



## 7-3 الضرب النقطي ومساقط المتجهات

## ورقة عمل الحادي عشر المتقدم

1- إيجاد ناتج الضرب النقطي لمتجهين. واستخدامه لإيجاد الزاوية بينهما. 2- إيجاد مسقط متجه على آخر.

في هذا الدرس سوف نتعلم:

$$a \cdot b = a_1b_1 + a_2b_2$$

يعرّف الضرب النقطي للمتجهين  $a = \langle a_1, a_2 \rangle$ ,  $b = \langle b_1, b_2 \rangle$  كالتالي:

الضرب النقطي لـ  $a$  و  $b$ . ويرمز إليه  $a \cdot b$ . ويمكن قراءته على النحو  $a$  نقطة  $b$ .

يكون المتجهان غير الصفرين  $a$ ,  $b$  متعامدين، إذا وفقط إذا كان  $a \cdot b = 0$

استخدام الضرب النقطي في التحقق من تعامد متجهين

جد حاصل الضرب النقطي للمتجهين  $u$ ,  $v$ ، ثم تحقق مما إذا كانا متعامدين.

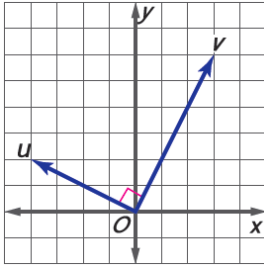
$$u = \langle 3, 6 \rangle, v = \langle -4, 2 \rangle$$

$$u \cdot v = 3(-4) + 6(2)$$

$$u \cdot v = 0$$

المتجهين متعامدين

$$u \cdot v = 0 \text{ لأن}$$



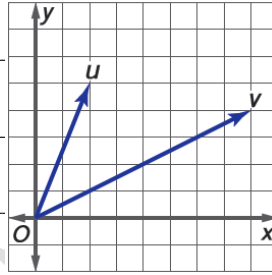
$$u = \langle 2, 5 \rangle, v = \langle 8, 4 \rangle$$

$$u \cdot v = 2(8) + 5(4)$$

$$u \cdot v = 36$$

المتجهين غير متعامدين

$$u \cdot v \neq 0 \text{ لأن}$$



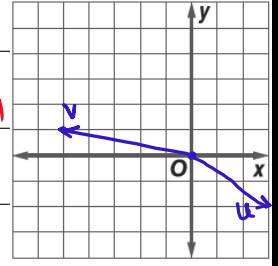
$$u = \langle 3, -2 \rangle, v = \langle -5, 1 \rangle$$

$$u \cdot v = 3(-5) + (-2)(1)$$

$$u \cdot v = -17$$

المتجهين غير متعامدين

$$u \cdot v \neq 0 \text{ لأن}$$



## خصائص الضرب النقطي

إذا كانت  $u, v, w$  متجهات، وكان  $k$  عددًا حقيقيًا، فإن الخصائص الآتية صحيحة:

$$u \cdot v = v \cdot u$$

الخاصية الإبدالية

$$u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$$

خاصية التوزيع

$$k(u \cdot v) = k u \cdot v = u \cdot k v$$

خاصية الضرب في كمية عددية

$$0 \cdot u = 0$$

خاصية الضرب النقطي للمتجهات الصفرية

$$u \cdot u = |u|^2$$

العلاقة بين ناتج الضرب النقطي ومقدار المتجه

استخدام الضرب النقطي لإيجاد طول (مقدار) متجه

استخدم الضرب النقطي؛ لإيجاد مقدار المتجه المذكور:

$$a = \langle -5, 12 \rangle$$

$$|a|^2 = a \cdot a$$

$$|a| = \sqrt{a \cdot a}$$

$$= \sqrt{\langle -5, 12 \rangle \cdot \langle -5, 12 \rangle}$$

$$= \sqrt{(-5)^2 + (12)^2}$$

$$= \boxed{13}$$

$$b = \langle 12, 16 \rangle$$

$$|b|^2 = b \cdot b$$

$$|b| = \sqrt{b \cdot b}$$

$$= \sqrt{\langle 12, 16 \rangle \cdot \langle 12, 16 \rangle}$$

$$= \sqrt{12^2 + 16^2}$$

$$= \boxed{20}$$

$$c = \langle -1, -7 \rangle$$

$$|c|^2 = c \cdot c$$

$$|c| = \sqrt{c \cdot c}$$

$$= \sqrt{\langle -1, -7 \rangle \cdot \langle -1, -7 \rangle}$$

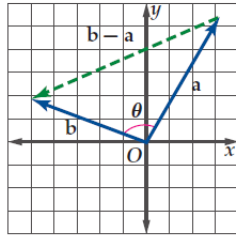
$$= \sqrt{(-1)^2 + (-7)^2}$$

$$= 5\sqrt{2} = \boxed{7.07}$$



## مفهوم أساسي

## الزاوية بين متجهين



إذا كانت  $\theta$  هي الزاوية بين متجهين غير صفريين  $a, b$ ، فإن:

