

القطوع المخروطية والمعادلات الوسيطة



Chapter sourced from Conic Sections and Parametric Equations, from Precalculus Chapter 7 © 2014

McGraw-Hill Education مؤسسة صالح محفوظه © المؤلف والطبع محفوظة

السابق

● إيجاد حل أنظمة المعادلات الخطية جبريًا وبيانيًا.

الحالي

● بعد دراستك لهذه الوحدة ستكون قادراً على:

- استخدام صيغتي نقطة المنتصف والمسافة.
- كتابة وتمثيل معادلات القطع المكافئ والدوائر والقطع الناقص والقطع الزائد.

■ تحديد القطوع المخروطية.

■ إيجاد حل أنظمة المعادلات والمتباينات التربيعية.

لماذا؟

● **الفضاء** تتجلى القطوع المخروطية في جوانب عديدة من الفضاء. وتستخدم معادلات الدوائر لتسيير المركبات الفضائية والأقمار الصناعية في مدارات دائرية حول الأرض والقمر. كما أن الكواكب تسير في مسارات إهليلجية (بشكل القطع الناقص) وليست دائرية كما كان يعتقد سابقاً. وتسير المذنبات على طول أحد فروع قطع زائد، الأمر الذي يمكن أن يساعدنا على التكهّن بموعد ظهورها مرة أخرى.

الاستعداد للوحدة

1

خيار الكتاب المدرسي أجب عن أسئلة التدريب السريع التالية. يُرجى الرجوع إلى المراجعة السريعة للحصول على المساعدة.

مراجعة سريعة	تدريب سريع
--------------	------------

مثال 1

حلّ كل معادلة بإكمال المربع.

حلّ المعادلة $x^2 + 6x - 16 = 0$ بإكمال المربع.

$$x^2 + 6x = 16$$

$$x^2 + 6x + 9 = 16 + 9$$

$$(x + 3)^2 = 25$$

$$x + 3 = \pm 5$$

$$x + 3 = 5 \text{ أو } x + 3 = -5$$

$$x = 2 \quad x = -8$$

$$1. x^2 + 8x + 7 = 0$$

$$2. x^2 + 5x - 6 = 0$$

$$3. x^2 - 8x + 15 = 0$$

$$4. x^2 + 2x - 120 = 0$$

$$5. 2x^2 + 7x - 15 = 0$$

$$6. 2x^2 + 3x - 5 = 0$$

$$7. x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{23}{16} = 0$$

$$8. 3x^2 - 4x = 2$$

مثال 2

حلّ كل نظام معادلات باستخدام التعويض أو الحذف:

جد حلاً جبرياً لنظام المعادلات.

$$3y = x - 9$$

$$4x + 5y = 2$$

بما أن x تملك معاملاً قيمته 1 في المعادلة الأولى، فاستخدم طريقة التعويض. أولاً، جد حل تلك المعادلة من أجل x .

$$3y = x - 9 \rightarrow x = 3y + 9$$

$$4(3y + 9) + 5y = 2$$

عوّض $3y + 9$ بـ x .

$$12y + 36 + 5y = 2$$

خاصية التوزيع

$$17y = -34$$

جمع الحدود المتماثلة.

$$y = -2$$

اقسم كل طرف على 17.

لإيجاد قيمة x ، استخدم $y = -2$ في المعادلة الأولى.

$$3(-2) = x - 9$$

عوّض -2 بـ y .

$$-6 = x - 9$$

اضرب.

$$3 = x$$

اجمع 9 إلى كل طرف.

إذن الحل هو $(3, -2)$.

$$9. y = x + 3$$

$$2x - y = -1$$

$$10. 2x - 5y = -18$$

$$3x + 4y = 19$$

$$11. 4y + 6x = -6$$

$$5y - x = 35$$

$$12. x = y - 8$$

$$4x + 2y = 4$$

13. أموال دفع مجلس الطلبة 15 AED مقابل كل اشتراك في أحد المؤتمرات. كما دفعوا 10 AED مقابل كل قميص إجمالي بلغ 180 AED. في العام الماضي، أنفقوا 12 AED لكل اشتراك و 9 AED لكل قميص إجمالي 150 AED لشراء نفس عدد الاشتراكات والقمصان. اكتب وحل نظاماً من معادلتين يمثل عدد الاشتراكات والقمصان التي تم شراؤها كل عام.

البدء في هذه الوحدة

سوف تتعلم عدة مفاهيم ومهارات ومفردات جديدة خلال دراستك لهذه الوحدة. للاستعداد، حدد المصطلحات المهمة ونظم مواردك. قد ترغب بالرجوع إلى وحدات سابقة لمراجعة المهارات المطلوبة.

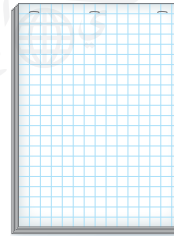
المفردات الجديدة

قطع مكافئ parabola
بؤرة focus
دليل directrix
دائرة circle
مركز الدائرة center of a circle
نصف القطر radius
قطع ناقص ellipse
البؤرتان foci
المحور الأكبر major axis
المحور الأصغر minor axis
مركز القطع الناقص center of an ellipse
رؤوس vertices
رؤوس مرافقة co-vertices
مجموع ثابت constant sum
قطع زائد hyperbola
المحور القاطع transverse axis
المحور المرافق conjugate axis
فرق ثابت constant difference

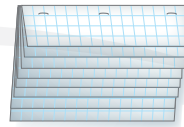
منظم الدراسة



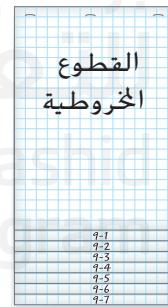
القطع المخروطية اصنع هذه المطوية لتساعدك على تنظيم ملاحظتك على هذه الوحدة حول القطوع المخروطية. ابدأ باستخدام ثماني ورقات من ورق التمثيل البياني.



1 **دبّس** كومة ورق التمثيل البياني على طول الجزء العلوي لتشكيل كتيب.



2 **قَصّ** سبعة خطوط من الجزء السفلي للورقة الأولى وستة خطوط من الثانية ... وهكذا.

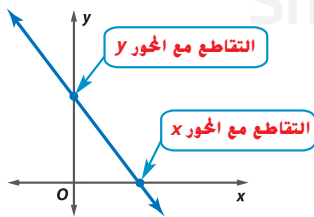


3 **اكتب** على كل ورقة أرقام الدروس كما هو موضح.

مراجعة المفردات

معادلة تربيعية معادلة بالصيغة $ax^2 + bx + c = 0$ حيث $a \neq 0$

نظام المعادلات مجموعة من المعادلات لها المتغيرات ذاتها.



التقاطعات مع المحورين x و y إحداثيات x أو y للنقاط التي يقطع التمثيل البياني عندها المحورين x أو y

القطع المكافئ

6-1

السابق ..

الحالي ..

لماذا ؟

● قمت بتمثيل الدوال التربيعية بيانياً.

1 ● كتابة معادلات القطوع المكافئة بالصيغة القياسية.

● يمكن استخدام أطباق الأقمار الصناعية لإرسال الإشارات واستقبالها ويمكن رؤيتها مثبتة على المنازل والمتاجر.

2 ● تمثيل القطوع المكافئة بيانياً.

● طبق القمر الصناعي هو أحد أنواع الهوائيات التي صُممت لاستقبال الإشارات من الأقمار الصناعية التي تدور في المدارات، وتنعكس الإشارات من سطح الطبق الذي على شكل قطع مكافئ إلى نقطة تجميع مشتركة.



مفردات جديدة

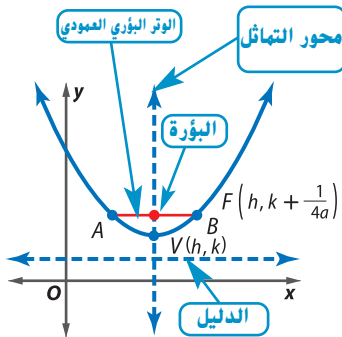
● قطع مكافئ (parabola)
● بؤرة (focus)
● دليل (directrix)
● وتر بؤري عمودي (latus rectum)
● الصيغة القياسية (standard form)
● الصيغة العامة (general form)

مهارسات في الرياضيات
1 فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها.

1 معادلات القطوع المكافئة

يمكن تعريف **القطع المكافئ** بأنه مجموعة جميع النقاط في المستوى التي تبعد مسافة واحدة عن نقطة معطاة تدعى **البؤرة** ومستقيم معطى يدعى **الدليل**.

يطلق على القطعة المستقيمة المارة من بؤرة القطع المكافئ والعمودية على محور التماثل اسم **وتر بؤري عمودي**. تقع النقطتان الطرفيتان للوتر البؤري العمودي على القطع المكافئ.



المفهوم الأساسي صور معادلات القطوع المكافئة

صيغة المعادلة	$x = a(y - k)^2 + h$	$y = a(x - h)^2 + k$
اتجاه الفتح	لليمين إذا كانت $a > 0$. لليسار إذا كانت $a < 0$	للاعلى إذا كانت $a > 0$. للاسفل إذا كانت $a < 0$
الرأس	(h, k)	(h, k)
محور التماثل	$y = k$	$x = h$
البؤرة	$(h + \frac{1}{4a}, k)$	$(h, k + \frac{1}{4a})$
الدليل	$x = h - \frac{1}{4a}$	$y = k - \frac{1}{4a}$
طول الوتر البؤري العمودي	$ \frac{1}{a} $ وحدة	$ \frac{1}{a} $ وحدة

الصيغة القياسية لمعادلة القطع المكافئ الذي يقع رأسه النقطة (h, k) ومحور تماثله $x = h$ هي $y = a(x - h)^2 + k$.

- إذا كانت $a > 0$ ، فإن k تمثل القيمة الصغرى للدالة المرتبطة والقطع المكافئ مفتوح إلى الأعلى.
- إذا كانت $a < 0$ ، فإن k تمثل القيمة العظمى للدالة المرتبطة والقطع المكافئ مفتوح إلى الأسفل.

تمثل معادلة القطع المكافئ في الشكل $y = ax^2 + bx + c$ **الصيغة العامة**. أي معادلة بالصيغة العامة يمكن كتابتها بالصيغة القياسية. يعتمد شكل القطع المكافئ والمسافة بين البؤرة والدليل على قيمة a في المعادلة.

مراجعة المفردات

إكمال المربع

إعادة كتابة تعبير تربيعي بصورة ثلاثي حدود تربيعي كامل

مثال 1 تحليل معادلة القطع المكافئ

اكتب $y = 2x^2 - 12x + 6$ بالصيغة القياسية. حدد رأس القطع المكافئ ومحور تماثله واتجاه فتحته.

$$y = 2x^2 - 12x + 6$$

المعادلة الأصلية.

$$= 2(x^2 - 6x) + 6$$

أخرج 2 عامل مشترك من الحدين x^2 و x .

$$= 2(x^2 - 6x + \blacksquare) + 6 - 2(\blacksquare)$$

أكمل المربع على الطرف الأيمن.

$$= 2(x^2 - 6x + 9) + 6 - 2(9)$$

العدد 9 الذي تضيفه عندما تكمل المربع مضروبة في 2.

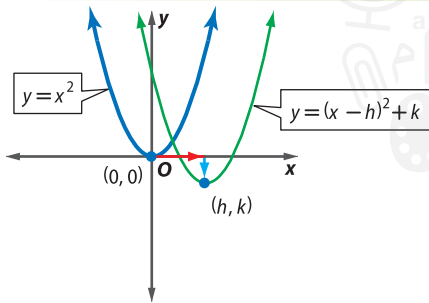
$$= 2(x - 3)^2 - 12$$

حلل إلى العوامل الأولية.

يقع رأس هذا القطع المكافئ عند النقطة $(3, -12)$. ومعادلة محور التماثل هي $x = 3$. فتحة القطع المكافئ للأعلى.

تمرين موجّه

1. اكتب $y = 4x^2 + 16x + 34$ بالصيغة القياسية. حدد رأس القطع المكافئ ومحور تماثله واتجاه فتحته.



تمثيل القطع المكافئ بيانيًا

تعلمت أن منحنى الدالة التربيعية

$y = a(x - h)^2 + k$ هو تحويل لمنحنى الدالة الأصلية

$y = x^2$ بعد إزاحة مقدارها h وحدة أفقيًا و k وحدة رأسيًا.

وانعكاس و/ أو تمدد حسب قيمة a .

مثال 2 تمثيل القطع المكافئ بيانيًا

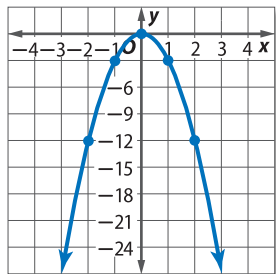
مثّل كل معادلة بيانيًا.

a. $y = -3x^2$

في هذه المعادلة، $h = 0$ و $k = 0$. الرأس موجود عند نقطة الأصل. بما أن معادلة محور التماثل $x = 0$. عوّض x بعدد صحيح موجب صغير وجد قيم y المقابلة.

بما أن التمثيل البياني متماثل حول المحور y . فالنقاط عند $(-3, -27)$ و $(-2, -12)$ و $(-1, -3)$ تقع على قطع مكافئ أيضًا. استخدم كل هذه النقاط لرسم التمثيل البياني.

x	y
1	-3
2	-12
3	-27



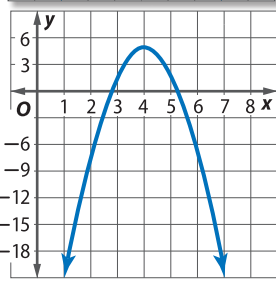
b. $y = -3(x - 4)^2 + 5$

المعادلة من الشكل $y = a(x - h)^2 + k$. حيث $h = 4$ و $k = 5$.

التمثيل البياني لهذه المعادلة هو التمثيل البياني لـ $y = -3x^2$.

في الجزء a مُزاحا 4 وحدات لليمين و 5 وحدات للأعلى.

الرأس موجود الآن عند $(4, 5)$.



2A. $y = 2x^2$

2B. $y = 2(x - 1)^2 - 4$

تمرين موجّه

انتبه!

البنية تحقق بعناية من قيم h و k قبل البدء بتمثيل المعادلة بيانيًا.

- إذا كانت h موجبة، فأزح التمثيل البياني h وحدة إلى اليمين.
- إذا كانت h سالبة، فأزح التمثيل البياني $|h|$ وحدة إلى اليسار.
- إذا كانت k موجبة، فأزح التمثيل البياني k وحدة للأعلى.
- إذا كانت k سالبة، فأزح التمثيل البياني $|k|$ وحدة للأسفل.

معادلات القطوع المكافئة ذات محاور التماثل الرأسية لها الدالة الأم $y = x^2$ وتأخذ الصيغة $y = a(x - h)^2 + k$ وهي دوال. معادلات القطوع المكافئة ذات محاور التماثل الأفقية تأخذ الصيغة $x = a(y - k)^2 + h$ وهي ليست دوال. التمثيل البياني الأصلي لهذه المعادلات هو $x = y^2$.

نصيحة دراسية

التمثيل البياني عند تمثيل هذه الدوال، قد يكون من المفيد رسم التمثيل البياني للدالة الأم.

مثال 3 التمثيل البياني لمعادلة بالصيغة العامة

مثّل كل معادلة بيانيًا.

a. $2x - y^2 = 4y + 10$

الخطوة 1 اكتب المعادلة بالصيغة $x = a(y - k)^2 + h$.

$$2x - y^2 = 4y + 10$$

$$2x = y^2 + 4y + 10$$

$$2x = (y^2 + 4y + \blacksquare) + 10 - \blacksquare$$

$$2x = (y^2 + 4y + 4) + 10 - 4$$

$$2x = (y + 2)^2 + 6$$

$$x = \frac{1}{2}(y + 2)^2 + 3$$

المعادلة الأصلية

أضف y^2 لكل طرف لعزل الحد الذي يحوي x .

أكمل المربع.

اجمع واطرح 4، بها أن $\left(\frac{4}{2}\right)^2 = 4$.

حلل العوامل واطرح.

$(h, k) = (3, -2)$

الخطوة 2

استخدم المعادلة لإيجاد معلومات حول التمثيل البياني. ثم ارسم التمثيل البياني بالاعتماد على التمثيل البياني الأصلي. $x = y^2$.

الرأس: $(3, -2)$

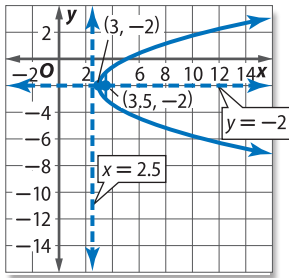
محور التماثل: $y = -2$

البؤرة: $\left(3 + \frac{1}{4\left(\frac{1}{2}\right)}, -2\right)$ أو $(3.5, -2)$

الدليل: $x = 3 - \frac{1}{4\left(\frac{1}{2}\right)}$ أو $x = 2.5$

اتجاه الفتحة: لليمين، بها أن $a > 0$

طول الوتر البؤري العمودي: $\left|\frac{1}{2}\right|$ أو وحدتان



b. $y + 2x^2 + 32 = -16x - 1$

$$y + 2x^2 + 32 = -16x - 1$$

$$y = -2x^2 - 16x - 33$$

$$y = -2(x^2 + 8x + \blacksquare) - 33 - \blacksquare$$

$$y = -2(x^2 + 8x + 16) - 33 - (-32)$$

$$y = -2(x + 4)^2 - 1$$

المعادلة الأصلية

جد الحل من أجل y .

أكمل المربع.

اجمع واطرح -32.

حلل العوامل وبسط.

الخطوة 2 الرأس: $(-4, -1)$

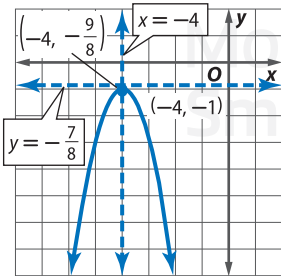
محور التماثل: $x = -4$

البؤرة: $\left(-4, -\frac{9}{8}\right)$

الدليل: $y = -\frac{7}{8}$

طول الوتر البؤري العمودي: $\frac{1}{2}$ وحدة

مفتوح إلى الأسفل



قراءة في الرياضيات

وتر بؤري عمودي اشتق الاسم الإنجليزي للوتر البؤري العمودي (latus rectum) من اللاتينية، حيث تعني "latus جانب" في حين تعني "rectum مستقيم".

تمرين موجّه

3A. $3x - y^2 = 4x + 25$

3B. $y = x^2 + 6x - 4$

يمكنك استخدام معلومات محددة حول قطع مكافئ لكتابة معادلة ورسم تمثيل بياني.

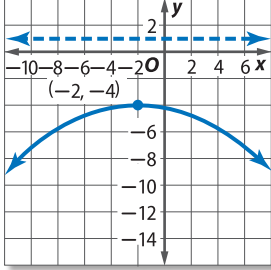
مثال 4 كتابة معادلة القطع المكافئ

اكتب معادلة قطع مكافئ يقع رأسه على النقطة $(-2, -4)$ ويقع دليله على المستقيم $y = 1$. ثم مثل المعادلة بيانيًا.

الدليل مستقيم أفقي، لذا فمعادلة القطع المكافئ من الصيغة $y = a(x - h)^2 + k$ جد a و h و k .

• يقع الرأس عند النقطة $(-2, -4)$ ، لذلك فإن $h = -2$ و $k = -4$.

• استخدم معادلة الدليل لإيجاد a .



$$y = k - \frac{1}{4a}$$

معادلة الدليل

$$1 = -4 - \frac{1}{4a}$$

عوض 1 و k في -4 .

$$5 = -\frac{1}{4a}$$

أضف 4 إلى كل طرف.

$$20a = -1$$

اضرب كل طرف في $4a$.

$$a = -\frac{1}{20}$$

اقسم كل طرف على 20.

ولذلك، فمعادلة القطع المكافئ هي $y = -\frac{1}{20}(x + 2)^2 - 4$.

تمرين موجّه

اكتب معادلة لكل قطع مكافئ موضح أدناه. ثم مثل المعادلة بيانيًا.

4A. الرأس $(1, 3)$ ، البؤرة $(1, 5)$

4B. البؤرة $(5, 6)$ ، الدليل $x = -2$

تستخدم القطوع المكافئة في الحياة اليومية أحيانًا.

مثال من الحياة اليومية 5 كتابة معادلة للقطع المكافئ

البيئة يمكن تسخير الطاقة الشمسية باستخدام مرايا لها شكل القطع المكافئ. وتنعكس المرايا أشعة الشمس إلى بؤرة القطع المكافئ. محور كل مرآة لها شكل القطع المكافئ في المنشأة الموصوفة إلى اليسار يقع على ارتفاع 1.9 m فوق الرأس. طول الوتر البؤري العمودي 7.6 m

a. افترض بأن البؤرة تقع عند نقطة الأصل. اكتب معادلة القطع المكافئ الذي تشكل كل مرآة.

حتى يتسنى للمرايا تجميع طاقة الشمس، يجب أن تكون فتحة القطع المكافئ للأعلى. لذلك يجب أن يكون الرأس تحت البؤرة.

البؤرة: $(0, 0)$ الرأس: $(0, -1.9)$

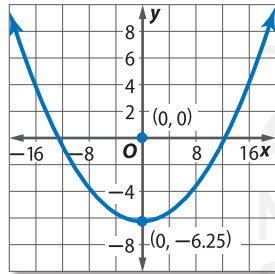
قياس الوتر البؤري العمودي 25. لذلك $25 = \left| \frac{1}{a} \right|$ و $7.6 = \left| \frac{1}{a} \right|$ و $a = 1/25$.

باستخدام الصيغة $y = a(x - h)^2 + k$ ، فإن معادلة

القطع المكافئ الذي تشكل كل مرآة هي $y = \frac{1}{7.6}x^2 - 1.9$.

b. مثل المعادلة بيانيًا.

استخدم الآن هذه المعلومات لرسم تمثيل بياني.



الربط بالحياة اليومية

في صحراء موهافي بكاليفورنيا، تُستخدم مرايا لها شكل القطع المكافئ لتسخين النفط الذي يتدفق عبر أنابيب موضوعة عند البؤرة. ويُستخدم النفط المسخن لتوليد الكهرباء.
المصدر: Solel

تمرين موجّه

5. اكتب ومثل بيانيًا معادلة مرآة لها شكل القطع المكافئ تقع بؤرتها على ارتفاع 1.4 m فوق الرأس

ووتر بؤري عمودي يبلغ طوله 5.5 m ، عندما تكون البؤرة عند نقطة الأصل.

مثال 1

اكتب كل معادلة بالصيغة القياسية. حدد رأس القطع المكافئ ومحور تماثله واتجاه فتحته.

1. $y = 2x^2 - 24x + 40$

2. $y = 3x^2 - 6x - 4$

3. $x = y^2 - 8y - 11$

4. $x + 3y^2 + 12y = 18$

الأمثلة 2-3 مثل كل معادلة بيانيًا.

5. $y = (x - 4)^2 - 6$

6. $y = 4(x + 5)^2 + 3$

7. $y = -3x^2 - 4x - 8$

8. $x = 3y^2 - 6y + 9$

مثال 4

اكتب معادلة لكل قطع مكافئ موضح أدناه. ثم مثل المعادلة بيانيًا.

9. الرأس (0, 2)، البؤرة (0, 4) 10. الرأس (-2, 4)، الدليل $x = -1$

11. البؤرة (3, 2)، الدليل $y = 8$ 12. الرأس (-1, -5)، البؤرة (-5, -5)

5 مثال 13. علم الفلك خذ بعين الاعتبار المرآة الزئبقية التي لها شكل قطع مكافئ مثل تلك المذكورة في بداية الدرس. البؤرة ترتفع 1.8 m فوق الرأس والوتر البؤري العمودي بطول 7.3 m.

a. افترض بأن البؤرة تقع عند نقطة الأصل. اكتب معادلة القطع المكافئ الذي يشكله الميكروفون ذو شكل القطع المكافئ.

b. مثل المعادلة بيانيًا.

التمرين وحل المسائل

مثال 1

اكتب كل معادلة بالصيغة القياسية. حدد رأس القطع المكافئ ومحور تماثله واتجاه فتحته.

الأمثلة 2-3 مثل كل معادلة بيانيًا.

مثال 4

اكتب معادلة لكل قطع مكافئ موضح أدناه. ثم مثل المعادلة بيانيًا.

26. الرأس (0, 1)، البؤرة (0, 4) 27. الرأس (1, 8)، الدليل $y = 3$

28. البؤرة (-2, -4)، الدليل $x = -6$ 29. البؤرة (2, 4)، الدليل $x = 10$

30. الرأس (-6, 0)، الدليل $x = 2$ 31. الرأس (9, 6)، البؤرة (9, 5)

32. علم الفلك عندما تُرمى كرة البيسبول، فإنها تتحرك في مسار له شكل قطع مكافئ. لنفترض أنه يتم رمي كرة بيسبول من مستوى سطح الأرض، وتصل لأقصى ارتفاع يبلغ 15.2 m، ثم تسقط على الأرض على بعد 61 m من حيث تم رميها. على افتراض أنه يمكن تمثيل هذه الحالة على المستوى الإحداثي بحيث تكون بؤرة القطع المكافئ عند نقطة الأصل، جـد معادلة مسار الكرة ذي شكل القطع المكافئ. افترض بأن البؤرة عند مستوى سطح الأرض.

33. المشاهدة تستخدم الهوائيات الأرضية والأقمار الصناعية لنقل الإشارات بين مركز عمليات بعثة ناسا والمركبات الفضائية التي يتحكم بها. يبلغ قطر أحد تلك الأطباق التي لها شكل القطع المكافئ 146 ft. وتقع بؤرته على ارتفاع 48 ft فوق الرأس.

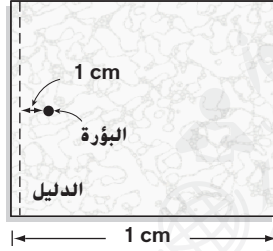
a. ارسم خيارين للتطبيق، أحدهما فتحته للأعلى والآخر فتحته لليسار.

b. اكتب معادلتين تمثلان الرسمين في الجزء a.

c. إذا أردت معرفة عمق التطبيق، فهل يهم أي معادلة نستخدم؟ لِمَ أو لِمَ لا؟

34. **المظلات** مظلة شاطئ لها قوس على شكل قطع مكافئ مفتوح إلى الأسفل. وتمتد المظلة 1.8 m من جانب لآخر ويبلغ ارتفاعها 0.45 m. اكتب معادلة قطع مكافئ يمثل القوس، مفترضًا بأن نقطة الأصل تقع عند النقطة التي يلتقي فيها العمود والمظلة مع رأس القوس.

35. **السيارات** يحتوي مصباح سيارة على عاكس له شكل قطع مكافئ. يترد الضوء المنبعث من المصدر عن العاكس ذو شكل القطع المكافئ ويضيء خارجًا من الجزء الأمامي للمصباح. معادلة المقطع العرضي للعاكس هي $y = \frac{1}{12}x^2$. على أي بعد من الرأس يجب أن توضع شعيرة المصباح؟



36. **التمثيلات المتعددة** ابدأ بصحيفة من ورق الشمع يبلغ طولها 15 سنتيمتر وبعرض 12 cm

a. **العملي** ارسم مستقيمًا عموديًا على جانبي الورقة عن طريق طي الورقة من إحدى النهايتين، ثم افتح الورقة مجددًا. هذا الخط هو الدليل. عيّن نقطة عند منتصف المسافة بين جانبي الورقة تقريبًا بحيث تبعد عن الدليل حوالي 1 cm. هذه هي البؤرة.

b. **العملي** ابدأ بصحيفة جديدة من ورق الشمع. ارسم مخططًا آخر لقطع مكافئ بحيث تبعد بؤرته حوالي 3 cm عن الدليل.

c. **العملي** على صحيفة جديدة من ورق الشمع، ارسم مخططًا ثالثًا لقطع مكافئ بحيث تبعد بؤرته حوالي 5 cm عن الدليل.

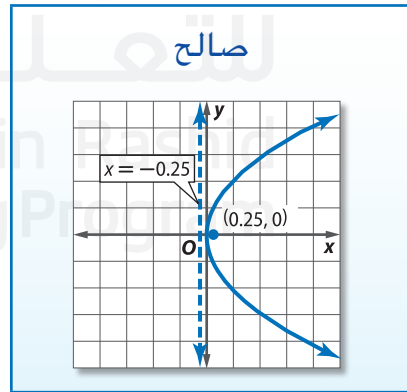
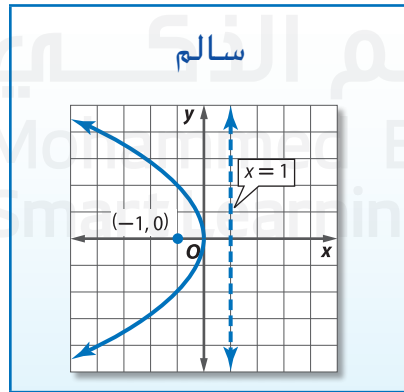
d. **اللفظي** قارن بين أشكال القطوع المكافئة الثلاثة. كيف تؤثر المسافة بين البؤرة والدليل على شكل القطع المكافئ؟

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

37. **الاستدلال** كيف تغير معادلة الدالة الأم $y = x^2$ لتزيح التمثيل البياني لليمين؟

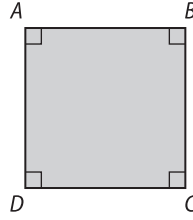
38. **مسألة غير محددة الإجابة** يشترك قطعان مكافئان بالرأس عند $(-3, 1)$ وبالنقطة ذات الإحداثيات $(-1, 0)$. اكتب معادلتين محتملتين لهذين القطعين المكافئين.

39. **النقد** يمثل صالح وسالم $\frac{1}{4}y^2 + x = 0$. فهل أيٌّ منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.



40. **الكتابة في الرياضيات** لماذا تُستخدم أشكال القطع المكافئ في الحياة اليومية؟

43. هندسة ما مساحة المربع التالي، إذا كان طول $\overline{BD}$ يساوي $2\sqrt{2}$ ؟



- A 1
B 2
C 3
D 4

44. إجابة قصيرة يقلّ قياس أصغر زاوية في مثلث بمقدار الثلثين عن قياس زاويته الوسطى. وقياس الزاوية الوسطى يساوي ثلاثة أسباع قياس أكبر زاوية. جد قياس أكبر زاوية.

41. يضع البستاني سياجاً حول حديقة مستطيلة مساحتها 1320 cm^2 . طلب سياجاً بطول 148 m إذا استخدم كامل السياج، فما طول الضلع الأكبر للحديقة؟

- A 30 m
B 34 m
C 44 m
D 46 m

42. SAT/ACT عند قسمة عددٍ على 5، يكون الناتج أكبر بمقدار 7 من العدد. جد العدد.

- F $-\frac{35}{4}$
G $-\frac{35}{6}$
H $\frac{35}{6}$
J $\frac{28}{4}$
K $\frac{35}{4}$

مراجعة شاملة

45. الهندسة جد محيط المثلث الذي رؤوسه النقاط $(2, 4)$ ، و $(-1, 3)$ ، و $(1, -3)$.

