2,0)$

(2) اوجد معادلة المماس للدالة $f(x)$ عند $x=0$ حيث $f(x)=\cos x+\int_{2x}^{x^2} e^{-t}\,dt$

$f(0)=\cos 0+\int_0^0 e^{-t}\,dt=1+0=1$

$f'(x)=-\sin x+e^{-x^2}(2x)-e^{-2x}(2)$

$m=f'(0)=-\sin 0+e^{0}(0)-e^{0}(2)$

$=-2$

∴ معادلة المماس هي

$y-1=-2(x-0)$

$y=-2x+1$

ميل $m=-2$ ونقطة $(0,1)$

(3) اوجد قيمة النهاية التالية باستخدام قاعدة لوبتال

$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x (e^t-1)\,dt}{x^2}$

$\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2}=\frac{1}{2}$

(4) اذا كان $f(t)=\begin{cases}2 & 0\le t<1\\ 2t & 1\le t\end{cases}$ دالة متصلة على الفترة $[0,\infty)$ فأوجد الدالة $H(x)$ حيث $H(x)=\int_0^x f(t)\,dt$

يمكن حل السؤال بأكثر من طريقة.

(1) $0\le x<1$

$H(x)=\int_0^x f(t)\,dt=\int_0^x 2\,dt=2x$

(2) $x\ge 1$

$H(x)=\int_0^1 f(t)\,dt+\int_1^x f(t)\,dt$

$=\int_0^1 2\,dt+\int_1^x 2t\,dt$

$=2+t^2]_1^x$

$=2+x^2-1$

$=x^2+1$

$\therefore H(x)=\begin{cases}2x & 0\le x<1\\ x^2+1 & x\ge 1\end{cases}$

محمد عمر الخطيب

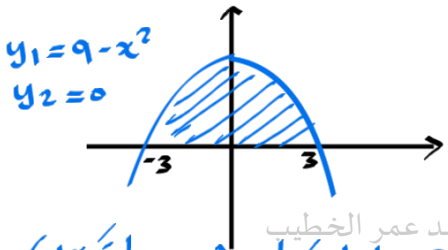
(1) اوجد المساحة المحصورة فوق محور x وتحت المنحنى $f(x)=9-x^2$

$y_1=9-x^2$
$y_2=0$

$$A=\int_{-3}^{3} 9-x^2-0\ dx$$

$$=9x-\frac{x^3}{3}\Big]_{-3}^{3}$$

$$=36$$



نقاط التقاطع (حدود التكامل)

$9-x^2=0$

$x=\pm 3$

---

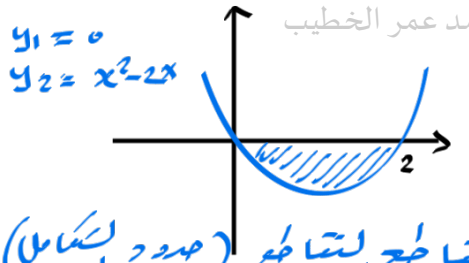
(2) اوجد المساحة المحصورة تحت محور x وفوق المنحنى $f(x)=x^2-2x$

$y_1=0$
$y_2=x^2-2x$

$$A=\int_{0}^{2} 0-(x^2-2x)\ dx$$

$$=\int_{0}^{2} 2x-x^2\ dx$$

$$=x^2-\frac{x^3}{3}\Big]_{0}^{2}=\frac{4}{3}$$



نقاط التقاطع (حدود التكامل)

$x^2-2x=0$

$x=0,\ x=2$

---

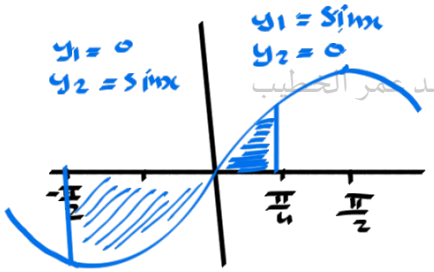
(3) اوجد المساحة المحصورة بين الدالة $f(x)=\sin x$ ومحور x حيث $-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{4}$

تجزئ المساحة عند الصفر

$$A_1=\int_{-\pi/2}^{0} 0-\sin x\ dx=1$$

$$A_2=\int_{0}^{\pi/4} \sin x-0\ dx=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$A=A_1+A_2=1+1-\frac{\sqrt{2}}{2}=2-\frac{\sqrt{2}}{2}$$



---

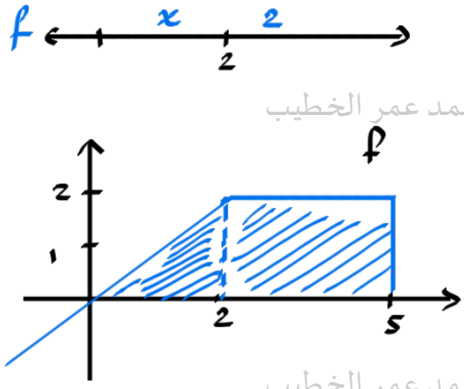
(4) اوجد المساحة المحصورة بين الدالة $f(x)=\begin{cases} x & x<2 \\ 2 & 2\le x \end{cases}$ ومحور x على الفترة $[0,5]$

تجزئ المساحة عند $x=2$

$$A_1=\int_{0}^{2} x\ dx=2$$

$$A_2=\int_{2}^{5} 2\ dx=6$$

$$A=2+6=8$$



يستخدم التكامل بالتعويض عندما نريد ايجاد تكامل حاصل ضرب او قسمة دالتين ، احدى الدالتين او جزء منها يساوي ثابت في مشتقة الدالة الاخرى

ويكون التعويض عادة (1) ما بداخل القوس (2) ما تحت الجذر (3) الزاوية (4) الأس

ويعتبر هو الخيار الاقوى في التكامل

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

يعتبر التكامل بالتعويض العملية العكسية للاشتقاق باستخدام قاعدة السلسلة

ويمكن استخدام هذه القاعدة

$$\int f(g(x))\, g'(x)\, dx = f(g(x)) + c$$

قبل البدأ بالتكامل ...اسئل نفسك

1) هل الدالة التي نريد ايجاد تكاملها هي ناتج جمع وطرح حدود وكل حدد قابل للتكامل

2) هل الدالة التي نريد ايجاد تكاملها هي ناتج ضرب او قسمة ويمكن تحويلها ال جمع او طرح حدود وكل حدد قابل للتكامل

3) هل الدالة التي نريد ايجاد تكاملها هي حاصل ضرب او قسمة دالتين، احدى الدالتين او جزء منها يساوي ثابت في مشتقة الدالة الاخرى

اوجد التكاملات التالية

(1) $\int x^2 (x^3+1)^5\, dx$

نفرض

$u = x^3+1$

$\frac{du}{dx} = 3x^2$

$\frac{du}{3x^2} = dx$

$= \int x^2 \cdot u^5 \cdot \frac{du}{3x^2}$

$= \frac{1}{3}\int u^5\, du$

$= \frac{1}{3} \cdot \frac{u^6}{6} + c = \frac{1}{18} u^6 + c = \frac{1}{18}(x^3+1) + c$

(2) $\int (2x+1)^5\, dx$

ممكن حل السؤال مباشرة (لان ما بداخل القوس دالة خطية)

او بالتعويض

$u = 2x+1$

$\frac{du}{dx} = 2$

$\frac{du}{2} = dx$

$= \int u^5 \frac{du}{2}$

$= \frac{1}{2}\int u^5\, du = \frac{1}{2}\int u^5\, du = \frac{1}{2}\frac{u^6}{6} + c = \frac{1}{12}(2x+1)^6 + c$

محمد عمر الخطيب

اوجد التكاملات التالية

(1) $\int e^x \sqrt{e^x+1}\, dx$

نفرض
$u = e^x + 1$
$\frac{du}{dx} = e^x$
$\frac{du}{e^x} = dx$

$= \int e^x \sqrt{u}\, \frac{du}{e^x}$
$= \int u^{1/2}\, du$
$= \frac{2}{3} u^{3/2} + c = \frac{2}{3}(e^x+1)^{3/2} + c$

---

(2) $\int \frac{x^3}{\sqrt{4-x^4}}\, dx = \int x^3 (4-x^4)^{-1/2}\, dx$

نفرض
$u = 4 - x^4$
$\frac{du}{dx} = -4x^3$
$\frac{du}{-4x^3} = dx$

$= \int x^3 u^{-1/2} \frac{du}{-4x^3}$
$= -\frac{1}{4} \int u^{-1/2}\, du$
$= -\frac{1}{4} \cdot 2 u^{1/2} + c = -\frac{1}{2}(4-x^2)^{1/2} + c$

---

(3) $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}\, dx$

نفرض
$u = 1 + \sqrt{x}$
$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$2\sqrt{x}\, du = dx$

$= \int \frac{1}{\sqrt{x}\, u} \cdot 2\sqrt{x}\, du$
$= 2 \int \frac{1}{u}\, du$
$= 2 \ln|u| + c = 2 \ln|1+\sqrt{x}| + c$

---

(4) $\int x e^{-x^2/2}\, dx$

نفرض
$u = \frac{-x^2}{2}$
$\frac{du}{dx} = -x$
$\frac{du}{-x} = dx$

$= \int x e^u \frac{du}{-x}$
$= \int -e^u\, du$
$= -e^u + c$
$= -e^{-x^2/2} + c$

محمد عمر الخطيب

اوجد التكاملات التالية

(1) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

نفرض $u = \sqrt{x}$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$2\sqrt{x}\,du = dx$

$= \int \frac{e^u}{\sqrt{x}} \cdot 2\sqrt{x}\,du$

$= \int 2e^u\,du$

$= 2e^u + c = 2e^{\sqrt{x}} + c$

---

(2) $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\,dx$

نفرض $u = \ln x$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$

$x\,du = dx$

$= \int \frac{\sqrt{u}}{x} \cdot x\,du$

$= \int u^{1/2}\,du$

$= \frac{2}{3}u^{3/2} + c = \frac{2}{3}(\ln x)^{3/2} + c$

---

(3) $\int \frac{1}{x\ln\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{1}{x\ln x^{1/2}}\,dx = \int \frac{1}{\frac{1}{2}x\ln x}\,dx$

نفرض $u = \ln x$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$

$x\,du = dx$

$= \int \frac{2}{xu} \cdot x\,du$

$= \int \frac{2}{u}\,du$

$= 2\ln|u| + c = 2\ln|\ln x| + c$

---

(4) $\int (x-1)\sqrt{x^2-2x+2}\,dx$

نفرض $u = x^2-2x+2$

$\frac{du}{dx} = 2x-2$

$\frac{du}{2x-2} = dx$

$= \int (x-1)\sqrt{u} \cdot \frac{du}{2x-2}$

$= \int (x-1)u^{1/2}\frac{du}{2(x-1)}$

$= \frac{1}{2}\int u^{1/2}\,du$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}u^{3/2} + c = \frac{1}{3}(x^2-2x+2)^{3/2} + c$

محمد عمر الخطيب

اوجد التكاملات التالية

(1) $\int e^{\ln x}(x^2-1)^3\,dx = \int x(x^2-1)^3\,dx$

نفرض $u = x^2-1$

$\frac{du}{dx} = 2x$

$\frac{du}{2x} = dx$

$= \int x\, u^3 \frac{du}{2x}$

$= \frac{1}{2}\int u^3\,du$

$= \frac{1}{2}\frac{u^4}{4} + c$

$= \frac{1}{8}(x^2-1)^4 + c.$

---

(2) $\int e^{\tan x + 2\ln\sec x}\,dx = \int e^{\tan x} \cdot e^{2\ln\sec x}\,dx$

$= \int e^{\tan x} \cdot e^{\ln \sec^2 x}\,dx$

$= \int \sec^2 x\, e^{\tan x}\,dx.$

$u = \tan x$

$\frac{du}{dx} = \sec^2 x$

$\frac{du}{\sec^2 x} = dx$

$= \int \sec^2 x \cdot e^u \frac{du}{\sec^2 x}$

$= \int e^u\,du = e^u + c = e^{\tan x} + c.$

---

(3) $\int \frac{e^{\cot x}}{1-\cos^2 x}\,dx = \int \frac{e^{\cot x}}{\sin^2 x}\,dx = \int \csc^2 x\, e^{\cot x}\,dx$

$= \int \csc^2 x\, e^u \cdot \frac{du}{-\csc^2 x}$

$u = \cot x$

$\frac{du}{dx} = -\csc^2 x$

$\frac{du}{-\csc^2 x} = dx$

$= -\int e^u\,du$

$= -e^u + c.$

$= -e^{\cot x} + c.$

(1) $\int \frac{4}{x(\ln x+1)^2}\,dx$

$u = \ln x + 1$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$

$x\,du = dx$

$= \int \frac{4}{x \cdot u^2} \cdot x\,du$

$= \int 4u^{-2}\,du$

$= 4\frac{u^{-1}}{-1} + c$

$= \frac{-4}{u} + c = \frac{-4}{\ln x + 1} + c$

---

(2) $\int \tan 2x\,dx$

ممكن حل السؤال بدون تعويض (وهو الأفضل)

$= \int \frac{\sin 2x}{\cos 2x}\,dx$

$u = \cos 2x$

$\frac{du}{dx} = -2\sin 2x$

$\frac{du}{-2\sin 2x} = dx$

$= \int \frac{\sin 2x}{u} \cdot \frac{du}{-2\sin 2x}$

$= -\frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\,du$

$= -\frac{1}{2}\ln|u| + c = -\frac{1}{2}\ln|\cos 2x| + c$

---

(3) $\int \frac{(\sin^{-1} x)^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

$u = \sin^{-1} x$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\sqrt{1-x^2}\,du = dx$

$= \int \frac{u^3}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \sqrt{1-x^2}\,du$

$= \int u^3\,du$

$= \frac{1}{4}u^4 + c$

$= \frac{1}{4}(\sin^{-1} x)^4 + c$

(1) $\int \frac{\cot x}{\ln(\sin x)}\,dx$

$u = \ln(\sin x)$

$\frac{du}{dx} = \frac{\cos x}{\sin x}$

$\frac{du}{dx} = \cot x$

$\frac{du}{\cot x} = dx$

$= \int \frac{\cot x}{u} \cdot \frac{du}{\cos x}$

$= \int \frac{1}{u}\,du$

$= \ln|u| + c$

$= \ln|\ln(\sin x)| + c$

---

(2) $\int \sec x\,dx \times \frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x}$