$$\cos \theta = \frac{a \cdot b}{|a| |b|}$$

$$a \cdot b = |a| |b| \cos \theta$$

$$\frac{a \cdot b}{|a| |b|} = \cos \theta$$

## إيجاد قياس الزاوية بين متجهين

أوجد قياس الزاوية  $\theta$  بين المتجهين  $u, v$  في كل مما يأتي:

$$\cos \theta = \frac{u \cdot v}{|u| |v|}$$

$$u = \langle 6, 2 \rangle, v = \langle -4, 3 \rangle$$

$$|u| = \sqrt{6^2 + 2^2} = 2\sqrt{10}$$

$$|v| = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = 5$$

$$\cos \theta = \frac{6(-4) + 2(3)}{2\sqrt{10} \cdot 5} = \frac{-9\sqrt{10}}{50}$$

$$\Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{-9\sqrt{10}}{50}\right)$$

$$= 124.7^\circ$$

$$u = \langle 3, 1 \rangle, v = \langle 3, -3 \rangle$$

$$|u| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$$

$$|v| = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{2}$$

$$\cos \theta = \frac{3(3) + 1(-3)}{\sqrt{10} \cdot 3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$$

$$= 63.4^\circ$$

$$u = \langle -5, -2 \rangle, v = \langle 4, 4 \rangle$$

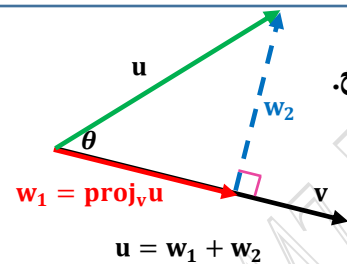
$$|u| = \sqrt{(-5)^2 + (-2)^2} = \sqrt{29}$$

$$|v| = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$$

$$\cos \theta = \frac{(-5)(4) + (-2)(4)}{\sqrt{29} \cdot 4\sqrt{2}} = \frac{-7}{\sqrt{58}}$$

$$\Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{-7}{\sqrt{58}}\right)$$

$$= 156.8^\circ$$



إذا كان  $u$  و  $v$  متجهان غير صفريين، وكان  $w_1$  و  $w_2$  مركبًا المتجه  $u$  بحيث  $w_1$  توازي  $v$  كما هو موضح.

فإن المتجه  $w_1$  يسمى **مسقط المتجه  $u$  على  $v$**  ويرمز إليه بالرمز  $\text{proj}_v u$  و  $\text{proj}_v u = \left(\frac{u \cdot v}{|v|^2}\right) v$

## العمليات على المتجهات

جد مسقط المتجه  $u = \langle 3, 2 \rangle$  على  $v = \langle 5, -5 \rangle$ . ثم اكتب  $u$  على هيئة مجموع متجهين متعامدين، أحدهما مسقط المتجه  $u$  على  $v$ .

$$w_1 = \text{proj}_v u$$

$$= \left(\frac{u \cdot v}{|v|^2}\right) v$$

$$= \left(\frac{5(3) + (-5)(2)}{5^2 + (-5)^2}\right) \langle 5, -5 \rangle$$

$$= \frac{1}{10} \langle 5, -5 \rangle$$

$$= \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle$$

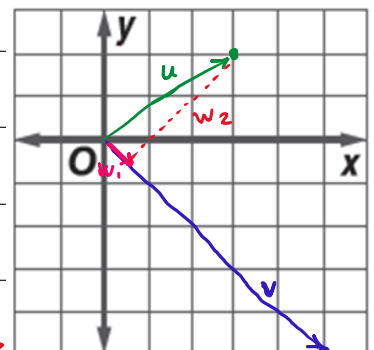
$$u = w_1 + w_2$$

$$w_2 = u - w_1$$

$$= \langle 3, 2 \rangle - \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle$$

$$= \left\langle \frac{5}{2}, \frac{5}{2} \right\rangle$$

$$\Rightarrow u = \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle + \left\langle \frac{5}{2}, \frac{5}{2} \right\rangle$$





جد مسقط المتجه  $u = \langle 1, 2 \rangle$  على  $v = \langle 8, 5 \rangle$ . ثم اكتب  $u$  على هيئة مجموع متجهين متعامدين. أحدهما مسقط المتجه  $u$  على  $v$ .