46. العمل يستطيع عامل تنظيف جدار بحجم معين خلال 5 ساعات. ويستطيع عامل آخر إنجاز العمل نفسه خلال 4 ساعات. إذا عمل العاملان معاً، كم من الزمن سيستغرقهما القيام بهذه المهمة؟ حدد ما إذا كانت إجابتك منطقية أم لا.

حلّ كل معادلة أو متباينة. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

47. $\ln(x + 1) = 1$

48. $\ln(x - 7) = 2$

49. $e^x > 1.6$

50. $e^{5x} \geq 25$

51. $\sqrt{0.25}$

52. $\sqrt[3]{-0.064}$

53. $\sqrt[4]{z^8}$

54. $-\sqrt[6]{x^6}$

55. $h(x) = x^3 + 8x + 6$

56. $p(x) = 3x^3 - 5x^2 - 11x + 3$

57. $h(x) = 9x^6 - 5x^3 + 27$

حوّل لأبسط صورة.

أدرج جميع الأصفار النسبية المحتملة لكل دالة.

مراجعة المهارات

حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

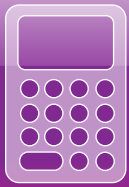
58. $\sqrt{24}$

59. $\sqrt{45}$

60. $\sqrt{252}$

61. $\sqrt{512}$

مختبر تقنية التمثيل البياني معادلات الدوائر

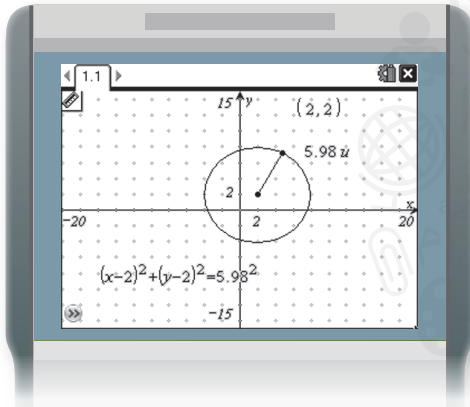


يمكنك استخدام تقنية التمثيل البياني لفحص خصائص الدوائر وعلاقتها بمعادلة الدائرة.

النشاط

الخطوة 1

ارسم دائرة.



- افتح صفحة Graphs (تمثيلات بيانية) جديدة. حدد القائمة Window/Zoom واستخدم الأداة Windows Setting لضبط حجم النافذة كما هو موضح. من القائمة View (عرض). حدد Show Grid (عرض شبكي). ثم من القائمة Shapes (أشكال). حدد Circle (دائرة). ضع المؤشر على النقطة (2, 2) واضغط على enter (إدخال) لتعيين مركز الدائرة. حرك المؤشر للخارج لإنشاء دائرة كالموضحة.

- استخدم الأداة Point On (نقطة على) من القائمة Points & Line (نقاط وخط) لوضع نقطة على الدائرة.
- استخدم الأداة Segment (قطعة مستقيمة) من القائمة Points & Line (نقاط وخط) لرسم نصف القطر.

الخطوة 2

أضف الأسماء.

- من القائمة Actions (إجراءات). حدد Coordinates and Equations (إحداثيات ومعادلات).

استخدم المؤشر لتحديد مركز الدائرة لعرض إحداثيه. ثم حدد الدائرة لعرض معادلتها. حرك كل عرض خارج الدائرة.

- استخدم الأداة Length (طول) من القائمة Measurement (قياس) لعرض طول نصف القطر.

الخطوة 3

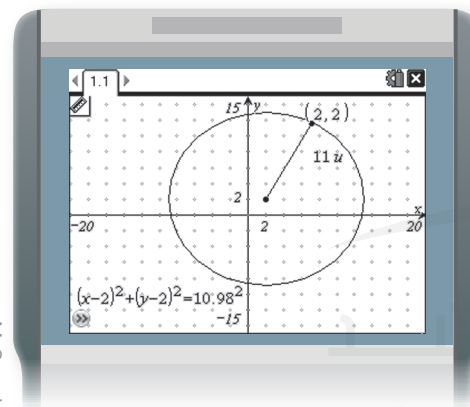
غيّر نصف القطر.

حرك المؤشر بحيث يتم تظليل نقطة على الدائرة. ثم اضغط مع الاستمرار على مركز لوحة اللمس حتى يتم تحديدها. افحص معادلة الدائرة. ثم حرك حافة الدائرة للداخل. ولاحظ التغييرات في المعادلة.

الخطوة 4

حرك مركز الدائرة.

حرك المؤشر بحيث يتم تظليل مركز الدائرة. ثم اضغط مع الاستمرار على مركز لوحة اللمس حتى يتم تحديده. حرك مركز الدائرة. مرة أخرى. افحص معادلة الدائرة.



تحليل النتائج

- ما تأثير تحريك حافة الدائرة للداخل أو الخارج على معادلة الدائرة؟
- ما تأثير تحريك مركز الدائرة على المعادلة؟
- كرر النشاط من خلال وضع مركز دائرة في الربع الثاني. حرك المركز إلى كل من الربعين الآخرين. كيف تتغير المعادلة؟
- التخمين** بدون تمثيل بياني، اكتب معادلة لكل دائرة.
 - المركز: (4, 2)، نصف القطر: 3
 - المركز: (-1, 1)، نصف القطر: 8
 - المركز: (-6, -5)، نصف القطر: 2.5
 - المركز: (h, k)، نصف القطر: r



السابق:

تمثيل معادلات
القطع المكافئ
بياناً وكتابتها.

الحالي

1 كتابة معادلات الدوائر.

2 تمثيل الدوائر بيانيا

٠: لماذا؟

● عند قذف جسم في المياه،
تتجه التموجات من المركز
نحو الخارج لتكوين دوائر
متحدة المركز. إذا تم تعيين
إحداثيات نقطة دخول
الجسم في المياه، فيمكن
تمثيل كل تموج بعبادلة دائرة.

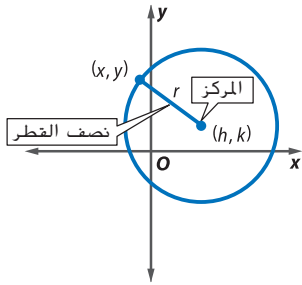
مفردات جديدة

(circle) الدائرة
(center) المركز
(radius) نصف القطر

مهارسات في الرياضيات

4 استخدام نماذج الرياضيات.

1 **معادلة الدائرة** هي مجموعة جميع النقاط في مستوى والتي تقع على مسافة واحدة من نقطة معطاة في ذلك المستوى، يُطلق عليها **المركز**. أي قطعة مستقيمة بنقطتين طرفيتين واحدة عند المركز والأخرى على الدائرة هي **نصف قطر** للدائرة.



افترض أن (x, y) إحداثيان لنقطة على الدائرة الموضحة. المركز عند (h, k) ونصف القطر هو r . يمكنك إيجاد معادلة الدائرة باستخدام صيغة المسافة.

$$\begin{aligned}\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} &= d && \text{صيغة المسافة} \\ \sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2} &= r && (x_1, y_1) = (h, k), \\ (x - h)^2 + (y - k)^2 &= r^2 && (x_2, y_2) = (x, y), d = r \\ &&& \text{تربيع كل طرف.}\end{aligned}$$

المفهوم الأساسي صور معادلة الدائرة

$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$	$x^2 + y^2 = r^2$	الصيغة القياسية للمعادلة
(h, k)	$(0, 0)$	المركز
r	r	نصف القطر

يمكنك استخدام الصيغة القياسية لمعادلة الدائرة لكتابة معادلة دائرة إذا علمت مركز الدائرة ونصف قطرها أو محيطها.

مثال من الحياة اليومية 1 كتابة معادلة إذا علمت نصف القطر

التوصيل الأجهزة + المزيد من عروض التوصيل المجاني في مدى **35 km** من المتجر. يقع متجر أبو ظبي على مسافة **100 km** شمال مكتب الشركة و **45 km** شرقاً. اكتب معادلة تمثل حدود التوصيل من متجر أبو ظبي إذا كان مصدر النظام الإحداثي هو مكتب الشركة.

نظراً لأن مكتب الشركة يقع عند $(0, 0)$. يقع متجر أولاد علي عند $(45, 100)$. حدود منطقة التوصيل هي الدائرة التي يقع مركزها عند $(45, 100)$ بنصف قطر يبلغ **35 m**.

$$\begin{aligned}(x - h)^2 + (y - k)^2 &= r^2 && \text{معادلة الدائرة} \\(x - 45)^2 + (y - 100)^2 &= 35^2 && (h, k) = (45, 100) \text{ و } r = 35 \\(x - 45)^2 + (y - 100)^2 &= 1225 && \text{بسط}\end{aligned}$$

تھریں موچہ

1. **واي فاي** مدى أحد هواتف واي فاي 30 km في أي اتجاه. إذا كان الهاتف يقع على مسافة 4 km جنوب المقر الرئيسي و 3 km غربًا، فاكتب معادلة تمثل المساحة التي يمكن تشغيل الهاتف في مداها عبر نظام واي فاي.

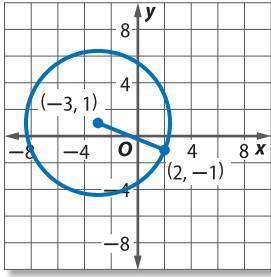
يمكنك كتابة معادلة دائرة إذا علمت موقع المركز ونقطة على الدائرة.

نصيحة دراسية

صيغة المركز-نصف القطر

القطر تتم الإشارة أحياناً إلى الصيغة القياسية بمصطلح صيغة المركز-نصف القطر لظهور مركز الدائرة ونصف قطرها في المعادلة.

مثال 2 كتابة معادلة من تمثيل بياني



اكتب معادلة للتمثيل البياني.

الصيغة القياسية

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

$$(2 + 3)^2 + (-1 - 1)^2 = r^2$$

$$(5)^2 + (-2)^2 = r^2$$

$$25 + 4 = r^2$$

$$29 = r^2$$

بسّط

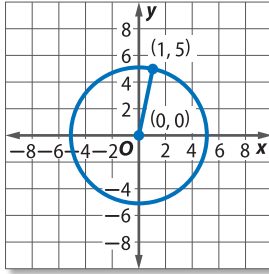
جد قيمة الأسس.

اجمع.

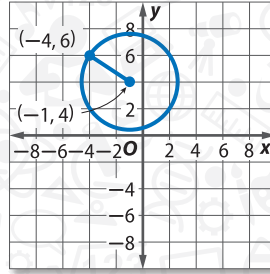
إذا، معادلة الدائرة هي $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 29$.

تمرين موجّه

2A.



2B.



يمكنك استخدام صيغتي نقطة المنتصف والمسافة إذا علمت النقطتين الطرفيتين لنصف قطر أو محيط دائرة.

مثال 3 كتابة معادلة إذا كان القطر معلوماً

اكتب معادلة دائرة النقطتان الطرفيتان لقطرها هما $(7, 6)$ و $(-1, -8)$.

الخطوة 1 جـد المركز.

$$\begin{aligned} (h, k) &= \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right) \\ &= \left(\frac{7 + (-1)}{2}, \frac{6 + (-8)}{2} \right) \\ &= \left(\frac{6}{2}, \frac{-2}{2} \right) \\ &= (3, -1) \end{aligned}$$

صيغة نقطة المنتصف

$$(x_1, y_1) = (7, 6), (x_2, y_2) = (-1, -8)$$

اجمع

بسّط

الخطوة 2 جـد نصف القطر.

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ &= \sqrt{(3 - 7)^2 + (-1 - 6)^2} \\ &= \sqrt{(-4)^2 + (-7)^2} \\ &= \sqrt{65} \end{aligned}$$

صيغة المسافة

$$(x_1, y_1) = (7, 6), (x_2, y_2) = (3, -1)$$

اطرح.

بسّط

نصف قطر الدائرة هو $\sqrt{65}$ وحدة. إذا $r^2 = 65$. عوّض عن h و k في الصيغة القياسية لمعادلة الدائرة. معادلة الدائرة هي $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 65$.

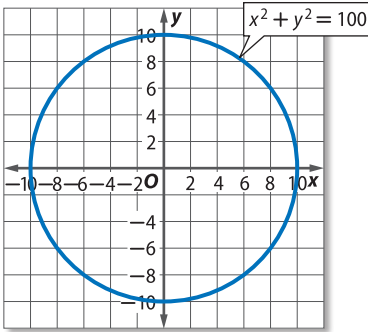
تمرين موجّه

3. اكتب معادلة دائرة النقطتان الطرفيتان لقطرها هما $(3, -3)$ و $(1, 5)$.

مثال 4 التمثيل البياني لمعادلة بالصيغة القياسية

جد مركز ونصف قطر دائرة معادلتها $x^2 + y^2 = 100$. ثم مثل الدائرة بيانيًا.

x	y
0	10
6	8
8	6
10	0



- مركز الدائرة عند $(0, 0)$. ونصف القطر 10.
- بدرج الجدول بعض القيم الصحيحة لـ x و y والتي تحقق المعادلة.
- لأن مركز الدائرة عند نقطة الأصل، فهي متماثلة حول المحور الرأسي y . ولذلك تقع النقاط $(-10, 0)$ و $(-8, 6)$ و $(-6, 8)$ بالتمثيل البياني.
- الدائرة متماثلة كذلك حول المحور الأفقي x . إذًا، تقع النقاط $(0, -10)$ و $(-8, -6)$ و $(-6, -8)$ و $(6, -8)$ و $(8, -6)$ بالتمثيل البياني.
- قم بتعيين جميع هذه النقاط ورسم الدائرة التي تمر بها.

تمرين موجّه

4. جد مركز ونصف قطر دائرة معادلتها $x^2 + y^2 = 81$. ثم مثل الدائرة بيانيًا.

يمكن تمثيل الدوائر التي لا تكون مراكزها $(0, 0)$ بيانيًا باستخدام الإزاحة. التمثيل البياني لـ $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ هو التمثيل البياني لـ $x^2 + y^2 = r^2$ مزاحًا بمقدار h وحدة أفقيًا و k وحدة رأسيًا.

مثال 5 التمثيل البياني لمعادلة ليست بالصيغة القياسية

جد مركز ونصف قطر دائرة معادلتها $x^2 + y^2 - 8x + 12y - 12 = 0$. ثم مثل الدائرة بيانيًا.

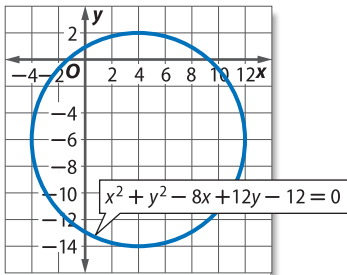
أكمل المربعات.

$$x^2 + y^2 - 8x + 12y - 12 = 0$$

$$x^2 - 8x + \blacksquare + y^2 + 12y + \blacksquare = 12 + \blacksquare + \blacksquare$$

$$x^2 - 8x + 16 + y^2 + 12y + 36 = 12 + 16 + 36$$

$$(x - 4)^2 + (y + 6)^2 = 64$$



مركز الدائرة عند $(4, -6)$. ونصف القطر هو 8.
 التمثيل البياني لـ $(x - 4)^2 + (y + 6)^2 = 64$
 هو ذاته $x^2 + y^2 = 64$ مزاحًا بمقدار 4 وحدات لليمين و 6 وحدات لأسفل.

تمرين موجّه

5. جد مركز ونصف قطر دائرة معادلتها $x^2 + y^2 + 4x - 10y - 7 = 0$. ثم مثل الدائرة بيانيًا.

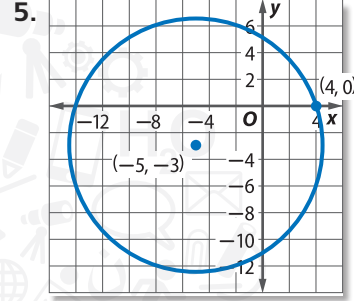
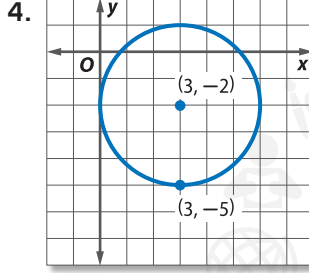
1. **الطقس** في المتوسط، يبلغ عرض عين الإعصار 200 ft تقريبًا. افترض أن مركز عين الإعصار عند النقطة (72, 39). اكتب معادلة تمثل حدود العين.

اكتب معادلة لكل دائرة إذا علمت المركز ونصف القطر.

3. المركز: (1, -5). وحدات $r = 3$

2. المركز: (-2, -6). وحدات $r = 4$

اكتب معادلة لكل تمثيل بياني.



اكتب معادلة لكل دائرة إذا علمت النقطتين الطرفيتين للقطر.

6. (0, 0) و (-1, -7)

7. (-4, -6) و (4, -2)

جد مركز كل دائرة ونصف قطرها. ثم مثل الدائرة بيانيًا.

8. $x^2 + y^2 = 16$

9. $x^2 + (y - 7)^2 = 9$

10. $(x - 4)^2 + (y - 4)^2 = 25$

11. $x^2 + y^2 - 4x + 8y - 5 = 0$

التمرين وحل المسائل

اكتب معادلة لكل دائرة إذا علمت المركز ونصف القطر.

14. المركز: (-7, -3), $r = 13$

13. المركز: (-3, 1), $r = 4$

12. المركز: (4, 9), $r = 6$

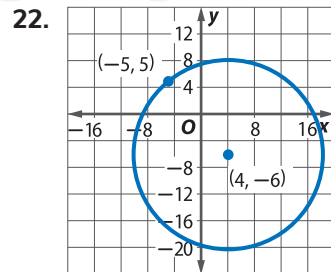
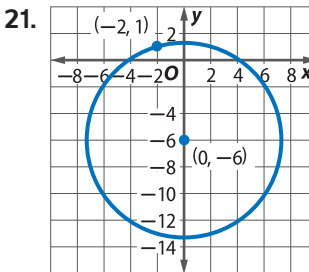
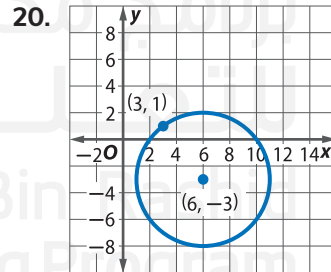
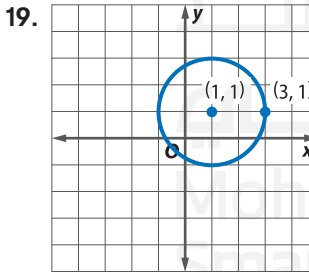
17. المركز: (0, -6), $r = \sqrt{35}$

16. المركز: (1, 0), $r = \sqrt{15}$

15. المركز: (-2, -1), $r = 9$

18. **استخدام النماذج** يقع رادار برج تحكم مطار عند (5, 10) على خريطة. ويمكنه اكتشاف طائرة على مسافة تصل إلى 20 mi. اكتب معادلة للحدود الخارجية لمنطقة الاكتشاف.

اكتب معادلة لكل تمثيل بياني.



اكتب معادلة لكل دائرة إذا علمت النقطتين الطرفيتين للقطر.

23. (2, 1) و (2, -4) 24. (-4, -10) و (4, -10) 25. (5, -7) و (-2, -9)
26. (-6, 4) و (4, 8) 27. (2, -5) و (6, 3) 28. (18, 11) و (-19, -13)

29. **العناية بالعشب** تعمل آلة رش على ري قطاع دائري من العشب.

a. اكتب معادلة لتمثيل حدود منطقة الرش إذا علمت أن النقطتين الطرفيتين للقطر هما (12, -16) و (-12, 16).

b. ما مساحة العشب التي ترويتها آلة الرش؟

30. **الفضاء** كانت أبولو 8 أول مركبة فضاء مأهولة تدور حول القمر على ارتفاع متوسط يبلغ 185 km فوق سطح القمر. اكتب معادلة لتمثيل مدار دائري واحد لوحدة التحكم إذا علمت أن النقطتين الطرفيتين لقطر القمر هما (1740, 0) و (-1740, 0). افترض أن مركز القمر يقع عند نقطة أصل النظام الإحداثي الذي يتم قياسه بالكيلومتر.

جد مركز كل دائرة ونصف قطرها. ثم مثل الدائرة بيانياً.

31. $x^2 + y^2 = 75$ 32. $(x - 3)^2 + y^2 = 4$
33. $(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 34$ 34. $x^2 + (y - 14)^2 = 144$
35. $(x - 5)^2 + (y + 2)^2 = 16$ 36. $x^2 + y^2 = 256$
37. $(x - 4)^2 + y^2 = \frac{8}{9}$ 38. $\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{16}{25}$
39. $x^2 + y^2 + 4x = 9$ 40. $x^2 + y^2 - 6y + 8x = 0$
41. $x^2 + y^2 + 2x + 4y = 9$ 42. $x^2 + y^2 - 3x + 8y = 20$
43. $x^2 + y^2 + 6y = -50 - 14x$ 44. $x^2 - 18x + 53 = 18y - y^2$
45. $2x^2 + 2y^2 - 4x + 8y = 32$ 46. $3x^2 + 3y^2 - 6y + 12x = 24$

مثال 4-5

47. **الفضاء** يدور قمر صناعي في مدار دائري على ارتفاع 25000 mi فوق الأرض.

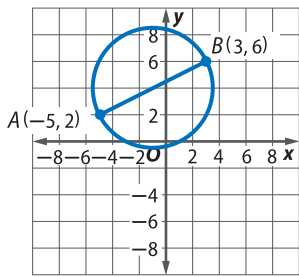
a. اكتب معادلة لمدار هذا القمر الصناعي إذا علمت أن نقطة الأصل تقع عند مركز الأرض. افترض أن قطر الأرض 8000 mi.

b. ارسم الأرض والمدار بقياس رسم. مَيِّز الرسم بالأسماء.

48. **التبرير المنطقي** افترض أن بث محطة راديو غير محجوب يمكنه الانتقال لمسافة 120 mi. افترض أن المحطة متمركزة عند نقطة الأصل.

a. اكتب معادلة لتمثيل حدود منطقة البث باستخدام المركز كنقطة الأصل.

b. إذا علمت أن برج البث يبعد عن المحطة الحالية مسافة 40 mi شرقاً و 10 mi جنوباً. وتعمل الإشارة المعززة على بث الإشارات لمسافة 80 mi إضافية، فما المعادلة التي تمثل منطقة البث الجديدة؟



49. **الهندسة** الدوائر متحدة المركز هي دوائر لها المركز ذاته ولكن بأنصاف أقطار مختلفة. ارجع إلى التمثيل البياني الموضح حيث $\overline{AB}$ هو قطر الدائرة.

a. اكتب معادلة لدائرة تتحد في المركز مع الدائرة الموضحة على اليسار.

ولكن نصف قطرها أكبر بمقدار 4 وحدات.

b. اكتب معادلة لدائرة تتحد في المركز مع الدائرة الموضحة على اليسار.

ولكن نصف قطرها أصغر بمقدار وحدتين.

c. مثل بيانياً الدائرتين من الجزأين a و b على المستوى الإحداثي ذاته.

50. **الزلازل** يبعد الاستاد عن وسط المدينة تقريباً بمسافة 35 km غرباً و 40 km شمالاً. افترض حدوث زلزال يبعد مركزه عن استاد المدينة بمسافة 55 km تقريباً. افترض أن نقطة أصل المستوى الإحداثي تقع عند مركز وسط المدينة. اكتب معادلة لمجموعة النقاط التي يمكن أن تكون مركز الزلزال.

الدقة اكتب معادلة للدائرة التي تحقق كل مجموعة من الشروط.

51. المركز $(-8, 9)$. تمر بالنقطة $(22, 19)$

52. المركز $(30, -\sqrt{15})$ تمر بنقطة الأصل

53. المركز $(-9, 8)$. تمس المحور الرأسي y

54. المركز $(4, 2)$. تمس المحور الأفقي x

55. المركز في الربع الأول. تمس $x = 5$. والمحور الأفقي x . والمحور الرأسي y

56. المركز في الربع الأول. تمس $y = 1$ و $y = 5$. والمحور الرأسي y

57. **التمثيلات المتعددة** مثل بيانيًا $y = \sqrt{9 - x^2}$ و $y = -\sqrt{9 - x^2}$ على شاشة الحاسبة البيانية ذاتها.

a. **لفظيًا** صف التمثيل البياني المشكّل بدمج هذين التمثيلين البيانيين.

b. **جبريًا** اكتب معادلة لدمج هذين التمثيلين البيانيين.

c. **لفظيًا** معظم الحاسبات البيانية لا يمكنها التمثيل البياني للمعادلة $x^2 + y^2 = 49$ بشكل مباشر. صف طريقة لاستخدام الحاسبة البيانية لتمثيل المعادلة بيانيًا. ثم مثل المعادلة بيانيًا.

d. **تحليليًا** حل $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 4$ لإيجاد y . لماذا نحتاج إلى معادلتين لتمثيل دائرة بيانيًا على حاسبة بيانية؟

e. **لفظيًا** هل تعتقد أنه من الأسهل التمثيل البياني للمعادلة في الجزء d باستخدام ورق تمثيل بياني وقلم رصاص أم باستخدام حاسبة بيانية؟ اشرح.

جد مركز كل دائرة ونصف قطرها. ثم مثل الدائرة بيانيًا.

58. $x^2 - 12x + 84 = -y^2 + 16y$

59. $4x^2 + 4y^2 + 36y + 5 = 0$

60. $(x + \sqrt{5})^2 + y^2 - 8y = 9$

61. $x^2 + 2\sqrt{7}x + 7 + (y - \sqrt{11})^2 = 11$

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

62. **تحليل الخطأ** تدعي هاء أن $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 36$ و $(x - 2) + (y + 3) = 6$ معادلتان متكافئتان. وتدعي سميرة أن المعادلتين ليستا متكافئتين. فهل أيّ منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.

63. **مسألة غير محددة** الإجابة فُكّر في التمثيلات البيانية بمعادلات بالصيغة $(x - a)^2 + (y - b)^2 = 64$. عيّّن ثلاث قيم مختلفة لـ a . ومثل كل معادلة بيانيًا. صف جميع التمثيلات البيانية بمعادلات بهذه الصيغة.

64. **التبرير** اشرح سبب تضمين العبارة "في مستوى" في تعريف الدائرة. ما الذي سيتم تعريفه إذا لم يتم تضمين العبارة؟

65. **مسألة غير محددة الإجابة** الدوائر متحدة المركز لها المركز ذاته، لكن في الأغلب تختلف أنصاف الأقطار. اكتب معادلتين لدائرتين متحدتي المركز. ثم مثل الدائرتين بيانيًا.

66. **التبرير** افترض أن (x, y) إحداثيان لنقطة على دائرة. المركز عند (h, k) . ونصف القطر هو r . جد معادلة الدائرة باستخدام صيغة المسافة.

67. **الكتابة في الرياضيات الدائرة** ذات المعادلة $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ تقع في الربع الأول وتمس المحورين الأفقي x والرأسي y . ارسم الدائرة. صف القيم المحتملة لـ a و b و r . كرر نفس الإجراء للدائرة في الأرباع الثاني والثالث والرابع. ناقش أوجه التشابه بين الدوائر.

70. تم إيداع AED 1000 في بنك يدفع 2% فائدة مركبة أسبوعيًا. فكم سيكون رصيد الحساب بنهاية 10 أعوام؟

F AED 1200.00

H AED 1221.36

G AED 1218.99

J AED 1224.54

71. متوسط الأعداد الستة هو 20. إذا تمت إزالة أحد الأعداد، فسيكون متوسط الأعداد المتبقية هو 15. ما العدد الذي تمت إزالته؟

A 42

C 45

B 43

D 48

68. إجابة شبيهة تشترك دائرتان، نصف قطر كل منهما 6. في نقطة واحدة. إذا كانت A نقطة على دائرة B نقطة على الدائرة الأخرى، فما أقصى طول ممكن للقطعة المستقيمة $\overline{AB}$ ؟

69. في صف العام النهائي، الفتيات أكثر من الأولاد بنسبة 20%. إذا كان عدد الفتيات 180، فبكم تزيد الفتيات عن الأولاد بين طلاب العام النهائي؟

A 30

B 36

C 90

D 144

مراجعة شاملة

مثل كل معادلة بيانًا. (الدرس 1-6)

72. $y = -\frac{1}{2}(x - 1)^2 + 4$

73. $4(x - 2) = (y + 3)^2$

74. $(y - 8)^2 = -4(x - 4)$

جد نقطة المنتصف للقطعة المستقيمة ذات النقطتين الطرفيتين عند الإحداثيات المعطاة. ثم جد المسافة بين النقاط.

75. $(-3, -\frac{2}{11}), (5, \frac{9}{11})$

76. $(2\sqrt{3}, -5), (-3\sqrt{3}, 9)$

77. $(2.5, 4), (-2.5, 2)$

78. إذا كان y يتغير طرديًا مع x و $y = 8$ حيث $x = 6$ ، فجد y حيث $x = 15$.

79. إذا كان y يتغير بشكل مشترك مع x و z و $y = 80$ حيث $x = 5$ و $z = 8$ ، فجد y حيث $x = 16$ و $z = 2$.

80. إذا كان y يتغير عكسيًا مع x و $y = 16$ حيث $x = 5$ ، فجد y حيث $x = 20$.

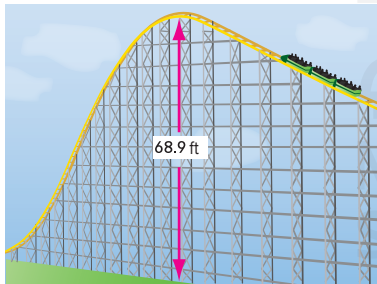
جد قيمة كل تعبير.

81. $\log_9 243$

82. $\log_2 \frac{1}{32}$

83. $\log_3 \frac{1}{81}$

84. $\log_{10} 0.001$



85. **المتنزهات** ترتبط السرعة v ft/s لأفعوانية عند أسفل التل بالهبوط العمودي h ft والسرعة v_0 ft/s للأفعوانية على قمة التل عبر الصيغة $v_0 = \sqrt{v^2 - 64h}$.

a. اشرح لماذا $v_0 = v - 8\sqrt{h}$ لا تكافئ الصيغة المعطاة.

b. ما السرعة التي يجب أن تصل إليها الأفعوانية عند قمة التل لبلوغ سرعة 38.1 ft/s عند القاع؟

مراجعة المهارات

حلّ كل معادلة بإكمال المربع.

86. $x^2 + 3x - 18 = 0$

87. $2x^2 - 3x - 3 = 0$

88. $x^2 + 2x + 6 = 0$



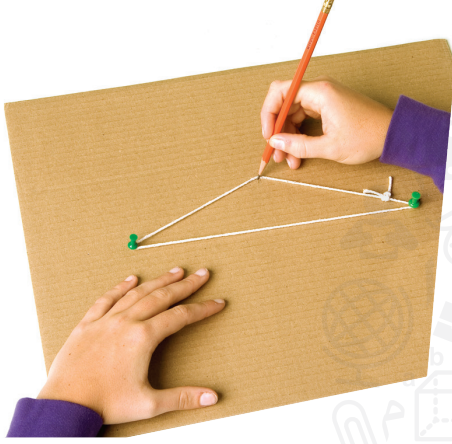
مختبر الجبر استكشاف القطع الناقص

6-3

اتبع الخطوات أدناه لإنشاء نوع من القطع المخروطي.