يمكن حل السؤال بدون التعويض (وهو الأفضل)

$= \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x}\,dx$

$u = \sec x + \tan x$

$\frac{du}{dx} = \sec x \tan x + \sec^2 x$

$= \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{u} \cdot \frac{du}{\sec x \tan x + \sec^2 x}$

$\frac{du}{\sec x \tan x + \sec^2 x} = du$

$= \int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| + c$

$= \ln|\sec x + \tan x| + c$

---

(3) $\int \csc x\,dx \times \frac{\csc x - \cot x}{\csc x - \cot x}$

يمكن حل السؤال بالتعويض

$= \int \frac{\csc^2 x - \csc x \cot x}{\csc x - \cot x}\,dx$

لاحظ ان البسط مشتقة المقام

$= \ln|\csc x - \cot x| + c$

محمد عمر الخطيب

اوجد التكاملات التالية

(1) $\int x\cos x^2\,dx$

اذا كانت الزاوية بين حطية اعرض u بالزاوية

$u = x^2$

$\frac{du}{dx} = 2x$

$\frac{du}{2x} = dx$

$= \int x \cos u \frac{du}{2x}$

$= \frac{1}{2}\int \cos u\,du$

$= \frac{1}{2}\sin u + c = \frac{1}{2}\sin x^2 + c.$

---

(2) $\int \frac{\cos(\ln x)}{x}\,dx$

$u = \ln x$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$

$x\,du = dx$

$= \int \frac{\cos u}{x} \cdot x\,du$

$= \int \cos u\,du$

$= \sin u + c = \sin(\ln x) + c.$

---

(3) $\int x^2 \sec^2 x^3\,dx$

$u = x^3$

$\frac{du}{dx} = 3x^2$

$\frac{du}{3x^2} = dx$

$= \int x^2 \sec^2 u \cdot \frac{du}{3x^2}$

$= \frac{1}{3}\int \sec^2 u\,du$

$= \frac{1}{3}\tan u + c$

$= \frac{1}{3}\tan x^3 + c.$

---

(4) $\int e^x \cos(e^{x+1})\,dx$

$u = e^{x+1}$

$\frac{du}{dx} = e^{x+1}$

$\frac{du}{e^{x+1}} = dx$

$= \int e^x \cos u \cdot \frac{du}{e^{x+1}}$

$= \int e^x \cos u \frac{du}{e^x \cdot e^1}$

$= \frac{1}{e}\int \cos u\,du = \frac{1}{e}\sin u + c = \frac{1}{e}\sin(e^{x+1}) + c.$

محمد عمر الخطيب

اوجد التكاملات التالية

(1) $\int \sin x \cos x \, dx$

$u = \sin x$ ، ويمكن فرض $u = \cos x$

$\frac{du}{dx} = \cos x$

$\frac{du}{\cos x} = dx$

$= \int u \cdot \cos x \cdot \frac{du}{\cos x}$

$= \int u \, du$

$= \frac{u^2}{2} + c = \frac{1}{2} u^2 + c = \frac{1}{2} \sin^2 x + c$

---

(2) $\int \cos x \sin^3 x \, dx$

$u = \sin x$

$\frac{du}{dx} = \cos x$

$\frac{du}{\cos x} = dx$

$= \int \cos x \cdot u^3 \frac{du}{\cos x}$

$= \int u^3 \, du$

$= \frac{1}{4} u^4 + c$

$= \frac{1}{4} \sin^4 + c$

---

(3) $\int \sec^2 x \sqrt{\tan x} \, dx$

$u = \tan x$

$\frac{du}{dx} = \sec^2 x$

$\frac{du}{\sec^2 x} = dx$

$= \int \sec^2 x \cdot \sqrt{u} \frac{du}{\sec^2 x}$

$= \int u^{1/2} \, du$

$= \frac{2}{3} u^{3/2} + c$

$= \frac{2}{3} (\tan x)^{3/2} + c = \frac{2}{3} \tan^{3/2} x + c$

تبسيط الدالة اولاً

(4) $\int \sqrt{\tan x} (\sec x \tan x)^2 \, dx$

$= \int \tan^{1/2} x \cdot \sec^2 x \cdot \tan^2 x \, dx$

$u = \tan x$

$\frac{du}{dx} = \sec^2 x$

$= \int \tan^{5/2} x \cdot \sec^2 x \, dx$

$= \int u^{5/2} \cdot \sec^2 x \frac{du}{\sec^2 x}$

$= \int u^{5/2} \, du = \frac{2}{7} u^{7/2} + c = \frac{2}{7} \tan^{7/2} x + c$

محمد عمر الخطيب

اوجد التكاملات التالية

(1) $\int \frac{(\sin x+1)^3}{\sec x}\,dx$

$= \int \cos x\,(\sin x+1)^3\,dx$

$u = \sin x + 1$

$\frac{du}{dx} = \cos x$

$\frac{du}{\cos x} = dx$

$= \int \cos x\; u^3\; \frac{du}{\cos x}$

$= \int u^3\,du$

$= \frac{1}{4}u^4 + c = \frac{1}{4}(\sin x+1)^4 + c$

---

(2) $\int \sin 2x \cos x\,dx$

نوحد الزوايا اولاً

$= \int 2\sin x \cdot \cos x \cdot \cos x\,dx$

$= \int 2\sin x \cdot \cos^2 x\,dx$

$u = \cos x$

$\frac{du}{dx} = -\sin x$

$\frac{du}{-\sin x} = dx$

$= 2\int \sin x \cdot u^2\; \frac{du}{-\sin x}$

$= -2\int u^2\,du = -\frac{2}{3}u^3 + c = \frac{-2}{3}\cos^3 x + c$

---

(3) $\int \sin 3x\ \cos^5 3x\,dx$

$u = \cos 3x$

$\frac{du}{dx} = -3\sin 3x$

$\frac{du}{-3\sin 3x} = dx$

$= \int \sin 3x \cdot u^5\; \frac{du}{-3\sin 3x}$

$= -\frac{1}{3}\int u^5\,du$

$= -\frac{1}{3}\cdot\frac{u^6}{6} + c = -\frac{1}{18}\cos^6 3x + c$

---

(4) $\int x\sec^2 x^2\ \tan x^2\,dx$

يمكن حل السؤال بالتعويض مرتين

$u = \tan x^2$

$\frac{du}{dx} = \sec^2 x^2 \cdot 2x$

$\frac{du}{2x\sec^2 x^2} = dx$

$= \int x \sec^2 x\; u\; \frac{du}{2x\sec^2 x^2}$

$= \frac{1}{2}\int u\,du$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{u^2}{2} + c$

$= \frac{1}{4}(\tan x^2)^2 + c = \frac{1}{4}\tan^2 x^2 + c$

محمد عمر الخطيب

اوجد التكاملات التالية

(1) $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}\,dx = \int \sin x\,(\cos x)^{-1/2}\,dx$

$u = \cos x$

$\frac{du}{dx} = -\sin x$

$\frac{du}{-\sin x} = dx$

$= \int \sin x \cdot u^{-1/2} \frac{du}{-\sin x}$

$= -\int u^{-1/2}\,du$

$= -2u^{1/2} + c = -2(\cos x)^{1/2} + c = -2\sqrt{\cos x} + c$

---

(2) $\int \frac{(\tan^{-1} x)^2}{x^2+1}\,dx$

$u = \tan^{-1} x$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x^2+1}$

$(x^2+1)\,du = dx$

$= \int \frac{u^2}{x^2+1} \cdot (x^2+1)\,du$

$= \int u^2\,du$

$= \frac{1}{3}u^3 + c = \frac{1}{3}(\tan^{-1} x)^3 + c$

---

(3) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}\,\sin^{-1} x}\,dx$

$u = \sin^{-1} x$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\sqrt{1-x^2}\,du = dx$

$= \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}\,u} \sqrt{1-x^2}\,du$

$= \int \frac{1}{u}\,du$

$= \ln|u| + c = \ln|\sin^{-1} x| + c$

---

(4) $\int \frac{\sec^{-1} 2x}{|x|\sqrt{4x^2-1}}\,dx$

$u = \sec^{-1} 2x$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{|2x|\sqrt{(2x)^2-1}} \cdot 2$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{|x|\sqrt{4x^2-1}}$

$|x|\sqrt{4x^2-1}\,du = dx$

$= \int \frac{u}{|x|\sqrt{4x^2-1}} \cdot |x|\sqrt{4x^2-1}\,du$

$= \int u\,du$

$= \frac{1}{2}u^2 + c = \frac{1}{2}(\sec^{-1} 2x)^2 + c$

محمد عمر الخطيب

اوجد التكاملات التالية

(1) $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx = \int \frac{e^x}{1+(e^x)^2}$

$= \int \frac{e^x}{1+u^2} \cdot \frac{du}{e^x}$

$= \int \frac{1}{1+u^2}\,du$

$= \tan^{-1} u + c$

$= \tan^{-1} e^x + c$

$u = e^x$

$\frac{du}{dx} = e^x$

$\frac{du}{e^x} = dx$

---

(2) $\int \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$

$= \int \frac{\sin x}{1+u^2} \cdot \frac{du}{-\sin x}$

$= -\int \frac{1}{1+u^2}\,du$

$= -\tan^{-1} u + c$ او $\cot^{-1} u + c$

$= -\tan^{-1}(\cos x) + c$ $\cot^{-1}(\cos x) + c$

$u = \cos x$

$\frac{du}{dx} = -\sin x$

$\frac{du}{-\sin x} = dx$

---

(3) $\int \frac{1}{x^2+4}\,dx = \int \frac{1}{4\left(\frac{x^2}{4}+1\right)}\,dx$

$= \frac{1}{4}\int \frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}\,dx$

$= \frac{1}{4}\int \frac{1}{u^2+1} \cdot 2\,du$

$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{u^2+1}\,du$

$= \frac{1}{2}\tan^{-1} u + c$

$= \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + c$

$u = \frac{x}{2} = \frac{1}{2}x$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2}$

$2\,du = dx$

يمكنه حل السؤال بالقاعدة

$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}(x/a) + c$

حيث $a^2 = 4$

$a = 2$

اوجد التكاملات التالية (باكمال المربع)

عند اكمال المربع يجب إضافة

[نصف معامل X تربيع]

بشرط ان يكون معامل X تربيع

(1) $\int \frac{1}{x^2+4x+5}\,dx$

$= \int \frac{1}{(x+2)^2+1}\,dx$

$u = x+2$

$\frac{du}{dx} = 1$

$du = dx$

$= \int \frac{1}{u^2+1}\,du$

$= \tan^{-1} u + c$

$= \tan^{-1}(x+2) + c$

x^2+4x+5

$= x^2+4x+4+5-4$

$= (x+2)^2+1$

---

(2) $\int \frac{1}{x^2-8x+25}\,dx = \int \frac{1}{(x-4)^2+9}\,dx$

$x^2-8x+25$

$= x^2-8x+16+25-16$

$= (x-4)^2+9$

$= \frac{1}{9}\int \frac{1}{\frac{(x-4)^2}{9}+1}\,dx$

$= \frac{1}{9}\int \frac{1}{(\frac{x-4}{3})^2+1}\,dx$

امرض

$u = \frac{x-4}{3} = \frac{1}{3}(x-4)$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{3}$

$3\,du = dx$

$= \frac{1}{9}\int \frac{1}{u^2+1}\,3\,du$

$= \frac{1}{3}\tan^{-1} u + c = \frac{1}{3}\tan^{-1}(\frac{x-4}{3}) + c$

---

(3) $\int \frac{1}{\sqrt{6x-x^2}}\,dx$

أكمل المربع

$6x - x^2$

$= -(x^2-6x)$

$= -(x^2-6x+9-9)$

$= -((x-3)^2-9)$

$= 9-(x-3)^2$

$= \int \frac{1}{\sqrt{9-(x-3)^2}}\,dx$

$= \int \frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{x-3}{3})^2}}\,dx$

امرض

$u = \frac{x-3}{3} = \frac{1}{3}(x-3)$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{3}$

$3\,du = dx$

$= \frac{1}{3}\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot 3\,du$

$= \sin^{-1} u + c = \sin^{-1}(\frac{x-3}{3}) + c$

اوجد التكاملات التالية

(1) $\int \frac{x^2}{x^6+1}\,dx = \int \frac{x^2}{(x^3)^2+1}\,dx$

$u = x^3$

$\frac{du}{dx} = 3x^2$

$\frac{du}{3x^2} = dx$

$= \int \frac{x^2}{u^2+1} \cdot \frac{du}{3x^2}$

$= \frac{1}{3}\int \frac{1}{u^2+1}\,du$

$= \frac{1}{3}\tan^{-1} u + c$

$= \frac{1}{3}\tan^{-1} x^3 + c.$

---

(2) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx = \int \frac{x}{\sqrt{1-(x^2)^2}}\,dx$

$u = x^2$

$\frac{du}{dx} = 2x$

$\frac{du}{2x} = dx$

$= \int \frac{x}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \frac{du}{2x}$

$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du$

$= \frac{1}{2}\sin^{-1} u + c$

$= \frac{1}{2}\sin^{-1}(x^2) + c.$

---

(3) $\int \sqrt[3]{x^5-x^3}\,dx = \int \sqrt[3]{x^3(x^2-1)}\,dx.$

$u = x^2-1$

$\frac{du}{dx} = 2x$

$\frac{du}{2x} = dx.$

$= \int x\sqrt[3]{x^2-1}\,dx$

$= \int x\, u^{1/3}\,\frac{du}{2x}$

$= \frac{1}{2}\int u^{1/3}\,du$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}u^{4/3} + c$

$= \frac{3}{8}(x^2-1)^{4/3} + c$

اوجد التكاملات التالية

(1) $\int \frac{1}{x\sqrt{x^4-1}}\,dx = \int \frac{1}{x\sqrt{(x^2)^2-1}}\,dx$

$u = x^2$

$\frac{du}{dx} = 2x$

$\frac{du}{2x} = dx$

$x^2 = u$ نعوض

$= \int \frac{1}{x\sqrt{u^2-1}} \cdot \frac{du}{2x}$

$= \int \frac{1}{2x^2\sqrt{u^2-1}}\,du$ لا يجوز وجود x و u في التكامل

$= \int \frac{1}{2u\sqrt{u^2-1}}\,du = \int \frac{1}{2|u|\sqrt{u^2-1}}\,du = \frac{1}{2}\sec^{-1}u + c = \frac{1}{2}\sec^{-1}x^2 + c$