$$w_1 = \text{proj}_v u$$

$$= \left( \frac{u \cdot v}{|v|^2} \right) v$$

$$= \left( \frac{8(1) + 5(2)}{8^2 + 5^2} \right) \langle 8, 5 \rangle$$

$$= \frac{18}{89} \langle 8, 5 \rangle$$

$$= \left\langle \frac{144}{89}, \frac{90}{89} \right\rangle$$

$$u = w_1 + w_2$$

$$w_2 = u - w_1$$

$$= \langle 1, 2 \rangle - \left\langle \frac{144}{89}, \frac{90}{89} \right\rangle$$

$$= \left\langle \frac{-55}{89}, \frac{88}{89} \right\rangle$$

$$\Rightarrow u = \left\langle \frac{144}{89}, \frac{90}{89} \right\rangle + \left\langle \frac{-55}{89}, \frac{88}{89} \right\rangle$$

### المسقط في عكس اتجاه $v$

جد مسقط المتجه  $u = \langle 4, -3 \rangle$  على المتجه  $v = \langle 2, 6 \rangle$ . ثم اكتب  $u$  على هيئة مجموع متجهين متعامدين. أحدهما مسقط المتجه  $u$  على المتجه  $v$ .

$$\text{proj}_v u = \left( \frac{u \cdot v}{|v|^2} \right) \cdot v$$

$$= \left( \frac{4(2) + 6(-3)}{2^2 + 6^2} \right) \cdot \langle 2, 6 \rangle$$

$$= -\frac{1}{4} \langle 2, 6 \rangle$$

$$w_1 = \left\langle -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2} \right\rangle$$

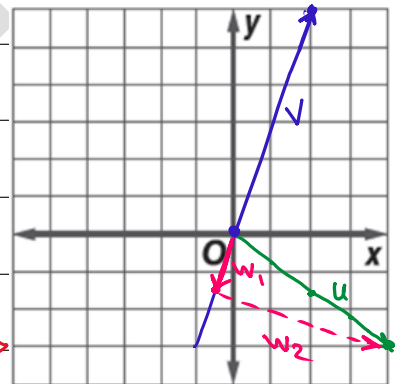
$$u = w_1 + w_2$$

$$w_2 = u - w_1$$

$$= \langle 4, -3 \rangle - \left\langle -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2} \right\rangle$$

$$= \left\langle \frac{9}{2}, -\frac{3}{2} \right\rangle$$

$$\Rightarrow u = \left\langle -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2} \right\rangle + \left\langle \frac{9}{2}, -\frac{3}{2} \right\rangle$$



جد مسقط المتجه  $u = \langle -3, 4 \rangle$  على  $v = \langle 6, 1 \rangle$ . ثم اكتب  $u$  على هيئة مجموع متجهين متعامدين. أحدهما مسقط المتجه  $u$  على  $v$ .

$$\text{proj}_v u = \left( \frac{u \cdot v}{|v|^2} \right) \cdot v$$

$$= \left( \frac{-3(6) + 4(1)}{6^2 + 1^2} \right) \cdot \langle 6, 1 \rangle$$

$$= -\frac{14}{37} \langle 6, 1 \rangle$$

$$w_1 = \left\langle -\frac{84}{37}, -\frac{14}{37} \right\rangle$$

$$u = w_1 + w_2$$

$$w_2 = u - w_1$$

$$= \langle -3, 4 \rangle - \left\langle -\frac{84}{37}, -\frac{14}{37} \right\rangle$$

$$= \left\langle -\frac{27}{37}, \frac{162}{37} \right\rangle$$

$$\Rightarrow u = \left\langle -\frac{84}{37}, -\frac{14}{37} \right\rangle + \left\langle -\frac{27}{37}, \frac{162}{37} \right\rangle$$

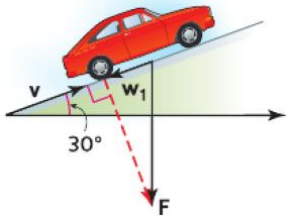




الشكل 8.3.7

إذا كان المتجه  $u$  يمثل قوة، فإن  $\text{proj}_v u$  يمثل تأثير تلك القوة في اتجاه  $v$ . على سبيل المثال، إذا قمت بدفع صندوق لأعلى التل (في اتجاه  $v$ ) بالقوة  $u$  (الشكل 8.3.7)، القوة المؤثرة هي دفع المركبة في اتجاه  $v$ ،  $\text{proj}_v u$ .

## استخدام مسقط متجه لإيجاد قوة



السيارات تقف سيارة بقوة 13000 N على تل مائل بزاوية  $30^\circ$  كما هو موضح. إذا تم تجاهل قوة الاحتكاك، فما القوة اللازمة لمنع تدحرج السيارة لأسفل التل؟

$$w_1 = \text{proj}_v F = \left( \frac{v \cdot F}{|v|^2} \right) \cdot v$$

$$= \left( \frac{0 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right) - 13000 \left( \frac{1}{2} \right)}{\left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 + \left( \frac{1}{2} \right)^2} \right) v$$

$$w_1 = -\frac{6500}{1} v = -6500v$$

القوة اللازمة لمنع التدحرج هي قوة  $w_1$  وهي  $(-6500 \text{ N})$  أي  $6500 \text{ N}$  في اتجاه التل.