ممارسات في الرياضيات

5 استخدام الأدوات الملائمة بطريقة إستراتيجية.



النشاط رسم قطع ناقص

الخطوة 1

اغرز دبوسين على قطعة من الورق المقوى على مسافة قدم تقريبًا.

الخطوة 2

اربط عقدة بقطعة من الخيط ولفها حول الدبوسين. أدخل القلم الرصاص في الخيط.

الخطوة 3

اجعل الخيط مشدودًا وارسم منحنى. تابع الرسم حتى العودة إلى نقطة البداية.

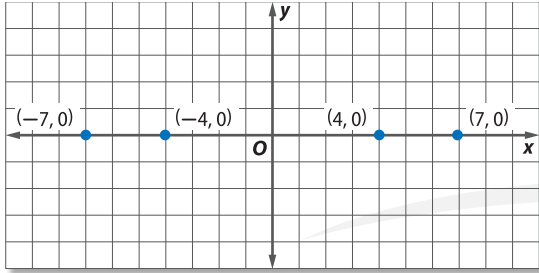
يُطلق على المنحنى الذي رسمته **القطع الناقص**. نقاط تواجد الدبابيس تُسمى **البؤرتان** للقطع الناقص.

استخدام النماذج والتحليل

ضع قطعة من ورق المربعات على قطعة من الورق المقوى.

1. ضع الدبوسين عند $(7, 0)$ و $(-7, 0)$. اختر خيطًا كافي الطول للدوران حول الدبوسين. ارسم قطعًا ناقصًا.

2. كرر التمرين 1، ولكن ضع الدبوسين عند $(4, 0)$ و $(-4, 0)$. استخدم حلقة الخيط ذاتها وارسم قطعًا ناقصًا. ما وجه المقارنة بين هذا القطع الناقص ونظيره في التمرين 1؟



ضع الدبوسين عند كل مجموعة نقاط وارسم قطعًا ناقصًا. يمكنك تغيير طول حلقة الخيط إن أردت.

3. $(11, 0)$, $(-11, 0)$

4. $(3, 0)$, $(-3, 0)$

5. $(13, 3)$, $(-9, 3)$

التخمين

صف ما يحدث لشكل قطع ناقص عند إجراء كل تغيير.

6. تقريب الدبوسين.

7. إبعاد الدبوسين.

8. زيادة طول حلقة الخيط.

9. ترتيب الدبوسين رأسياً.

10. إزالة دبوس، ولف حلقة الخيط حول الآخر.

11. اختر نقطة على أحد القطوع الناقصة التي رسمتها. استخدم مسطرة لقياس المسافة من تلك النقطة إلى نقطتي وضع الدبوسين. اجمع المسافتين. كرر الإجراء مع النقاط الأخرى على القطع الناقص ذاته. ما العلاقة التي تلاحظ؟

12. هل يمكن إجراء هذا النشاط باستخدام شريط مطاطي بدلاً من قطعة الخيط؟ اشرح.

القطع الناقص

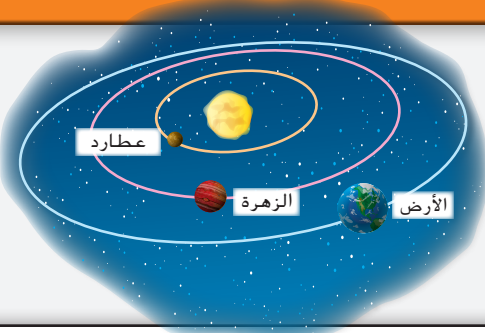
3-6

الدروس

لماذا؟

الحالي

السابق



لا يدور عطارد، مثله مثل جميع كواكب المجموعة الشمسية، في مسار تام الاستدارة حول الشمس. عند أبعد نقطة، يبعد عطارد 69.2 مليون كيلومتر تقريباً عن الشمس. عند أقرب نقطة، يبعد عطارد 45.9 مليون كيلومتر تقريباً عن الشمس. يأخذ هذا المدار شكل قطع ناقص إحدى بؤرتيه هي الشمس.

1 كتابة معادلات القطوع الناقصة.
2 تمثيل القطوع الناقصة بيانياً.

تمثيل معادلات الدوائر بيانياً وكتابتها.

1 معادلات القطع الناقص

هو مجموعة جميع التقاطع في مستوى والتي يكون مجموع بعدي كل منها عن نقطتين ثابتتين ثابتاً. يُطلق على هاتين النقطتين **البؤرتان** للقطع الناقص.

ذكر الطلاب أن للقطع الناقص محوري تماثل، وهما **المحور الأكبر** و**المحور الأصغر**. المحوران متعامدان على **مركز** القطع الناقص.

تقع البؤرتان للقطع الناقص دائماً على المحور الأكبر. النقاط الطرفية للمحور الأكبر هي **رؤوس** القطع الناقص والنقاط الطرفية للمحور الأصغر هي **الرؤوس المرافقة** للقطع الناقص.

مفردات جديدة

قطع ناقص (ellipse)

بؤرتان (foci)

محور أكبر (major axis)

محور أصغر (minor axis)

المركز (center)

رؤوس (vertices)

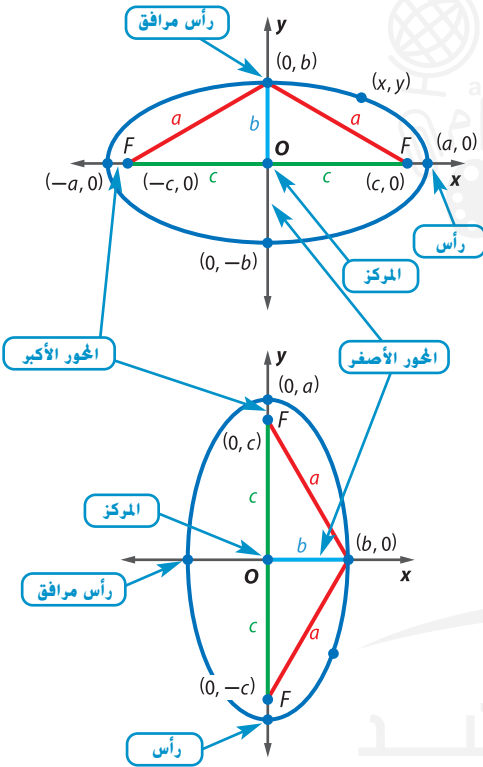
رؤوس مرافقة (co-vertices)

مجموع ثابت (constant sum)

مهارسات في الرياضيات

7 محاولة إيجاد البنية واستخدامها

واستخدامها



المفهوم الأساسي صور معادلات القطوع الناقصة التي يقع مركزها عند نقطة الأصل

الصيغة القياسية	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$
الاتجاه	أفقي	رأسي
البؤرتان	$(c, 0), (-c, 0)$	$(0, c), (0, -c)$
طول المحور الأكبر	$2a$ وحدات	$2a$ وحدات
طول المحور الأصغر	$2b$ وحدات	$2b$ وحدات

هناك العديد من العلاقات الهامة بين الأجزاء المتعددة للقطع الناقص.

- طول المحور الأكبر، $2a$ وحدات، ويساوي مجموع المسافتين من البؤرتين إلى أي نقطة على القطع الناقص.
- ترتبط القيم a و b و c بواسطة المعادلة $c^2 = a^2 - b^2$.
- المسافة من البؤرتين إلى رأس مرافق هي a وحدات.

مجموع المسافتين من البؤرتين إلى أي نقطة على القطع الناقص، أو **المجموع الثابت**، يجب أن يكون أكبر من المسافة بين البؤرتين.

نصيحة دراسية

المحور الأكبر بالصيغة

القياسية، إذا كان للحد

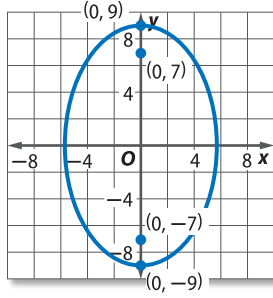
x^2 المقام الأكبر، فإن المحور

الأكبر أفقي. إذا كان للحد

y^2 المقام الأكبر، فإنه رأسي.

مثال 1 كتابة معادلة إذا علمت الرأسين والبؤرتين

اكتب معادلة قطع ناقص.



الخطوة 1

جد المركز.

تقع البؤرتان على مسافة واحدة

من المركز.

ويقع المركز عند النقطة $(0, 0)$.

الخطوة 2

جد قيمة a .

الرأسان هما $(0, 9)$ و $(0, -9)$

إذاً، طول المحور الأكبر 18.

قيمة a هي $18 \div 2$ أو 9، و $a^2 = 81$.

الخطوة 3

جد قيمة b .

يمكن استخدام $c^2 = a^2 - b^2$ لإيجاد b .

تبعد البؤرتان 7 وحدات عن المركز، إذاً $c = 7$.

معادلة تربط a و b و c

$c = 7$ و $a = 9$

جد حل b^2 .

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$49 = 81 - b^2$$

$$b^2 = 32$$

الخطوة 4

اكتب المعادلة.

لأن المحور الأكبر رأسي، a^2 يرتبط مع y و b^2 يرتبط مع x .

$$\frac{y^2}{81} + \frac{x^2}{32} = 1$$

تمرين موجّه

1. اكتب معادلة قطع ناقص يقع رأساه عند النقطتين $(-4, 0)$ و $(4, 0)$ وبؤرتاه عند $(2, 0)$ و $(-2, 0)$.

كما هو الحال مع التمثيلات البيانية الأخرى، يمكن إزاحة التمثيل البياني للقطع الناقص. عند إزاحة التمثيل البياني h وحدات لليمين و k وحدات لأعلى، يكون مركز الإزاحة (h, k) . يكافئ هذا التعويض عن x باستخدام $x - h$ والتعويض عن y باستخدام $y - k$ في الدالة الأم.

المفهوم الأساسي صور معادلات القطوع الناقصة التي يقع مركزها عند (h, k)

الصيغة القياسية	$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$	$\frac{(y-k)^2}{a^2} + \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$
الاتجاه	أفقي	رأسي
البؤرتان	$(h \pm c, k)$	$(h, k \pm c)$
الرؤوس	$(h \pm a, k)$	$(h, k \pm a)$
الرؤوس المرافقة	$(h, k \pm b)$	$(h \pm b, k)$

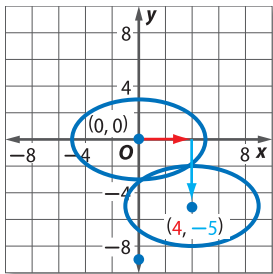
يمكن استخدام هذه المعلومات لتحديد معادلات القطوع الناقصة. القطع الناقص الأصلي الموضح أفقي ومحوره الأكبر 10 وحدات، إذاً $a = 5$.

طول المحور الأصغر 6 وحدات، إذاً $b = 3$.

ثبت إزاحة القطع الناقص بمقدار 4 وحدات نحو اليمين و 5 وحدات إلى الأسفل. إذاً، قيمة h هي 4 وقيمة k هي -5.

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

$$\frac{(x-4)^2}{25} + \frac{(y+5)^2}{9} = 1$$



يمكنك أيضًا تحديد معادلة القطع الناقص إذا علمت الرؤوس الأربعة جميعًا.

مثال 2 كتابة معادلة إذا علمت طولي المحورين

اكتب معادلة لقطع ناقص يقع رأساه عند $(6, -8)$ و $(6, 4)$ ورأساه المرافقتان عند $(3, -2)$ و $(9, -2)$.

إحداثي x هو ذاته للرأسين، إذاً القطع الناقص رأسي.

يقع مركز القطع الناقص عند $\left(\frac{6+6}{2}, \frac{-8+4}{2}\right)$ أو $(6, -2)$

طول المحور الأكبر $(-8) - 4 = 12$ وحدة، إذاً $a = 6$.

طول المحور الأصغر $3 - 9 = 6$ وحدات، إذاً $b = 3$.

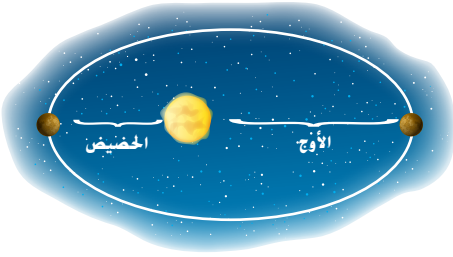
معادلة القطع الناقص هي $\frac{(y+2)^2}{36} + \frac{(x-6)^2}{9} = 1$ $a^2 = 36, b^2 = 9$

تمرين موجّه

2. اكتب معادلة لقطع ناقص يقع رأساه عند $(-3, 8)$ و $(9, 8)$ ورأساه المرافقتان عند $(3, 12)$ و $(3, 4)$.

يمكن تمثيل العديد من ظواهر الحياة اليومية باستخدام القطوع الناقصة.

مثال 3 كتابة معادلة قطع ناقص



الفضاء راجع التطبيق في بداية الدرس.

أبعد مسافة يبلغها عطارد عن الشمس،

أو **الأوج**. 69.2 مليون كيلومتر تقريبًا.

أقرب مسافة يبلغها عطارد إلى الشمس،

أو **الحضيض**. 45.9 مليون ميل تقريبًا.

يبلغ محيط الشمس كيلومتر، $1,400,129.3$ كيلومتر

تقريبًا. استخدم هذه المعلومة لتحديد معادلة

ترتبط بمدار عطارد على شكل قطع

ناقص حول الشمس بالمليون كيلومتر.

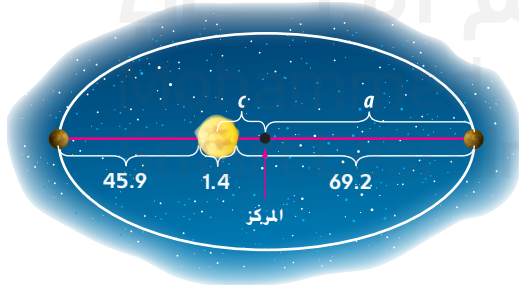
الفهم علينا تحديد معادلة تمثل مدار عطارد حول الشمس.

التخطيط بتضمنين محيط الشمس، مجموع الأوج والحضيض ويساوي طول المحور الأكبر للقطع الناقص. يمكن استخدام هذه المعلومة لتحديد قيم a و b و c .

الحل جد قيمة a .

قيمة a هي نصف طول المحور الأكبر.

$$a = 0.5(69.2 + 45.9 + 1.4) = 58.23$$



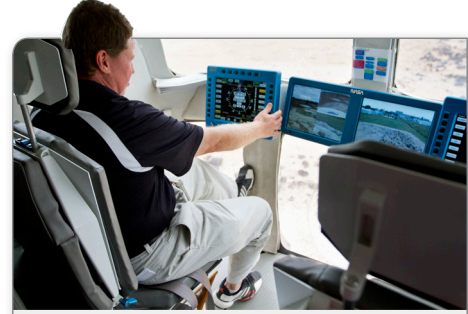
جد قيمة c .

قيمة c هي المسافة من مركز القطع الناقص إلى البؤرة.

هذه المسافة تساوي a ناقص الحضيض ونصف قطر الشمس.

$$c = 58.23 - 45.9 - 0.7 = 11.67$$

(يتبع في الصفحة التالية)



مهنة من الحياة اليومية

فني الفضاء يعمل فنيو

الفضاء في وكالة ناسا

ويساعدون المهندسين على

إجراء الأبحاث وتطوير

الواقع الافتراضي والتواصل

اللفظي بين الإنسان وأنظمة

الكمبيوتر. بالرغم من أن درجة

البكالوريوس مطلوبة، التدريب

المهني متاح.

المصدر: وكالة ناسا

نصيحة في حل المسائل

التبرير المنطقي قم بعمل رسم

تخطيطي عندما يتضمن موقف

المسألة الاستنتاج المكاني أو

الأشكال الهندسية.

جد قيمة b .

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$(7.11.67)^2 = (358.23)^2 - b^2$$

$$1309.3542 = b^2$$

$$136.1889 = 3390.7329 - b^2$$

$$b^2 = 3254.544$$

$$b = 57.0486$$

معادلة تمثل a و b و c

$c = 7.25$ و $a = 36.185$

بسط.

جد حل b^2 .

احسب الجذر التربيعي لكل طرف.

إذا، عندما يكون مركز المدار عند نقطة الأصل، يمكن تمثيل المعادلة التي تمثل مدار عطارد حول الشمس بواسطة

$$\frac{x^2}{3390.7329} + \frac{y^2}{3254.544} = 1$$

التحقق استخدم إجابتك لإعادة حساب a و b و c ثم حدد الأوج والحضيض بناءً على إجابتك. قارن بالقيم الفعلية.

تمرين موجّه

3. **الفضاء** يبعد بلوتو عن الشمس مسافة 4.44 مليار كيلومتر عند الحضيض ويبعد 7.38 مليار كيلومتر تقريباً عند الأوج. حدد معادلة تمثل مدار بلوتو حول الشمس بالملليار كيلومتر بحيث يكون مركز القطع الناقص الأفقي عند نقطة الأصل.

2 التمثيل البياني للقطع الناقص إذا حصلت على معادلة قطع ناقص ليست بالصيغة القياسية، فيمكنك كتابتها بالصيغة القياسية عبر إكمال المربع لكل من x و y . وعندما تصبح المعادلة بالصيغة القياسية، يمكنك استخدامها لتمثيل القطع الناقص بيانياً.

مثال 4 تمثيل قطع ناقص بيانياً

جد إحداثيات المركز والبؤرتين، وطولي المحورين الأكبر والأصغر لقطع ناقص معادلته $25x^2 + 9y^2 + 250x - 36y + 436 = 0$. ثم مثل القطع الناقص بيانياً.

الخطوة 1 اكتب بالصيغة القياسية. أكمل المربع لكل متغير لكتابة هذه المعادلة بالصيغة القياسية.

$$25x^2 + 9y^2 + 250x - 36y + 436 = 0$$

$$25x^2 + 250x + 9y^2 - 36y = -436$$

$$25(x^2 + 10x) + 9(y^2 - 4y) = -436$$

$$25(x^2 + 10x + \blacksquare) + 9(y^2 - 4y + \blacksquare) = -436 + 25(\blacksquare) + 9(\blacksquare)$$

$$25(x^2 + 10x + 25) + 9(y^2 - 4y + 4) = -436 + 25(25) + 9(4)$$

$$25(x + 5)^2 + 9(y - 2)^2 = 225$$

$$\frac{(x + 5)^2}{9} + \frac{(y - 2)^2}{25} = 1$$

الخطوة 2 اكتب بالصيغة القياسية. أكمل المربع لكل متغير لكتابة هذه المعادلة بالصيغة القياسية.

خاصية التجميع

خاصية التوزيع

أكمل المربعات.

$$5^2 = 25 \text{ و } (-2)^2 = 4$$

اكتب كمربعات كاملة.

اقسم كل طرف على 225.

الخطوة 2 جد المركز.

$$h = -5 \text{ و } k = 2. \text{ إذا يقع مركز القطع الناقص عند } (-5, 2).$$

الخطوة 3 جد طولي المحورين ومثل بيانياً.

القطع الناقص رأسي.

$$a^2 = 25. \text{ إذا } a = 5. b^2 = 9. \text{ إذا } b = 3$$

طول المحور الأكبر 2×5 أو 10.

طول المحور الأصغر 2×3 أو 6.

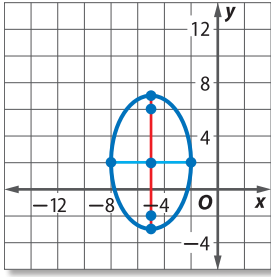
يقع الرأسان عند $(-5, 7)$ و $(-5, -3)$.

يقع الرأسان المرافقان عند $(-2, 2)$ و $(-8, 2)$.

الربط بالحياة اليومية

مدار الأرض حول الشمس دائري تقريباً، حيث الفرق بين الحضيض والأوج 3% تقريباً فقط.

المصدر: مجلة الأسترونومر



الخطوة 4 جد البؤرتين.

$c^2 = 25 - 9$ أو $c = 4$ ، إذًا $c = 4$.
تقع البؤرتان عند $(-5, 6)$ و $(-5, -2)$.

الخطوة 5 ممثل القطع الناقص بيانيًا.

ارسم القطع الناقص الذي يمر عبر الرأسين والرأسين المرافقين.

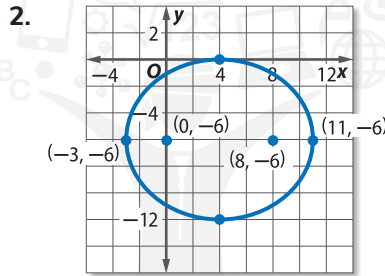
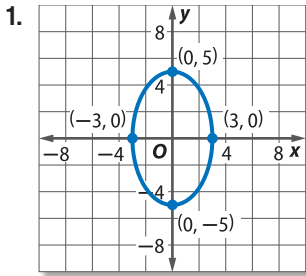
تمرين موجّه

4. جد إحداثيات المركز والبؤرتين وطولي المحورين الأكبر والأصغر لقطع ناقص معادلته $x^2 + 4y^2 - 2x + 24y + 21 = 0$. ثم ممثل القطع الناقص بيانيًا.

التحقق من فهمك

مثال 1

اكتب معادلة لكل قطع ناقص.

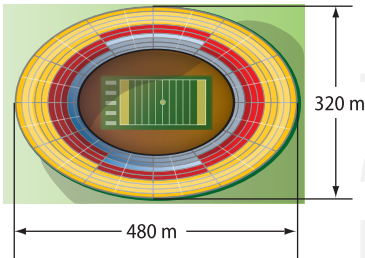


مثال 2

اكتب معادلة للقطع الناقص الذي يحقق كل مجموعة من الشروط.

3. يقع الرأسان عند $(-2, -6)$ و $(-2, 4)$. ويقع الرأسان المرافقان عند $(-5, -1)$ و $(1, -1)$.
4. يقع الرأسان عند $(-2, 5)$ و $(14, 5)$. ويقع الرأسان المرافقان عند $(6, 1)$ و $(6, 9)$.

مثال 3



5. **الاستنتاج المنطقي** أرسلت شركة هندسة معمارية عرضًا إلى إحدى المدن لبناء المدرج الموضح.

a. حدد قيمة a و b .

b. بافتراض أن المركز يقع عند نقطة الأصل، اكتب معادلة تمثل القطع الناقص.

c. حدد إحداثيات البؤرتين.

6. **الفضاء** يبلغ مدار الأرض 147.1 مليون كيلومتر تقريبًا عند الحضيض و 152.1 مليون كيلومتر تقريبًا عند الأوج. حدد معادلة تمثل مدار الأرض حول الشمس بالمليون ميل بحيث يكون مركز القطع الناقص الأفقي عند نقطة الأصل.

مثال 4

جد إحداثيات المركز والبؤرتين وطولي المحورين الأكبر والأصغر لقطع ناقص بالمعادلة المعطاة. ثم ممثل القطع الناقص بيانيًا.

7. $\frac{(y+1)^2}{64} + \frac{(x-5)^2}{28} = 1$

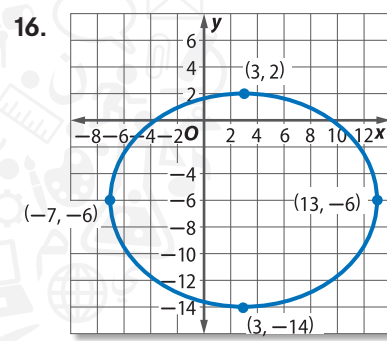
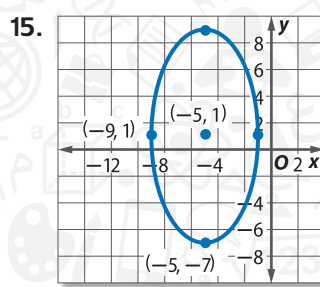
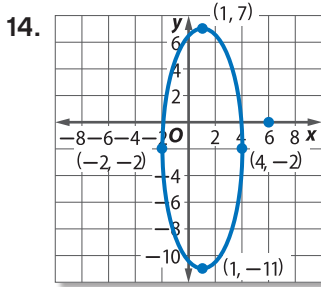
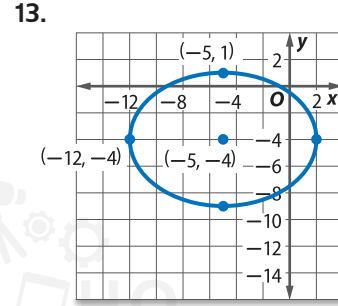
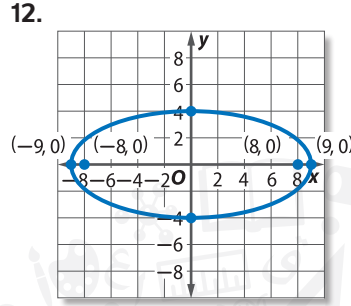
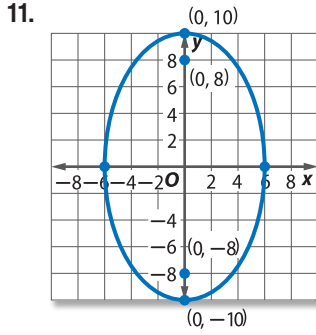
8. $\frac{(x+2)^2}{48} + \frac{(y-1)^2}{20} = 1$

9. $4x^2 + y^2 - 32x - 4y + 52 = 0$

10. $9x^2 + 25y^2 + 72x - 150y + 144 = 0$

اكتب معادلة لكل قطع ناقص.

مثال 1



اكتب معادلة للقطع الناقص الذي يحقق كل مجموعة من الشروط.

مثال 2

17. يقع الرأسان عند $(-6, 4)$ و $(12, 4)$. ويقع الرأسان المرافقان عند $(3, 12)$ و $(3, -4)$.
18. يقع الرأسان عند $(-1, 11)$ و $(-1, 1)$. يقع الرأسان المرافقان عند $(2, 6)$ و $(-4, 6)$.
19. يقع المركز عند $(-2, 6)$. ويقع الرأس عند $(-2, 16)$. ويقع الرأس المرافق عند $(1, 6)$.
20. يقع المركز عند $(3, -4)$. ويقع الرأس عند $(8, -4)$. ويقع الرأس المرافق عند $(3, -2)$.
21. يقع الرأسان عند $(4, 12)$ و $(4, -4)$. ويقع الرأسان المرافقان عند $(1, 4)$ و $(7, 4)$.
22. يقع الرأسان عند $(-11, 2)$ و $(-1, 2)$. ويقع الرأسان المرافقان عند $(-6, 0)$ و $(-6, 4)$.

23. **استخدام النماذج** يمكن تمثيل فتحة نفق في الجبال بواسطة أشباه القطوع الناقصة أو أنصاف القطوع الناقصة. يبلغ عرض الفتحة 8.6 m وارتفاعها 8.6 m . حدد معادلة تمثل الفتحة بحيث يكون المركز عند نقطة الأصل.

مثال 3



جد إحداثيات المركز والبؤرتين وطولي المحورين الأكبر والأصغر لقطع ناقص بالمعادلة المعطاة. ثم مثل القطع الناقص بيانيًا.

مثال 4

24. $\frac{(x-3)^2}{36} + \frac{(y-2)^2}{128} = 1$

25. $\frac{(x+6)^2}{50} + \frac{(y-3)^2}{72} = 1$

26. $\frac{x^2}{27} + \frac{(y-5)^2}{64} = 1$

27. $\frac{(x+4)^2}{16} + \frac{y^2}{75} = 1$

28. $3x^2 + y^2 - 6x - 8y - 5 = 0$

29. $3x^2 + 4y^2 - 18x + 24y + 3 = 0$

30. $7x^2 + y^2 - 56x + 6y + 93 = 0$

31. $3x^2 + 2y^2 + 12x - 20y + 14 = 0$

32. **النضاء** على غرار الكواكب، يدور مذنب هالي حول الشمس في مدار على شكل قطع ناقص. يبلغ الأوج 5283.3 مليون كيلومتر و يبلغ الحضيض 88.3 مليون كيلومتر. حدد معادلة تمثل مدار المذنب حول الشمس بالمليون كيلومتر بحيث يكون مركز القطع الناقص الأفقي عند نقطة الأصل.

اكتب معادلة للقطع الناقص الذي يحقق كل مجموعة من الشروط.

33. يقع المركز عند $(-5, -2)$. وتقع إحدى بؤرتيه عند $(2, -5)$. والرأس المرافق عند $(-8, -2)$
34. يقع المركز عند $(4, -3)$. وتقع إحدى بؤرتيه عند $(9, -3)$. ويقع الرأس المرافق عند $(4, -5)$
35. تقع البؤرتان عند $(-2, 8)$ و $(6, 8)$. ويقع الرأس المرافق عند $(2, 10)$
36. تقع البؤرتان عند $(4, 4)$ و $(4, 14)$. ويقع الرأس المرافق عند $(0, 9)$

37. **الحكومة** يقع المكتب البيضاوي في الجناح الغربي من البيت الأبيض. وهو غرفة على شكل قطع ناقص وهو المكتب الرئيسي لرئيس الولايات المتحدة. ويبلغ طول المحور الطويل 10.9 m وطول المحور القصير 8.8 m . اكتب معادلة تمثل الجدران الخارجية للمكتب البيضاوي. افترض أن مركز الغرفة يقع عند نقطة الأصل.

38. **الصوت** معرض الهمس هو غرفة على شكل قطع ناقص حيث لا يمكن للأشخاص الآخرين في الغرفة سماع صوت همسة خافتة صادرة عند إحدى بؤرتيه. ولكن يمكن لأي شخص عند البؤرة الأخرى سماعها بسهولة. افترض أن طول قطع ناقص 121.9 m وأن عرضه 36.6 m . ما المسافة بين البؤرتين؟

39. **التمثيلات المتعددة** يقيس الاختلاف المركزي للقطع الناقص مدى قربته من شكل الدائرة.

a. **التمثيل البياني** مثل بيانيًا $1 = \frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{36}$ و $1 = \frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{9}$ في التمثيل البياني ذاته.

b. **لفظيًا** صف الفرق بين التمثيلين البيانيين.

c. **جبريًا** الاختلاف المركزي للقطع الناقص هو $\frac{c}{a}$. جد الاختلاف المركزي لكل منها.

d. **تحليليًا** ضع فرضية حول العلاقة بين قيمة الاختلاف المركزي للقطع الناقص وشكل القطع الناقص مقارنة بالدائرة.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

40. **تحليل الخطأ** تعمل شيما ومها على تحديد معادلة لقطع ناقص يقع بؤرتاه عند $(-4, -11)$ و $(-4, 5)$ ويقع رأساه المرافقان عند $(2, -3)$ و $(-10, -3)$. فهل أي منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.

مها	شيما
$\frac{(x+4)^2}{100} + \frac{(y+3)^2}{36} = 1$	$\frac{(x-4)^2}{64} + \frac{(y+3)^2}{36} = 1$

41. **مسألة غير محددة الإجابة** اكتب معادلة لقطع ناقص تقع بؤرتاه عند نقطة الأصل.

42. **التحدي** عندما تتساوى قيمتا a و b . يكون القطع الناقص دائرة. استخدم هذه المعلومة ومعرفتك بالقطوع الناقصة لتحديد صيغة لمساحة قطع ناقص من حيث a و b .

43. **التحدي** حدد معادلة لقطع ناقص تقع البؤرتان عند $(2, \sqrt{6})$ و $(2, -\sqrt{6})$ يمر بالنقطة $(3, \sqrt{6})$.