---

(2) $\int x(x-2)^5\,dx$

$= \int x\,u^5\,du$

$u = x-2$

$\frac{du}{dx} = 1$

$du = dx$

$x-2 = u$

$x = u+2$

$= \int (u+2)\,u^5\,du$

$= \int u^6 + 2u^5\,du$

$= \frac{1}{7}u^7 + \frac{2}{6}u^6 + c$

$= \frac{1}{7}(x-2)^7 + \frac{1}{3}(x-2)^6 + c$

---

(3) $\int \frac{t}{\sqrt{2t-1}}\,dt = \int t\,(2t-1)^{-1/2}\,dt$

$u = 2t-1$

$\frac{du}{dt} = 2$

$\frac{du}{2} = dt$

$2t-1 = u$

$2t = u+1$

$t = \frac{u+1}{2}$

$= \int t\,u^{-1/2}\,\frac{du}{2}$

$= \frac{1}{2}\int t\,u^{-1/2}\,du$

$= \frac{1}{2}\int \frac{u+1}{2}\cdot u^{-1/2}\,du$

$= \frac{1}{4}\int u^{1/2} + u^{-1/2}\,du = \frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}u^{3/2} + 2u^{1/2}\right) + c = \frac{1}{6}(2t-1)^{3/2} + \frac{1}{2}(2t-1)^{1/2} + c$

(1) $\int x^3\sqrt{x^2-1}\,dx = \int x^3(x^2-1)^{1/2}\,dx$

$u = x^2-1$

$\frac{du}{dx} = 2x$

$\frac{du}{2x} = dx$

$x^2-1 = u$

$x^2 = u+1$

$= \int x^3\, u^{1/2}\,\frac{du}{2x}$

$= \frac{1}{2}\int x^2\, u^{1/2}\,du.$

$= \frac{1}{2}\int (u+1)\,u^{1/2}\,du$

$= \frac{1}{2}\int u^{3/2} + u^{1/2}\,du = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{5}u^{5/2} + \frac{2}{3}u^{3/2}\right] + c$

$= \frac{1}{5}(x^2-1)^{5/2} + \frac{1}{3}(x^2-1)^{3/2} + c.$

---

(2) $\int \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-25}}\,dx = \int \frac{1}{5|x|\sqrt{(\frac{x}{5})^2-1}}\,dx$

$u = \frac{x}{5}$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{5}$

$5\,dx = dx$

$\frac{x}{5} = u$

$x = 5u.$

$= \int \frac{1}{\cancel{5}|x|\sqrt{u^2-1}}\cdot\cancel{5}\,du.$

$= \int \frac{1}{|5u|\sqrt{u^2-1}}\,du$

$= \frac{1}{5}\int \frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}}\,du = \frac{1}{5}\sec^{-1}u + c = \frac{1}{5}\sec^{-1}(x/5) + c$

---

(3) $\int \sqrt{1+\sqrt{x}}\,dx$

$u = 1+\sqrt{x}$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$2\sqrt{x}\,du = dx$

$1+\sqrt{x} = u$

$\sqrt{x} = u-1$

$= \int \sqrt{u}\cdot 2\sqrt{x}\,du$

$= \int \sqrt{u}\cdot 2\,(u-1)\,du$

$= 2\int u^{3/2} - u^{1/2}\,du.$

$= 2\left[\frac{2}{5}u^{5/2} - \frac{2}{3}u^{3/2}\right] + c$

$= \frac{4}{5}(1+\sqrt{x})^{5/2} - \frac{4}{3}(1+\sqrt{x}) + c.$

(1) $\int \cos^3 x \sin^5 x \, dx$

$= \int \cos^2 x \; u^5 \frac{du}{\cos x}$

$= \int \cos^2 x \; u^5 \, du$

$= \int (1-u^2) u^5 \, du$

$= \int u^5 - u^7 \, du$

$= \frac{1}{6} u^6 - \frac{1}{8} u^8 + C = \frac{1}{6} \sin^6 x - \frac{1}{8} \cos^8 x + C$

$u = \sin x$

$\frac{du}{dx} = \cos x$

$\frac{du}{\cos x} = dx$

$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

$= 1 - u^2$

---

(2) $\int \tan x \sec^4 x \, dx$

$= \int u \cdot \sec^2 x \frac{du}{\sec^2 x}$

$= \int u \sec^2 x \, du$

$= \int u(u^2+1) \, du$

$= \int u^3 + u \, du$

$= \frac{1}{4} u^4 + \frac{1}{2} u^2 + C = \frac{1}{4} \tan^4 x + \frac{1}{2} \tan^2 x + C$

$u = \tan x$

$\frac{du}{dx} = \sec^2 x$

$\frac{du}{\sec^2 x} = dx$

$\sec^2 x = \tan^2 x + 1$

$= u^2 +$

---

(3) $\int \frac{3\sqrt{x}}{1+x^3} \, dx$

(1)

$= \int \frac{3u}{1+u^6} \cdot 2\sqrt{x} \, du$

$= \int \frac{3u}{1+u^6} \cdot 2u \, du$

$= \int \frac{6u^2}{1+u^6} \, du$

$= \int \frac{6u^2}{1+(u^3)^2} \, du$

يمكن حل السؤال بتعويض واحد ولكن الأفضل استخدام التعويض مرتين

(2) $= \int \frac{6u^2}{1+w^2} \cdot \frac{dw}{3u^2}$

$= \int \frac{2}{1+w^2} \, dw$

$= 2\tan^{-1} w + C$

$= 2\tan^{-1} u^3 + C$

$= 2\tan^{-1} (\sqrt{x})^3 + C$

$= 2\tan^{-1} x^{3/2} + C$

(1) $u = \sqrt{x}$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$2\sqrt{x} \, du = dx$

$\sqrt{x} = u$

$x = u^2$

$x^3 = (u^2)^3 = u^6$

(2) $w = u^3$

$\frac{dw}{du} = 3u^2$

$\frac{dw}{3u^2} = du$

يمكن التعويض مرة واحدة باستخدام $u = x^{3/2}$

اوجد قيمة التكاملات المحدودة التالية

(1) $\int_1^e \frac{1}{x+x\ln x}\,dx = \int_1^e \frac{1}{x(1+\ln x)}\,dx$

$u = 1+\ln x$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$

$x\,du = dx$

تغير الحدود

$x=1 \Rightarrow u = 1+\ln 1 = 1$

$x=e \Rightarrow u = 1+\ln e = 2$

$= \int_1^2 \frac{1}{x\,u} \cdot x\,du$

$= \int_1^2 \frac{1}{u}\,du$

$= \ln|u|\Big]_1^2 = \ln 2 - \ln 1$

$= \ln 2$

---

(2) $\int_0^1 \frac{x^3}{x^8+1}\,dx = \int_0^1 \frac{x^3}{(x^4)^2+1}\,dx$

$u = x^4$

$\frac{du}{dx} = 4x^3$

$\frac{du}{4x^3} = dx$

تغير الحدود

$x=0 \Rightarrow u=0$

$x=1 \Rightarrow u=1$

$= \int_0^1 \frac{x^3}{u^2+1} \cdot \frac{du}{4x^3}$

$= \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{1}{u^2+1}\,du$

$= \frac{1}{4}\tan^{-1} u\Big]_0^1 = \frac{1}{4}[\tan^{-1}1 - \tan^{-1}0]$

$= \frac{1}{4}\left[\frac{\pi}{4} - 0\right] = \frac{\pi}{16}$

---

(3) $\int_0^2 \frac{4x^3}{(x^2+1)^2}\,dx = \int 4x^3 (x^2+1)^{-2}\,dx$

$u = x^2+1$

$\frac{du}{dx} = 2x$

$\frac{du}{2x} = dx$

$\rightarrow x^2+1 = u$

$x^2 = u-1$

تغير الحدود

$x=0 \Rightarrow u=1$

$x=2 \Rightarrow u=5$

$= \int 4x^3\, u^{-2}\, \frac{du}{2x}$

$= \int 2x^2 u^{-2}\,du$

$= \int_1^5 2(u-1)u^{-2}\,du$

$= 2\int_1^5 u^{-1} - u^{-2}\,du$

$= 2\int_1^5 \frac{1}{u} - u^{-2}\,du$

$= 2\left(\ln|u| - \frac{u^{-1}}{-1}\right)\Big]_1^5$

$= 2\left(\ln|u| + \frac{1}{u}\right)\Big]_1^5$

$= 2\ln 5 - \frac{8}{5}$

محمد عمر الخطيب

(1) اذا كان $\int_0^1 f(x)\,dx = -6$ ، اوجد

$(a)\ \int_0^3 f(\frac{x}{3})\,dx$

$= \int_0^1 f(u)\cdot 3\,du$

$= 3\int_0^1 f(u)\,du$

$= 3(-6) = -18$

$u = \frac{x}{3}$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{3}$

$3\,du = dx$

تغيير الحدود

$x=0 \Rightarrow u=0$

$x=3 \Rightarrow u=1$

$(b)\ \int_1^2 2f(x-1)\,dx$

$= 2\int_0^1 f(u)\,du$

$= 2(-6)$

$= -12.$

$u = x-1$

$\frac{du}{dx} = 1$

$du = dx$

$x=1 \Rightarrow u=0$

$x=2 \Rightarrow u=1$

---

(2) اذا كان $f(4)=-5\,,\ f(1)=3$ ، فأوجد $\int_1^2 x\ f'(x^2)\,dx$

$\int_1^2 x\ f'(x^2)\,dx$

$= \int_1^4 x\ f'(u)\ \frac{du}{2x}$

$= \frac{1}{2}\int_1^4 f'(u)\,du$

$= \frac{1}{2}[f(4)-f(1)] = \frac{1}{2}[-5-3] = -4.$

$u = x^2$

$\frac{du}{dx} = 2x$

$\frac{du}{2x} = dx$

$x=1 \Rightarrow u=1$

$x=2 \Rightarrow u=4$

---

(3) اذا كان $f(0)=1\,,\ f(1)=9$ ، فأوجد $\int_0^1 3\sqrt{f(x)}\ f'(x)\,dx$

$= \int 3\sqrt{u}\cdot f'(x)\cdot \frac{du}{f'(x)}$

$= 3\int_1^9 u^{1/2}\,du$

$= 3\cdot\frac{2}{3}u^{3/2}\Big]_1^9$

$= 2[9^{3/2} - 1^{3/2}] = 52$

$u = f(x)$

$\frac{du}{dx} = f'(x)$

$\frac{du}{f'(x)} = dx$

$x=0 \Rightarrow u = f(0) = 1$

$x=1 \Rightarrow u = f(1) = 9$

(1) رصدت محطة الارصاد الجوية درجة الحرارة C° في احدى المدن بعد منتصف الليل فتبين انه يمكن نمذجتها بالعلاقة $T(t)=3-\frac{1}{3}(t-5)^2 \quad C^\circ$

حيث t هو الوقت بعد منتصف الليل

اوجد متوسط درجة الحرارة في المدينة في الفترة من الساعة 8 صباحاً الى 5 مساءً (الساعة 17)

$$T_{ave}=\frac{1}{17-8}\int_8^{17} 3-\frac{1}{3}(t-5)^2\,dt$$

يمكن حل التكامل مباشرة او بالتعويض

$u=t-5$

$$=\frac{1}{9}\left[3t-\frac{1}{3}\cdot\frac{(t-5)^3}{3}\right]_8^{17}$$

$$=-18$$

---

(2) عند اجراء عملية لمريض يحقن بالبنج، وبعد مضي t ساعة يكون تركيز المخدر في دم المريض هو

$$C(t)=\frac{3t}{(t^2+36)^{\frac{3}{2}}} \qquad mg/cm^2$$

اوجد متوسط تركيز المخدر في الدم اثناء الساعات الثمانية الاولى بعد حقن المريض $[0,8]$

$$C_{ave}=\frac{1}{8-0}\int_0^8 3t\,(t^2+36)^{-3/2}\,dt$$

$u=t^2+36$

$\frac{du}{dt}=2t$

$\frac{du}{2t}=dt$

$x=0 \Rightarrow u=36$

$x=8 \Rightarrow u=100$

$$=\frac{1}{8}\int 3t\,u^{-3/2}\,\frac{du}{2t}$$

$$=\frac{3}{16}\int_{36}^{100} u^{-3/2}\,du$$

$$=\frac{3}{16}\cdot(-2)u^{-1/2}\Big]_{36}^{100}$$

$$=\frac{-3}{8}\left[\frac{1}{\sqrt{u}}\right]_{36}^{100}=\frac{-3}{8}\left[\frac{1}{\sqrt{100}}-\frac{1}{\sqrt{36}}\right]=\frac{1}{40}\ mg/cm^3$$

(1) اذا كانت $f(x)$ دالة متصلة على الفترة $[0,1]$ فاثبت ان

$$(1)\ \int_0^1 f(1-x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx$$

$u = 1-x$

$\frac{du}{dx} = -1$

$-du = dx$

$x=0 \Rightarrow u=1$

$x=1 \Rightarrow u=0$

الاثبات $\int_0^1 f(1-x)\,dx$

$= \int_1^0 f(u)\,(-1)\,du$

$= -\int_1^0 f(u)\,du = \int_0^1 f(u)\,du = \int_0^1 f(x)\,dx$ #

ملاحظة $\int_0^1 f(u)\,du = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 f(t)\,dt$

---

(2) اذا كانت $f(x)$ دالة متصلة على الفترة $[0,a]$ فيمكن اثبات ان

$$\int_0^a \frac{f(x)}{f(x)+f(a-x)}\,dx = \frac{a}{2}$$

استفد من العلاقة السابقة لتبين ان

$$(a)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\,dx = \frac{\pi}{4}$$

$f(x)$

ملاحظة (متعلقة به)

$\cos x = \sin(\frac{\pi}{2}-x)$

$f(x) = \sin x$

$a = \frac{\pi}{2}$

$f(\frac{\pi}{2}-x) = \sin(\frac{\pi}{2}-x)$

$= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sin x + \sin(\frac{\pi}{2}-x)}\,dx$

$= \frac{\pi/2}{2}$

$= \frac{\pi}{4}$ من الصيغة

$$(b)\ \int_0^{10} \frac{\sqrt{10-x}}{\sqrt{x}+\sqrt{10-x}}\,dx = 5$$

$f(x) = \sqrt{10-x}$

$a = 10$

$f(a-x) = f(10-x)$

$= \sqrt{10-(10-x)}$

$= \sqrt{x}$

$= \int_0^{10} \frac{\sqrt{10-x}}{\sqrt{10-x}+\sqrt{x}}$

$= \frac{10}{2}$ من الصيغة

انتهت الوحدة الخامسة بحمد الله....