\* قوة 13000 N (وزن) لأسفل جهة الجاذبية

$$F = \langle 0, -13000 \rangle$$

نوجد متجه الوحدة  $v$  في اتجاه التل

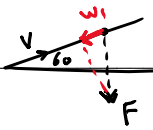
$$v = \langle 1 \cos 30, 1 \sin 30 \rangle$$

$$= \langle \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \rangle$$

نوجد مسقط  $F$  على  $v$  أو ما يسمى  $w_1$

$$w_1 = P$$

التزلج تجلس خديجة على زلاجة على جانب تل مائل بزاوية  $60^\circ$  ما القوة اللازمة لمنع انزلاق الزلاجة لأسفل التل إذا علمت أن وزن خديجة والزلاجة 550 N؟



$$w_1 = \text{proj}_v F = \left( \frac{F \cdot v}{|v|^2} \right) v$$

$$= \left( \frac{0 \left( \frac{1}{2} \right) + (-550) \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right)}{1} \right) v$$

$$= -476.31 v$$

القوة اللازمة لمنع انزلاق الزلاجة لأسفل التل هي  $-476.31 \text{ N}$  يعني  $476.31 \text{ N}$  في اتجاه التل.

\* لأسفل (الجاذبية)  $F = \langle 0, -550 \rangle$

\* نوجد متجه الوحدة  $v$  في اتجاه التل

$$v = \langle 1 \cos 60, 1 \sin 60 \rangle$$

$$v = \langle \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \rangle \Rightarrow |v| = 1$$

نوجد مسقط  $F$  على  $v$  أو ما يسمى  $w_1$

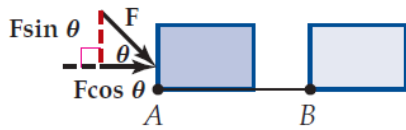
$$550 \text{ N} \rightarrow 125 \text{ رطل}$$

$$476.31 \text{ N} \rightarrow ?$$

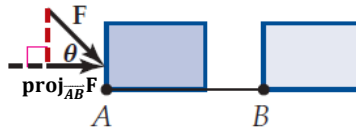




من التطبيقات الأخرى لمسقط المتجه حساب الشغل المبذول  $W$  بواسطة قوة ثابتة  $F$  تؤثر على جسم لتحريكه من النقطة  $A$  إلى النقطة  $B$ .

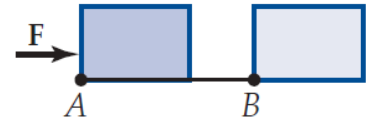


$$W = F \cdot \overline{AB}$$



$$W = |\text{proj}_{\overline{AB}} F| |\overline{AB}|$$

$$W = |F| (\cos \theta) |\overline{AB}|$$



$$W = |F| |\overline{AB}|$$

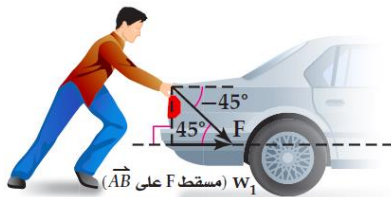
وحدات الشغل يتم قياس الشغل

بالقدم-رطل في النظام العرفي  
للقياس وبالنيوتن-متر (N·m) أو  
الجول (J) في النظام المتري.

### حساب الشغل

سيارة: يدفع شخص سيارة بقوة ثابتة مقدارها 120 N بزاوية 45° كما في الشكل المجاور،

أوجد الشغل المبذول بالجول لتحريك السيارة 10 m (بإهمال قوة الاحتكاك).

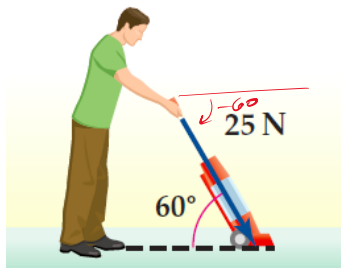


$$W = |F| \cos \theta |\overline{AB}|$$

$$W = 120 \cos(45) (10) = 848.53 \text{ J} \quad \text{جول}$$

تنظيف: يدفع إبراهيم مكبسة كهربائية بقوة مقدارها 25 N، إذا كان قياس الزاوية بين ذراع المكبسة وسطح الأرض 60°،

فأوجد الشغل المبذول الذي بذله إبراهيم عند تحريك المكبسة مسافة 6 m؟



$$W = |F| (\cos \theta) |\overline{AB}|$$

$$= 25 \cos(-60) (6)$$

$$= 75 \text{ J}$$

الشغل المبذول = 75 جول

سوف أضع إجابات هذه التمرينات هنا