44. **الفرضيات** ماذا يحدث لموقع البؤرتين بينما يقترب القطع الناقص من الشكل الدائري؟ اشرح استنتاجك.

45. **الاستنتاج** تقع البؤرتان للقطع الناقص عند $(-7, 2)$ و $(18, 2)$. إذا كانت $(2, 14)$ نقطة على القطع الناقص. فأثبت أن $(2, -10)$ نقطة كذلك على القطع الناقص.

46. **الكتابة في الرياضيات** اشرح لماذا المجال $\{x \mid -a \leq x \leq a\}$ والمدى $\{y \mid -b \leq y \leq b\}$ لقطع ناقص معادلته

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

47. اضرب.

$$(2 + 3i)(4 + 7i)$$

A $8 + 21i$

C $-6 + 10i$

B $-13 + 26i$

D $13 + 12i$

48. تم تتبع متوسط العمر الافتراضي للمرأة الأمريكية. ونموذج

البيانات هو $y = 0.2t + 73$. حيث $t = 0$ تناظر 1960.

ما معنى التقاطع مع المحور y ؟

F في 2007. كان متوسط العمر الافتراضي 60.

G في 1960. كان متوسط العمر الافتراضي 58.

H في 1960. كان متوسط العمر الافتراضي 73.

J يزيد العمر الافتراضي بمقدار 0.2 عام كل عام.

49. إجابة شبكية إذا أنقصنا عددًا بمقدار 6 ثم ضاعفنا الناتج.

فسوف نحصل على عدد أقل من العدد المبدئي بمقدار 5.

فما العدد؟

50. SAT/ACT طول منشور مستطيل أكبر من عرضه

بمقدار 121.9 cm. الارتفاع ثلاثة أمثال الطول. جد حجم

المنشور.

A $3x^3 + x^2 + 3x$

B $x^3 + x^2 + x$

C $3x^3 + 6x^2 + 3x$

D $3x^3 + 3x^2 + 3x$

E $3x^3 + 3x^2$

مراجعة شاملة

اكتب معادلة للدائرة التي تحقق كل مجموعة من الشروط. (الدرس 6-2)

51. المركز $(-9, 8)$. نمر بالنقطة $(22, 21)$

52. المركز عند $(2, 4)$. تماس المحور الأفقي x

53. المركز في الربع الثاني، وتماس $y = -1$ و $y = 9$ والمحور الرأسي y

54. الطاقة يتم استخدام مرآة على شكل قطع مكافئ لتجميع الطاقة الشمسية. وتنعكس المرايا أشعة الشمس إلى بؤرة القطع المكافئ.

بؤرة مرآة معينة ترتفع 9.75 ft فوق الرأس والوتر البؤري العمودي بطول 9.75 ft. (الدرس 6-1)

a. افترض أن البؤرة تقع عند نقطة الأصل. اكتب معادلة القطع المكافئ الذي تشكله المرآة.

b. القدم يساوي 0.3048 من المتر. أعد كتابة معادلة المرآة بالمتر.

c. مثل إحدى معادلات المرآة بيانيًا.

d. أي المعادلات اخترت للتمثيل البياني؟ اشرح لماذا.

حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

55. $\frac{6}{d^2 + 4d + 4} + \frac{5}{d + 2}$

56. $\frac{a}{a^2 - a - 20} + \frac{2}{a + 4}$

57. $\frac{x}{x + 1} + \frac{3}{x^2 - 4x - 5}$

حلّ كل معادلة.

58. $\log_{10}(x^2 + 1) = 1$

59. $\log_b 64 = 3$

60. $\log_b 121 = 2$

حوّل لأبسط صورة.

61. $-5ab^2(-3a^2b + 6a^3b - 3a^4b^4)$

62. $2xy(3xy^3 - 4xy + 2y^4)$

63. $(4x^2 - 3y^2 + 5xy) - (8xy + 3y^2)$

64. $(10x^2 - 3xy + 4y^2) - (3x^2 + 5xy)$

مراجعة المهارات

جد معادلة الخط المار بكل زوج من النقاط.

65. $(-2, 5)$ و $(3, 1)$

66. $(7, 1)$ و $(7, 8)$

67. $(-3, 5)$ و $(2, 2)$

اختبار منتصف الوحدة

الدروس من 6-1 إلى 6-3

6
الوحدة

حدد إحداثيات الرأس والبؤرة ومعادلة محور التماثل والدليل واتجاه الفتحه للقطع المكافئ بالمعادلة المعطاة. ثم جد طول الوتر البؤري العمودي. (الدرس 6-1)

6. $y = x^2 + 6x + 5$

7. $x = -2y^2 + 4y + 1$

8. جد مركز ونصف قطر دائرة معادلتها $(x - 1)^2 + y^2 = 9$. ثم مثل الدائرة بيانيًا. (الدرس 6-2)

9. اكتب معادلة دائرة يقع مركزها عند $(3, -2)$ وتمر بالنقطة $(3, 4)$. (الدرس 6-2)

10. اكتب معادلة دائرة النقطتان الطرفيتان لقطرها هما $(8, 31)$ و $(32, 49)$. (الدرس 6-2)

11. الاختيار من متعدد ما نصف قطر دائرة معادلتها $x^2 + 2x + y^2 + 14y + 34 = 0$ ؟ (الدرس 6-2)

2 A

4 B

8 C

16 D

جد إحداثيات المركز والبؤرتين وطولي المحورين الأكبر والأصغر لقطع ناقص بالمعادلة المعطاة. ثم مثل القطع الناقص بيانيًا. (الدرس 6-3)

12. $\frac{(x + 4)^2}{16} + \frac{(y - 2)^2}{9} = 1$

13. $\frac{(x - 1)^2}{20} + \frac{(y + 2)^2}{4} = 1$

14. $4y^2 + 9x^2 + 16y - 90x + 205 = 0$

15. الاختيار من متعدد أي معادلة تمثل قطعًا ناقصًا تقع النقطتان الطرفيتان لمحوره الأكبر عند $(-4, 10)$ و $(-4, -6)$ وبؤراته النقطتين $(-4, 7.3)$ و $(-4, -3.3)$ تقريبًا؟ (الدرس 6-3)

F $\frac{(x - 2)^2}{36} + \frac{(y + 4)^2}{64} = 1$

G $\frac{(x + 4)^2}{64} + \frac{(y - 2)^2}{36} = 1$

H $\frac{(y - 2)^2}{64} + \frac{(x + 4)^2}{36} = 1$

J $\frac{(x - 2)^2}{64} + \frac{(y + 4)^2}{36} = 1$

اكتب كل معادلة بالصيغة القياسية. حدد رأس القطع المكافئ ومحور تماثله واتجاه فتحته. (الدرس 6-1)

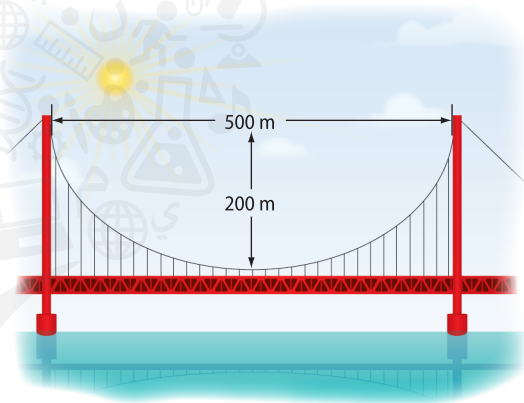
1. $y = 3x^2 - 12x + 21$

2. $x - 2y^2 = 4y + 6$

3. $y = \frac{1}{2}x^2 + 12x - 8$

4. $x = 3y^2 + 5y - 9$

5. الجسور اكتب معادلة قطع مكافئ لتمثيل شكل كابل تعليق الجسر الموضح. افترض أن نقطة الأصل عند النقطة الأكثر انخفاضًا بالكابلات. (الدرس 6-1)



القطع الزائد

4-6

السابق

الحالي

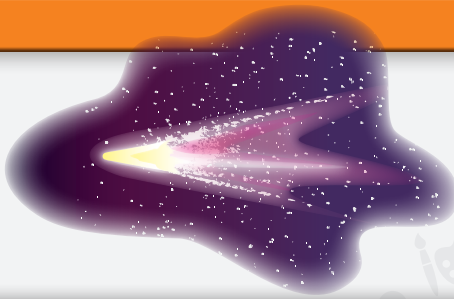
لماذا؟

تمثيل معادلات القطوع الناقصة بيانيًا وتحليلها.

1 كتابة معادلات القطوع الزائدة.

2 تمثيل القطوع الزائدة بيانيًا. w

نظرًا لأن مذنب هالي يدور حول الشمس في مسار على شكل قطع ناقص، فإنه يظهر في سمائنا. تمر المذنبات الأخرى عبر سمائنا مرة واحدة فقط. يسير العديد من هذه المذنبات في مسارات تشبه القطع الزائد.



مفردات جديدة

قطع زائد hyperbola

محور قاطع transverse axis

محور مرافق conjugate axis

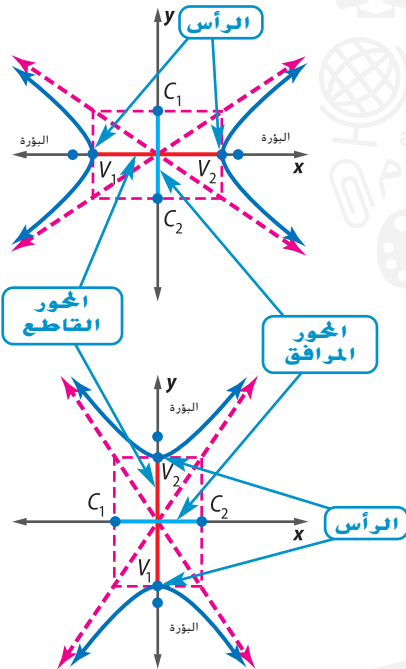
بؤرتان foci

رؤوس vertices

رؤوس مرافقة co-vertices

فرق ثابت constant difference

ممارسات في الرياضيات
6 مراعاة الدقة.



1 معادلات القطع الزائد على غرار

القطع الناقص. **القطع الزائد** هو مجموعة جميع النقاط في مستوى بحيث تكون القيمة المطلقة لفرق المسافتين من البؤرتين ثابتة.

لكل قطع زائد محورا تماثل. **محور قاطع** و**محور مرافق**. المحوران متعامدان عند مركز القطع الزائد.

تقع **البؤرتان** للقطع الزائد دائمًا على المحور القاطع. **الرأسان** هما النقطتان الطرفيتان للمحور القاطع. **الرأسان المرافقتان** هما النقطتان الطرفيتان للمحور المرافق.

بينما ينحسر القطع الزائد عند المركز، يقترب النصفان من خطي التقارب.

المفهوم الأساسي صور معادلات القطع الزائد التي يقع مركزها عند نقطة الأصل

$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	الصيغة القياسية
رأسي	أفقي	الاتجاه
$(0, \pm c)$	$(\pm c, 0)$	البؤرتان
$2a$ وحدات	$2a$ وحدات	طول المحور القاطع
$2b$ وحدات	$2b$ وحدات	طول المحور المرافق
$y = \pm \frac{a}{b}x$	$y = \pm \frac{b}{a}x$	معادلات خطي التقارب

كما هو الحال مع القطوع الناقصة، هناك العديد من العلاقات الهامة بين أجزاء القطوع الزائدة.

• يوجد محورا تماثل.

• ترتبط القيم a و b و c بواسطة المعادلة $c^2 = a^2 + b^2$.

المفهوم الأساسي صور معادلات القطوع الزائدة التي يقع مركزها عند (h, k)

الصيغة القياسية	$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$	$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$
الاتجاه	أفقي	رأسي
البؤرتان	$(h \pm c, k)$	$(h, k \pm c)$
الرؤوس	$(h \pm a, k)$	$(h, k \pm a)$
الرؤوس المرافقة	$(h, k \pm b)$	$(h \pm b, k)$
معادلات خطي التقارب	$y - k = \pm \frac{b}{a}(x - h)$	$y - k = \pm \frac{a}{b}(x - h)$

مثال 3 التمثيل البياني للقطع الزائد

مثال 1 $\frac{(x-3)^2}{4} - \frac{(y+2)^2}{16} = 1$ بيانياً. حدّد الرأسين والبؤرتين وخطي التقارب.

الخطوة 1 جد المركز. يقع المركز عند النقطة $(3, -2)$.

الخطوة 2 حدد a و b و c . من المعادلة. $a^2 = 4$ و $b^2 = 16$ ، إذا $a = 2$ و $b = 4$.

$c^2 = a^2 + b^2$ بالقطع الزائد c و b و a معادلة تربط.

$c^2 = 2^2 + 4^2$ $a = 2, b = 4$

$c^2 = 20$ بسط.

$c = \sqrt{20}$ أو 4.47 تقريباً. احسب الجذر التربيعي لكل طرف.

الخطوة 3 حدّد الرأسين والبؤرتين. القطع الزائد أفقي ويقع الرأسان على بُعد وحدتين من

المركز. إذا يقع الرأسان عند $(1, -2)$ و $(5, -2)$.

تقع البؤرتان على مسافة 4.47 وحدات تقريباً من المركز.

تقع البؤرتان عند $(-1.47, -2)$ و $(7.47, -2)$.

الخطوة 4 حدد خطي التقارب.

معادلة خطي التقارب لقطع زائد أفقي

$y - (-2) = \pm \frac{4}{2}(x - 3)$ $a = 2$ و $b = 4$ و $h = 3$ و $k = -2$

معادلنا خطي التقارب هما $y = -2x + 4$ و $y = 2x - 8$.

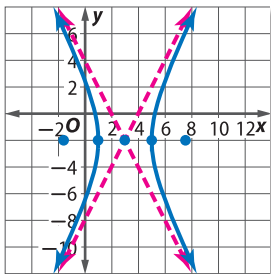
الخطوة 5 مثل القطع الزائد بيانياً. القطع الزائد متمائل حول المحورين

القاطع والمرافق. استخدم هذا التماثل لتحديد نقاط إضافية

للقطع الزائد.

استخدم خطي التقارب كدليل لرسم القطع الزائد المار

بالرأسين والنقاط الأخرى.



تمرين موجّه

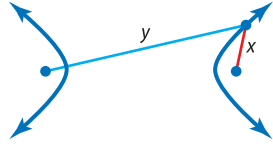
3. مثال $\frac{(y-4)^2}{9} - \frac{(x+3)^2}{25} = 1$ بيانياً. حدّد الرأسين والبؤرتين وخطي التقارب.

نصيحة دراسية

الحاسبة يمكنك تمثيل قطع زائد بيانياً على حاسبة تمثيل بياني من خلال إيجاد y . ثم تمثيل المعادلتين بيانياً على الشاشة ذاتها.

في معادلة أي قطع زائد، تمثل قيمة $2a$ **الفرق الثابت**.

هذه هي القيمة المطلقة للفرق بين المسافتين من أي نقطة على القطع الزائد وبؤرتيه.



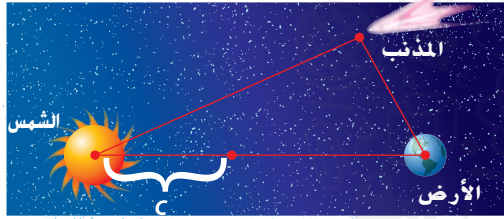
أي نقطة على القطع الزائد الموضح لها نفس الفرق الثابت، $|y - x|$ أو $2a$.

مثال من الحياة اليومية 4 كتابة معادلة قطع زائد

الفضاء تبعد الأرض عن الشمس بمسافة 146 مليون كيلومتر. يتبع المذنب مسارًا يشبه فرعًا من قطع زائد. افترض أن المسافة بين المذنب والشمس أكبر من المسافة بين المذنب والأرض بمقدار 30 مليون كيلومتر. حدد معادلة القطع الزائد الذي يقع مركزه عند نقطة الأصل لمسار المذنب.

الفهم علينا تحديد معادلة القطع الزائد.

التخطيط جد المركز وقيمتي a و b . عند الحصول على هذه المعلومات، يمكن تحديد المعادلة.



الحل البؤرتان هما الأرض والشمس. ونقطة الأصل بينهما.

قيمة c هي 73 أو $146 \div 2$

الفرق بين المسافتين من المذنب إلى كل جسم هي 30. إذا، a تساوي 2 أو $30 \div 2$ أو 15 مليون كيلومتر.

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad \text{بالتقطع الزائد } c \text{ و } b \text{ و } a \text{ معادلة تربط}$$

$$73^2 = 15^2 + b^2 \quad a = 15 \text{ و } c = 73$$

$$5104 = b^2 \quad \text{بسّط}$$

$$\frac{x^2}{225} - \frac{y^2}{5104} = 1 \quad \text{معادلة القطع الزائد هي}$$

حيث إن المسافة من المذنب إلى الشمس أكبر، فهو يقع على فرع القطع الزائد القريب من الأرض.

التحقق (21, 70) نقطة تحقق المعادلة.

المسافة بين هذه النقطة والشمس (-73, 0) هي

$$\sqrt{[21 - (-73)]^2 + (70 - 0)^2} \quad \text{أو } 117.2 \text{ مليون كيلومتر.}$$

المسافة بين هذه النقطة والأرض (73, 0) هي

$$\sqrt{(21 - 73)^2 + (70 - 0)^2} \quad \text{أو } 87.2 \text{ مليون كيلومتر}$$

الفرق بين المسافتين 30. ✓

تعزيز موجّه

4. **البحث والإنتاذه** تتلقى محطتا استقبال المسافة بينهما 150 km إشارة من طائرة سقطت. ثم تحديد

المسافة بين الطائرة والمحطة A وكانت أكبر من المسافة بين الطائرة والمحطة B بمقدار 80 km.

حدد معادلة القطع الزائد الذي يقع مركزه عند نقطة الأصل لموقع الطائرة.

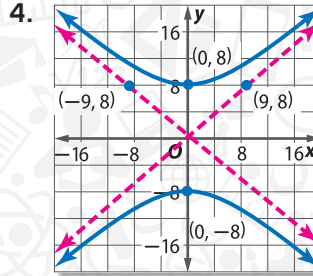
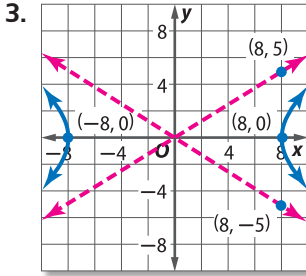
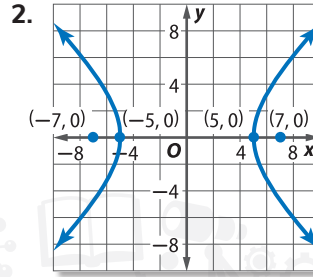
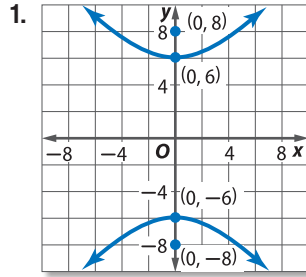
نصيحة دراسية

المواقع الدقيقة من الضروري

تواجد محطة استقبال ثالثة

لتحديد موقع الطائرة بدقة.

المثالان 1-2 اكتب معادلة لكل قطع زائد.



مثال 3

البنية

مثّل كل قطع زائد بيانياً. حدّد الرأسين والبؤرتين وخطي التقارب.

5. $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{49} = 1$

6. $\frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{60} = 1$

7. $9y^2 + 18y - 16x^2 + 64x - 199 = 0$

8. $4x^2 + 24x - y^2 + 4y - 4 = 0$

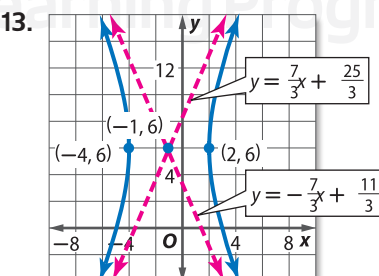
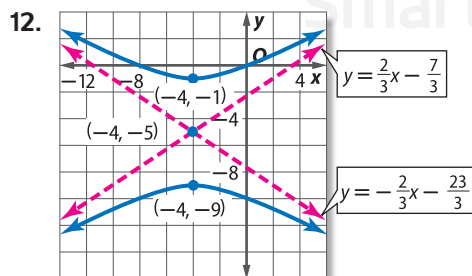
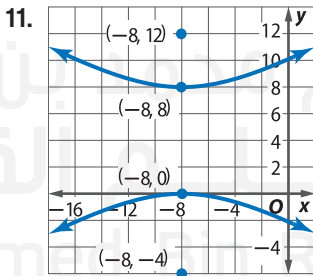
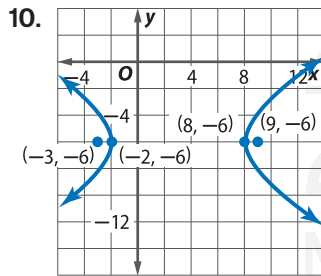
مثال 4

الملاحظة

افترض أن سفينةً توصلت إلى أن الفرق في بعدها عن محطتين يساوي 60 ميلاً بحرياً. اكتب معادلة القطع الزائد الذي تقع عليه السفينة إذا علمت أن المحطتين تقعان عند النقطتين $(80, 0)$ و $(-80, 0)$.

التمرين وحل المسائل

المثالان 1-2 اكتب معادلة لكل قطع زائد.



مثال 3 مثل كل قطع زائد بيانياً. حدّد الرأسين والبؤرتين وخطي التقارب

$$14. \frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{4} = 1$$

$$15. \frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{49} = 1$$

$$16. \frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{25} = 1$$

$$17. \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{16} = 1$$

$$18. \frac{(x-3)^2}{16} - \frac{(y+1)^2}{4} = 1$$

$$19. \frac{(y+5)^2}{16} - \frac{(x+2)^2}{36} = 1$$

$$20. 9y^2 - 4x^2 - 54y + 32x - 19 = 0$$

$$21. 16x^2 - 9y^2 + 128x + 36y + 76 = 0$$

$$22. 25x^2 - 4y^2 - 100x + 48y - 144 = 0$$

$$23. 81y^2 - 16x^2 - 810y + 96x + 585 = 0$$

24. **الملاحه** افترض أن سفينةً توصلت إلى أن الفرق في بعدها عن محطتين يساوي 80 ميلاً بحرياً. اكتب معادلة القطع الزائد الذي تقع عليه السفينة إذا علمت أن المحطتين تقعان عند النقطتين $(-100, 0)$ و $(100, 0)$.

مثال 4

حدد ما إذا كانت كل من المعادلات التالية تمثل قطعاً ناقصاً أم قطعاً زائداً.

$$25. 4x^2 = 5y^2 + 6$$

$$26. 8x^2 - 2x = 8y - 3y^2$$

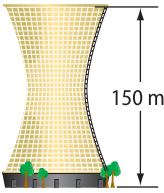
$$27. -5x^2 + 4x = 6y + 3y^2$$

$$28. 7y - 2x^2 = 6x - 2y^2$$

$$29. 6x - 7x^2 - 5y^2 = 2y$$

$$30. 4x + 6y + 2x^2 = -3y^2$$

31. **الفضاء** راجع التطبيق في بداية الدرس. عندما تمثل الشمس إحدى البؤرتين ويقع المركز عند نقطة الأصل، يتبع مسار مذنب معين فرعاً من قطع زائد. إذا كان زوج إحداثيات المسار هو $(10, 0)$ و $(30, 100)$ حيث الوحدات بالمليون كيلومتر، فحدد معادلة المسار.



32. **التبريد** يتم بناء أبراج التبريد بتيارات الهواء الطبيعية على شكل قطوع زائدة للمزيد من كفاءة تبريد مصانع الطاقة. يمكن تمثيل القطع المكافئ للبرج الموضح بواسطة $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{225} = 1$ ، حيث الوحدات بالمتر. جد عرض البرج عند القمة وعند أضيق نقطة في المنتصف.

33. **التمهيلات المتعددة** فكّر في $xy = 16$.

a. **جدولياً** قم بعمل جدول قيم للمعادلة $-12 \leq x \leq 12$.

b. **بيانياً** مثل بيانياً القطع الزائد الممثل بالمعادلة.

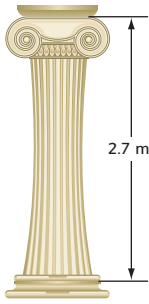
c. **منطقياً** حدد خطي التقارب للقطع الزائد ومثلها بيانياً.

d. **تحليلياً** ما الخاصية الفريدة التي يمكن ملاحظتها بشأن خطي التقارب؟ القطوع الزائدة التي تمثل هذه الخاصية تُسمى القطوع الزائدة المستطيلة.

e. **تحليلياً** بدون أي حسابات، باعتقادك ماذا ستكون إحداثيات الرأسين لكل من $xy = 25$ و $xy = 36$ ؟

34. **استخدام النماذج** تتلقى محطتا استقبال المسافة بينهما 250 mi إشارة من طائرة سقطت. تم تحديد المسافة بين الطائرة والمحطة B وكانت أكبر من المسافة بين الطائرة والمحطة A بمقدار 70 mi. حدد معادلة القطع الزائد الأفقي الذي يقع مركزه عند نقطة الأصل لموقع الطائرة.

35. **الطقس** يبعد منزل فاطمة عن منزل عائشة بمسافة 4000 ft بالضبط. أثناء التحدث عبر الهاتف وكل منهما في منزلها، سمعت فاطمة صوت الرعد من النافذة وسمعت عائشة من نافذة منزلها بعد 3 s. إذا علمت أن سرعة الصوت 1100 ft/s، فحدد معادلة القطع الزائد الأفقي لموقع البرق.



36. **الهندسة المعمارية** كانت الأعمدة الضخمة ذات المقاطع العرضية على شكل قطوع زائدة شائعة في اليونان القديمة. يمكن تمثيل المنحنيات بواسطة المعادلة $\frac{x^2}{0.16} - \frac{y^2}{4} = 1$ ، حيث الوحدات

بالمتر. إذا علمت أن طول الأعمدة 9 m، فجد عرض كل عمود عند القمة وعند أضيق نقطة في المنتصف. قَرِّب إلى أقرب جزء من المئة من المتر.

اكتب معادلة للقطع الزائد الذي يحقق كل مجموعة من الشروط.

37. الرأسان $(-8, 0)$ و $(8, 0)$ ، وطول المحور المرافق 20 وحدة

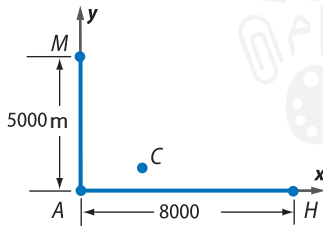
38. الرأسان $(0, -6)$ و $(0, 6)$ ، وطول المحور المرافق 24 وحدة

39. الرأسان $(6, -2)$ و $(-2, -2)$ ، والبؤرتان $(10, -2)$ و $(-6, -2)$

40. الرأسان $(-3, 4)$ و $(-3, -8)$ ، والبؤرتان $(-3, 9)$ و $(-3, -13)$

41. يقع المركز عند نقطة الأصل وطول المحور القاطع الأفقي 10 وحدات وطول المحور المرافق 4 وحدات

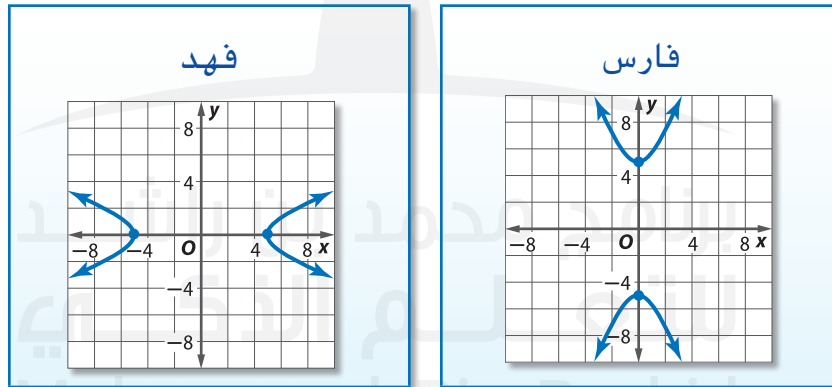
42. يقع المركز عند نقطة الأصل وطول المحور القاطع الرأسي 16 وحدة وطول المحور المرافق 12 وحدة



43. **التثليث** أثناء بحث أحمد ومحمد وحديد عن قطعتهم المفقودة في الغابة، سمعوا صوت مواء. سمعه محمد بعد أحمد بثانيتين وسمعه حميد بعد أحمد بثلاث ثوانٍ. إذا علمت أن أحمد عند نقطة الأصل وأن سرعة الصوت 1100 m/s، فحدد الموقع الدقيق للنقطة.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

44. **التفكير النقدي** يمثل فارس وفهد بياناً $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{25} = 1$ فهل أيٌّ منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.



45. **التحدي** تقع نقطة الأصل على قطع زائد أفقي. خطا التقارب للقطع الزائد هما $y = x - 5$ و $y = -x + 1$. جد معادلة القطع الزائد.

46. **التبرير** ماذا يحدث لموقع البؤرتين لقطع زائد بينما تتناقص قيمة a باستمرار عن قيمة b ؟ اشرح استنتاجك.

47. **الاستنتاج** فكّر في $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{16} = 1$ صف التغير في شكل القطع الزائد ومواقع الرأسين والبؤرتين إذا تغيرت 36 إلى 9. اشرح سبب حدوث ذلك.

48. **مسألة غير محددة الإجابة** اكتب معادلة لقطع زائد تقع إحدى بؤرتيه عند نقطة الأصل.

49. **الكتابة في الرياضيات** لماذا تكثر استخدام قطع مخروطي لتمثيل مجموعة من البيانات بدلاً من دالة كثيرة الحدود؟

تمرين على الاختبار المعياري

52. إجابة قصيرة طول مستطيل 8 m وعرضه 6 m. إذا تمّت زيادة كل بُعد بنفس العدد من الأقدام، فسوف تصبح مساحة المستطيل الجديد أكبر من مساحة المستطيل الأصلي بمقدار 32 m^2 . فما مقدار زيادة كل بُعد بالأمتار؟

53. SAT/ACT عند التمثيل البياني للمعادلة $y = 4x^2 - 5$ في المستوى الإحداثي، أي مما يلي هو التمثيل البياني؟

- A مستقيم
B دائرة
C قطع ناقص
D قطع زائد
E قطع مكافئ

50. لديك قطع نقد معدنية من فئة 10 فلس أكثر من العملات فئة 25 فلس بمقدار 6. لديك إجمالاً AED 8.25. كم عدد العملات من فئة 10 فلس الموجودة لديك؟

- A 19
B 16
C 13
D 25

51. ما طول شجرة أقصر بمقدار 15 cm من عمود طوله ثلاثة أمثال طول الشجرة؟

- F 24.5 cm
G 22.5 cm
H 21.5 cm
J 7.5 cm

مراجعة شاملة

اكتب معادلة القطع الناقص الذي يحقق كل مجموعة من الشروط. (الدرس 3-6)

54. النقطتان الطرفيتان للمحور الأكبر عند $(2, 2)$ و $(2, -10)$. والنقطتان الطرفيتان للمحور الأصغر عند $(0, -4)$ و $(4, -4)$

55. النقطتان الطرفيتان للمحور الأكبر عند $(0, 10)$ و $(0, -10)$. والنقطتان الطرفيتان للمحور الأصغر عند $(0, 8)$ و $(0, -8)$

جد مركز ونصف قطر دائرة بالمعادلة المعطاة. ثم مثل الدائرة بيانياً. (الدرس 2-6)

56. $(x - 3)^2 + y^2 = 16$

57. $x^2 + y^2 - 6y - 16 = 0$

58. $x^2 + y^2 + 9x - 8y + 4 = 0$

59. كرة السلة تلعب وفاء كرة السلة لصالح فريق المدرسة الثانوية. حتى الآن في هذا الموسم، أحرزت 6 رميات حرة من أصل 10. وهي عازمة على تحسين نسبة إحراز الرميات الحرة. إذا كان بإمكانها إحراز x من الرميات الحرة المتتالية.

a. مثل الدالة بيانياً.

b. أي جزء من التمثيل البياني يعتبر ذو معنى في سياق المسألة؟

c. صف معنى التقاطع مع المحور y .

d. ما معادلة خط التقارب الأفقي؟ اشرح معناه فيما يتعلق بنسبة أهداف وفاء.