وأعتذر للجميع عن أي تقصير او خطأ.

حل أسئلة الوحدة الخامسة

اجابات الدرس الأول

① ج

$$F(x)=\int \sin 2x\,dx = \frac{-\cos 2x}{2}+c = -\frac{1}{2}\cos 2x + c$$

② ب

$$\int t^2\left(4t-\frac{1}{t^2}\right)dt = \int (4t^3-1)\,dt = t^4 - t + c$$

③ ج

$$\int (\cos^2 x - \sin^2 x)\,dx = \int \cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\sin 2x + c$$

④ ج

$$\int \frac{2}{x}+\frac{1}{\sqrt{e^{2x}}}\,dx = \int \frac{2}{x}+\frac{1}{(e^{2x})^{1/2}}\,dx = \int \frac{2}{x}+\frac{1}{e^x}\,dx$$

$$= \int \frac{2}{x}+e^{-x}\,dx = 2\ln|x| - e^{-x} + c$$

⑤ أ

$$\int \frac{x^{1/3}-3}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx = \int \frac{x^{1/3}-3}{x^{2/3}}\,dx = \int \frac{x^{1/3}}{x^{2/3}} - \frac{3}{x^{2/3}}\,dx$$

$$= \int x^{-1/3} - 3x^{-2/3}\,dx$$

$$= \frac{3}{2}x^{2/3} - 3\cdot\frac{3}{1}x^{1/3} + c$$

$$= \frac{3}{2}x^{2/3} - 9x^{1/3} + c$$

⑥ د

$$\int \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + c$$

⑦ أ

$$\int \sec x(\tan x - \sec x)\,dx = \int (\sec x\tan x - \sec^2 x)\,dx$$

$$= \sec x - \tan x + c$$

⑧ د

$$\int \sin^2 x\,dx = \int \frac{1}{2}(1-\cos 2x)\,dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{\sin 2x}{2}\right)+c$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2x-\sin 2x}{2}\right)+c$$

$$= \frac{1}{4}(2x - \sin 2x) + c$$

⑨ أ

$$\int \frac{\cos^2 x}{1-\sin x}\,dx = \int \frac{1-\sin^2 x}{1-\sin x}\,dx = \int \frac{(1-\sin x)(1+\sin x)}{1-\sin x} = \int (1+\sin x)\,dx$$

$$= x - \cos x + c$$

(10) B

$$\int \frac{e^{2x}-1}{e^x}\,dx = \int \frac{e^{2x}}{e^x} - \frac{1}{e^x}\,dx = \int e^x - e^{-x}\,dx = e^x + e^{-x} + c.$$

(11) D

$$\int \cot x\,dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \ln|\sin x| + c$$

(12) C

$$\int \frac{3}{x^2+1}\,dx = 3\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = 3\tan^{-1}x + c.$$

(13) A

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^4-x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{x^2(x^2-1)}}\,dx = \int \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}\,dx = \sec^{-1}x + c$$

(14) C

$$\int \frac{x^2+e^{3x}}{x^3+e^{3x}}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{3(x^2+e^{3x})}{x^3+e^{3x}}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{3x^2+3e^{3x}}{x^3+e^{3x}}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x^3+e^{3x}| + c.$$

(15) A

$$\int e^{x^2+\ln 2x}\,dx = \int e^{x^2}\cdot e^{\ln 2x}\,dx = \int e^{x^2}\cdot 2x\,dx$$

$$= \int 2x\,e^{x^2}\,dx$$

$$= e^{x^2} + c$$

(16) A

$$\int \frac{1+x}{1+x^2}\,dx = \int \frac{1}{1+x^2} + \frac{x}{1+x^2}\,dx = \int \frac{1}{1+x^2}\,dx + \int \frac{x}{1+x^2}\,dx$$

$$= \int \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx$$

$$= \tan^{-1}x + \frac{1}{2}\ln|1+x^2| + c$$

(17) A

$$\int \frac{\sec^3 x + e^{\sin x}}{\sec x}\,dx = \int \frac{\sec^3 x}{\sec x} + \frac{e^{\sin x}}{\sec x}\,dx = \int \sec^2 x + \cos x\, e^{\sin x}\,dx$$

$$= \tan x + e^{\sin x} + c$$

محمد عمر الخطيب

(18) (D)

$$\int 3x\, e^{x^2+1}\, dx = 3\int x\, e^{x^2+1}\, dx = \frac{3}{2}\int 2x\, e^{x^2+1}\, dx$$
$$= \frac{3}{2} e^{x^2+1} + c$$

(19) (B)

$$\int \csc^2 x \cdot \cos x\, dx = \int \frac{1}{\sin^2 x} \cdot \cos x\, dx = \int \frac{1}{\sin x} \cdot \frac{\cos x}{\sin x}\, dx$$
$$= \int \csc x \cdot \cot x\, dx$$
$$= -\csc x + c.$$

(20) (C)

$$\int \frac{t+1}{t+2}\, dt = \int 1 + \frac{-1}{t+2}\, dt$$
$$= t - \ln|t+2| + c.$$

$$\begin{array}{r|l} & 1 \\ t+2 & t+1 \\ \ominus & t \oplus 2 \\ \hline & -1 \end{array}$$

(21) (C)

$$\int \frac{x}{x+2}\, dx = \int \frac{x+2-2}{x+2}\, dx$$
$$= \int \frac{x+2}{x+2} - \frac{2}{x+2}\, dx$$
$$= \int 1 - \frac{2}{x+2}\, dx$$
$$= x - 2\ln|x+2| + c.$$

يمكنه حل السؤال باستخدام القسمة المطولة.

(22) (A)

$$\int \frac{1}{2x} + \frac{\sin x}{\cos^2 x}\, dx = \int \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{\cos x}\, dx$$
$$= \int \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} + \sec x \cdot \tan x\, dx$$
$$= \frac{1}{2}\ln|x| + \sec x + c.$$

(23) (C)

$$\int \frac{\cos x - 1}{\sin^2 x}\, dx = \int \frac{\cos x}{\sin^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x}\, dx$$
$$= \int \csc x \cot x - \csc^2 x\, dx = -\csc x + \cot x + c.$$

(24) (A)

$$\int \sec x \, dx \quad X \quad \frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x}$$

$$= \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x} \, dx$$

$$= \ln|\sec x + \tan x| + c$$

(25) (A)

$$\int (\sin x + x \cos x) \, dx$$

تخمين

$$= \int \frac{d}{dx}(x \sin x) \, dx$$

$$= x \sin x + c$$

التكامل يلغي الاشتقاق

(26) (B)

$$\int \frac{1}{e^x + 1} \, dx \quad X \quad \frac{e^{-x}}{e^{-x}}$$

$$= \int \frac{e^{-x}}{e^x \cdot e^{-x} + e^{-x}} \, dx$$

$$= \int \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}} \, dx = -\int \frac{-e^{-x}}{1 + e^{-x}} \, dx = -\ln|1 + e^{-x}| + c$$

(27) (B)

$$F(x) = \int f(x) \, dx = \int 2x + \frac{1}{2\sqrt{x}} \, dx = x^2 + \sqrt{x} + c$$

شرط $F(1) = 3$

$$1 + 1 + c = 3 \Rightarrow c = 1$$

$$F(x) = x^2 + \sqrt{x} + 1$$

$\therefore F(4) = 19$

(28) (C)

$$\int \frac{bx^2 + 10}{x^3 + 5x + 1} \, dx = 2 \ln|x^3 + 5x + 1| + c$$

اشتق الطرفين

$$\frac{bx^3 + 10}{x^3 + 5x + 1} = 2 \cdot \frac{3x^2 + 5}{x^3 + 5x + 1} = \frac{6x^2 + 10}{x^3 + 5x + 1} \Rightarrow b = 6$$

محمد عمر الخطيب

(29) (B)

$$\int \frac{bx}{x^4+1}\,dx = \tan^{-1}x^2 + c.$$

اشتق الطرفين

$$\frac{bx}{x^4+1} = \frac{1}{(x^2)^2+1}\cdot 2x = \frac{2x}{x^4+1} \Rightarrow b = 2$$

(30) (C)

$$\int (3x^2 + f(x))\,dx = x^3 + \sin x + c.$$

اشتق الطرفين

$$3x^2 + f(x) = 3x^2 + \cos x \Rightarrow f(x) = \cos x.$$

(31) (C)

$$\int \tan x \sec^n x\,dx = \frac{1}{3}\sec^3 x + c.$$

اشتق الطرفين

$$\tan x \sec^n x = \frac{1}{3}\cdot 3\sec^2 x \cdot \sec x \tan x = \sec^3 x \tan x$$

$$\therefore n = 1$$

(32) (A)

يمكنه حل السؤال بأكثر من طريقة.

المسافة = مجموع [طول الفترة الزمنية × متوسط السرعة]

$$d = 41(1-0) + 41(2-1) + 42(3-2) + 46(4-3) = 178.$$

ملاحظة: أي جواب قريب من هذا العدد يعتبر صحيح.

(33) (D)

$$f'(x) = 3e^x + 2x$$

$$f(x) = \int 3e^x + 2x\,dx$$

$$= 3e^x + x^2 + c.$$

الشرط $f(0) = 4$

$$3e^0 + 0 + c = 4$$

$$c = 1$$

$$f(x) = 3e^x + x^2 + 1$$

(34) (C)

$s(0) = 10$

$c = 10$

$s(t) = 5t^2 + 2t + 10$

$v(t) = 10t + 2, \quad s(0) = 10$

$s(t) = \int v(t)\,dt$

$= \int 10t + 2\,dt$

$= 5t^2 + 2t + c$

---

(35) (B)

$a(t) = 12t^2 + 4, \quad v(0) = 4, \quad s(0) = 1$

$v(t) = \int 12t^2 + 4\,dt$

$= 4t^3 + 4t + c_1$

الشرط $v(0) = 4$

$c_1 = 4$

$v(t) = 4t^3 + 4t + 4$

$s(t) = \int v(t)\,dt$

$= \int 4t^3 + 4t + 4\,dt$

$= t^4 + 2t^2 + 4t + c_2$

$s(0) = 1 \Rightarrow c_2 = 1$

$s(t) = t^4 + 2t^2 + 4t + 1$

$s(2) = 33$

---

(36) (B)

حجم الماء في الخزان

$v(t) = 200\left(\frac{t^3}{3} - t\right) + 200$

$v(3) = 320\ m^3$

$v'(t) = f(t) = 20(t^2 - 1)$

$v(t) = \int 20(t^2 - 1)\,dt$

$= 200\left(\frac{t^3}{3} - t\right) + c$

$v(0) = 200 \Rightarrow c = 200$

---

(37) (A)

$f(x) = \int 3x^2\,dx$

$= x^3 + c_2$

$f(0) = 1 \Rightarrow c_2 = 1$

$f(x) = x^3 + 1$

$f''(x) = 6x, \quad f(0) = 1, \quad f'(0) = 0$

$f'(x) = \int 6x\,dx = 3x^2 + c_1$

$f'(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$

$f(x) = 3x^2$

38 A

$$\int_0^2 x\, e^{-x^2}\, dx = -\frac{1}{2}\int_0^2 -2x\, e^{-x^2}\, dx$$

$$= -\frac{1}{2}\left[e^{-x^2}\right]_0^2$$

$$= -\frac{1}{2}\left[e^{-4}-1\right] = 0.491 \quad \text{ألف}$$

∴ عدد الحيوانات 491

انتهت اجابات الدرس الأول

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

حل أسئلة الوحدة الخامسة

اجابات الدرس الثاني

① ⓒ

$$\sum_{i=2}^{7}(4i-3) = 5+9+13+17+21+25$$

② Ⓑ

$$2+5+8+\cdots+65$$

$$=\sum_{i=1}^{22} 3i-1$$

حسابية

$a_1 = 2, \quad d = 3$

$a_i = a_1 + (i-1)d$

$= 2 + 3(i-1)$

$= 3i-1$

طريقة أخرى

الأعلى في المجموع

$3i-1 = 65$

$3i = 66$

$i = 22$

③ Ⓓ

ليست حسابية وليست هندسية

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \cdots + \frac{1}{900}$$

$$=\sum_{i=1}^{30}(-1)^{i+1}\frac{1}{i^2}$$

④ Ⓐ

$$\sum_{i=1}^{20} 2i+1 = 2\sum_{i=1}^{20} i + \sum_{i=1}^{20} 1$$

$$= 2\cdot\frac{20(21)}{2} + 20(1) = 440$$

⑤ ⓒ

$$\sum_{i=1}^{20}(i-1)(i+1) = \sum_{i=1}^{20} i^2-1 = \sum_{i=1}^{20} i^2 - \sum_{i=1}^{20} 1$$

$$= \frac{20(21)(41)}{6} - 20(1) = \frac{20(21)(41)}{6} - 20.$$

⑥ Ⓑ

1, 2, 3, 4, 5, 6, ..., 20

x x x x

$$\sum_{i=1}^{20} i^2 - \sum_{i=1}^{4} i^2 = \sum_{i=5}^{20} i^2$$

⑦ Ⓑ

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{i+1}{n^2} = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}(i+1) = \frac{1}{n^2}\left[\frac{n(n+1)}{2} + n(1)\right]$$

$$= \frac{n+1}{2n} + \frac{1}{n} = \frac{n+1+2}{2n} = \frac{n+3}{2n}.$$

⑧ ©

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{i^2}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} = 1/3$$

⑨ Ⓐ

$$1^2 + 2^2 + \cdots + 20^2 = \sum_{i=1}^{20} i^2 = \frac{20(21)(41)}{6} = 2870$$