حلّ كل من المعادلات التالية.

60. $\left(\frac{1}{7}\right)^{y-3} = 343$

61. $10^x - 1 = 100^{2x-3}$

62. $36^{2p} = 216^{p-1}$

مثل كل متباينة بيانياً.

63. $y \geq \sqrt{5x-8}$

64. $y \geq \sqrt{x-3} + 4$

65. $y < \sqrt{6x-2} + 1$

مراجعة المهارات

66. اكتب معادلة قطع مكافئ رأسه عند نقطة الأصل ويمر بالنقطة $(2, -8)$

67. اكتب معادلة قطع مكافئ رأسه النقطة $(-3, -4)$ ومفتوح للأعلى وتقاطع مع المحور y هو 8.

تحديد القطوع المخروطية

5-6

السابق

الحالي

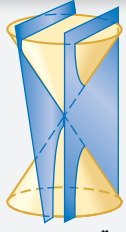
لماذا؟

تحليل القطوع المخروطية المختلفة.

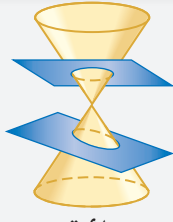
1 كتابة معادلات القطوع المخروطية بالصيغة القياسية.

2 تحديد القطوع المخروطية من خلال معادلاتها.

القطع المكافئ والدائرة والقطع الناقص والقطع الزائد يُطلق عليها القطوع المخروطية لأنها المقاطع العرضية التي تتشكل عندما يقطع مستوى مخروطًا مزدوجًا.



قطع زائد



دائرة
وقطع ناقص



قطع مكافئ

مهارسات في الرياضيات

3 بناء فرضيات عملية والتعليق على طريقة استنتاج الآخرين.

8 البحث عن التوافق في الاستنتاجات المتكررة والتعبير عن ذلك.

1 **القطوع المخروطية بالصيغة القياسية** يمكن كتابة معادلة أي قطع مخروطي بالصيغة $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$. حيث A و B و C غير أصفار جميعًا. يمكن تحويل هذه الصيغة العامة إلى الصيغ القياسية أدناه من خلال إكمال المربع.

ملخص المفهوم الصيغ القياسية لمعادلات القطوع المخروطية

الصيغة القياسية للمعادلة	قطع مخروطي
$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$	دائرة
محور رأسي $y = a(x - h)^2 + k$	قطع مكافئ
محور أفقي $x = a(y - k)^2 + h$	قطع ناقص
$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$	قطع ناقص
$\frac{(x - h)^2}{a^2} - \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$	قطع زائد

مثال 1 إعادة كتابة معادلة قطع مخروطي

اكتب $16x^2 - 25y^2 - 128x - 144 = 0$ بالصيغة القياسية. اذكر إن كان التمثيل البياني للمعادلة قطعًا مكافئًا أو دائرة أو قطعًا ناقصًا أو قطعًا زائدًا. ثم مثل المعادلة بيانيًا.

$$16x^2 - 25y^2 - 128x - 144 = 0$$

$$16(x^2 - 8x + \blacksquare) - 25y^2 = 144 + 16(\blacksquare)$$

$$16(x^2 - 8x + 16) - 25y^2 = 144 + 16(16)$$

$$16(x - 4)^2 - 25y^2 = 400$$

$$\frac{(x - 4)^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$$

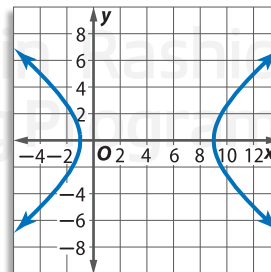
المعادلة الأصلية

اعزل الحدود.

أكمل المربع.

مربع كامل

اقسم كل طرف على 400.



التمثيل البياني قطع زائد مركزه النقطة (4, 0).

تمرين موجّه

1. اكتب $4x^2 + y^2 - 16x + 8y - 4 = 0$ بالصيغة القياسية. اذكر إن كان التمثيل البياني للمعادلة قطعًا مكافئًا أو دائرة أو قطعًا ناقصًا أو قطعًا زائدًا. ثم مثل المعادلة بيانيًا.

مراجعة المفردات
المميز التعبير $b^2 - 4ac$ من القانون العام

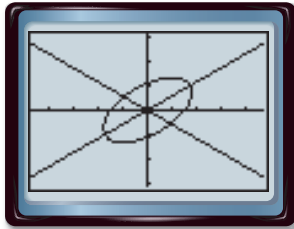
2 تحديد القطوع المخروطية يمكنك تحديد نوع المخروط دون الحاجة إلى كتابة $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ بالصيغة القياسية. عندما يكون هناك حد xy حيث $(B \neq 0)$ ، يمكنك استخدام المميز. $B^2 - 4AC$ هو مميز $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

ملخص المفهوم تصنيف القطوع المخروطية باستخدام المميز

المميز	القطع المخروطي
$B^2 - 4AC < 0$; $B = 0$ و $A = C$	دائرة
$B^2 - 4AC < 0$; $B \neq 0$ أو $A \neq C$	قطع ناقص
$B^2 - 4AC = 0$; $B = 0$ و $A = C$	قطع مكافئ
$B^2 - 4AC > 0$; $B \neq 0$ و $A \neq C$	قطع زائد

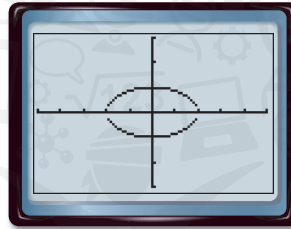
عندما يكون $B = 0$ ، يكون المخروط رأسياً أو أفقياً. عندما يكون $B \neq 0$ ، لا يكون المخروط رأسياً ولا أفقياً.

قطع ناقص مُدار: $B \neq 0$



$$7x^2 - 6\sqrt{3}xy + 13y^2 - 16 = 0$$

قطع ناقص أفقي: $B = 0$



$$x^2 + 4y^2 - 4 = 0$$

مثال 2 تحليل معادلة قطع مخروطي

بدون كتابة كل معادلة بالصيغة القياسية، اذكر إن كان التمثيل البياني لها قطعاً مكافئاً أو دائرة أو قطعاً ناقصاً أو قطعاً زائداً.

a. $y^2 + 4x^2 - 3xy + 4x - 5y - 8 = 0$

$A = 4$ و $B = -3$ و $C = 1$

المميز هو -7 أو $(-3)^2 - 4(4)(1)$.

لأن المميز أقل من 0 و $B \neq 0$ ، فالمخروط قطع ناقص.

b. $3x^2 - 6x + 4y - 5y^2 + 2xy - 4 = 0$

$A = 3$ و $B = 2$ و $C = -5$

المميز هو 64 أو $2^2 - 4(3)(-5)$.

لأن المميز أكبر من 0، فالمخروط قطع زائد.

c. $4y^2 - 8x + 6y - 14 = 0$

$A = 0$ و $B = 0$ و $C = 4$

المميز هو 0 أو $0^2 - 4(0)(4)$.

لأن المميز يساوي 0، فالمخروط قطع مكافئ.

تمرين موجّه

2A. $8y^2 - 6x^2 + 4xy - 6x + 2y - 4 = 0$

2B. $3xy + 4x^2 - 2y + 9x - 3 = 0$

2C. $3x^2 + 16x - 12y + 2y^2 - 6 = 0$

نصيحة دراسية

لتحديد القطوع

المخروطية في حالة عدم وجود الحد xy

($B = 0$). استخدم A و C .

قطع مكافئ: A أو $C = 0$

لكن ليس كلاهما.

دائرة: $A = C$

قطع ناقص: A و C لهما نفس

الاشارة لكن ليسا متساويين.

قطع زائد: A و C لهما

علامتان متضادتان.

مثال 1 اكتب كل معادلة بالصيغة القياسية. اذكر إن كان التمثيل البياني للمعادلة قطعًا مكافئًا أو دائرة أو قطعًا ناقصًا أو قطعًا زائدًا. ثم مثل المعادلة بيانيًا.

1. $x^2 + 4y^2 - 6x + 16y - 11 = 0$
2. $x^2 + y^2 + 12x - 8y + 36 = 0$
3. $9y^2 - 16x^2 - 18y - 64x - 199 = 0$
4. $6y^2 - 24y + 28 - x = 0$

مثال 2 بدون كتابة كل معادلة بالصيغة القياسية، اذكر إن كان التمثيل البياني لها قطعًا مكافئًا أو دائرة أو قطعًا ناقصًا أو قطعًا زائدًا.

5. $4x^2 + 6y^2 - 3x - 2y = 12$
6. $5y^2 = 2x + 6y - 8 + 3x^2$
7. $8x^2 + 8y^2 + 16x + 24 = 0$
8. $4x^2 - 6y = 8x + 2$
9. $4x^2 - 3y^2 + 8xy - 12 = 2x + 4y$
10. $5xy - 3x^2 + 6y^2 + 12y = 18$
11. $8x^2 + 12xy + 16y^2 + 4y - 3x = 12$
12. $16xy + 8x^2 + 8y^2 - 18x + 8y = 13$

13. **استخدام النماذج** تشارك مقاتلة نفائة في عرض جوي. يمكن تمثيل مسار الطائرة خلال إحدى المناورات بقطع مخروطي معادلته $24x^2 + 1000y - 31,680x - 45,600 = 0$. حيث يتم تمثيل المسافات بالقدم

a. حدد شكل المسار المنحني للطائرة النفائة. اكتب المعادلة بالصيغة القياسية.

b. إذا بدأت الطائرة النفائة مسارها لأعلى عند $x = 0$. فما المسافة الأفقية التي قطعها الطائرة من بداية التسلق لنهاية الهبوط؟

c. ما أقصى ارتفاع للطائرة؟

التمرين وحل المسائل

مثال 1 اكتب كل معادلة بالصيغة القياسية. اذكر إن كان التمثيل البياني للمعادلة قطعًا مكافئًا أو دائرة أو قطعًا ناقصًا أو قطعًا زائدًا. ثم مثل المعادلة بيانيًا.

14. $3x^2 - 2y^2 + 18x + 8y - 35 = 0$
15. $3x^2 + 24x + 4y^2 - 40y + 52 = 0$
16. $x^2 + y^2 = 16 + 6y$
17. $32x + 28 = y - 8x^2$
18. $7x^2 - 8y = 84x - 2y^2 - 176$
19. $x^2 + 8y = 11 + 6x - y^2$
20. $4y^2 = 24y - x - 31$
21. $112y + 64x = 488 + 7y^2 - 8x^2$
22. $28x^2 + 9y^2 - 188 = 56x - 36y$
23. $25x^2 + 384y - 64y^2 + 200x = 1776$

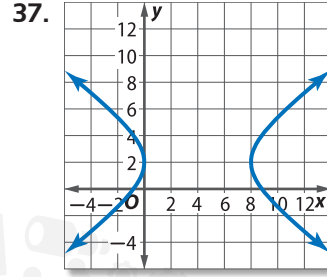
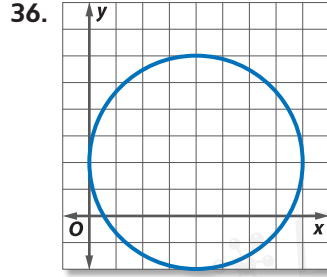
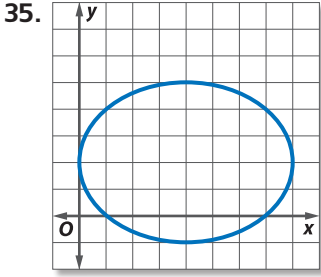
مثال 2 بدون كتابة كل معادلة بالصيغة القياسية، اذكر إن كان التمثيل البياني لها قطعًا مكافئًا أو دائرة أو قطعًا ناقصًا أو قطعًا زائدًا.

24. $4x^2 - 5y = 9x - 12$
25. $4x^2 - 12x = 18y - 4y^2$
26. $9x^2 + 12y = 9y^2 + 18y - 16$
27. $18x^2 - 16y = 12x - 4y^2 + 19$
28. $12y^2 - 4xy + 9x^2 = 18x - 124$
29. $5xy + 12x^2 - 16x = 5y + 3y^2 + 18$
30. $19x^2 + 14y = 6x - 19y^2 - 88$
31. $8x^2 + 20xy + 18 = 4y^2 - 12 + 9x$
32. $5x - 12xy + 6x^2 = 8y^2 - 24y - 9$
33. $18x - 24y + 324xy = 27x^2 + 3y^2 - 5$

34. **الإضاءة** يوجد مصباح بالقرب من جدار ويلقي بقوس من الضوء على شكل قطع مخروطي. افترض أنه يمكن تمثيل حافة الضوء بواسطة المعادلة $3y^2 - 2y - 4x^2 + 2x - 8 = 0$. حدد شكل حافة الضوء ومثل المعادلة بيانيًا.

صل كل تمثيل بياني بالمعادلة المقابلة له.

a. $x^2 + y^2 - 8x - 4y = -4$ b. $9x^2 - 16y^2 - 72x + 64y = 64$ c. $9x^2 + 16y^2 = 72x + 64y - 64$



للتمارين 38-41، صل كل موقف بمعادلة يمكن أن تمثله.

a. $47.25x^2 - 9y^2 + 18y + 33.525 = 0$ b. $25x^2 + 100y^2 - 1900x - 2200y + 45,700 = 0$
c. $16x^2 - 90x + y - 0.25 = 0$ d. $x^2 + y^2 - 18x - 30y - 14,094 = 0$

38. **أجهزة الحاسوب** حدود شبكة لاسلكية مداها 120 ft

39. **اللياقة البدنية** المسار البيضاوي لقدمك على آلة تمارين

40. **الاتصالات** موضع هاتف جوال بين برجين خلويين

41. **رياضة** ارتفاع كرة فوق الأرض بعد ركلها

42. **الاستنتاج المنطقي** الكابلات في جسر معلق على شكل قطع مكافئ تقريبًا. إذا كانت المسافة بين أبراج جسر قيد التخطيط هي 1000 m وأدنى نقطة لكابلات التعليق هي 200 m تحت قمة الأبراج، فاكتب المعادلة بالصيغة القياسية واتخذ الرأس كنقطة أصل.

43. **التمثيلات المتعددة** فُكر في قطع ناقص مركزه $(-2, 3)$ ورأسه $M(-1, -2)$ ورأسه المرافق $N(3, -4)$.

a. **تحليليًا** حدد الصيغة القياسية لمعادلة القطع الناقص.

b. **جبريًا** حوّل الجزء a إلى الصيغة $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

c. **بيانيًا** مثل القطع الناقص بيانيًا.

d. **تحليليًا** إذا تم تدوير القطع الناقص بحيث يتم نقل M إلى $(-3, 6)$ ، فحدد موقع N وزاوية الدوران.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

44. **التحدي** عندما يمر مستوى عبر رأس مخروط، يتشكل مخروط منحسر.

a. حدد نوع المخروط الذي تمثله $4x^2 + 8y^2 = 0$

b. مثل المخروط بيانيًا.

c. صف الفرق بين هذا المخروط المنحسر ومخروط قياسي من نفس النوع حيث $A = 4$ و $B = 8$.

45. **الاستنتاج** هل العبارة التالية أحيانًا أم دائمًا أم مطلقًا صحيحة؟ اشرح.

إذا كان المخروط رأسيًا وقيمة $A = C$ ، فهو دائرة.

46. **مسألة غير محددة الإجابة** اكتب معادلة بالصيغة $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ حيث $A = 9C$ ، والتي تمثل قطعًا مكافئًا.

47. **الكتابة في الرياضيات** قارن وبين الفرق بين التمثيلات البيانية لأربعة أنواع من المخروطات والمعادلات المناظرة لها.

48. SAT/ACT خضع صف دراسي من 25 طالبًا لاختبار في مادة العلوم. حصل 10 طلاب على متوسط درجات 80. وحصل باقي الطلاب على متوسط درجات 60. ما متوسط درجات الصف بأكمله؟

- A 66 D 72
B 68 E 78
C 70

49. ستة أضعاف عدد ناقص 11 هو 43. فما العدد؟

- F 12
G 11
H 10
J 9

50. إجابة موسعة يمكن تمثيل كمية المياه المتبقية في خزان أثناء تصريفها بواسطة المعادلة $L = -4t^2 - 10t + 130$. حيث يمثل L عدد لترات المياه المتبقية ويمثل t الدقائق من بدء التصريف. كم كان عدد لترات المياه في الخزان في البداية؟ قَرِّب إلى أقرب جزء من عشرة من الدقيقة للوقت اللازم لتصريف المياه من الخزان تمامًا.

51. لدى أحمد قطعة مربعة من الورق طول كل ضلع 4 in. صنع أحمد من الورقة لفافة على شكل أسطوانة. فما حجم الأسطوانة؟

- A $\frac{4}{\pi}$ C 4π
B $\frac{16}{\pi}$ D 16π

مراجعة شاملة

52. علم الفلك افترض أنه يمكن تمثيل مسار مذنب بواسطة فرع قطع زائد معادلته $\frac{y^2}{225} - \frac{x^2}{400} = 1$ جـ إحداثيات الرأسين والبؤرتين ومعادلتى خطي التقارب للقطع الزائد. ثم مثل القطع الزائد بيانيًا. (الدرس 6-4)

جـ إحداثيات المركز والبؤرتين وطولي المحورين الأكبر والأصغر لقطع ناقص بالمعادلة المعطاة. ثم مثل القطع الناقص بيانيًا. (الدرس 3-6)

53. $\frac{y^2}{18} + \frac{x^2}{9} = 1$

54. $4x^2 + 8y^2 = 32$

55. $x^2 + 25y^2 - 8x + 100y + 91 = 0$

مثل كل دالة بيانيًا.

56. $f(x) = \frac{3}{x}$

57. $f(x) = \frac{-2}{x+5}$

58. $f(x) = \frac{6}{x-2} - 4$

59. الفضاء يتم استخدام النظير المشع كمصدر طاقة للأقمار الصناعية. تم تمثيل خرج الطاقة P (وات) بواسطة $p = 50e^{-\frac{t}{250}}$ ، حيث يمثل t الزمن باليوم.
a. هل صيغة خرج الطاقة مثال على النمو أم الاضمحلال الأسّي؟ اشرح استنتاجك.
b. جد الطاقة المتاحة بعد 100 يوم.
c. مطلوب 10 وات من الطاقة لتشغيل معدات القمر الصناعي. كم يمكن للقمر الصناعي مواصلة التشغيل؟

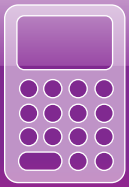
مراجعة المهارات

حلّ كل من أنظمة المعادلات التالية.

60. $6g - 8h = 50$
 $6h = 22 - 4g$

61. $3u + 5v = 6$
 $2u - 4v = -7$

62. $10m - 9n = 15$
 $5m - 4n = 10$



مختبر تقنية التمثيل البياني تحليل العلاقات التربيعية

5-6

التوسع

يمكنك استخدام تقنية التمثيل البياني لتحليل العلاقات التربيعية.

نشاط 1 خصائص علاقة القطع المكافئ

مثّل بيانيًا $f(x) = 9x^2 + 1$, $g(x) = -x^2 + 3x - 4$ و $(y - 3)^2 = -4(x - 2)$. حدد القيمتين العظمى والصغرى ومحوري التماثل.

الخطوة 1 افتح صفحة Graphs (تمثيلات بيانية) و Calculator (حاسبة) جديدة.

الخطوة 2 أدخل $f(x)$ في $f1$ و $g(x)$ في $f2$.

الخطوة 3 في صفحة Calculator (حاسبة). استخدم solve (حل) لحل $(y - 3)^2 = -4(x - 2)$ لإيجاد y . اضغط مع الاستمرار على shift واستخدام ► لتمييز معادلة، ثم اضغط على ctrl C. اضغط على ctrl ► للانتقال إلى صفحة Graphs (تمثيلات بيانية). ثم اضغط على ctrl V. كرر الإجراء لنسخ المعادلة الأخرى في $f4$.

الخطوة 4 استخدم Analyze Graph, Maximum, Minimum, and Intersection (تحليل التمثيل البياني والقيمة العظمى والقيمة الصغرى والتقاطع) لإيجاد إحداثيات القيم القصوى. بالنسبة إلى $f(x)$ تقع القيمة الصغرى عند $(0, 1)$ ؛ وبالنسبة إلى $g(x)$ تقع القيمة العظمى عند $(1.5, -1.75)$ ؛ وبالنسبة إلى العلاقة، يقع الرأس عند $(2, 3)$.

الخطوة 5 يمكنك استخدام إحداثيات القيم القصوى لإيجاد معادلتين محوري التماثل. بالنسبة إلى $f(x)$ معادلة محور التماثل هي $x = 1.5$ ؛ وبالنسبة إلى $g(x)$ معادلة محور التماثل هي $x = 0$ ؛ وبالنسبة إلى العلاقة، معادلة محور التماثل هي $y = 3$.

يمكنك أيضًا استخدام حاسبة تمثيل بياني لتحديد معادلة قطع مكافئ.

نشاط 2 كتابة معادلة للقطع المكافئ

إذا علمت أن $f(x)$ له صفران عند -2 و 4 ويفتح $f(x)$ لأسفل، فاكتب معادلة للقطع المكافئ.

الخطوة 1 افتح صفحة Graphs (تمثيلات بيانية) و Calculator (حاسبة) جديدة.

الخطوة 2 لأن الصفرين هما $x = -2$ و $x = 4$ ، فعاملًا المعادلة التربيعية هما $(x + 2)$ و $(x - 4)$.

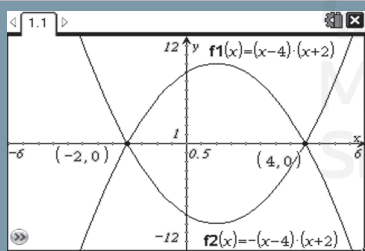
الخطوة 3 استخدم أمر expand (توسع) في صفحة Calculator (حاسبة) لضرب $(x + 2)$ و $(x - 4)$. إذا، $y = x^2 - 2x - 8$.

الخطوة 4 في صفحة Graphs (تمثيلات بيانية). مثّل بيانيًا $y = x^2 - 2x - 8$. تحقق من الجذور واتجاه الفتحة.

الخطوة 5 افتح الدالة في التمثيل البياني لأعلى، وليس لأسفل، لذا عليك ضرب $y = -x^2 + 2x + 8$. في -1 ، إذا، $y = -x^2 + 2x + 8$. مثّل هذه الدالة بيانيًا.

معادلة قطع مكافئ يقع صفراه عند -2 و 4 ويفتح لأسفل هي $y = -x^2 + 2x + 8$.

scl: 1 على $[-10, 10]$ scl: 1



scl: 0.5 في $[-12, 12]$ scl: 1

(تتبع في الصفحة التالية)

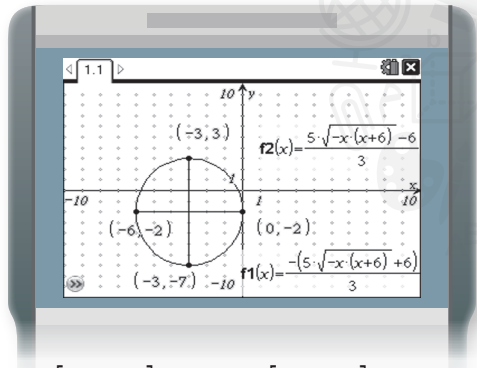
مختبر تقنية التمثيل البياني تحليل العلاقات التربيعية

يمكنك أيضًا استخدام حاسبة تمثيل بياني لتحديد معادلة علاقة تربيعية.

نشاط 3 كتابة معادلة قطع ناقص

اكتب معادلة لقطع ناقص يقع رأساه عند $(-3, 3)$ و $(-3, -7)$ ويقع رأساه المرافقان عند $(0, -2)$ و $(-6, -2)$.
الخطوة 1 افتح صفحة Graphs (تمثيلات بيانية) و Calculator (حاسبة) جديدة.

الخطوة 2 شغل الشبكة من View (عرض)، Show Axis (إظهار المحور). ثم استخدم Points (نقاط)، Points On (نقاط على) للتمثيل البياني للنقاط الأربع. استخدم Actions, Coordinates and Equations (الإجراءات والإحداثيات والمعادلات) لإظهار إحداثيات النقاط.



$[-10, 10]$ scl: 1 على $[-10, 10]$ scl: 1

الخطوة 3 استخدم التمثيل البياني لتحديد نقطة تقاطع القطعة المستقيمة الناشئة من الرأسين والقطعة المستقيمة الناشئة من الرأسين المرافقين. يقع المركز عند $(-3, -2)$.

الخطوة 4 حدد الخصائص الهامة الأخرى. اتجاه القطع الناقص رأسي. طول المحور الأكبر 10، إذا $a = 5$ طول المحور الأصغر 6، إذا $b = 3$.

الخطوة 5 اكتب المعادلة بالصيغة القياسية.

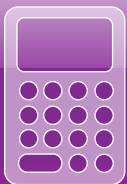
$$\frac{[y - (-2)]^2}{5^2} + \frac{[x - (-3)]^2}{3^2} = 1 \text{ أو } \frac{(y + 2)^2}{25} + \frac{(x + 3)^2}{9} = 1$$

الخطوة 6 تحقق من المعادلة باستخدام Solve (حل) ضمن قائمة Algebra (الجبر) في صفحة Calculator (حاسبة) لإيجاد y . انسخ معادلتين والصقهما في صفحة Graph (تمثيل بياني) لتمثيل القطع الناقص بيانيًا.

تمارين

مثّل كل دالة وعلاقتها بيانيًا. حدد القيمة العظمى أو الصغرى ومحوري التماثل.

1. $g(x) = x^2 + x - 12$ و $f(x) = -(x - 3)^2 + 12$ و $(y + 5)^2 = -12(x - 2)$.
2. $g(x) = 2x^2 + 2x + 4$ و $f(x) = -0.25x^2 - 3x - 6$ و $(y + 1)^2 = 2(x + 6)$.
3. إذا علمت أن $f(x)$ له صفران عند -1 و 3 ومفتوح لأعلى، فاكتب معادلة للقطع المكافئ.
4. إذا علمت أن $f(x)$ له صفران عند -3 و -1 ومفتوح لأسفل، فاكتب معادلة للقطع المكافئ.
5. اكتب معادلة لقطع ناقص يقع رأساه عند $(-6, 2)$ و $(-6, -8)$ ويقع رأساه المرافقان عند $(-3, -3)$ و $(-9, -3)$.
6. اكتب معادلة لقطع ناقص يقع رأساه عند $(-13, 2)$ و $(1, 2)$ ويقع رأساه المرافقان عند $(-6, 4)$ و $(-6, 0)$.



مختبر تقنية التمثيل البياني الأنظمة الخطية واللاخطية

6-6

الإستكشاف

يمكنك استخدام تطبيق التمثيل البياني لحل الأنظمة الخطية واللاخطية بواسطة القائمة Y= للتمثيل البياني لكل معادلة على مجموعة المحاور ذاتها.

مثال الأنظمة الخطية التربيعية

حلّ نظام المعادلات.

$$3y - 4x = -7$$

$$4x^2 + 3y^2 = 91$$

$$3y - 4x = -7$$

$$3y = 4x - 7$$

$$y = \frac{4}{3}x - \frac{7}{3}$$

$$4x^2 + 3y^2 = 91$$

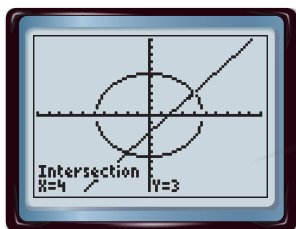
$$3y^2 = 91 - 4x^2$$

$$y = \pm \sqrt{\frac{91 - 4x^2}{3}}$$

الخطوة 1 حل كل معادلة لـ y.

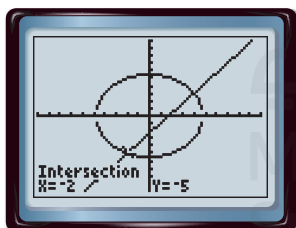
الخطوة 2 أدخل $y = \frac{4}{3}x - \frac{7}{3}$ بالصيغة Y1 $y = \sqrt{\frac{91 - 4x^2}{3}}$ بالصيغة Y2 $y = -\sqrt{\frac{91 - 4x^2}{3}}$ بالصيغة Y3. ثم قم بالتمثيل البياني للمعادلات في نافذة عرض قياسية.

الخطوات على الحاسبة: 4 $\div$ 3 $\times$ X,T,θ,n $-$ 7 $\div$ 3 $\rightarrow$ ENTER 2^{nd} x^2 ($-$ 91 $-$ X,T,θ,n x^2) $\div$ 3 $\rightarrow$ ENTER $(-)$ 2^{nd} x^2 ($-$ 91 $-$ 4 $\times$ X,T,θ,n x^2) $\div$ 3 $\rightarrow$ ENTER $\rightarrow$ ZOOM 6



الخطوة 3 جد تقاطع $y = \frac{4}{3}x - \frac{7}{3}$ مع $y = \sqrt{\frac{91 - 4x^2}{3}}$

الخطوات على الحاسبة: اضغط على 5 $\rightarrow$ TRACE $\rightarrow$ 2 nd $\rightarrow$ ENTER $\rightarrow$ ENTER $\rightarrow$ ENTER. التمثيلان البيانيان يتقاطعان عند (4, 3).



الخطوة 4 جد تقاطع $y = \frac{4}{3}x - \frac{7}{3}$ مع $y = -\sqrt{\frac{91 - 4x^2}{3}}$

الخطوات على الحاسبة: اضغط على 5 $\rightarrow$ TRACE $\rightarrow$ 2 nd $\rightarrow$ ENTER $\rightarrow$ ENTER $\rightarrow$ ENTER. ثم استخدم $\leftarrow$ لتحريك المؤشر إلى نقطة التقاطع الثانية. اضغط على ENTER: التمثيلان البيانيان يتقاطعان عند (-2, -5). حلا النظام هما (4, 3) و (-2, -5).