⑩ Ⓑ

$$\sum_{i=1}^{10} (2i + c) = 140$$

$$2\frac{(10)(11)}{2} + 10c = 140$$

$$110 + 10c = 140 \longrightarrow c = 3 .$$

⑪ Ⓐ

هندسية غير منتهية

$$a_1 = 1/e \quad , \quad r = 1/e$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} e^{-i} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{e^i} = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^i$$

$$= \frac{1/e}{1 - 1/e}$$

$$= \frac{1/e}{\frac{e-1}{e}} = \frac{1}{e-1} .$$

⑫ ©

تتم x_i متتالية حسابية

$$a_1 = 0.1 \quad , \quad d = 0.1$$

$$x_i = 0.1\,i$$

$$0.1\,i = 10$$

$$i = 100$$

$$f(0.1\,i) = 3(0.1\,i) + 1 = 0.3\,i + 1$$

المطلوب

$$f(0.1) + f(0.2) + \cdots + f(10)$$

$$= \sum_{i=1}^{100} f(0.1\,i)$$

$$= \sum_{i=1}^{100} 0.3\,i + 1$$

$$= 0.3\frac{(100)(101)}{2} + 100(1) = 1615$$

(13)

(13)

$f(x) = x^2$ ، $x_i = 2, 4, \cdots, 100$

قيم x_i هي متتالية حسابية

$a_1 = 2$ ، $d = 2$

$x_i = 2 + (i-1)(2)$

$= 2i$

$f(x_i) = x_i^2$

$= (2i)^2$

$= 4i^2$

$2i = 100$

$i = 50$

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$$

$$= \sum_{i=1}^{50} 4i^2 \cdot 2$$

$$= 8 \sum_{i=1}^{50} i^2$$

$$= 8 \cdot \frac{50(51)(101)}{6} = 343400$$

انتهت اجابات الدرس الثاني

محمد عمر الخطيب

حل أسئلة الوحدة الخامسة

اجابات الدرس الثالث

① Ⓐ

$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2-(-1)}{14} = \frac{3}{14}$

لاحظ ان عدد العناصر 15 فان $n = 14$

② Ⓒ

$n = 10$

$\Delta x = \frac{2-0}{10} = \frac{2}{10}$

$P = \{0, \frac{2}{10}, \frac{4}{10}, \dots, 2\}$

③ Ⓑ

$n = 30$, $[2,5]$

العنصر السابع هو x_6

$x_i = a + \frac{b-a}{n} i$

$x_6 = 2 + \frac{5-2}{30}(6) = 2 + \frac{3}{30} \times 6$

④ Ⓒ

$f(x) = 3x^2$, $[0,4]$, $n = 4$

$\Delta = \frac{4-0}{4} = 1$

$P = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

$A_R = \Delta x [f(1) + f(2) + f(3) + f(4)]$

$= 1 [3 + 12 + 27 + 48] = 90$

⑤ Ⓐ

$A_L = \Delta x [f(0) + f(0.25) + f(0.5) + f(0.75)]$

$= 0.25 [2 + 2.2 + 1.6 + 1.4]$

$= 1.8$

⑥ Ⓒ

$A_R = \Delta x [f(0.1) + f(0.2) + \dots + f(0.8)]$

$= 0.1 [2.4 + 2.6 + 2.7 + 2.6 + 2.4 + 2 + 1.4 + 0.6]$

$= 1.67$

حل أسئلة الوحدة الخامسة

⑦ ⑧

$f(x) = 3x+5$, $x = 0.4, 0.8, 1.2, 1.6, 2$

قيم x_i متتابعة حسابية

$a_1 = 0.4$, $d = 0.4$

$x_i = 0.4\,i$

$f(x_i) = 3x_i + 5$

$= 3(0.4i)+5$

$= 1.2i + 5$

$= \sum_{i=1}^{5} f(x_i)\,\Delta x$

$= \sum_{i=1}^{5} f(0.4i)\cdot 0.4$

$= \sum_{i=1}^{5} (1.2i+5)\,0.4$

$= 0.4\left[1.2\,\frac{(5)(6)}{2} + 5(5)\right] = 19.2$

---

⑧ ⑥

$f(x) = 2x$, $[0,4]$, $n = 16$.

$\Delta x = \frac{4-0}{16} = \frac{1}{4}$

$c_i = x_i$

$= 0 + \frac{1}{4}i$

$= \frac{1}{4}i$

$f(x_i) = 2\,\frac{1}{4}i$

$= \frac{1}{2}i$

$A_R = \sum_{i=1}^{16} f(c_i)\,\Delta x$

$= \sum_{i=1}^{16} f(\frac{1}{4}i)\cdot\frac{1}{4}$

$= \sum_{i=1}^{16} \frac{1}{2}i\cdot\frac{1}{4}$

$= \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{16} i = \frac{1}{8}\cdot\frac{16(17)}{2} = 17$.

---

⑨ Ⓐ

$f(x) = x^2$, $[0,4]$

$\Delta x = \frac{4-0}{n} = \frac{4}{n}$

$c_i = x_i = 0 + \frac{4}{n}i$

$= \frac{4}{n}i$

$f(x_i) = (\frac{4}{n}i)^2$

$= \frac{16}{n^2}i^2$

$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$

$= \lim \sum_{i=1}^{n} \frac{16}{n^2}i^2\cdot\frac{4}{n}$

$= \lim \frac{64}{n^3}\sum i^2$

(١٥) (B)

$$A = \lim A_n$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum \frac{i^2}{n^2}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$$
$$= 1/3$$

(١١) (A)

$n = 2$, $c_i = \{c, d\}$

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{2} f(c_i)\Delta x = \frac{2}{3}$$

$$[f(c) + f(d)] \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{2}[c^2 + d^2] = \frac{2}{3}$$

$$c^2 + d^2 = \frac{4}{3}$$

انتهت اجابات الدرس الثالث

① B

$$\int_3^1 [f(x)+g(x)]\,dx = -\int_1^3 f(x)+g(x)\,dx = -[2(3)-2] = -8$$

② B

$$\int_0^2 f(x)\,dx + \int_2^1 f(x)\,dx$$

$$= \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^2 f(x)\,dx - \int_1^2 f(x)\,dx$$

$$= \int_0^1 f(x)\,dx$$

يمكن حل السؤال بخط التكامل



$$\int_0^2 f(x)\,dx + \int_2^1 f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx$$

③ B

$$\int_1^7 (g(x)+1)\,dx = 10$$

$$\int_1^7 g(x)\,dx + \int_1^7 1\,dx = 10$$

$$\int_1^7 g(x)\,dx + 1(7-1) = 10$$

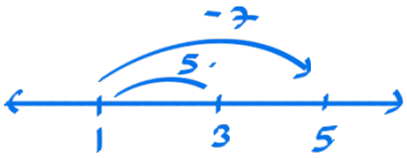
$$\therefore \int_1^7 g(x) = 10-6 = 4. \Rightarrow \int_7^1 g(x)\,dx = -4.$$

$$\therefore \int_7^1 3g(x)\,dx = 3(-4) = -12.$$

④ D

$$\int_3^5 f(x)\,dx = -7-5 = -12.$$

من خط التكامل.



أو

$$\int_1^5 f(x)\,dx = -7.$$

$$\int_1^3 f(x)\,dx + \int_3^5 f(x)\,dx = -7.$$

$$5 + \int_3^5 f(x)\,dx = -7 \Rightarrow \int_3^5 f(x)\,dx = -7$$

⑤ (B) أجعل الحد الذي لا يحتوي على المتغير يساوي 2

$3k+10=-2$

$3k=-12$

$k=-4$

⑥ (C) عندما تكون $2x=6$ فإن $x=3$

$$\int_6^6 f(t)\,dt = \cos(3-3)+k$$

$$0 = 1+k \Rightarrow k=-1$$

⑦ (B) عندما $x=1$ فإن

$$\int_2^2 f(t)\,dt = 4(1)^2+b(1)-1$$

$$0 = 4+b-1$$

$$0 = 3+b$$

$$b=-3$$

⑧ (D)

$$\int_0^3 (3x^2+k)\,dx = 3$$

$$x^3+kx\Big]_0^3 = 3$$

$$27+3k=3$$

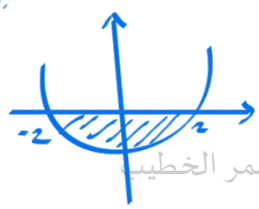
$$3k=-24$$

$$k=-8$$

⑨ (C)

$y_1=0$

$y_2=x^2-4$



$x^2-4=0$

$x=\pm 2$

$$A=\int_{-2}^{2} y_1-y_2\,dx$$

$$=\int_{-2}^{2} 0-(x^2-4)\,dx$$

$$=-\int_{-2}^{2} x^2-4\,dx$$

⑩ (B)

$$\int_1^5 (2x-1)\,dx = -k$$

$$x^2-x\Big]_1^5 = -k$$

$$20=-k$$

$$k=-20$$

$$\int_1^c (2x-1)\,dx + k = \int_5^c (2x-1)\,dx$$

$$\int_1^c (2x-1)\,dx - \int_5^c (2x-1)\,dx = -k$$

$$\int_1^c (2x-1)\,dx + \int_c^5 (2x-1)\,dx = -k$$

(11) D

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx = \tan^{-1}x\,\Big]_0^1 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$$

(12) B

$$\int_0^1 \sqrt{x}\,(x+1)\,dx = \int_0^1 x^{1/2}(x+1)\,dx = \int_0^1 x^{3/2} + x^{1/2}\,dx$$

$$= \frac{2}{5}x^{5/2} + \frac{2}{3}x^{3/2}\,\Big]_0^1 = \frac{16}{15}$$

(13) B

$$\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\ln|x^2+1|\,\Big]_0^1$$

$$= \frac{1}{2}\ln 2 = \ln\sqrt{2}$$

(14) C

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx$$

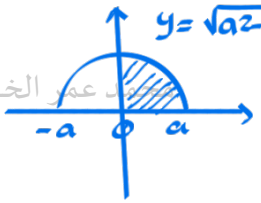


قيمة التكامل تساوي مساحة ربع دائرة نصف قطرها a

$$= \frac{1}{2}\pi(1)^2$$

(15) D

$$\int_0^a \sqrt{1-x^2}\,dx$$



قيمة التكامل تساوي مساحة ربع دائرة نصف قطرها a

$$= \frac{1}{4}\pi(a^2) = \frac{1}{4}\pi a^2$$

(16) C

$$\int_0^4 f(x)\,dx = \int_0^2 f(x)\,dx + \int_2^4 f(x)\,dx$$



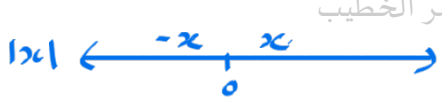
$$= \int_0^2 2x\,dx + \int_2^4 4\,dx$$

$$= x^2\,\Big]_0^2 + 4(4-2)$$

$$= 12$$

(17) C

$$\int_{-2}^{2} |x|\,dx = \int_{-2}^{0} -x\,dx + \int_0^2 x\,dx$$



$$-\frac{x^2}{2}\,\Big]_{-2}^{0} + \frac{x^2}{2}\,\Big]_0^2$$

$$= 2 + 2$$

$$= 4$$

(18) (أ)

$$\int_0^3 f(x)\,dx$$

$|2x-2|$: $2-2x$ على $(-\infty, 1]$، $2x-2$ على $[1, \infty)$

$$= \int_0^1 (2-2x)\,dx + \int_1^3 (2x-2)\,dx$$

$$= 2x - x^2 \Big]_0^1 + x^2 - 2x \Big]_1^3 = 5$$

(19) (أ)

$$\int_{-5}^{3} f(x)\,dx = \int_{-5}^{0} -1\,dx + \int_{0}^{3} 1\,dx$$

$$= -1(0-5) + 1(3-0)$$

$$= -2$$

$|x|$: $-x$ على $(-\infty, 0]$، x على $[0, \infty)$

$f(x) = \frac{|x|}{x}$: -1 على $(-\infty, 0)$، 1 على $(0, \infty)$

(20) (ب)

$$f_{ave} = \frac{1}{2-0} \int_0^2 3x^2\,dx = \frac{1}{2}(8) = 4.$$

$$f(c) = f_{ave}$$

$$3c^2 = 4$$

$$c^2 = \frac{4}{3}$$

$$c = +\sqrt{\frac{4}{3}} = +\frac{2}{\sqrt{3}} \checkmark$$

$$c = -\sqrt{\frac{4}{3}} = -\frac{2}{\sqrt{3}}$$ مرفوض

(21) (ب)

$$f(c) = f_{ave}$$

$$3c^2 + 1 = 17$$

$$3c^2 = 16$$

$$c^2 = \frac{16}{3}$$

$$c = +\sqrt{\frac{16}{3}}, \quad c = -\sqrt{\frac{16}{3}} \checkmark$$

$$c = \frac{4}{3}, \quad c = -\frac{4}{\sqrt{3}}$$ مرفوض

(22) (د)

$$f_{ave} = \frac{1}{2-0} \int_0^2 4x^3\,dx = \frac{1}{2}\left[x^4\right]_0^2 = 8.$$

$$f(c) = f_{ave}$$

$$4c^3 = 8$$

$$c^3 = 2$$

$$c = \sqrt[3]{2} \checkmark$$

23 (أ)

$$f_{ave} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin x\,dx = \frac{1}{2\pi}\left[-\cos x\right]_0^{2\pi} = 0.$$

$f(c) = f_{ave}$

$\sin c = 0$

$c = n\pi \quad , n \in Z$

$c = 0$ مرفوض

$c = \pi$ ✓

$c = 2\pi$ مرفوض

24 (أ)

$$f_{ave} = 2$$

$$\frac{1}{k}\int_0^k \sqrt{x}\,dx = 2$$

$$\frac{1}{k}\int_0^k x^{1/2} = 2$$

$$\frac{1}{k}\,\frac{2}{3}x^{3/2}\Big]_0^k = 2$$

$$\frac{2}{3}k \cdot k^{3/2} = 2$$

$$\frac{2}{3}k^{1/2} = 2$$

$$k^{1/2} = 3$$

$$k = 9.$$

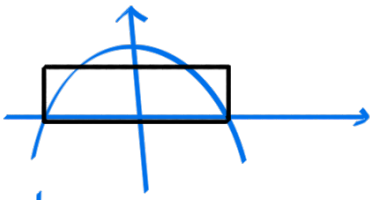
25 (ب)

$f(c)$ عرض المستطيل

$$f(c) = f_{ave} = \frac{1}{2-2}\int_{-2}^{2}(4-x^2)\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\left(4x - \frac{x^3}{3}\right)\Big]_{-2}^{2}$$

$$= \frac{8}{3}.$$



$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$$

مساحة المستطيل

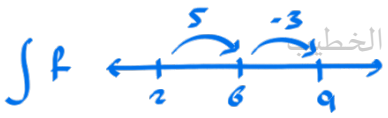
$\therefore \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ عرض المستطيل

26 (ب)

$$f_{ave} = \frac{1}{9-2}\int_2^9 f(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{7}(5 + -3)$$

$$= \frac{2}{7}.$$



محمد عمر الخطيب

حل أسئلة الوحدة الخامسة

اجابات الدرس الرابع

(27) ©

$|f(x)| \le 0.1$

$-0.1 \le f(x) \le 0.1$

$\int_{-1}^{2} -0.1\,dx \le \int_{-1}^{2} f(x)\,dx \le \int_{-1}^{2} 0.1\,dx$

$-0.3 \le \int_{-1}^{2} f(x) \le 0.3$

القيمة التي لا يمكن للتكامل هي -0.3

(28) ©

$\int_0^1 e^{-1}\,dx \le \int_0^1 e^{-x^2}\,dx \le \int_0^1 1\,dx$

$1/e \le \int_0^1 e^{-x^2}\,dx \le 1$

الحد الأدنى هو $1/e$ ، والحد الأعلى هو 1

$0 \le x \le 1$

$0 \le x^2 \le 1$

$0 \ge -x^2 \ge -1$

$-1 \le -x^2 \le 0$

$e^{-1} \le e^{-x^2} \le e^0$

(29) Ⓐ

$\int_0^{\pi} 1\,dx \le \int_0^{\pi} \sqrt{1+\sin x}\,dx \le \int_0^{\pi} \sqrt{2}\,dx$

$\pi \le \int_0^{\pi} \sqrt{1+\sin x}\,dx \le 2\pi$

الحد الأدنى هو π ، الأعلى هو $\sqrt{2}\pi$

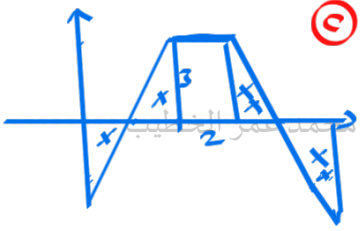
$0 \le x \le \pi$ (الربع الأول والثاني)

$0 \le \sin \le 1$

$1 \le 1+\sin x \le 2$

$1 \le \sqrt{1+\sin x} \le \sqrt{2}$

(30) ©



يمثل التكامل مساحة المثلث بسبب وقوع المساحات المثلثية فوق محور x وتحته

$\int_0^7 f(x)\,dx = 2 \times 3 = 6$

(31) ©

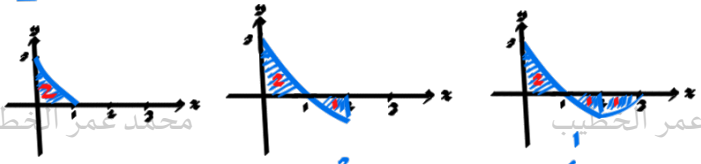
$\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = -A_1 + A_2 -$

$= -\frac{1}{2}(2)(2) + 2 + \frac{1}{2}(2)(2) = 2$

حل أسئلة الوحدة الخامسة

(32) ©

= 2 = 2-1=1 = 2-2=0



عين مساحات تقريبية .

$$\int_0^3 f(x)\,dx < \int_0^2 f(x)\,dx < \int_0^1 f(x)\,dx$$

(33) (B)

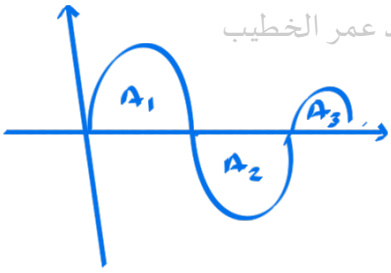
$A_1 + A_2 + A_3 = 13$

$A_1 = A_2$

$2A_1 + 3 = 13$

$A_1 = 5$

$\therefore A_2 = 5$



$$\int_2^4 f(x)\,dx = -5$$

(34) (D)

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sin c_i^2\,\Delta x = \int_0^2 \sin x^2\,dx$$

(35) (B)

$$\int_0^2 f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} 2 + \frac{3(n+1)(2n+1)}{6n^2} = 2 + \frac{6}{6} = 3$$

(36) (D)

$$\int_2^5 x^2\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(2 + \frac{3}{n}i\right)^2 \cdot \frac{3}{n}$$

$\Delta x = \frac{5-2}{n} = \frac{3}{n}$

$x_i = 2 + \frac{3}{n}i$

$f(x_i) = x_i^2 = \left(2 + \frac{3}{n}i\right)^2$

(37) (B)

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x)\,\Delta x = \int_0^2 3x^2\,dx = x^3\Big]_0^2 = 8$$

محمد عمر الخطيب

(38) D

$$\int_0^4 f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{6}{n}i + 1\right)\frac{1}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[\frac{6}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2} + 6n\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3(n+1)}{n} + 6 \quad = 3 + 6 = 9$$

(39) A

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} e^{2i/n}\cdot\frac{2}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} e^{2x_i}\,\Delta x$$

$$= \int_0^2 e^x\,dx = e^x\Big]_0^2 = e^2 - 1$$

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2}{n}$$

$b - a = 2$

نفرض $a = 0$

$b = 2$

$x_i = 0 + \Delta x\, i$

$= \frac{2}{n} i$

(40) D

$$\int_1^8 \sqrt{x^{-2/3}}\,dx = \int_1^8 (x^{-2/3})^{1/2}\,dx = \int_1^8 x^{-1/3}\,dx$$

$$= \frac{3}{2}x^{2/3}\Big]_1^8$$

$$= \frac{9}{2}$$

انتهت اجابات الدرس الرابع

محمد عمر الخطيب

حل أسئلة الوحدة الخامسة

اجابات الدرس الخامس

① (B)

$$\int_{-1}^{1} \frac{4}{1+x^2}\,dx = 4\tan^{-1}x\Big]_{-1}^{1} = 4\left[\frac{\pi}{2} - \frac{-\pi}{2}\right] = 2\pi$$

② (B)

$$\int_{0}^{t} (\sin^2 x + \cos^2 x)\,dx = \int_{0}^{t} 1\,dt = 1(t-0) = t.$$

③ (A)

$$\int_{1}^{e} \frac{t-3}{t}\,dt = \int_{1}^{e} \frac{t}{t} - \frac{3}{t}\,dt = \int_{1}^{e} 1 - \frac{3}{t}\,dt$$

$$= t - 3\ln|t|\Big]_{1}^{e}$$

$$= (e-3) - (1) = e-4.$$

④ (B)

$$\int_{0}^{1/2} \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = 3\sin^{-1}x\Big]_{0}^{1/2} = 3\left[\sin^{-1}\tfrac{1}{2} - \sin^{-1}0\right] = 3\cdot\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$$

⑤ (A)

$$\int_{1}^{4} (x\sqrt{x} + \frac{3}{x})\,dx = \int_{1}^{4} x^{3/2} + \frac{3}{x}\,dx$$

$$= \frac{2}{5}x^{5/2} + 3\ln|x|\Big]_{1}^{4}$$

$$= \frac{62}{5} + 3\ln 4.$$

⑥ (D)

$$\int_{0}^{2} \frac{e^{2x} - 2e^{3x}}{e^{3x}}\,dx = \int_{0}^{2} \frac{e^{2x}}{e^{3x}} - \frac{2e^{3x}}{e^{3x}}\,dx$$

$$= \int_{0}^{2} e^{-x} - 2\,dx$$

$$= -e^{-x} - 2x\Big]_{0}^{2} = \frac{-1}{e^2} - 3$$

⑦ (C)

$$\int_{0}^{\pi/4} \frac{\sin x}{\cos^2 x}\,dx = \int_{0}^{\pi/4} \frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\sin x}{\cos x}\,dx$$

$$= \int_{0}^{\pi/4} \sec x\cdot\tan x\,dx = \sec x\Big]_{0}^{\pi/4} = \sqrt{2} - 1.$$

حل أسئلة الوحدة الخامسة

⑧ ⓒ

$$f(x) = \int_x^2 \sec t\, dt = -\int_2^x \sec t\, dt$$

$$f'(x) = -\sec x$$

⑨ Ⓐ

$$f(x) = \int_1^2 (t^3 - 5t)\, dt$$

$f'(x) = 0$ تكامل محدود

⑩ Ⓓ

$$f(x) = \int_{x^2}^{x^3} \sin 3t\, dt = \int_c^{x^3} \sin 3t\, dt - \int_c^{x^2} \sin 3t\, dt$$

$$f'(x) = \sin 3x^3 (3x^2) - \sin 3x^2 \cdot (2x)$$

$$= 3x^2 \sin 3x^3 - 2x \sin 3x^2$$

⑪ Ⓑ

$$\frac{d}{dx} \int_c^{\sqrt{x}} \frac{1}{t^2+1}\, dt$$

$$= \frac{1}{(\sqrt{x})^2+1} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{x+1} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}(x+1)}$$

⑫ Ⓑ

$$\frac{d}{dx} \int_{\sin x}^{\cos x} \sqrt{1-t^2}\, dt = \frac{d}{dx} \left[\int_c^{\cos x} \sqrt{1-t^2}\, dt - \int_c^{\sin x} \sqrt{1-t^2}\, dt \right]$$

$$= \sqrt{1-\cos^2 x} \cdot (-\sin x) - \sqrt{1-\sin^2 x}\, (\cos x)$$

$$= \sqrt{\sin^2 x}\, (-\sin x) - \sqrt{\cos^2 x} \cdot \cos x$$

$$= |\sin x| (-\sin x) - |\cos x| \cdot \cos x$$

$$= \sin x (-\sin x) - \cos x (\cos x)$$

$$= -\sin^2 x - \cos^2 x = -(\sin^2 x + \cos^2 x) = -1(1) = -1 \quad \#$$

(13) D

$f(x) = \int_2^{2x} e^{-t^2} dt$

$f(1) = 5 + \int_2^{2} e^{-t^2} dt = 5$

$f(x) = e^{-(2x)^2} \cdot 2$

$= 2e^{-4x^2}$

(14) A

$\int_1^3 2x\, dx = F(3) - F(1)$

$x^2 \Big]_1^3 = F(3) - 5$

$8 = F(3) - 5$

$F(3) = 13$

(15) A

$h(x) = \int_1^{g(x)} f(t) dt$

$h'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$

$h'(3) = f(g(3)) \cdot g'(3)$

$= f(4) \cdot 2$

$= -1 (2)$

$= -2$

(16) B

$\int_1^x f(t) dt = e^{\sin 2x} - \ln \cos x - 1$

نشتق الطرفين

$f(x) = e^{\sin 2x} \cdot \cos 2x \cdot 2 - \frac{-\sin x}{\cos x}$

$f(0) = e^0 \cdot (1) \cdot 2 - 0 = 2$

(17) A

$\int_{-1}^{2} f'(x) dx = x^3 + 9x \Big]_{-1}^{2}$

$f(2) - f(-1) = 26 - (-10)$

$7 - f(-1) = 36 \Rightarrow f(-1) = -29$

(18) D

$\lim_{x \to 1} \frac{\int_1^x e^{t^2} dt}{x^2 - 1} \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to 1} \frac{e^{x^2}}{2x} = \frac{e}{2}$ لوبيتال

(19) D

$\int_0^{2x} f(t) dt = 3x^3 - x + 5$

$f(2x) \cdot 2 = 9x^2 - 1$

عند $x = 1$ فان

$f(2) \cdot 2 = 9(1)^2 - 1$

$f(2) = 4$

محمد عمر الخطيب

حل أسئلة الوحدة الخامسة

اجابات الدرس الخامس

20 (B)

$$\int_0^k (2kx - x^2)\,dx = 18$$

$$kx^2 - \frac{x^3}{3}\Big]_0^k = 18$$

$$k^3 - \frac{k^3}{3} = 18$$

$$\frac{2k^3}{3} = 18$$

$$k^3 = 27$$

$$k = 3$$

21 (C)

$$\int_1^{2x} f(t)\,dt = 2x^2 - 2x + 1$$

$$f(2x)\cdot 2 = 4x - 2$$

$$f(2x) = 2x - 1$$

نفرض $u = 2x$

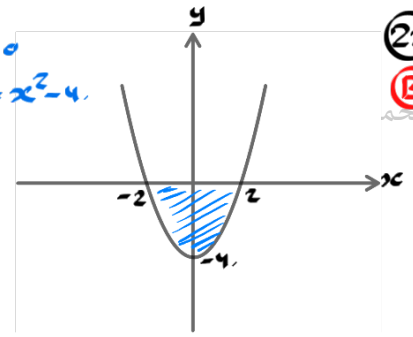
$$f(u) = 2u - 1$$

$$f(x) = 2x - 1$$

22 (B)

$g(x) = 0$

$f(x) = x^2 - 4$



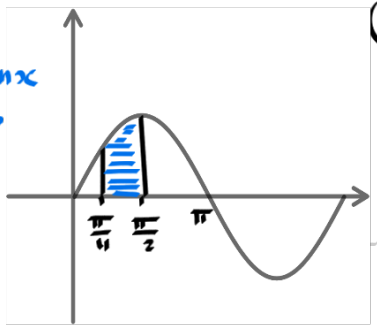
$$A = \int_{-2}^{2} g(x) - f(x)\,dx$$

$$= \int_{-2}^{2} 0 - (x^2 - 4)\,dx = -\int_{-2}^{2} x^2 - 4\,dx$$

23 (C)

$f(x) = \sin x$

$g(x) = 0$



$$A = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi/2} \sin x\,dx = -\cos x\Big]_{\pi/4}^{\pi/2}$$

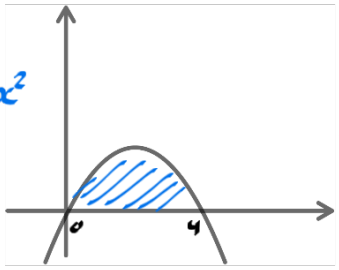
$$= -\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \sqrt{2}$$

24 (B)