تمارين

استخدم حاسبة التمثيل البياني لحل كل نظام معادلات.

$$1. x^2 + y^2 = 100$$

$$x + y = 2$$

$$2. 2y - x = 11$$

$$5x^2 + 2y^2 = 407$$

$$3. 21x + 9y = -36$$

$$7x^2 + 9y^2 = 1152$$

حل الأنظمة الخطية واللاخطية

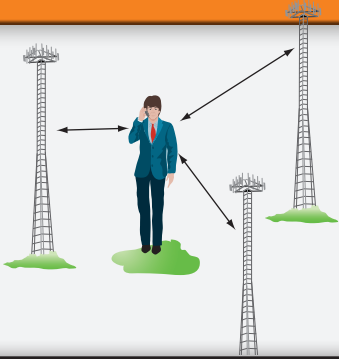
6-6

الدرس

لماذا؟

الحالي

السابق

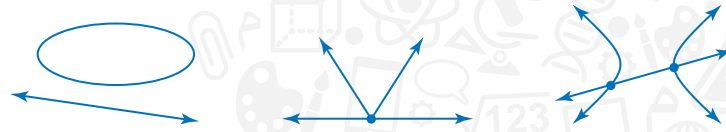


هل تفكرت يوماً كيف تستطيع هواتف إيفاد القانون تتبع مكان مستخدم هاتف جوال؟ يمكن تحديد مكان شخص يستخدم الهاتف الجوال حسب موقعه من ثلاثة أبراج خلوية. ويتم استخدام الإحداثيات والمسافات المعنية لكل برج بالنسبة إلى المتصل لتحديد موقع المتصل. ويتم تحقيق هذا باستخدام نظام معادلات تربيعية.

1 حل أنظمة المعادلات الخطية واللاخطية جبرياً وبيانياً.
2 حل أنظمة المتباينات الخطية واللاخطية بيانياً.

● حل أنظمة معادلات خطية.

1 **أنظمة المعادلات** عندما يتكون نظام معادلات من معادلة خطية ولاخطية، فقد يكون للنظام حل أو اثنان أو لا يوجد حل. بعض الحلول المحتملة موضحة أدناه.



يمكنك حل الأنظمة التربيعية الخطية باستخدام الطرق البيانية أو الجبرية.

مثال 1 النظام الخطي التربيعي

$$\begin{aligned} 9x^2 + 25y^2 &= 225 & (1) \\ 10y + 6x &= 6 & (2) \end{aligned}$$

حل المعادلة الخطية لإيجاد قيمة y :

$$\begin{aligned} 10y + 6x &= 6 \\ y &= -0.6x + 0.6 \end{aligned}$$

معادلة (2) جد y .

عوّض في المعادلة التربيعية وجد x .

$$\begin{aligned} 9x^2 + 25y^2 &= 225 \\ 9x^2 + 25(-0.6x + 0.6)^2 &= 225 \\ 9x^2 + 25(0.36x^2 - 0.72x + 0.36) &= 225 \\ 9x^2 + 9x^2 - 18x + 9 &= 225 \\ 18x^2 - 18x - 216 &= 0 \\ x^2 - x - 12 &= 0 \\ (x - 4)(x + 3) &= 0 \\ x &= 4 = -3 \end{aligned}$$

معادلة تربيعية

ضع $-0.6x + 0.6$ مكان y .

بسّط.

وزّع.

بسّط.

اقسم كل طرف على 18.

حلل إلى العوامل.

خاصية ناتج الضرب الصفري

عوّض بقيم x في المعادلة الخطية وجد y .

$$\begin{aligned} y &= -0.6x + 0.6 & (2) \text{ معادلة} \\ &= -0.6(4) + 0.6 & \text{عوّض بقيم } x \\ &= -1.8 & \text{حوّل لأبسط صورة.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= -0.6x + 0.6 \\ &= -0.6(-3) + 0.6 \\ &= 2.4 \end{aligned}$$

حلا النظام هما $(-3, 2.4)$ و $(4, -1.8)$.

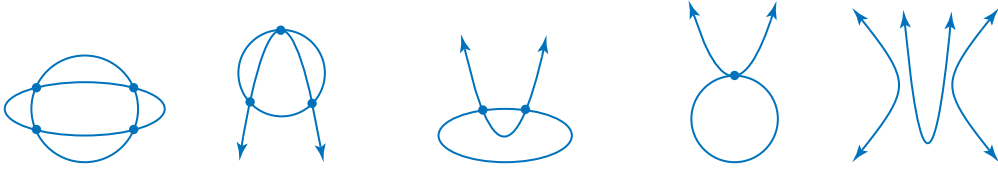
تمرين موجّه

$$\begin{aligned} 1A. \quad 3y + x^2 - 4x - 17 &= 0 \\ 3y - 10x + 38 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1B. \quad 3(y - 4) - 2(x - 3) &= -6 \\ 5x^2 + 2y^2 - 53 &= 0 \end{aligned}$$

مهارسات في الرياضيات
6 مراعاة الدقة.

في نظام معادلات تربيعية يحتوي على قطوع مخروطية، قد يكون للنظام ما يصل إلى أربعة حلول أو لا يوجد حل. بعض التمثيلات البيانية موضحة أدناه.



يمكنك استخدام الحذف لحل الأنظمة التربيعية-التربيعية.

مثال 2 النظام التربيعي-التربيعي

جد حلاً لنظام المعادلات.

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 45 & (1) \\ y^2 - x^2 &= 27 & (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y^2 + x^2 &= 45 \\ (+) \quad y^2 - x^2 &= 27 \\ \hline 2y^2 &= 72 \\ y^2 &= 36 \\ y &= \pm 6 \end{aligned}$$

معادلة (1)، خاصية التبديل

معادلة (2)

اجمع.

اقسم كل طرف على 2.

احسب الجذر التربيعي لكل طرف.

عوّض بالعددين 6 و -6 في إحدى المعادلات الأصلية وجد x .

$$x^2 + y^2 = 45$$

$$x^2 + 6^2 = 45$$

$$x^2 = 9$$

$$x = \pm 3$$

معادلة (1)

عوّض عن y .

اطرح 36 من كل طرف.

احسب الجذر التربيعي لكل طرف.

$$x^2 + y^2 = 45$$

$$x^2 + (-6)^2 = 45$$

$$x^2 = 9$$

$$x = \pm 3$$

الحلول هي $(-3, -6)$ و $(-3, 6)$ و $(3, -6)$ و $(3, 6)$.

تمرين موجّه

$$\begin{aligned} 2A. \quad x^2 + y^2 &= 8 \\ x^2 + 3y &= 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2B. \quad 3x^2 + 4y^2 &= 48 \\ 2x^2 - y^2 &= -1 \end{aligned}$$

نصيحة دراسية

الأدوات إذا استخدمت

ZSquare في قائمة ZOOM

(تكبير/تصغير)، فسوف يبدو التمثيل البياني للمعادلة الأولى مثل دائرة.

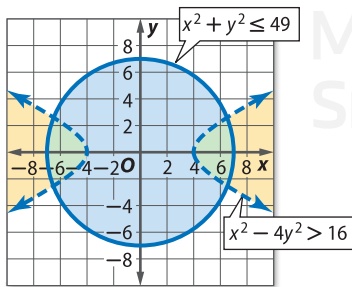
2 أنظمة المتباينات

يمكن حل أنظمة المتباينات التربيعية بواسطة التمثيل البياني.

مثال 3 المتباينات التربيعية

حلّ أنظمة المتباينات باستخدام التمثيل البياني.

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &\leq 49 \\ x^2 - 4y^2 &> 16 \end{aligned}$$



يمثل تقاطع التمثيلات البيانية، المظلل بالأخضر، حل النظام.

التحقق في المنطقة المظلمة. استخدم هذه

النقطة للتحقق من إجابتك.

$$x^2 + y^2 \leq 49$$

$$6^2 + 0^2 \leq 49$$

$$36 \leq 49 \quad \checkmark$$

$$x^2 - 4y^2 > 16$$

$$6^2 - 4(0)^2 > 16$$

$$36 > 16 \quad \checkmark$$

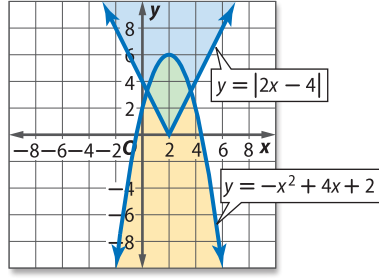
تمرين موجّه

$$\begin{aligned} 3A. \quad 5x^2 + 2y^2 &\leq 10 \\ y &\geq x^2 - 2x + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3B. \quad x^2 - y^2 &\leq 8 \\ x^2 + y^2 &\geq 120 \end{aligned}$$

يمكن كذلك حل الأنظمة التي تتضمن قيمة مطلقة بواسطة التمثيل البياني.

مثال 4 الأنظمة التربيعية ذات القيمة المطلقة



حلّ نظام المتباينات باستخدام التمثيل البياني.

$$y \geq |2x - 4|$$

$$y \leq -x^2 + 4x + 2$$

مثّل معادلات الحدود بيانيًا. ثم ظلل بالشكل المناسب.
يمثل تقاطع التمثيلات البيانية، المظلّل بالأخضر، حل النظام.

التحقق (2, 4) في المنطقة المظللة. استخدم النقطة للتحقق من إجابتك.

$$y \geq |2x - 4|$$

$$4 \geq |2(2) - 4|$$

$$4 \geq 0 \quad \checkmark$$

$$y \leq -x^2 + 4x + 2$$

$$4 \leq -(2)^2 + 4(2) + 2$$

$$4 \leq 6 \quad \checkmark$$

تمرين موجّه

4A. $y > |-0.5x + 2|$
 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{36} \leq 1$

4B. $x^2 + y^2 \leq 49$
 $y \geq |x^2 + 1|$

التحقق من فهمك

المثالان 1-2 جـد حلًا لكل نظام معادلات.

1. $8y = -10x$
 $y^2 = 2x^2 - 7$

3. $y = 12x - 30$
 $4x^2 - 3y = 18$

5. $x^2 + y^2 = 16$
 $x^2 - y^2 = 20$

7. $x^2 + 2y = 7$
 $y^2 - x^2 = 8$

2. $x^2 + y^2 = 68$
 $5y = -3x + 34$

4. $6y^2 - 27 = 3x$
 $6y - x = 13$

6. $y^2 - 2x^2 = 8$
 $3y^2 + x^2 = 52$

8. $4y^2 - 3x^2 = 11$
 $3y^2 + 2x^2 = 21$

9 **المثابرة** راجع بداية الدرس. يمكن تحديد مكان شخص يستخدم الهاتف الجوال حسب موقعه من ثلاثة أبراج خلوية. في نظام إحداثي حيث تمثل الوحدة كيلومتر، تم تحديد موقع المتصل على مسافة 50 km من البرج عند نقطة الأصل. يتواجد هذا الشخص كذلك على مسافة 40 km من برج يقع عند (0, 30) وعلى مسافة 13 km من برج يقع عند (35, 18). فأين المتصل؟

حلّ أنظمة المتباينات باستخدام التمثيل البياني.

الأمثلة 3-4

10. $6x^2 + 9(y - 2)^2 \leq 36$
 $x^2 + (y + 3)^2 \leq 25$

12. $4x^2 - 8y^2 \geq 32$
 $y \geq |1.5x| - 8$

11. $16x^2 + 4y^2 \leq 64$
 $y \geq -x^2 + 2$

13. $x^2 + 8y^2 < 32$
 $y < -|x - 2| + 2$

المثالان 1-2 جد حلاً لكل نظام معادلات.

14. $3x^2 - 2y^2 = -24$
 $2y = -3x$
15. $5x^2 + 4y^2 = 20$
 $5y = 7x + 35$
16. $x^2 + 3x = -4y - 2$
 $y = -2x + 1$
17. $y = 2x$
 $4x^2 - 2y^2 = -36$
18. $2y = x + 10$
 $y^2 - 4y = 5x + 10$
19. $9y = 8x - 19$
 $8x + 11 = 2y^2 + 5y$
20. $2y^2 + 5x^2 = 26$
 $2x^2 - y^2 = 5$
21. $x^2 + y^2 = 16$
 $x^2 - 4x + y^2 = 12$
22. $x^2 + y^2 = 8$
 $5y^2 = 3x^2$
23. $y^2 - x^2 + 3y = 26$
 $x^2 + 2y^2 = 34$
24. $x^2 - y^2 = 25$
 $x^2 + y^2 + 7 = 0$
25. $x^2 - 10x + 2y^2 = 47$
 $y^2 - 2x^2 = -14$

26. **الألعاب النارية** تم إطلاق اثنتين من الألعاب النارية في الوقت ذاته ولكن من ارتفاعين مختلفين. تم تمثيل ارتفاع إحداها y بالقدم بواسطة $y = -16t^2 + 120t + 10$. حيث يمثل t الزمن بالثانية. ويتم تمثيل ارتفاع الأخرى بواسطة $y = -16t^2 + 60t + 310$.

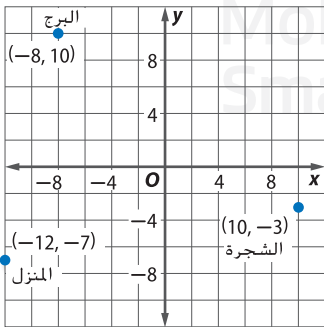
- a. بعد كم ثانية ستكون الألعاب النارية على الارتفاع ذاته؟
- b. ما الارتفاع؟

الأمثلة 3-4 **الأدوات** حل أنظمة المتباينات باستخدام التمثيل البياني.

27. $x^2 + y^2 \geq 36$
 $x^2 + 9(y + 6)^2 \leq 36$
28. $-x > y^2$
 $4x^2 + 14y^2 \leq 56$
29. $12x^2 - 4y^2 \geq 48$
 $16(x - 4)^2 + 25y^2 < 400$
30. $8y^2 - 3x^2 \leq 24$
 $2y > x^2 - 8x + 14$
31. $y > x^2 - 6x + 8$
 $x \geq y^2 - 6y + 8$
32. $x^2 + y^2 \geq 9$
 $25x^2 + 64y^2 \leq 1600$
33. $16(x - 3)^2 + 4y^2 \leq 64$
 $y \leq -|x - 2| + 2$
34. $x^2 - 4x + y^2 + 6y \leq 23$
 $y > |x - 2| - 6$
35. $2y - 4 \geq |x + 4|$
 $12 - 2y > x^2 + 12x + 36$
36. $18y^2 - 3x^2 \leq 54$
 $y \geq |2x| - 6$
37. $x^2 + y^2 < 16$
 $y \geq |x - 2| + 6$
38. $x^2 < y - 2$
 $y \leq |x + 8| - 7$

39. **الفضاء** تم وضع قمرين صناعيين في مدار حول الأرض. معادلنا المدارين هما $\frac{x^2}{(300)^2} + \frac{y^2}{(900)^2} = 1$, $\frac{x^2}{(600)^2} + \frac{y^2}{(690)^2} = 1$ حيث المسافتين بالكيلومتر والأرض مركز كل منحنى.

- a. جد حل كل معادلة لإيجاد y .
- b. استخدم حاسبة تمثيل بياني لتقدير نقاط تقاطع المدارين.
- c. قارن مداري القمرين الصناعيين.



40. **الحيوانات الأليفة** فقد قط أسماء من يوم. لحسن الحظ، كان القط يرتدي جهاز رصد إلكتروني. إذا علمت أن القط على مسافة 10 وحدات من الشجرة، و13 وحدة من البرج، و20 وحدة من المنزل، فحدد إحداثيات موقعه.

41. **كرة القاعدة** في 1997، بعد أن حقق مارك ماكجواير هدفاً، ادعى البعض أن الكرة كانت ستطير لمسافة 538 ft لو لم تسقط في المدرجات. يمكن تمثيل مسار كرة القاعدة بواسطة $y = -0.0037x^2 + 1.77x - 1.72$ ويمكن تمثيل المدرجات بواسطة $y = \frac{3}{7}x - 128.6$. كم يبعد موضع سقوط الكرة رأسياً وأفقيًا عن اللوح الأصلي؟



42. **الإعلانات** شعار شركة تصنيع سيارات موضح على اليسار. اكتب نظامًا من ثلاث معادلات لتمثيل الشعار.

اكتب نظام معادلات يحقق كل شرط.

43. تتقاطع دائرة وقطع ناقص عند نقطة

44. يتقاطع قطع مكافئ وقطع ناقص عند نقطتين

45. قطع زائد ودائرة لا يتقاطعان

46. يتقاطع قطع ناقص وقطع مكافئ عند ثلاث نقاط

47. يتقاطع قطع ناقص وقطع زائد عند أربع نقاط

48. **المعرفة المالية** يتم ضبط الأسعار على منحنى توازن. حيث يتساوى العرض من منتج ما مع الطلب المناظر من المستهلكين. يمثل أحد خبراء الاقتصاد العرض من منتج ما بواسطة $y = p^2 + 10p$ والطلب المناظر بواسطة $y = -p^2 + 40p$. حيث يمثل p السعر. حدد سعر التوازن.

49. **كرة الطلاب** يمكن تمثيل شكل ميدان كرة الطلاب بواسطة $x^2 + 4y^2 = 10,000$ بالمتر حيث المركز عند نقطة الأصل. يتم تزويد الفرق بأجهزة لاسلكي قصيرة المدى يبلغ أقصى مدى لها 80 m. فهل تستطيع الفرق سماع بعضها في أي مكان في الميدان؟ اشرح استنتاجك بيانيًا.

50. **الانتقال** تنتقل ليلى إلى مدينة جديدة ويجب أن يحقق موقع منزلها الجديد الشروط التالية.

- يجب أن يكون على مسافة أقل من 10 mi من المكتب الذي ستعمل به.
 - نظرًا للرائحة الكريهة لمصنع الورق المحلي، يجب أن يكون على مسافة 15 mi على الأقل من المصنع.
- إذا علمت أن المصنع يقع على مسافة 9.5 mi شرق مكتب ليلى و 6 mi غربًا، فاكتمل ومثل بيانيًا نظام متباينات لتمثيل المناطق المناسبة للبحث عن منزل.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

51. **التحدي** جد جميع قيم k بحيث يكون لنظام المعادلات التالي حلان.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad x^2 + y^2 = k^2$$

52. **الفرضيات** عندما يقع رأس قطع مكافئ على قطع ناقص، كم عدد الحلول الممكنة للنظام التربيعي الممثل بالتمثيلين البيانيين؟ اشرح استنتاجك مستخدمًا التمثيلات البيانية.

53. **مسألة غير محددة الإجابة** اكتب نظامًا من معادلتين، إحداها قطع زائد والأخرى قطع ناقص، بحيث يكون الحل $(-4, 8)$.

54. **الكتابة في الرياضيات** اشرح كيف يمكن أن يساعدك التمثيل البياني لنظام تربيعي في إيجاد الحل.

تمرين على الاختبار المعياري

55. إجابة قصيرة حل.

$$4x - 3y = 0$$

$$x^2 + y^2 = 25$$

56. لديك 16 طابعًا. بعضها طوابع بطاقات بريدية تكلفتها AED 0.23. والباقي تكلفته AED 0.41. إذا أنفقت على الطوابع إجمالاً AED 5.30. فكم عدد طوابع البطاقات البريدية التي لديك؟

- A 7
B 8
C 9
D 10

57. حصلت ميساء على ترقية وزاد راتبها بنسبة 7.2%. أصبح راتبها الجديد AED 53,600 سنوياً. فكم كان راتبها قبل الزيادة.

- F AED 50,000
G AED 53,600
H AED 55,000
J AED 57,500

58. SAT/ACT عند ضرب عدد في $\frac{2}{3}$ يصبح الناتج 188. جد العدد.

- A 292
B 282
C 272
D 262
E $125\frac{1}{3}$

مراجعة شاملة

صل كل معادلة بالموقف الذي يمكن تمثيله باستخدامها. (الدرس 5-6)

- a. $9x^2 + 4y^2 - 36 = 0$
b. $0.004x^2 - x + y - 3 = 0$
c. $x^2 + y^2 - 20x + 30y - 75 = 0$

59. الرياضة رحلة كرة قاعدة في الهواء

60. التصوير الفتحة البيضاء في إطار صورة

61. الجغرافيا مجموعة جميع النقاط على مسافة 20 km من المعلم

جد إحداثيات الرأسين والبؤرتين ومعادلتهم خطي التقارب لقطع زائد بالمعادلة المعطاة. ثم مثل القطع الزائد بيانياً. (الدرس 4-6)

62. $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{25} = 1$

63. $\frac{(y-3)^2}{25} - \frac{(x-2)^2}{16} = 1$

64. $6y^2 = 2x^2 + 12$

حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

65. $\frac{12p^2 + 6p - 6}{4(p+1)^2} \div \frac{6p-3}{2p+10}$

66. $\frac{x^2 + 6x + 9}{x^2 + 7x + 6} \div \frac{4x+12}{3x+3}$

67. $\frac{r^2 + 2r - 8}{r^2 + 4r + 3} \div \frac{r-2}{3r+3}$

مثل كل دالة بيانياً. واذكر المجال والمداى.

68. $f(x) = -\left(\frac{1}{5}\right)^x$

69. $y = -2.5(5)^x$

70. $f(x) = 2\left(\frac{1}{3}\right)^x$

مراجعة المهارات

اكتب الصيغة بدلالة المتغير المحدد.

71. $d = rt$, بالنسبة إلى r

72. $x = \frac{-b}{2a}$, بالنسبة إلى a

73. $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, بالنسبة إلى h

74. $A = \frac{1}{2}h(a+b)$, بالنسبة إلى b

المثال 1 كتابة معادلة في المستوى $x'y'$

استخدم $\theta = \frac{\pi}{4}$ لكتابة $6x^2 + 6xy + 9y^2 = 53$ في المستوى $x'y'$. ثم حدد القطع المخروطي.
جد معادلات لـ x و y .

$$x = x' \cos \theta - y' \sin \theta$$

معادلات الدوران x و y

$$y = x' \sin \theta + y' \cos \theta$$

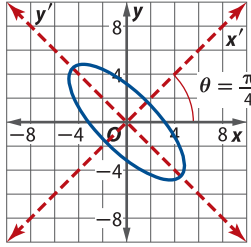
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}x' - \frac{\sqrt{2}}{2}y'$$

$$\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ و } \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y'$$

عوّض في المعادلة الأساسية.

$$\begin{aligned} 6x^2 + 6xy + 9y^2 &= 53 \\ 6\left(\frac{\sqrt{2}x' - \sqrt{2}y'}{2}\right)^2 + 6\left(\frac{\sqrt{2}x' - \sqrt{2}y'}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}x' + \sqrt{2}y'}{2}\right) + 9\left(\frac{\sqrt{2}x' + \sqrt{2}y'}{2}\right)^2 &= 53 \\ \frac{6[2(x')^2 - 4x'y' + 2(y')^2]}{4} + \frac{6[2(x')^2 - 2(y')^2]}{4} + \frac{9[2(x')^2 + 4x'y' + 2(y')^2]}{4} &= 53 \\ 3(x')^2 - 6x'y' + 3(y')^2 + 3(x')^2 - 3(y')^2 + \frac{9}{2}(x')^2 + 9x'y' + \frac{9}{2}(y')^2 - 53 &= 0 \\ 6(x')^2 - 12x'y' + 6(y')^2 + 6(x')^2 - 6(y')^2 + 9(x')^2 + 18x'y' + 9(y')^2 - 106 &= 0 \\ 21(x')^2 + 6x'y' + 9(y')^2 - 106 &= 0 \end{aligned}$$



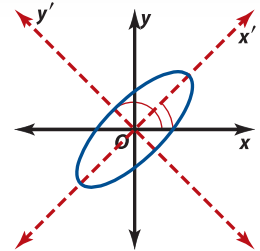
المعادلة في المستوى $x'y'$ هي $21(x')^2 + 6x'y' + 9(y')^2 - 106 = 0$. فإن القطع المخروطي هو القطع الناقص كما هو موضح. $106 = 0$ في هذه المعادلة. $B^2 - 4AC = 6^2 - 4(21)(9) = -720 < 0$. حيث إن $-720 < 0$.

تمرين موجّه

1. استخدم $\theta = \frac{\pi}{6}$ لكتابة $7x^2 + 4\sqrt{3}xy + 3y^2 - 60 = 0$ في المستوى $x'y'$. ثم حدد القطع المخروطي.

نصيحة دراسية

زاوية الدوران زاوية الدوران θ هي زاوية حادة نظرًا لحقيقة أن إما المحور x' أو المحور y' سيكون في الربع الأول. على سبيل المثال، في حين أنه قد يكون دوران المستوى في الشكل التالي 123° . فإن الدوران 33° هو المطلوب لمحاذاة المحاور.



عند اختيار θ بشكل مناسب يمكن حذف الحد $x'y'$ من الشكل العام للمعادلة، وستكون محاور القطع المخروطي موازية لمحاور $x'y'$ -المستوى.

بعد التعويض عن $x = x' \cos \theta - y' \sin \theta$ و $y = x' \sin \theta + y' \cos \theta$ في الشكل العام للقطع المخروطي، $B \cos 2\theta + (C - A) \sin 2\theta$ هو معامل الحد $x'y'$. فإن $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ بتحديد هذا مساويًا 0 يمكن حذف الحد $x'y'$.

$$B \cos 2\theta + (C - A) \sin 2\theta = 0$$

معامل الحد $x'y'$

$$B \cos 2\theta = -(C - A) \sin 2\theta \quad \text{اطرح } (C - A) \sin 2\theta \text{ من الطرفين.}$$

$$B \cos 2\theta = (A - C) \sin 2\theta \quad \text{خاصية التوزيع}$$

$$\frac{\cos 2\theta}{\sin 2\theta} = \frac{A - C}{B} \quad \text{اقسم الطرفين على } B \sin 2\theta$$

$$\cot 2\theta = \frac{A - C}{B} \quad \frac{\cos 2\theta}{\sin 2\theta} = \cot 2\theta$$

المفهوم الأساسي زاوية الدوران المستخدمة لحذف الحد xy

زاوية الدوران θ حيث إن $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, $B \neq 0$, $\cot 2\theta = \frac{A - C}{B}$ سيحذف الحد xy من معادلة المقطع المخروطي في دوران نظام الإحداثيات $x'y'$.

المثال 2 كتابة معادلة بالصيغة القياسية

استخدم زاوية مناسبة لدوران القطع المخروطي الذي معادلته $8x^2 + 12xy + 3y^2 = 4$ ، اكتب معادلة بالصيغة القياسية.

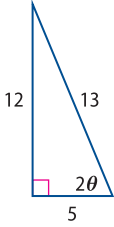
القطع المخروطي هو القطع الزائد لأن $B^2 - 4AC > 0$ جـ θ .

$$\cot 2\theta = \frac{A-C}{B}$$

$$= \frac{5}{12}$$

دوران المحاور

$$C = 3 \text{ و } B = 12 \text{ و } A = 8$$



يوضح الشكل مثلثاً فيه $\cot 2\theta = \frac{5}{12}$
إذًا، $\sin 2\theta = \frac{12}{13}$ و $\cos 2\theta = \frac{5}{13}$

استخدم متطابقات نصف الزاوية لتحديد $\cos \theta$ و $\sin \theta$

$$\sin \theta = \sqrt{\frac{1 - \cos 2\theta}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{1 - \frac{5}{13}}{2}}$$

$$= \frac{2\sqrt{13}}{13}$$

متطابقات نصف الزاوية

$$\cos 2\theta = \frac{5}{13}$$

بسّط

$$\cos \theta = \sqrt{\frac{1 + \cos 2\theta}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{1 + \frac{5}{13}}{2}}$$

$$= \frac{3\sqrt{13}}{13}$$

ثم جـد معادلات x و y .

$$x = x' \cos \theta - y' \sin \theta$$

$$= \frac{3\sqrt{13}}{13}x' - \frac{2\sqrt{13}}{13}y'$$

$$= \frac{3\sqrt{13}x' - 2\sqrt{13}y'}{13}$$

معادلات الدوران x و y

$$\sin \theta = \frac{2\sqrt{13}}{13} \text{ و } \cos \theta = \frac{3\sqrt{13}}{13}$$

بسّط

$$y = x' \sin \theta + y' \cos \theta$$

$$= \frac{2\sqrt{13}}{13}x' + \frac{3\sqrt{13}}{13}y'$$

$$= \frac{2\sqrt{13}x' + 3\sqrt{13}y'}{13}$$

عوّض في المعادلة الأساسية.

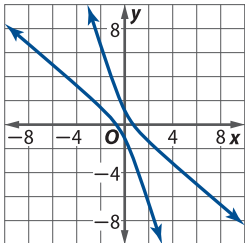
$$8x^2 + 12xy + 3y^2 = 4$$

$$8\left(\frac{3\sqrt{13}x' - 2\sqrt{13}y'}{13}\right)^2 + 12\left(\frac{3\sqrt{13}x' - 2\sqrt{13}y'}{13}\right)\left(\frac{2\sqrt{13}x' + 3\sqrt{13}y'}{13}\right) + 3\left(\frac{2\sqrt{13}x' + 3\sqrt{13}y'}{13}\right)^2 = 4$$

$$\frac{72(x')^2 - 96x'y' + 32(y')^2}{13} + \frac{72(x')^2 + 60x'y' - 72(y')^2}{13} + \frac{12(x')^2 + 36x'y' + 27(y')^2}{13} = 4$$

$$\frac{156(x')^2 - 13(y')^2}{13} = 4$$

$$3(x')^2 - \frac{(y')^2}{4} = 1$$



الصيغة القياسية للمعادلة في المستوى $x'y'$ هو $\frac{(x')^2}{\frac{1}{3}} - \frac{(y')^2}{4} = 1$ التمثيل البياني لهذا القطع الزائد.

تمرين موجّه

استخدم زاوية مناسبة لدوران القطع المخروطي مع كل معادلة معطاة واكتب معادلة بالصيغة القياسية.

2A. $2x^2 - 12xy + 18y^2 - 4y = 2$

2B. $20x^2 + 20xy + 5y^2 - 12x - 36y - 200 = 0$

نصيحة دراسية

الحد $x'y'$ عند استبدال قيم x' و y' بالحد x و y بشكل صحيح، يصبح معامل الحد $x'y'$ صفرًا. وإذا لم يكن معامل هذا الحد صفرًا، فهناك خطأ حدث.

يمكن استخدام صيغ أخرى تربط x' و y' بـ x و y لإيجاد معادلة المستوى xy لدوران القطع المخروطي.

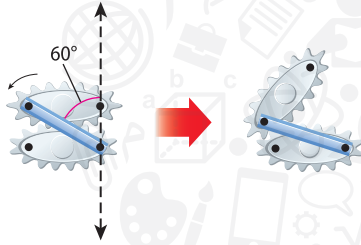
المفهوم الأساسي دوران محاور القطوع المخروطية

عند إعادة كتابة معادلة القطع المخروطي $x'y'$ للمستوى من خلال دوران محاور الإحداثيات من θ ، فيمكن إيجاد المستوى xy باستخدام

$$y' = y \cos \theta - x \sin \theta \text{ و } x' = x \cos \theta + y \sin \theta$$

المثال 3 كتابة معادلة المستوى xy

يمكن استخدام التروس بيضاوية الشكل لتوليد سرعات الإنتاج المتغيرة. بعد الدوران بدرجة 60° ، تكون معادلة دوران الترس في المستوى $x'y'$: $\frac{(x')^2}{36} + \frac{(y')^2}{18} = 1$ اكتب معادلة القطع الناقص التي يشكلها دوران الترس في المستوى xy .