$f(x) = 4x - x^2$

$g(x) = 0$



$$A = \int_0^4 4x - x^2\,dx$$

$$= 2x - \frac{x^3}{3}\Big]_0^4$$

$$= \frac{32}{3}$$

(25) B

$H(x) = \int_1^{x^2} (2t-1)\,dt$

$H(1) = \int_1^1 2t-1\,dt = 0$

// نقطة التماس $(1,0)$

$H'(x) = (2x^2-1)\cdot 2x$

$m = H'(1) = 2$

// معادلة المماس هي

$y - 0 = 2(x-1)$

$y = 2x - 2$

(26) A

$\int_0^{\pi/2} \sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}\,dx$

$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$

$= \frac{1+\cos 2x}{2}$

$= \int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos^2 x}\,dx$

$= \int_0^{\pi/2} |\cos x|\,dx \cdot = \int_0^{\pi/2} \cos x\,dx = \sin x\Big]_0^{\pi/2} = 1$

(27) A

ملاحظة:
عندما الدالة
تكون قيمة x (موجبة)
فان الازاحة = المسافة

المسافة = الازاحة = المساحة = التكامل

$= \int_0^5 9(1-e^{-t})\,dt$

$= 9(1+e^{-t})\Big]_0^5$

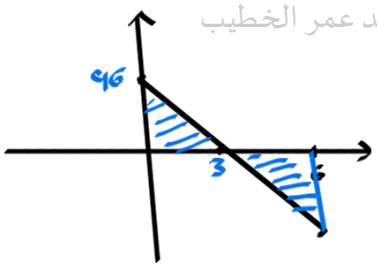
≈ 36

(28) D

المسافة = المساحة

$A = \frac{1}{2}(3)(96) + \frac{1}{2}(3)(96)$

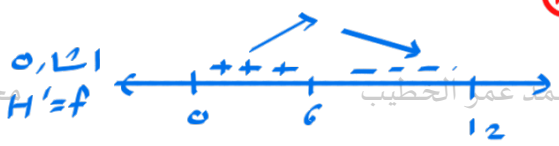
$= 288$



29 (A)

$H(x) = \int_0^x f(t)\,dt$

$H'(x) = f(x)$

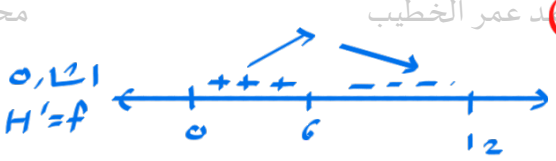


متزايدة $(0,6)$

30 (B)

$H(x) = \int_0^x f(t)\,dt$

$H'(x) = f(x)$



$x=6$ العبارة الخاطئة عند

31 (C)

$H(x) = \int_0^x f(t)\,dt$

$H'(x) = f(x)$

$H''(x) = f'(x)$



لاحظ من الرسم ان الدالة f

سالبة متناقصة على الفترة $(0,9)$

اي ان $f'<0$

و متزايدة على الفترة $(9,12)$

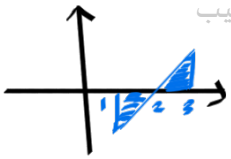
اي ان $f'>0$

متزايدة لتقعر للاعلى هي $(9,12)$

32 (B)

$H(x) = \int_1^x f(t)\,dt$

$H(3) = \int_1^3 f(t)\,dt = 0$



33 (C)

$H(x) = \int_1^x f(t)\,dt$

$H'(x) = f(x) \Rightarrow H'(3) = f(3) = 2$

34 (B)

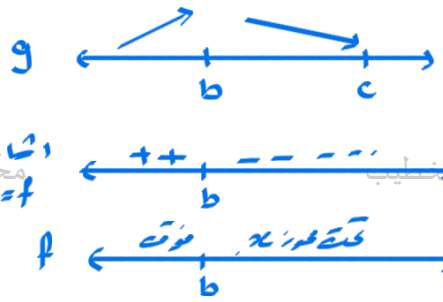
$f_{ave} = \frac{1}{6-1}\int_1^6 f(t)\,dt = \frac{1}{5}[5] = 1$

المساحة = عدد المربعات

(35) (13)

$g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$

$g'(x) = f(x)$



ملاحظة للدارس حط تقارب افقي عند المشتقة f(x) كأخط تقارب افقي

(36) (13)

$\therefore F(x) - G(x) = 3.$

$\therefore \int_0^4 (F(x) - G(x))\,x^2\,dx$

$= \int_0^4 3x^2\,dx$

$= x^3]_0^4 = 64.$

نفرض ان $F(x) - G(x) = c.$

$\int_0^4 F(x) - G(x)\,dx = 12.$

$\int_0^4 c\,dx = 12$

$c(4-0) = 12$

$c = 3.$

(37) (B)

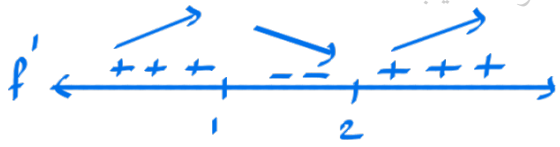
$f(x) = \int_0^x t^2 - 3t + 2\,dt.$

$f'(x) = x^2 - 3x + 2.$

$f'(x) = 0$

$x^2 - 3x + 2 = 0$

$x = 1, 2$



النهاية العظمى للدالة f(x) عند x = 1

(38) (B)

$f(x) = \int_{-2}^{x^2-6x} e^t\,dt.$

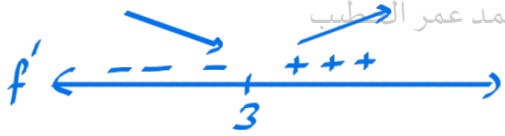
$f'(x) = e^{x^2-6x}(2x-6)$

$f'(x) = 0$

$e^{x^2-6x} \cdot (2x-6) = 0$

$e^{x^2-6x} = 0$ لا يوجد حل ، $2x - 6 = 0$

$x = 3$



النهاية الصغرى المحلية للدالة عند x = 3

(39) (B)

$$f(1) + 2(1) = 3(1)^2 + a$$
$$5 + 2 = 3 + a$$
$$a = 4$$

$$\int f(x) + 2x \, dx = x^3 + ax + 1$$

اشتق الطرفين

$$f(x) + 2x = 3x^2 + a$$

عوض $x = 1$

(40) (A)

$$K + L = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \sec^2 x \, dx + \int_{\pi/3}^{\pi/6} \tan^2 x \, dx$$
$$= \int_{\pi/6}^{\pi/3} \sec^2 x \, dx - \int_{\pi/6}^{\pi/3} \tan^2 x \, dx$$
$$= \int_{\pi/6}^{\pi/3} \sec^2 x - \tan^2 x \, dx$$
$$= \int_{\pi/6}^{\pi/3} 1 \, dx$$
$$= 1\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{3}$$

(41) (B)

السؤال صعب

يمكن حل السؤال بأكثر من طريقة.

(1) $0 \le x < 1$

$$H(x) = \int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x 2\,dt = 2x$$



(2) $x \ge 1$

$$H(x) = \int_0^1 f(t)\,dt + \int_1^x f(t)\,dt$$
$$= \int_0^1 2\,dt + \int_1^x 2t\,dt$$
$$= 2 + t^2\Big]_1^x$$
$$= 2 + x^2 - 1$$
$$= x^2 + 1$$

$$\therefore H(x) = \begin{cases} 2x & 0 \le x < 1 \\ x^2 + 1 & x \ge 1 \end{cases}$$

(42) السؤال صعب ©

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[\frac{n+1}{n}+\frac{n+2}{n}+\cdots+\frac{2n}{n}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{n+i}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1+\frac{1}{n}i$$

$$=\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n}\left(1+\frac{1}{n}i\right)\cdot\frac{1}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n}(1+x_i)\,\Delta x$$

$$=\int_0^1 (1+x)\,dx = 3/2$$

$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{n}$

$b-a=1$

نفرض $a=0 \Rightarrow b=1$

$x_i = 0+\frac{1}{n}i$

$= \frac{1}{n}i$

وممكن اكل يكون $\int_1^2 x\,dx = 3/2$.

(43) السؤال صعب ©

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{n}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{\pi}{n}i\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n}\sin\frac{\pi}{n}i\cdot\frac{1}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n}\sin\pi x_i\cdot\Delta x$$

$$=\int_0^1 \sin\pi x\,dx$$

$$=\left.-\frac{\cos\pi x}{\pi}\right]_0^1$$

$$=\frac{2}{\pi}.$$

$\Delta x = \frac{1}{n}$

$a=0 \Rightarrow b=1$

$x_i = 0+\Delta x i$

$= \frac{1}{n}i$

انتهت اجابات الدرس الخامس

حل أسئلة الوحدة الخامسة

اجابات الدرس السادس

① (B)

$\int x^2(x^3+1)^5\,dx$

$u = x^3+1$

$\frac{du}{dx} = 3x^2$

$\frac{du}{3x^2} = dx$

$= \int x^2\, u^5\, \frac{du}{3x^2}$

$= \frac{1}{3}\int u^5\,du$

$= \frac{1}{3}\,\frac{u^6}{6} + c = \frac{1}{18}(x^3+1)^6 + c.$

② (A)

$\int \sec^2 x\,\sqrt{\tan x}\,dx.$

$u = \tan x$

$\frac{du}{dx} = \sec^2 x$

$\frac{du}{\sec^2 x} = dx.$

$= \int \sec^2 x \cdot \sqrt{u}\,\frac{du}{\sec^2 x}$

$= \int u^{1/2}\,du$

$= \frac{2}{3}u^{3/2} + c$

$= \frac{2}{3}(\tan x)^{3/2} + c = \frac{2}{3}\tan^{3/2} x + c.$

③ (B)

$\int \sin x\,\cos^6 x\,dx$

$u = \cos x$

$\frac{du}{dx} = -\sin x$

$\frac{du}{-\sin x} = dx$

$= \int \sin x\, u^6\,\frac{du}{-\sin x}$

$= -\int u^6\,du$

$= -\frac{1}{7}u^7 + c = -\frac{1}{7}\cos^7 x + c.$

④ (A)

$\int x^2 \cos x^3\,dx$

$= \int x^2 \cos u\,\frac{du}{3x^2}$

$= \frac{1}{3}\int \cos u\,du$

$= \frac{1}{3}\sin u + c = \frac{1}{3}\sin x^3 + c.$

حل أسئلة الوحدة الخامسة

⑤ ⓒ

$$\int \frac{x^2}{e^{x^3}}\,dx = \int x^2 e^{-x^3}\,dx$$

$u = -x^3$

$\frac{du}{dx} = -3x^2$

$\frac{du}{-3x^2} = dx$

$= \int x^2 e^{u} \frac{du}{-3x^2}$

$= -\frac{1}{3}\int e^u\,du$

$= -\frac{1}{3} e^u + c = -\frac{1}{3} e^{-x^3} + c$

يمكن حل السؤال بطريقة مختلفة في الدرس الأول.

---

⑥ ⓑ

$\int \tan 2x\,dx$

يمكن حل السؤال بدون تعويض (وهو الأفضل)

$= \int \frac{\sin 2x}{\cos 2x}\,dx$

$u = \cos 2x$

$= \int \frac{\sin 2x}{u} \cdot \frac{du}{-2\sin 2x}$

$\frac{du}{dx} = -2\sin 2x$

$= -\frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\,du$

$\frac{du}{-2\sin 2x} = dx$

$= -\frac{1}{2}\ln|u| + c = -\frac{1}{2}\ln|\cos 2x| + c$

---

⑦ Ⓐ

$\int \frac{1}{x(\ln x + 1)^2}\,dx$

$u = \ln x + 1$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$

$= \int \frac{1}{x \cdot u^2} \cdot x\,du$

$x\,du = dx$

$= \int u^{-2}\,du$

$= \frac{u^{-1}}{-1} + c$

$= \frac{-1}{u} + c = \frac{-1}{\ln x + 1} + c$

محمد عمر الخطيب

⑧ ⑥

$$\int \frac{(\tan^{-1}x)^2}{x^2+1}\,dx$$

$$u = \tan^{-1}x$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x^2+1}$$

$$(x^2+1)\,du = dx$$

$$= \int \frac{u^2}{x^2+1}\cdot(x^2+1)\,du$$

$$= \int u^2\,du$$

$$= \frac{1}{3}u^3 + c = \frac{1}{3}(\tan^{-1}x)^3 + c.$$

---

⑨ ⑦

$$\int \frac{1}{4x^2+25}\,dx = \frac{1}{25}\int \frac{1}{\frac{4x^2}{25}+1}\,dx$$

$$u = \frac{2x}{5} = \frac{2}{5}x$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{5\,du}{2} = dx$$

$$= \frac{1}{25}\int \frac{1}{(\frac{2x}{5})^2+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{25}\int \frac{1}{u^2+1}\cdot\frac{5\,du}{2}$$

$$= \frac{1}{10}\tan^{-1}u + c = \frac{1}{10}\tan^{-1}(\frac{2x}{5}) + c.$$

---

⑩ ⑤

$$\int \sqrt[3]{x^5-x^3}\,dx = \int \sqrt[3]{x^3(x^2-1)}\,dx.$$

$$u = x^2-1$$

$$\frac{du}{dx} = 2x$$

$$\frac{du}{2x} = dx.$$

$$= \int x\sqrt[3]{x^2-1}\,dx$$

$$= \int x\,u^{1/3}\,\frac{du}{2x}$$

$$= \frac{1}{2}\int u^{1/3}\,du$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}u^{4/3} + c$$

$$= \frac{3}{8}(x^2-1)^{4/3} + c.$$

(11) (13)

$$\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx = \int \frac{e^x}{1+(e^x)^2}$$

$$u = e^x$$

$$\frac{du}{dx} = e^x$$

$$\frac{du}{e^x} = dx$$

$$= \int \frac{e^x}{1+u^2} \cdot \frac{du}{e^x}$$

$$= \int \frac{1}{1+u^2}\,du$$

$$= \tan^{-1} u + c$$

$$= \tan^{-1} e^x + c$$

---

(12) (13)

$$\int \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}\,dx$$

أكمل المربع

$$x - x^2$$

$$= -(x^2 - 2x)$$

$$= -(x^2 - 2x + 1 - 1)$$

$$= -((x-1)^2 - 1)$$

$$= 1 - (x-1)^2$$

افرض

$$u = x-1$$

$$du = dx$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{1-(x-1)^2}}\,dx$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{1-(x-1)^2}}\,dx$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot du$$

$$= \sin^{-1} u + c = \sin^{-1}(x-1) + c$$

---

(13) (13)

$$\int \frac{3x\sqrt{x}}{1+x^5}\,dx = \int \frac{3x^{3/2}}{1+x^5}\,dx = \int \frac{3x^{3/2}}{1+(x^{5/2})^2}\,dx$$

$$u = x^{5/2}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{5}{2}x^{3/2}$$

$$\frac{2\,du}{5x^{3/2}} = dx$$

$$= \int \frac{3x^{3/2}}{1+u^2} \cdot \frac{2\,du}{5x^{3/2}}$$

$$= \frac{6}{5}\int \frac{1}{1+u^2}\,du$$

$$= \frac{6}{5}\tan^{-1} u + c = \frac{6}{c}\tan^{-1}(x^{3/2}) + c$$

يمكنك حل السؤالين بالتعويض مرتين

(14) (A)

$$\int t\sqrt{t-1}\,dt = \int t\,(t-1)^{1/2}\,dt$$

$u = t-1$

$\frac{du}{dt} = 1$

$du = dt$

$t-1 = u$

$t = u+1$

$$= \int t\,u^{1/2}\,du$$

$$= \int (u+1)\,u^{1/2}\,du$$

$$= \int (u^{3/2} + u^{1/2})\,du$$

$$= \frac{2}{5}u^{5/2} + \frac{2}{3}u^{3/2} + c = \frac{2}{5}(t-1)^{5/2} + \frac{2}{3}(t-1)^{3/2} + c$$

(15) (C)

$$\int (1+e^{\tan x})\sec^2 x\,dx$$

$u = \tan x$

$\frac{du}{dx} = \sec^2 x$

$\frac{du}{\sec^2 x} = dx$

$$= \int (1+e^u)\,\sec^2 x \cdot \frac{du}{\sec^2 x}$$

$$= \int (1+e^u)\,du$$

$$= u + e^u + c$$

$$= \tan x + e^{\tan u} + c$$

(16) (C)

$$\int \frac{x}{\sqrt{3x^2+5}}\,dx = \int x\,(3x^2+5)^{-1/2}\,dx$$

$u = 3x^2+5$

$\frac{du}{dx} = 6x$

$\frac{du}{6x} = dx$

$$= \int x\,u^{-1/2}\,\frac{du}{6x}$$

$$= \frac{1}{6}\int u^{-1/2}\,du$$

$$= \frac{1}{6}\cdot 2u^{1/2} + c = \frac{1}{3}(3x^2+5)^{1/2} + c$$

(17)

(A)

$$\int \frac{3}{x^{1/4}+x}\,dx = \int \frac{3}{x^{1/4}\left(1+x^{3/4}\right)}\,dx$$

$$= \int \frac{3}{x^{1/4}\,u} \cdot \frac{4}{3}x^{1/4}\,du.$$

$$= \int \frac{4}{u}\,du$$

$$= 4\ln|u|+c = 4\ln|1+x^{3/4}|+c$$

$u = 1+x^{3/4}$

$\frac{du}{dx} = \frac{3}{4}x^{-1/4}$

$\frac{4}{3}\frac{du}{x^{-1/4}} = dx$

$\frac{4}{3}x^{1/4}\,du = dx$

---

(18)

(C)

$$\int \frac{1}{x^2-6x-10}$$

اكمال المربع

$x^2-6x+10$

$= x^2-6x+9+10-9$

$= (x-3)^2+1$

$u = x-3$

$du = dx$

$$= \int \frac{1}{(x-3)^2+1}\,dx$$

$$= \int \frac{1}{u^2+1}\,du$$

$$= \tan^{-1}u + c = \tan^{-1}(x-3)+c$$

---

(19)

(D)

$$\int \frac{x^3}{x^8+1}\,dx = \int \frac{x}{(x^4)^2+1}\,dx$$

$$= \int \frac{x^3}{u^2+1} \cdot \frac{du}{4x^3}$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{1}{u^2+1}\,du$$

$$= \frac{1}{4}\tan^{-1}u + c$$

$$= \frac{1}{4}\tan^{-1}x^4 + c.$$

$u = x^4$

$\frac{du}{dx} = 4x^3$

$\frac{du}{4x^3} = dx$

20 ©

$$\int \frac{x^5}{x^{12}+4}\,dx = \frac{x^5}{(x^6)^2+4}\,dx.$$

$u = x^6$

$\frac{du}{dx} = 6x^5$

$\frac{du}{6x^5} = dx$

$$= \int \frac{x^5}{u^2+4}\,\frac{du}{6x^5}$$

$$= \frac{1}{6}\int \frac{1}{u^2+4}\,du$$

$$= \frac{1}{6}\int \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(\frac{u}{2})^2+1}\,du.$$

$w = \frac{u}{2} = \frac{1}{2}u$

$\frac{dw}{du} = \frac{1}{2}$

$2\,dw = du.$

$$= \frac{1}{24}\int \frac{1}{w^2+1}\cdot 2\,dw$$

$$= \frac{1}{12}\tan^{-1} w + c$$

$$= \frac{1}{12}\tan^{-1}\frac{u}{2} + c \quad = \frac{1}{12}\tan^{-1}\frac{1}{2}x^6 + c.$$

21 Ⓐ

$$\int 2(\tan x + \tan^3 x)\,dx = \int 2\tan(1+\tan^2 x)\,dx$$

$$= \int 2\tan x\cdot \sec^2 x\,dx$$

$u = \tan x$

$\frac{du}{dx} = \sec^2 x$

$\frac{du}{\sec^2 x} = dx$

$$= \int 2u\cdot \sec^2 x\cdot\frac{du}{\sec^2 x}$$

$$= \int 2u\,du.$$

$$= u^2 + c = \tan^2 x + c.$$

22 Ⓐ

$$\int 18(3\tan x+4)^5 \sec^2 x\,dx$$

$u = 3\tan x + 4$

$\frac{du}{dx} = 3\sec^2 x$

$\frac{du}{3\sec^2 x} = dx$

$$= \int 18\,u^5\cdot \sec^2 x\cdot\frac{du}{3\sec^2 x}$$

$$= \int 6u^5\,du = u^6 + c = (3\tan x+4)^6 + c.$$

(23) (C)

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx = \int \frac{x}{\sqrt{1-(x^2)^2}}\,dx$$

$u = x^2$

$\frac{du}{dx} = 2x$

$\frac{du}{2x} = dx$

$$= \int \frac{x}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \frac{du}{2x}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du$$

$$= \frac{1}{2}\sin^{-1}u + c$$

$$= \frac{1}{2}\sin^{-1}(x^2) + c.$$

(24) (B)

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^4-1}}\,dx = \int \frac{1}{x\sqrt{(x^2)^2-1}}\,dx$$

$u = x^2$

$\frac{du}{dx} = 2x$

$\frac{du}{2x} = du$

$x^2 = u$ (نعوض الكل)

$$= \int \frac{1}{x\sqrt{u^2-1}} \cdot \frac{du}{2x}$$

$$= \int \frac{1}{2x^2\sqrt{u^2-1}}\,du$$

لا يجوز وجود x و u في التكامل

$$= \int \frac{1}{2u\sqrt{u^2-1}}\,du = \int \frac{1}{2|u|\sqrt{u^2-1}}\,du = \frac{1}{2}\sec^{-1}u + c. = \frac{1}{2}\sec^{-1}x^2 + c.$$

(25) (B)

$$\int_0^1 x\sqrt{8x^2+1}\,dx = \int_0^1 x(8x^2+1)^{1/2}\,dx$$

$u = 8x^2+1$

$\frac{du}{dx} = 16x$

$\frac{du}{16x} = dx$

$x = 0 \to u = 1$

$x = 1 \to u = 9$

$$= \int x\,u^{1/2}\,\frac{du}{16x}$$

$$= \frac{1}{16}\int_1^9 u^{1/2}\,du$$

$$= \frac{1}{16}\cdot\frac{2}{3}u^{3/2}\Big]_1^9 = \frac{1}{24}\left[27-1\right] = \frac{13}{12}.$$

(26) ©

$$\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$$

$u = \sqrt{x}$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$2\sqrt{x}\,du = dx$

$x = 1 \Rightarrow u = 1$

$u = 4 \Rightarrow u = 2.$

$$= \int \frac{e^u}{\sqrt{x}} \cdot 2\sqrt{x}\,du$$

$$= \int_1^2 2e^u\,du$$

(27) Ⓐ

$$\int_0^3 x\sin(\pi x^2)\,dx$$

$u = \pi x^2$

$\frac{du}{dx} = 2\pi x.$

$\frac{du}{2\pi x} = dx.$

$x = 0 \Rightarrow u = 0$

$x = 3 \Rightarrow u = 9\pi.$

$$= \int x \sin u \frac{du}{2\pi x}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{9\pi} \sin u\,du$$

$$= \frac{1}{2\pi}[-\cos u]_0^{9\pi} = \frac{-1}{2\pi}[\cos 9\pi - \cos 0]$$

$$= \frac{-1}{2\pi}[-2] = \frac{1}{\pi}.$$

(28) ©

$$\int_0^1 \frac{x}{e^{x^2}}\,dx = \int_0^1 x e^{-x^2}\,dx$$

$u = -x^2$

$\frac{du}{dx} = -2x$

$\frac{du}{-2x} = dx$

$x = 0 \Rightarrow u = 0$

$x = 1 \Rightarrow u = -1$

$$= \int x e^u \frac{du}{-2x}$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{-1} e^u\,du$$

$$= \frac{-1}{2}e^u]_0^{-1} = -\frac{1}{2}[e^{-1} - 1] = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{e}\right)$$

(29) Ⓓ

$$\int_1^2 2f(x-1)\,dx$$

$u = x - 1$

$\frac{du}{dx} = 1$

$du = dx$

$x = 0 \Rightarrow u = 0$

$x = 2 \Rightarrow u = 1$

$$= 2\int_0^1 f(u)\,du$$

$$= 2(-3) = -6$$

30 ©

$$\int_2^6 f(4-x)\,dx$$

$u = 4-x$

$\frac{du}{dx} = -1$

$-du = dx$

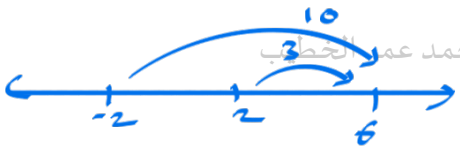
$x=2 \Rightarrow u=2$

$x=6 \Rightarrow u=-2$

$$= \int_{-2}^{2} f(u)\,(-du)$$

$$= -\int_{2}^{-2} f(u)\,du$$

$$= \int_{-2}^{2} f(u)\,du$$



$= 10 - 3 = 7$

31 ©

$$\int_0^{\pi} \cos x\, f'(\sin x)\,dx$$

$u = \sin x$

$\frac{du}{dx} = \cos x$

$\frac{du}{\cos x} = dx$

$x=0 \Rightarrow u=0$

$x=\pi \Rightarrow u=0$

$$= \int \cos x\, f'(u)\,\frac{du}{\cos x}$$

$$= \int_0^2 f'(u)\,du$$

$= 0$

32 ©

$$\int_0^1 \frac{f'(x)}{f(x)+1}\,dx = \ln|f(x)+1|\Big]_0^1$$

$$= \ln|f(1)+1| - \ln|f(0)+0|$$

$$= \ln|2+1| - \ln|-2+1|$$

$$= \ln 3 - \ln 1$$

$$= \ln 3$$

نحسب هنا التكامل بالتعويض

33 ©

$$\int_1^4 \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx$$

$u = \sqrt{x}$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$2\sqrt{x}\,du = dx$

$x=1 \Rightarrow u=1$

$x=4 \Rightarrow u=2$

$$= \int \frac{f(u)}{\sqrt{x}} \cdot 2\sqrt{x}\,du$$

$$= 2\int_1^2 f'(u)\,du = 2\left[f(2)-f(1)\right] = 2(5-1)$$

$= 12$

محمد عمر الخطيب

(34) (B)

لاحظ ان $F'(x) = f(x)$

$$\int_0^3 2\, f(x)\, F(x)\, dx$$

$u = F(x)$

$\frac{du}{dx} = F'(x)$

$\frac{du}{dx} = f(x)$

$\frac{du}{f(x)} = dx$

$x = 0 \Rightarrow u = F(0) = 1$

$x = 3 \Rightarrow u = F(3) = 4$

$$= \int 2\, f(x) \cdot u \, \frac{du}{f(x)}$$

$$= 2\int_1^4 u\, du$$

$$= 2\left[\frac{u^2}{2}\right]_1^4 = 4^2 - 1^2 = 15$$

---

(35) (D)

$$\int_3^5 x\sqrt{2x-1}\, dx$$

$u = 2x-1$

$\frac{du}{dx} = 2$

$\frac{du}{2} = dx$

$2x - 1 = u$

$2x = u + 1$

$x = \frac{u+1}{2}$

$x = 3 \Rightarrow u = 5$

$x = 5 \Rightarrow u = 9$

$$= \int x\sqrt{u}\, \frac{du}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\int_5^9 \left(\frac{u+1}{2}\right)\sqrt{u}\, du$$

$$= \frac{1}{4}\int_5^9 (u+1)\sqrt{u}\, du$$

$\therefore k = 1/4$

---

(36) (C)

$$\int_1^x \frac{1}{u}\, du = \ln u \Big]_1^x$$

$= \ln x - \ln 1$

$= \ln x$

$$\int \left(\frac{1}{x}\int_1^x \frac{1}{u}\, du\right) dx$$

$$= \int \frac{1}{x} \cdot \ln x \, dx$$

$w = \ln x$

$\frac{dw}{dx} = \frac{1}{x}$

$x\, dw = dx$

$$= \int \frac{1}{x} \cdot w \cdot x\, dw$$

$$= \int w\, dw$$

$$= \frac{1}{2}w^2 + c$$

$$= \frac{1}{2}(\ln x)^2 + c$$

37

ⓓ

$$g(x) = \int_0^{2x} \left(\int_0^{u} \sqrt{t^2+1}\ dt \right) du.$$

نفرض $\int_0^{u} \sqrt{t^2+1}\ dt = f(u)$

$$= \int_0^{2x} f(u)\ du.$$

$$g'(x) = f(2x) \cdot 2.$$

$$= 2 \int_0^{2x} \sqrt{t^2+1}\ dt$$

$$g''(x) = 2 \cdot \sqrt{(2x)^2+1} \cdot 2$$

$$= 4\sqrt{4x^2+1}$$

انتهت اجابات الدرس السادس