استخدم صيغة دوران x' و y' لإيجاد معادلة دوران القطع المخروطي في المستوى xy .

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \theta + y \sin \theta & \text{معادلات دوران } x' \text{ و } y' & & y' &= y \cos \theta - x \sin \theta \\ &= x \cos 60^\circ + y \sin 60^\circ & \theta &= 60^\circ & &= y \cos 60^\circ - x \sin 60^\circ \\ &= \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y & \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \text{ و } \cos 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} & & &= \frac{1}{2}y - \frac{\sqrt{3}}{2}x \end{aligned}$$

عوّض في المعادلة الأساسية.

$$\frac{(x')^2}{36} + \frac{(y')^2}{18} = 1 \quad \text{المعادلة الأساسية}$$

$$(x')^2 + 2(y')^2 = 36 \quad \text{اضرب الطرفين في 36}$$

$$\left(\frac{x + \sqrt{3}y}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{y - \sqrt{3}x}{2}\right)^2 = 36 \quad \text{عوّض}$$

$$\frac{x^2 + 2\sqrt{3}xy + 3y^2}{4} + \frac{2y^2 - 4\sqrt{3}xy + 6x^2}{4} = 36 \quad \text{بسّط}$$

$$\frac{7x^2 - 2\sqrt{3}xy + 5y^2}{4} = 36 \quad \text{جمع الحدود المتشابهة}$$

$$7x^2 - 2\sqrt{3}xy + 5y^2 = 144 \quad \text{اضرب الطرفين في 4}$$

$$7x^2 - 2\sqrt{3}xy + 5y^2 - 144 = 0 \quad \text{اطرح 144 من الطرفين}$$

$$x^2 - 2\sqrt{3}xy + 5y^2 - 144 = 0 \quad \text{معادلة دوران القطع الناقص في المستوى } xy \text{ هي}$$

تمرين موجّه

3. إذا كانت معادلة الترس بعد دورانه بدرجة 30° في المستوى $x'y'$ هي $(x')^2 + 4(y')^2 - 40 = 0$ ، فجد معادلة الترس في المستوى xy .



الربط بالحياة اليومية

في نظام التروس حيث تدور كل التروس، مثل الدراجات، ترتبط سرعة التروس في التراكبات بينها بحجمها. إذا كان قطر أحد التروس $\frac{1}{2}$ قطر الترس الآخر، فإن سرعة دوران الترس ستكون مثلي سرعة الآخر.

المصدر: How Stuff Works

29. علم الفلك افترض أن $144(x')^2 + 64(y')^2 = 576$ يمثل الرسم

في $x'y'$ -المستوى لانعكاس المرآة في التلسكوب. (المثال 4)

a. في حال دوران المرآة بدرجة 30° فحدد معادلة المرآة في المستوى $x'y'$.

b. مثل المعادلة بيانياً.

ممارسة موجهة مثل كل معادلة بيانياً عند كل زاوية محددة.

30. $\frac{(x')^2}{4} + \frac{(y')^2}{9} = 1; 60^\circ$ 31. $\frac{(x')^2}{25} - \frac{(y')^2}{36} = 1; 45^\circ$
32. $(x')^2 + 6x' - y' = -9; 30^\circ$ 33. $8(x')^2 + 6(y')^2 = 24; 30^\circ$
34. $\frac{(x')^2}{4} - \frac{(y')^2}{16} = 1; 45^\circ$ 35. $y' = 3(x')^2 - 2x' + 5; 60^\circ$

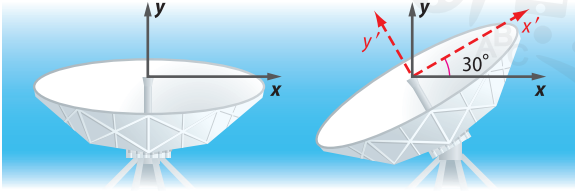
36. التواصل طبق قمر صناعي يتبع قمراً صناعياً فوقه مباشرة. افترض

أن $y = \frac{1}{6}x^2$ تمثل شكل الطبق عندما بوجه في هذا الموقع. وفي وقت لاحق من اليوم نفسه، لوحظ أن الطبق استدار بنحو 30° .

(المثال 4)

a. اكتب معادلة تمثيل الاتجاه الجديد للطبق.

b. استخدم حاسبة التمثيل البياني لرسم هاتين المعادلتين على الشاشة نفسها. ارسم هذا التمثيل البياني على ورقتك.



حاسبة التمثيل البياني ارسم القطع المخروطي المعطى بكل معادلة. (المثال 5)

37. $x^2 - 2xy + y^2 - 5x - 5y = 0$
38. $2x^2 + 9xy + 14y^2 = 5$
39. $8x^2 + 5xy - 4y^2 = -2$
40. $2x^2 + 4\sqrt{3}xy + 6y^2 + 3x = y$
41. $2x^2 + 4xy + 2y^2 + 2\sqrt{2}x - 2\sqrt{2}y = -12$
42. $9x^2 + 4xy + 6y^2 = 20$
43. $x^2 + 10\sqrt{3}xy + 11y^2 - 64 = 0$
44. $x^2 + y^2 - 4 = 0$
45. $x^2 - 2\sqrt{3}xy - y^2 + 18 = 0$
46. $2x^2 + 9xy + 14y^2 - 5 = 0$

التمثيل البياني لكل معادلة هو حالة مُنخلة. صف التمثيل البياني.

47. $y^2 - 16x^2 = 0$
48. $(x + 4)^2 - (x - 1)^2 = y + 8$
49. $(x + 3)^2 + y^2 + 6y + 9 - 6(x + y) = 18$

اكتب المعادلة في المستوى $x'y'$ لقيمة المعطاة. ثم حدد القطع المخروطي. (المثال 1)

1. $x^2 - y^2 = 9, \theta = \frac{\pi}{3}$
2. $xy = -8, \theta = 45^\circ$
3. $x^2 - 8y = 0, \theta = \frac{\pi}{2}$
4. $2x^2 + 2y^2 = 8, \theta = \frac{\pi}{6}$
5. $y^2 + 8x = 0, \theta = 30^\circ$
6. $4x^2 + 9y^2 = 36, \theta = 30^\circ$
7. $x^2 - 5x + y^2 = 3, \theta = 45^\circ$
8. $49x^2 - 16y^2 = 784, \theta = \frac{\pi}{4}$
9. $4x^2 - 25y^2 = 64, \theta = 90^\circ$
10. $6x^2 + 5y^2 = 30, \theta = 30^\circ$

استخدم زاوية مناسبة لدوران القطع المخروطي مع كل معادلة معطاة واكتب معادلة بالشكل القياسي.

(المثال 1)

11. $xy = -4$
12. $x^2 - xy + y^2 = 2$
13. $145x^2 + 120xy + 180y^2 = 900$
14. $16x^2 - 24xy + 9y^2 - 5x - 90y + 25 = 0$
15. $2x^2 - 72xy + 23y^2 + 100x - 50y = 0$
16. $x^2 - 3y^2 - 8x + 30y = 60$
17. $8x^2 + 12xy + 3y^2 + 4 = 6$
18. $73x^2 + 72xy + 52y^2 + 25x + 50y - 75 = 0$

اكتب معادلة لكل قطع مخروطي في المستوى $x'y'$ للمعادلة المحددة في الشكل $x'y'$ والقيمة المعطاة لزاوية الدوران θ . (المثال 3)

19. $(x')^2 + 3(y')^2 = 8, \theta = \frac{\pi}{4}$
20. $\frac{(x')^2}{25} - \frac{(y')^2}{225} = 1, \theta = \frac{\pi}{4}$
21. $\frac{(x')^2}{9} - \frac{(y')^2}{36} = 1, \theta = \frac{\pi}{3}$
22. $(x')^2 = 8y', \theta = 45^\circ$
23. $\frac{(x')^2}{7} + \frac{(y')^2}{28} = 1, \theta = \frac{\pi}{6}$
24. $4x' = (y')^2, \theta = 30^\circ$
25. $\frac{(x')^2}{64} - \frac{(y')^2}{16} = 1, \theta = 45^\circ$
26. $(x')^2 = 5y', \theta = \frac{\pi}{3}$
27. $\frac{(x')^2}{4} - \frac{(y')^2}{9} = 1, \theta = 30^\circ$
28. $\frac{(x')^2}{3} + \frac{(y')^2}{4} = 1, \theta = 60^\circ$

59. **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة، ستستنتج زوايا الدوران التي تعطي التمثيلات البيانية الأساسية.

a. **جدولياً** في كل معادلة في الجدول، حدد القطع المخروطي ثم جد القيمة الصغرى لزوايا الدوران اللازمة لتحويل المعادلة بحيث يتطابق التمثيل البياني المستدار مع التمثيل البياني الأساسي.

المعادلة	القطع المخروطي	الحد الأدنى لزوايا الدوران
$x^2 - 5x + 3 - y = 0$		
$6x^2 + 10y^2 = 15$		
$2xy = 9$		

b. **لفظياً** صف العلاقة بين خطوط التماثل للقطع المخروطية والقيمة الصغرى لزوايا الدوران اللازمة لاستنتاج التمثيلات البيانية الأساسية.

c. **تحليلياً** استدار القطع الناقص غير الدائري 50° عن نقطة الأصل. واستدار مرة أخرى بعد ذلك حيث استنتج التمثيل البياني الأساسي. فما هي الزاوية الثانية للدوران؟

مهارات التفكير العليا مسائل استخدم مهارات التفكير العليا

60. **تحليل الخطأ** يصف محمود وأحمد الرسم البياني $x^2 + 4xy + 6y^2 + 3x - 4y = 75$ وقال محمود إنه القطع الناقص. ويعتقد أحمد أنه القطع المكافئ. أي منهما صحيح؟ وضح تبريرك المنطقي.

61. **تحدي** أثبت أن معادلة الدائرة $x^2 + y^2 = r^2$ تبقى ثابتة أثناء الدوران θ .

62. **التبرير** صواب أو خطأ: يمكن وصف كل زاوية دوران θ أنها زاوية حادة. اشرح ذلك.

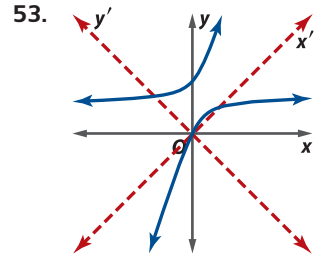
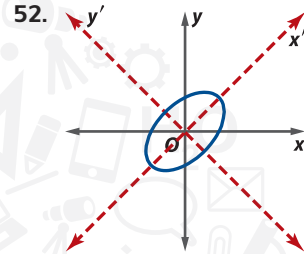
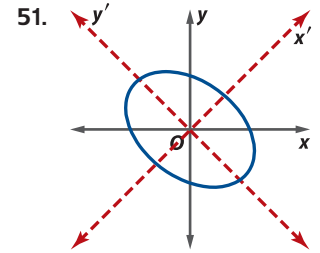
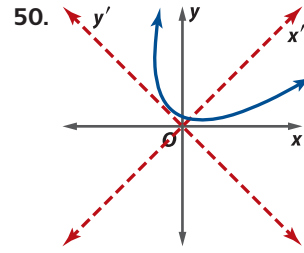
63. **البرهان** برهن أن $x' = x \cos \theta + y \sin \theta$ و $y' = y \cos \theta - x \sin \theta$ (ارشاد: حل المنظومة $x = x' \cos \theta - y' \sin \theta$ و $y = x' \sin \theta + y' \cos \theta$ بضرب أحد المعادلتين في $\sin \theta$ والأخرى في $\cos \theta$).

64. **التعليل** يمكن تحديد زاوية الدوران θ بأنها $\tan 2\theta = \frac{B}{A - C}$ ، عندما $A \neq C$ ، أو $\theta = \frac{\pi}{4}$ ، عندما $A = C$ لماذا لا يتطلب تحديد زاوية الدوران بذلالة ظل التمام شرطاً إضافياً وقيمة إضافية لـ θ ؟

65. **الكتابة في الرياضيات** يمكن استخدام المميز لتصنيف القطع المخروطي $A(x')^2 + C(y')^2 + D'x' + E'y' + F' = 0$ في المستوى $x'y'$. اشرح لماذا تحدد القيم A' و C' نوع القطع المخروطي. صف العوامل اللازمة للقطع الناقص والدائرة والقطع المكافئ والقطع الزائد.

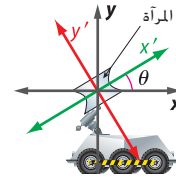
66. **التعليل** صواب أو خطأ: كلما كان المميز للمعادلة في الشكل $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ مساوياً صفر، فيكون التمثيل البياني للمعادلة قطعاً مكافئاً. اشرح ذلك.

صل التمثيل البياني لكل قطع مخروطي بمعادلته.



- a. $x^2 - xy + y^2 = 2$
b. $145x^2 + 120xy + 180y^2 - 900 = 0$
c. $2x^2 - 72xy + 23y^2 + 100x - 50y = 0$
d. $16x^2 - 24xy + 9y^2 - 5x - 90y + 25 = 0$

54. **علم الفواعل الآلية** استخدمت المرآة على شكل قطع زائد في أنظمة الفواعل الآلية في الروبوت بحيث توجه نحو اليمين. بعد استدارتها، يُمثّل موقعها الجديد بالمعادلة $51.75x^2 + 184.5\sqrt{3}xy - 132.75y^2 = 32,400$



- a. حل المعادلة لأجل إيجاد قيمة الحد y .
b. استخدم حاسبة التمثيل البياني لرسم المعادلة.
c. حدد الزاوية θ التي من خلالها تستدار المرآة. قَرِّبها إلى أقرب درجة.

55. **الثوابت** عندما يحوّل دوران معادلة من المستوى xy إلى المستوى $x'y'$ ، فإن المعادلة الجديدة تساوي المعادلة الأصلية. تظل بعض القيم ثابتة أثناء الدوران. وهذا يعني أن قيمها لا تتغير عند دوران المحاور. استخدم التعليل لشرح كيف يكون $A + C = A' + C'$ هو دوران ثابت.

حاسبة التمثيل البياني مثّل بيانياً كل معادلتين وجد نقاط التقاطع. إذا لم يكن في التمثيل البياني نقاط تقاطع، فاكتب لا يوجد حل.

56. $x^2 + 2xy + y^2 - 8x - y = 0$
 $8x^2 + 3xy - 5y^2 = 15$
57. $9x^2 + 4xy + 5y^2 - 40 = 0$
 $x^2 - xy - 2y^2 - x - y + 2 = 0$
58. $x^2 + \sqrt{3}xy - 3 = 0$
 $16x^2 - 20xy + 9y^2 = 40$

ارسم القطع الزائد المعطى بكل معادلة.

67. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{64} = 1$

68. $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{49} = 1$

69. $\frac{(x-3)^2}{64} - \frac{(y-7)^2}{25} = 1$

حدد الاختلاف المركزي للقطع الناقص المعطى الذي معادلته:

70. $\frac{(x+17)^2}{39} + \frac{(y+7)^2}{30} = 1$

71. $\frac{(x-6)^2}{12} + \frac{(y+4)^2}{15} = 1$

72. $\frac{(x-10)^2}{29} + \frac{(y+2)^2}{24} = 1$

73. استثمار لدى منصور مبلغ إجمالي قدره AED 5000 في حساب الادخار وشهادة الإيداع. يربح حساب الادخار مرابحة بنسبة 3.5% سنوياً. تربح شهادة الإيداع مرابحة بنسبة 5% إذا استثمرت الأموال لمدة سنة واحدة. حسب منصور أن أرباح المرابحة التي يحصل عليها في العام تبلغ AED 227.50.

a. اكتب نظام المعادلات لمبلغ كل استثمار.

b. استخدم قاعدة كرامر لتحديد مقدار المال في حساب الادخار وشهادة الإيداع لدى منصور.

74. البصريات يطلق على كمية الضوء التي يوفرها المصدر إلى السطح بالاستنارة. الاستنارة E بالمتر- شمعة على أحد الأسطح حيث إن R البعد بالمتر عن مصدر الضوء من مصدر الضوء بشدة I شمعة هي:

$$E = \frac{I \cos \theta}{R^2}$$

حيث إن θ هي قياس الزاوية بين اتجاه الضوء و الخط المتعامد على السطح المضاء. أثبت أن $E = \frac{I \cot \theta}{R^2 \csc \theta}$ هي صيغة مكافئة.

حل المعادلات.

75. $\log_4 8n + \log_4 (n-1) = 2$

76. $\log_9 9p + \log_9 (p+8) = 2$

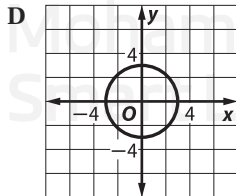
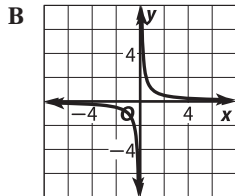
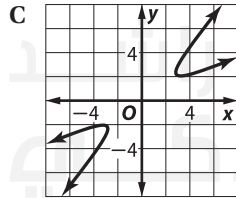
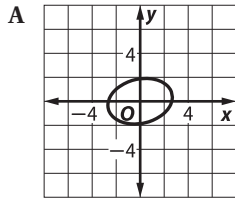
استخدم نظرية العوامل لتحديد إذا كانت المعادلات ذات الحدين هي عوامل $f(x)$. استخدم المعادلات ذات الحدين التي هي عوامل لكتابة التحليل الى عوامل للدالة $f(x)$.

77. $f(x) = x^4 - x^3 - 16x^2 + 4x + 48; (x-4), (x-2)$

78. $f(x) = 2x^4 + 9x^3 - 23x^2 - 81x + 45; (x+5), (x+3)$

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

81. ما هو التمثيل البياني للقطع المخروطي الناتج من المعادلة $4x^2 - 2xy + 8y^2 - 7 = 0$



82. مراجعة ما عدد طرق حل هذا النظام

$$\begin{cases} (x-3)^2 + y^2 = 9 \\ \frac{x^2}{5^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1 \end{cases}$$

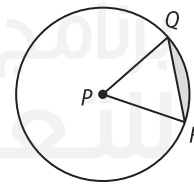
F 0

H 2

G 1

J 4

79. SAT/ACT P هي مركز الدائرة و $PQ = QR$. إذا كانت مساحة $\triangle PQR$ تبلغ $9\sqrt{3}$ وحدة مربعة، فما هي المساحة المظللة بالوحدة المربعة؟



A $24\pi - 9\sqrt{3}$

D $6\pi - 9\sqrt{3}$

B $9\pi - 9\sqrt{3}$

E $12\pi - 9\sqrt{3}$

C $18\pi - 9\sqrt{3}$

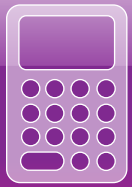
80. مراجعة أي مما يأتي ليست معادلة لقطع مكافئ؟

F $y = 2x^2 + 4x - 9$

G $3x + 2y^2 + y + 1 = 0$

H $x^2 + 2y^2 + 8y = 8$

J $x = \frac{1}{2}(y-1)^2 + 5$



مختبر تقنية التمثيل البياني أنظمة المعادلات والمتباينات غير الخطية

الهدف

استخدام حاسبة التمثيل البياني لتقريب حلول أنظمة معادلات ومتباينات لاخطية.

تمثل التمثيلات البيانية للقطع المخروطية نظامًا لاخطيًا. ويمكن إيجاد حلول أنظمة المعادلات اللاخطية جبريًا. ولكن، يمكن إيجاد حلول تقريبية باستخدام حاسبة التمثيل البياني خاصتك. يمكن لحاسبة التمثيل البياني تمثيل دوال فقط. وللتمثيل البياني لقطع مخروطي وهو ليس بدالة، حل المعادلة لإيجاد قيمة y .

النشاط 1 النظام اللاخطي

جد حل نظام المتباينات بالتمثيل البياني.

$$x^2 + y^2 = 13$$

$$xy + 6 = 0$$

حل كل معادلة مما يلي لإيجاد قيمة y .

الخطوة 2

$$y = -\frac{6}{x} \quad y = -\sqrt{13 - x^2} \text{ و } y = \sqrt{13 - x^2}$$

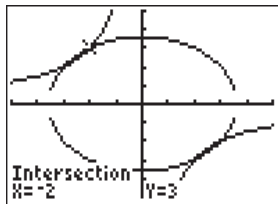
مثل المعادلات بيانيًا في النافذة الملائمة.

الخطوة 3

استخدم سمة التقاطع (intersect) من القائمة CALC لإيجاد أربع نقاط تقاطع.

الخطوة 4

الحلول هي $(-3, 2)$ و $(-2, 3)$ و $(2, -3)$ و $(3, -2)$.



$[-5, 5]$ scl: 1 by $[-5, 5]$ scl: 1

تمارين

حلّ نظام المتباينات بالتمثيل البياني. وقرب إلى أقرب جزء من عشرة.

1. $xy = 2$

$$x^2 - y^2 = 3$$

2. $49 = y^2 + x^2$

$$x = 1$$

3. $x = 2 + y$

$$x^2 + y^2 = 100$$

4. $25 - 4x^2 = y^2$

$$2x + y + 1 = 0$$

5. $y^2 = 9 - 3x^2$

$$x^2 = 10 - 2y^2$$

6. $y = -1 - x$

$$4 + x = (y - 1)^2$$

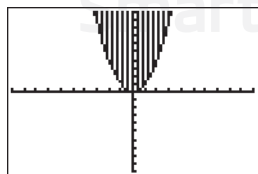
7. تحدّد يحتوي قصر غرفتين مربعتين اثنتين، وهما غرفة العائلة والمكتب. تبلغ المساحة الكلية للغرفتين 468 m^2 ، ومساحة المكتب أصغر بـ 180 m^2 من غرفة العائلة.

a. اكتب نظام معادلات من الدرجة الثانية تمثّل هذه الحالة.

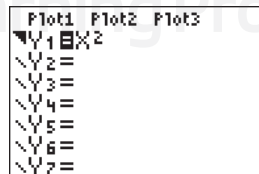
b. مثل بيانيًا النظام الذي جددته في القسم a، وقدر طول كل غرفة.

7b. طول غرفة العائلة
18 m، وطول المكتب
12 m

يمكن حلّ أنظمة المتباينات اللاخطية أيضًا باستخدام حاسبة تمثيل بياني. تذكر من من الوحدة 1 أنه يمكن تمثيل المتباينات بيانيًا باستخدام تعليمتي أكبر من وأصغر من القائمة $Y=$. يمكن العثور على رمز المتباينة عبر التمرير إلى يسار إشارة المساواة وضغط **ENTER** إلى أن تومض المثلثات المظللة. يمثّل المثلث في الأعلى التعليمية أكبر من ويمثّل المثلث في الأعلى التعليمية أصغر من. التمثيل البياني للدالة $y \geq x^2$ موضّح أدناه.



$[-10, 10]$ scl: 1 by $[-10, 10]$ scl: 1



```

0370 POINTS STO
1:ClrDraw
2:Line(
3:Horizontal
4:Vertical
5:Tangent(
6:DrawF
7:Shade(

```

يمكن تمثيل متباينات القطوع المخروطية التي ليست بدوال بيانية، كالقطوع الناقصة والدوائر وبعض القطوع الزائدة عبر استخدام تعليمة Shade من قائمة DRAW. المعلومات المفيدة المطلوبة هي .Shade(lowerfunc, upperfunc, Xleft, Xright, 3, 4)

ترسم هذه التعليمة دالة الحد الأدنى lowerfunc ودالة الحد الأعلى upperfunc بدلالة x . ثم تظلل المنطقة الواقعة فوق lowerfunc وتحت upperfunc وبين الحدّين الأيسر والأيمن Xleft و Xright. يحدّد المدخلان الأخيران 3 و 4 نوع التظليل ويمكن أن يبقيا ثابتين.

النشاط 2 نظام البيانات اللاحقة

حلّ نظام المتباينات بالتمثيل البياني.

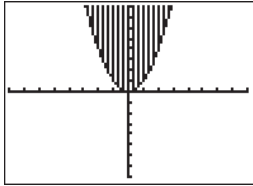
$$x^2 + y^2 \leq 36$$

$$y - x^2 > 0$$

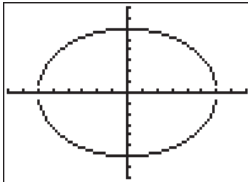
حلّ كل متباينة لإيجاد قيمة y .

الخطوة 1

$$y \leq \sqrt{36 - x^2} \text{ و } y \geq -\sqrt{36 - x^2}$$

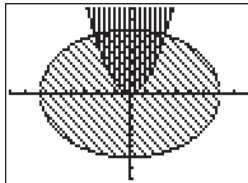


[-8, 8] scl: 1 by [-8, 8] scl: 1



[-8, 8] scl: 1 by [-8, 8] scl: 1

Shade(-sqrt(36-x^2),
sqrt(36-x^2), -6, 6, 3,
4)



[-8, 8] scl: 1 by [-8, 8] scl: 1

مثّل $y > x^2$ بيانياً وظلل المنطقة الصحيحة. شكّل رمز كل متباينة عبر التمرير إلى يسار إشارة المساواة واختار ENTER إلى أن تومض المثلثات المظلمة.

الخطوة 2

الخطوة 3 لتمثيل $x^2 + y^2 \leq 36$ بيانياً. فإن الحدّ الأدنى هو

$$y = -\sqrt{36 - x^2}$$

و الحدّ الأقصى هو $y = \sqrt{36 - x^2}$ يلتقي نصفا الدائرة عند $x = 6$ و $x = -6$ كما هو موضح.

الخطوة 4

من القائمة DRAW، اختر 7 Shade. Enter: Shade(-sqrt(36-x^2), sqrt(36-x^2), -6, 6, 3, 4)

حلّ النظام ممثّل من خلال المنطقة مضاعفة التظليل.

نصيحة تقنية

مسح الشاشة لمسح أي رسومات من شاشة الحاسبة. اختر ClrDraw من القائمة DRAW.

نصيحة دراسية

الحدّان الأيمن والأيسر إذا لم يكن الحدّان الأيمن والأيسر واضحين، أدخل قيمتين للنفاذة يفوقان كلا الحدّين. على سبيل المثال، إذا كان الحدّان هما $x = 5$ و $x = -10$ و 10 سيبقى يعطي التمثيل البياني الصحيح.

تمارين

حلّ كل من أنظمة المتباينات الآتية بالتمثيل البياني.

8. $2y^2 \leq 32 - 2x^2$
 $x + 4 \geq y^2$

9. $y + 5 \geq x^2$
 $9y^2 \leq 36 + x^2$

10. $x^2 + 4y^2 \leq 32$
 $4x^2 + y^2 \leq 32$

المعادلات الوسيطة

6-8

الدرس

لماذا؟

الآن

السابق



لقد استخدمت معادلات تربيعية لتمثيل مسارات المقذوفات لكرة التنس. ويمكن استخدام المعادلات الوسيطة أيضًا لتمثيل مسار المقذوفات ومداهما وتقديرهما.

تمثيل المعادلات الوسيطة بيانيًا

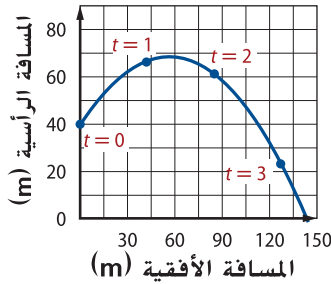
حلّ المعادلات المتصلة بحركة المقذوفات.

لقد قيمت بتمثيل الحركة باستخدام دوال تربيعية.

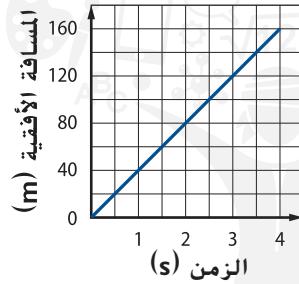
parametric equation
parameter
orientation
parametric curve

1 تمثيل المعادلات الوسيطة بيانيًا لقد تناولنا في هذا الكتاب إلى حدّ الآن التمثيل البياني لمنحنى في المستوى الإحداثي xy باستخدام معادلة واحدة تضم متغيرين هما x و y . في هذا الدرس سنتقدّم بعضًا من هذه التمثيلات البيانية نفسها باستخدام معادلتين وعبر إدخال متغير ثالث.

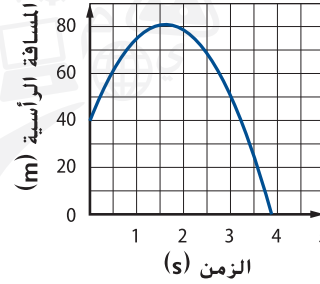
لنأخذ التمثيلين البيانيين المبينين أدناه، حيث يمثّل كلّ منهما نواحي مختلفة حول ما يحدث عند رمي جسم ما في الهواء. يبيّن الشكل 6.5.1 المسافة الرأسية التي قطعها الجسم كتابع للزمن. في حين يوضح الشكل 6.5.2 المسافة الأفقية التي قطعها الجسم كتابع للزمن. ويبيّن الشكل 6.5.3 المسافة الرأسية للجسم كتابع لمسافته الأفقية.



الشكل 6.5.3



الشكل 6.5.2



الشكل 6.5.1

حيث يخبرنا كلّ من هذه التمثيلات البيانية ومعادلتها عن جزء مما يحدث في هذه الحالة، ولكنّه لا يمثّل الحالة بأكملها. للتعبير عن موضع الجسم أفقيًا ورأسيًا بدلالة الزمن، يمكننا استخدام **المعادلات الوسيطة**. تمثّل كلتا المعادلتين المبينتين أدناه التمثيل البياني المبين في الشكل 6.5.3.

المعادلة بالصورة الديكارتية
في المستوى الإحداثي المتعامد
 $y = -\frac{2}{225}x^2 + x + 40$

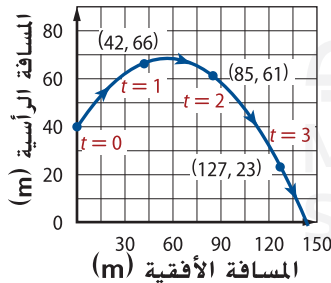
المعادلتان الوسيطيتان

$$x = 30\sqrt{2}t$$

المركبة الأفقية

$$y = -16t^2 + 30\sqrt{2}t + 40$$

المركبة الرأسية



من خلال المعادلتين الوسيطيتين، يمكننا تحديد الموضع الذي كان فيه الجسم عند زمن ما عبر تقدير المركبتين الأفقية والرأسية لـ t . فعلى سبيل المثال، عند $t = 0$ ، كان الجسم عند النقطة $(0, 40)$. يطلق على المتغير t اسم **وسيط**.

يرسم التمثيل البياني الموضح ضمن الفترة الزمنية $0 \leq t \leq 4$ إلى رسم منحنى إن التمثيل البياني للنقاط وفق الترتيب المتزايد لقيم t يؤدي إلى رسم منحنى يأخذ اتجاهًا محددًا يدعى **اتجاه** المنحنى. ويشار إلى هذا الاتجاه بواسطة أسهم على المنحنى كما هو موضح.

المفهوم الأساسي المعادلات الوسيطة

إذا كانت f و g دالتين متصلتين لـ t في الفترة I ، فإن مجموعة الأزواج المرتبة $(f(t), g(t))$ تمثل **منحنى وسيطياً**.

$$y = g(t) \text{ و } x = f(t)$$

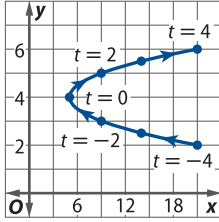
هما المعادلتان الوسيطيتان لهذا المنحنى، و t يرمز للوسيط، بينما I يرمز إلى فترة الوسيط.

المثال 1 التمثيل البياني لمنحنيات المعادلات الوسيطة

مثّل بيانيًا المنحنى المقابل لكل زوج من المعادلات الوسيطة في الفترة المعطاة.

a. $x = t^2 + 5$ و $y = \frac{t}{2} + 4$; $-4 \leq t \leq 4$

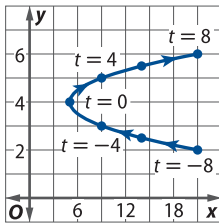
اصنع جدولًا بقيم $t \leq 4$ و $t \geq -4$ ثمّ مثّل الإحداثيات (x, y) المقابلة لكل قيمة من قيم t وصل النقاط لتشكيل منحنى منتظم. تشير الأسهم المرافقة للتمثيل البياني إلى توجيه المنحنى مع انتقال t من -4 إلى 4 .



t	x	y	t	x	y
-4	21	2	1	6	4.5
-3	14	2.5	2	9	5
-2	9	3	3	14	5.5
-1	6	3.5	4	21	6
0	5	4			

يمكن استخدام المعادلات الوسيطة لتمثيل المنحنيات التي ليست بدوّالٍ، كما هو موضح في المثال 1.

b. $x = \frac{t^2}{4} + 5$ و $y = \frac{t}{4} + 4$; $-8 \leq t \leq 8$



t	x	y	t	x	y
-8	21	2	2	6	4.5
-6	14	2.5	4	9	5
-4	9	3	6	14	5.5
-2	6	3.5	8	21	6
0	5	4			

تمرين موجّه

1A. $x = 3t$ و $y = \sqrt{t} + 6$; $0 \leq t \leq 8$

1B. $x = t^2$ و $y = 2t + 3$; $-10 \leq t \leq 10$

لاحظ أن المجموعتين المختلفتين من المعادلات الوسيطة الموضحة في المثال 1 تنتجان المنحنى نفسه. يختلف التمثيلان البيانيان من حيث سرعتيهما أو بالأحرى من حيث سرعة رسم كل منهما. إذا كانت t تمثّل الزمن بالثواني، يُرسم المنحنى في الجزء a خلال 16 ثانية، في حين يُرسم المنحنى في الجزء b خلال 8 ثوانٍ.

وثمة طريقة أخرى لتحديد المنحنى الممثل بمجموعة من المعادلات الوسيطة، وهي كتابة مجموعة المعادلات بالصورة الديكارتية في المستوى الإحداثي المتعامد. ويمكن القيام بذلك بالتعويض لحذف الوسيط.

المثال 2 الكتابة بالصورة الديكارتية في المستوى الإحداثي المتعامد

اكتب $x = -3t$ و $y = t^2 + 2$ في المستوى الإحداثي المتعامد.

لحذف الوسيط t ، حل $x = -3t$ لإيجاد قيمة t . وهذا يعطي $t = -\frac{1}{3}x$ ثمّ عوّض هذه القيمة بدّلًا من t في المعادلة الخاصة بـ y .

$y = t^2 + 2$ معادلة y

$= \left(-\frac{1}{3}x\right)^2 + 2$ بتعويض $-\frac{1}{3}x$ بدّلًا من t

$= \frac{1}{9}x^2 + 2$ بسّط

تعطي هذه المجموعة من المعادلات الوسيطة معادلة القطع المكافئ $y = \frac{1}{9}x^2 + 2$

تمرين موجّه

2. اكتب $x = t^2 - 5$ و $y = 4t$ بالصورة الديكارتية في المستوى الإحداثي المتعامد.

نصيحة دراسية
حذف الوسيط

في المثال 2، لاحظ أنه لم يجر تحديد فترة الوسيط الخاص بـ t . وفي حال عدم التحديد، تحدّد فترة الوسيط على أنها جميع قيم t التي تعطي قيمًا حقيقية لـ x و y .

وفي بعض الأحيان يجب أن يكون المجال مُقَيَّدًا بعد التحويل من الشكل الوسيطى إلى المستوى الإحداثى المتعامد.

المثال 3 المستوى الإحداثي المتعامد مع قيود المجال

اكتب $x = \frac{1}{\sqrt{t}}$ و $y = \frac{t+1}{t}$ بالصورة الديكارتية في المستوى الإحداثي المتعامد. ثم مثل المعادلة بيانياً. واذكر أي قيود خاصة بالمجال.

لحذف t ، رتب كل طرف للمعادلة $x = \frac{1}{\sqrt{t}}$. وهذا يعطي $x^2 = \frac{1}{t}$. إذا $t = \frac{1}{x^2}$ عوّض بهذه القيمة بدلاً من t في المعادلة الوسيطة الخاصة بـ y .

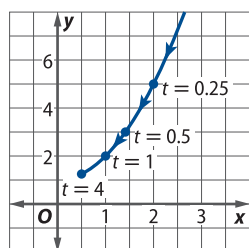
$$y = \frac{t+1}{t}$$

المعادلة الوسيطة الخاصة بـ y

بتعويض $\frac{1}{x^2}$ بدلاً من t

$$= \frac{\frac{x^2 + 1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}}$$

$$= x^2 + 1 \quad \text{بسط}$$



في حين أن المعادلة بالصورة الديكارتية في المستوى الإحداثي المتعامد هي $y = x^2 + 1$. فإن المنحنى معرّف فقط عند قيم $t > 0$ من المعادلة الوسيطة $x = \frac{1}{\sqrt{t}}$. القيم الممكنة فقط لـ x هي القيم الأكبر من الصفر. كما هو مبين في التمثيل البياني. فإن مجال المعادلة بالصورة الديكارتية في المستوى الإحداثي المتعامد ممتد بالقيم $x > 0$

تھریں موجہ

3. اكتب $x = \sqrt{t+4}$ و $y = \frac{1}{t}$ في المستوى الإحداثي المتعامد. ومثل المعادلة بيانيًا. واذكر أيّ فيوید على المجال.

ويمكن أن يكون الوسيط فى المعادلات الوسيطة زاوية مثل θ أيضًا.

المثال 4 المعادلات بالصورة الديكارتية في المستوى الإحداثي المتعامد باستخدام الوسيط θ

اكتب $x = 2 \cos \theta$ و $y = 4 \sin \theta$ في المستوى الإحداثي المتعامد. ثم مثل المعادلة بيانياً.

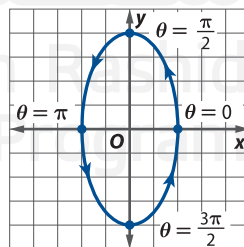
لحذف الوسيط θ . حلّ المعادلتين أولاً لإيجاد قيمة $\cos \theta$ و $\sin \theta$ كي تحصل على $\cos \theta = \frac{x}{2}$ و $\sin \theta = \frac{y}{4}$ ثم استخدم متطابقة فيثاغورس لحذف الوسيط θ .

$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ بتطبيق مطابقة فيثاغورس

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{4}\right)^2 = 1 \quad \cos \theta = \frac{x}{2} \text{ , } \sin \theta = \frac{y}{4}$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1 \quad \text{بسط}$$

عليك تنظيم هذه المعادلة وفق صيغة معادلة قطع ناقص يقع مركزه في نقطة الأصل ويقع رأساه عند النقطتين $(0, 4)$ و $(-4, 0)$ ويقع رأساه المرافقان عند النقطتين $(2, 0)$ و $(0, -2)$ كما هو موضح. مع تغير قيمة θ من 0 إلى 2π , يرسم القطع الناقص باتجاه معاكس لعقارب الساعة.



تھرین موجہ

4. اكتب $x = 3 \sin \theta$ و $y = 8 \cos \theta$ بالصورة الديكارتية في المستوى الإحداثي المتعامد. ثم ارسم التمثيل البياني.

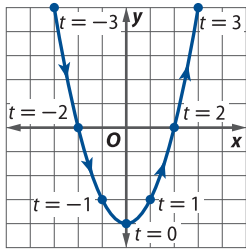
نصيحة تقنية

وسيطات عند التمثيل البياني للمعادلات الوسيطة على الحاسبة، يستخدم الرمز t و θ بصورة متبادلة.

كما رأيت في المثال 1، فإن التمثيلات الوسيطة للتمثيلات البيانية بالصورة الديكارتية في المستوى الإحداثي المتعامد ليست مميزة. حيث إن التبدل في تعريف الوسيط يعطيك معادلات وسيطة تنتج تمثيلات بيانية تختلف فقط من حيث سرعتها و/أو توجيهها.

المثال 5 كتابة المعادلات الوسيطة من التمثيلات البيانية

استخدم كل وسيط لكتابة المعادلات الوسيطة التي يمكن أن تمثل $y = x^2 - 4$.
ثم مثل المعادلة بيانياً، مع الإشارة إلى سرعة التمثيل وتوجيهها.



a. $t = x$

$$y = x^2 - 4$$

$$= t^2 - 4$$

المعادلة الأساسية

من المعادلة الأساسية: x بتعويض قيمة

المعادلتان الوسيطيتان هما $x = t$ و $y = t^2 - 4$ هما المشار إليهما على التمثيل البياني. السرعة والتوجيه المرافقان للمنحنى مشائر إليهما على التمثيل البياني.

b. $t = 4x + 1$

$$x = \frac{t-1}{4}$$

قم بإيجاد قيمة x

$$y = \left(\frac{t-1}{4}\right)^2 - 4$$

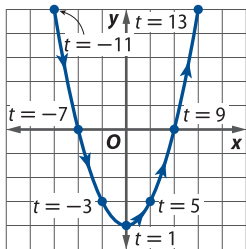
$$= \frac{t^2}{16} - \frac{t}{8} - \frac{63}{16}$$

بتعويض قيمة x في المعادلة الأساسية

بسط

$$y = \frac{t^2}{16} - \frac{t}{8} - \frac{63}{16} \text{ و } x = \frac{t-1}{4}$$

لاحظ أن السرعة أبداً بكثير منها في القسم a.



c. $t = 1 - x - 4$

$$4 - 4t = x$$

قم بإيجاد قيمة x

$$y = (4 - 4t)^2 - 4$$

$$= 16t^2 - 32t + 12$$

بتعويض قيمة x من المعادلة الأساسية

بسط

المعادلتان الوسيطيتان هما $x = 4 - 4t$ و $y = 16t^2 - 32t + 12$ لاحظ أن السرعة أكبر بكثير منها في القسم a. كما أن التوجيه معكوس أيضاً كما تشير الأسهم.

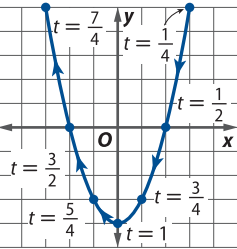
تدريبات موجّهة

استخدم كل وسيط لتحديد المعادلات الوسيطة التي يمكن أن تمثل $x = 6 - y^2$.
ثم مثل المعادلة بيانياً، مع الإشارة إلى السرعة والتوجيه.

5A. $t = x + 1$

5B. $t = 3x$

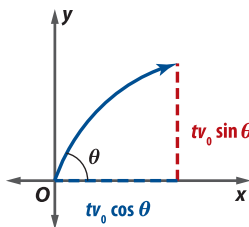
5C. $t = 4 - 2x$



2 حركة المقذوفات

تستخدم المعادلات الوسيطة في أغلب الأحيان لمحاكاة حركة المقذوفات. ويمكن تمثيل مسار مقذوف أُطلق بزاوية مغايرة لـ 90° مع خط الأفق بمعادلتين وسيطيتين.

المفهوم الأساسي حركة المقذوف



أطلق جسم صائناً زاوية θ مع خط الأفق وبسرعة ابتدئية v_0 . حيث g ترمز إلى ثابت الجاذبية الأرضية، و t ترمز إلى الزمن و h_0 ترمز إلى الارتفاع الابتدائي:

$$x = tv_0 \cos \theta$$

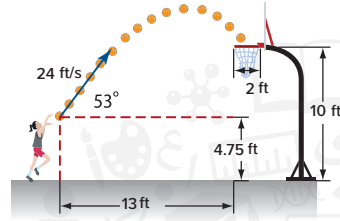
المسافة الأفقية

$$y = tv_0 \sin \theta - \frac{1}{2}gt^2 + h_0$$

الموقع الرأسى

كرة السلة تتميز خديجة على الرميات الحرة من أجل مباراة كرة السلة القادمة. حيث ترمي الكرة بسرعة متجهة ابتدائية تساوي 24 ft/s وبزاوية 53° بالنسبة خط الأفق. تساوي المسافة الأفقية من قوس الرميات الحرة إلى الحافة الأمامية من حلقة السلة 13 ft. والمسافة الرأسية من الأرضية إلى حلقة السلة 10 ft. تبعد الحافة الأمامية للحلقة مسافة 2 ft عن لوحة الهدف. ترمي خديجة الكرة عن ارتفاع 4.75 ft عن الأرض. فهل سوف تسجل؟

شكّل تمثيلًا بيانيًا للحالة.

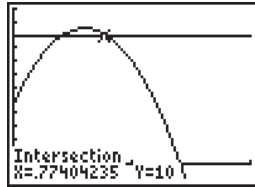


لتحديد ما إن كانت خديجة سوف تسجل الرمية، فإنك بحاجة إلى المسافة الأفقية التي قطعها الكرة حين كانت عند ارتفاع 10 m. أولاً، اكتب معادلةً وسيطيةً تمثل الموقع الرأسى للكرة.

$$y = tv_0 \sin \theta - \frac{1}{2}gt^2 + h_0$$

المعادلة الوسيطة للموقع الرأسى

$$h_0 = 4.75 \text{ و } g = 32 \text{ و } \theta = 53^\circ \text{ و } v_0 = 24$$



[0, 2] scl: 1 by [0, 12] scl: 1

$$x = tv_0 \cos \theta$$

$$= 0.77(24) \cos 53$$

$$\approx 11.1$$

المعادلة الوسيطة للموقع الأفقي

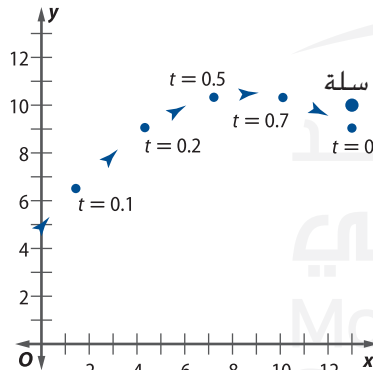
$$t \approx 0.77 \text{ و } \theta = 53^\circ \text{ و } v_0 = 24$$

باستخدام الحاسبة

حدّد الموقع الأفقي للكرة عند الزمن 0.77 s

نظرًا إلى أن الموقع الأفقي الأصغر من 13 ft عند بلوغ الكرة ارتفاع 10 ft للمرة الثانية، فلن تبلغ الكرة السلة. ولن تسجل خديجة الرمية.

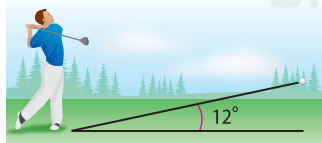
التحقق يمكنك التأكد من حسابك عبر التمثيل البياني للمعادلات الوسيطة وتحديد مسار الكرة بالنسبة للسلة.



t	x	y	t	x	y
0	0	4.75	0.5	7.22	10.33
0.1	1.44	6.51	0.6	8.67	10.49
0.2	2.89	7.94	0.7	10.11	10.32
0.3	4.33	9.06	0.8	11.55	9.84
0.4	5.78	9.86	0.9	13.00	9.04

تمرين موجّه

6. لعبة الجولف يضرب سعيد كرة الجولف بسرعة ابتدائية تساوي 56 m/s وبزاوية مقدارها 12° فوق أرض مستوية. عند أي مسافة ستحتّ الكرة على الأرض؟



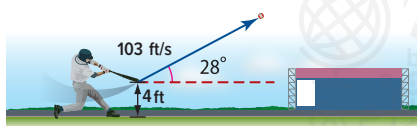
الربط بالحياة اليومية

في شهر أبريل من عام 2007، أصبحت مورغان بريسل أصغر امرأة على الإطلاق تفوز ببطولة اتحاد الجولف للسيدات المحترفات أو ما يعرف بـ LPGA. المصدر: بطولة اتحاد الجولف للسيدات المحترفات

استخدم كل وسيط لكتابة المعادلات الوسيطة التي يمكن أن تمثل كل معادلة. ثم مثل المعادلات بيانيًا، مع الإشارة إلى سرعة الرسم البياني وتوجيهه.
(المثال 5)

$$\begin{array}{ll} 26. t = 3x - 2; y = x^2 + 9 & 27. t = 8x; y^2 = 9 - x^2 \\ 28. t = 2 - \frac{x}{3}; y = \frac{x^2}{12} & 29. t = \frac{x}{5} + 4; y = 10 - x^2 \\ 30. t = 4x + 7; y = \frac{x^2 - 1}{2} & 31. t = \frac{1 - x}{2}; y = \frac{3 - x^2}{4} \end{array}$$

32. **البيسبول** يضرب لاعب كرة البيسبول بزاوية 28° وبسرعة ابتدائية تساوي 103 ft/s . يرتفع موقع ضرب الكرة مسافة 4 ft عن الأرض في لحظة اصطدام المضرب بالكرة. على فرض أن أحدًا من اللاعبين لم يمسك الكرة، حدد المسافة التي تقطعها الكرة.
(المثال 6)



33. **لعبة الكرة** يحاول عبيد إصابة هدف بعيد 43 yd فيركل الكرة بزاوية 41° وبسرعة ابتدائية تساوي 70 ft/s . ارتفاع الهدف 15 ft فهل ركلته طويلة بما يكفي لإصابة الهدف؟ (المثال 6)

اكتب كل زوج من المعادلات الوسيطة بالصورة الديكارتية في المستوى الإحداثي المتعامد. ثم اذكر أي قيود على المجال.

$$\begin{array}{ll} 34. x = \sqrt{t} + 4 & 35. x = \log t \\ y = 4t + 3 & y = t + 3 \\ 36. x = \sqrt{t - 7} & 37. x = \log(t - 4) \\ y = -3t - 8 & y = t \\ 38. x = \frac{1}{\sqrt{t + 3}} & 39. x = \frac{1}{\log(t + 2)} \\ y = t & y = 2t - 4 \end{array}$$

40. **التنس** يضرب مازن كرة مضرب عند ارتفاع 55 cm عن الأرض وبزاوية 15° مع خط الأفق. السرعة الابتدائية للكرة 18 m/s .
a. استخدم حاسبة التمثيل البياني لتمثيل مسار كرة المضرب باستخدام المعادلات الوسيطة.
b. كم تبقى الكرة في الهواء قبل أن تصل الأرض؟
c. إذا كان مازن يبعد 10 m عن الشبكة، وكان ارتفاع الشبكة 1.5 m عن الأرض، فهل ستعبر الكرة فوق الشبكة؟ وإن كان ذلك، بكم متر ستخطي الكرة الشبكة؟ وإن لم يكن ذلك، فما مسافة اصطدام الكرة بالأرض قبل الشبكة؟

اكتب مجموعة معادلات وسيطة لكل مستقيم أو قطعة مستقيمة مما يلي وفق الخواص التالية.

41. مستقيم ميله 3 يمر بالنقطة $(4, 7)$
42. مستقيم ميله -0.5 يمر بالنقطة $(3, -2)$
43. قطعة مستقيمة طرفاها النقطتان $(-2, -6)$ و $(2, 10)$
44. قطعة مستقيمة طرفاها النقطتان $(7, 13)$ و $(13, 11)$

مثل بيانيًا المنحنى المعطى لكل زوج من المعادلات الوسيطة في الفترة المعطاة. (المثال 1)

$$\begin{array}{l} 1. x = t^2 + 3 \text{ و } y = \frac{t}{4} - 5; -5 \leq t \leq 5 \\ 2. x = \frac{t^2}{2} \text{ و } y = -4t; -4 \leq t \leq 4 \\ 3. x = -\frac{5t}{2} + 4 \text{ و } y = t^2 - 8; -6 \leq t \leq 6 \\ 4. x = 3t + 6 \text{ و } y = \sqrt{t} + 1; 0 \leq t \leq 9 \\ 5. x = 2t - 1 \text{ و } y = -\frac{t^2}{2} + 7; -4 \leq t \leq 4 \\ 6. x = -2t^2 \text{ و } y = \frac{t}{3} - 6; -6 \leq t \leq 6 \\ 7. x = \frac{t}{2} \text{ و } y = -\sqrt{t} + 5; 0 \leq t \leq 8 \\ 8. x = t^2 - 4 \text{ و } y = 3t - 8; -5 \leq t \leq 5 \end{array}$$

اكتب كل زوج من المعادلات الوسيطة بالصورة الديكارتية في المستوى الإحداثي المتعامد. ثم مثل المعادلة بيانيًا واذكر أي قيود على المجال. (المثالان 2 و 3)

$$\begin{array}{l} 9. x = 2t - 5, y = t^2 + 4 \\ 10. x = 3t + 9, y = t^2 - 7 \\ 11. x = t^2 - 2, y = 5t \\ 12. x = t^2 + 1, y = -4t + 3 \\ 13. x = -t - 4, y = 3t^2 \\ 14. x = 5t - 1, y = 2t^2 + 8 \\ 15. x = 4t^2, y = \frac{6t}{5} + 9 \\ 16. x = \frac{t}{3} + 2, y = \frac{t^2}{6} - 7 \end{array}$$

17. **الممثلون البدلاء** خلال تصوير أحد الأفلام، يقفز أحد الممثلين البدلاء من حافة أحد المباني. وتؤدي البكرات المربوطة بالممثل البدلي إلى سقوطه سقوطًا حُرًا يمكن تمثيله بالمعادلة $y = -16t^2 + 15t$ وفيها $x = 4t$ وتمثلها بالمعادلة $x = 4t$ وتقاسان بالمتري t تقاس بالثواني. اكتب معادلة بالصورة الديكارتية في المستوى الإحداثي المتعامد ومثلها بيانيًا لتمثيل سقوط الممثل من أجل $t \geq 0$ (المثال 3)

اكتب كل زوج من المعادلات الوسيطة بالصورة الديكارتية في المستوى الإحداثي المتعامد. ثم مثل المعادلة بيانيًا. (المثال 4)

$$\begin{array}{l} 18. x = 3 \cos \theta \text{ و } y = 5 \sin \theta \\ 19. x = 7 \sin \theta \text{ و } y = 2 \cos \theta \\ 20. x = 6 \cos \theta \text{ و } y = 4 \sin \theta \\ 21. x = 3 \cos \theta \text{ و } y = 3 \sin \theta \\ 22. x = 8 \sin \theta \text{ و } y = \cos \theta \\ 23. x = 5 \cos \theta \text{ و } y = 6 \sin \theta \\ 24. x = 10 \sin \theta \text{ و } y = 9 \cos \theta \\ 25. x = \sin \theta \text{ و } y = 7 \cos \theta \end{array}$$

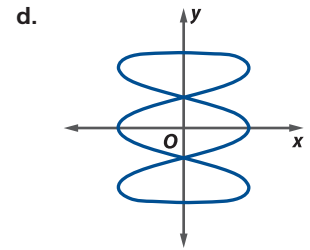
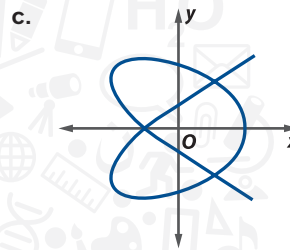
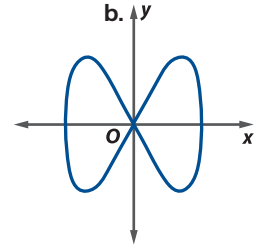
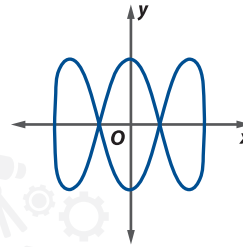
صل بين كل مجموعة من المعادلات الوسيطة وتمثيلها البياني المقابل.

45. $x = \cos 2t, y = \sin 4t$

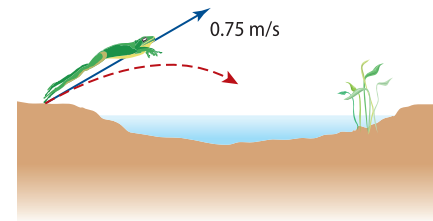
46. $x = \cos 3t, y = \sin t$

47. $x = \cos t, y = \sin 3t$

48. $x = \cos 4t, y = \sin 3t$



49. **علم الأحياء** يقفز ضفدع من ضفة جدول بسرعة ابتدائية تساوي 0.75 m/s وبزاوية قياسها 45° بالنسبة للاتجاه الأفقي. يقع سطح الجدول على بعد 0.3 m تحت حافة الضفة. إذا كانت g تساوي 9.8 m/s^2 .



a. اكتب المعادلة الوسيطة التي تصف موقع الضفدع عند الزمن t . وافترض أن سطح الماء يقع على المستقيم $y = 0$.

b. إذا كان عرض الجدول 0.5 m . فهل سيبلغ الضفدع الضفة الثانية التي تقع على مستوى الجدول نفسه؟ وإن لم يكن ذلك، فكم تبعد نقطة اصطدام الضفدع بالماء عن الضفة الأخرى؟

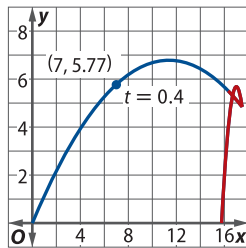
c. إذا استطاع الضفدع أن يقفز على ورقة زنبق تطفو فوق سطح الجدول وتبعد مسافة 0.4 m عن موقع القفز، واستغرق كي يبلغها 0.38 s . فكم كانت السرعة الابتدائية للضفدع؟

50. **السباق** تتنافس هالة وهداية في سباق 100 m. وبعد إطلاق رصاصة الانطلاق، تنطلق هالة بسرعة 0.8 m/s^2 بعد تأخير لمدة 0.1 s من النقطة (0, 2) وتنطلق هداية بسرعة 8.1 m/s^2 بعد تأخير لمدة 0.3 s من النقطة (0, 5).

a. باستخدام المحور الرأسي y بمثابة خط البداية وعلى فرض أن الفتاتين تركضان ببؤازة المحور الأفقي x ، اكتب معادلتين وسيطيتين تمثلان موقع كل منهما بعد t نوان.

b. من ستفوز بالسباق؟ إذا ركضت الفتاتان مسافة 200 m بدلاً من 100 m، فمن ستفوز؟ اشرح اجابتك.

51. **كرة القدم** يمثّل التمثيل البياني المبيّن أدناه مسار كرة ركلها أحد اللاعبين ومن ثمّ ضربها لاعب آخر برأسه. مسار الكرة بعد ركلها من قبل اللاعب الأول موضح باللون الأزرق. ومسارها بعد ضربها بالرأس من قبل اللاعب الثاني موضح باللون الأحمر.



a. إذا ركل اللاعب الأول الكرة بزاوية 50° ، جد سرعتها الابتدائية.

b. ما هو زمن وصول الكرة إلى اللاعب الثاني إذا كان يقف على بعد 17.5 ft؟

c. إذا ضرب اللاعب الثاني الكرة برأسه بزاوية قياسها 75° وبسرعة ابتدائية تساوي 8 ft/s عند ارتفاع 4.75 ft . فكم تبقى الكرة في الهواء على وجه التقريب بدءاً من لحظة ركلها أول مرة وحتى هبوطها إلى الأرض؟

52. **التمثيلات المتعددة** سوف تدرس في هذه المسألة الدويري، وهو المنحنى الذي يرسمه مسار نقطة على محيط دائرة نصف قطرها وحدة واحدة أثناء درجتها على طول المحور الأفقي x .

a. **بياناً** استخدم حاسبةً بيانيةً لتمثيل المعادلتين الوسيطيتين $x = t - \sin t$ و $y = 1 - \cos t$ وفيهما t تقاس بالقياس الدائري (الراديان).

b. تحليليًا ما المسافة بين نقطتي التقاطع مع المحور الأفقي x ؟
صِف ماذا تمثل نقطتا التقاطع مع المحور الأفقي x وماذا تمثل
المسافة بينهما.

c. تحليليًا ما القيمة العظمى لـ y ؟ صف ما تمثله هذه القيمة وكيف تتغير بالنسبة لدوائر ذات أنصاف أقطار مختلفة.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدم مهارات التفكير العليا

53. **تحذّر** خذ المستقيم ℓ ذا المعادلتين الوسيطيتين $x = 2 + 3t$ و $y = -t + 5$ اكتب مجموعة معادلات وسيطة للمستقيم m الموازي لـ ℓ والذي يضم النقطة $(4, 10)$.

54. **الكتابة في الرياضيات** اشرح السبب في وجود عددٍ لا نهائيٍّ من مجموعات المعادلات الوسيطة لوصف مستقيمٍ في المستوى xy .

55. **التبرير** حدّد إن كانت المعادلات الوسيطة الخاصة بحركة المقذوفات يمكن أن تنطبق على أجسام ترمى بزاوية قياسها 90° . اشرح استنتاجك.

56. **تحذّر** لدينا مستقيم في الفضاء ثلاثي الأبعاد يضم النقطتين $P(2, 3, -8)$ و $Q(-1, 5, -4)$. جد مجموعتي المعادلات الوسيطة للمستقيم.

57. **الكتابة في الرياضيات** اشرح أفضلية استخدام المعادلات الوسيطة على استخدام المعادلات بالصورة الديكارتية في المستوى الإحداثي عند تحليل المركبتين الأفقية/الرأسية لتمثيل بياني.

مثّل كل معادلة عند الزاوية المشار إليها.

59. $(x')^2 - (y')^2 = 1$ عند الدوران بزاوية 45° من المحور xy .

58. $\frac{(x')^2}{9} - \frac{(y')^2}{4} = 1$ عند الدوران بزاوية 60° من المحور xy .

اكتب معادلة تمثّل القطع الزائد ضمن الخواص التالية.

61. طول محوره القاطع 4؛ ويؤرثاه $(3, 5)$, $(3, -1)$.

60. رأساه $(5, -8)$, $(5, 4)$ ؛ وطول محوره المرافق 4.

62. البيت الأبيض ثمة مساحة مفتوحة يطلق عليها القطع الناقص. اكتب معادلة لتمثيل القطع الناقص. افترض أن نقطة الأصل هي مركز القطع الناقص.

حوّل كلّ من التعبيرات التالية إلى أبسط صورة.

63. $\frac{\sin x}{\csc x - 1} + \frac{\sin x}{\csc x + 1}$

64. $\frac{1}{1 - \cos x} + \frac{1}{1 + \cos x}$

استخدم خواص اللوغاريتمات لإعادة كتابة كل لوغاريتم من اللوغاريتمات المبينة أدناه وفق الصيغة

$a \ln 2 + b \ln 3$ حيث a و b ثابتان. ثمّ قدّر قيمة كل لوغاريتم إذا علمت أن $\ln 2 \approx 0.69$ و $\ln 3 \approx 1.10$

65. $\ln 54$

66. $\ln 24$

67. $\ln \frac{8}{3}$

68. $\ln \frac{9}{16}$

لكل دالة، حدّد أي خطوط تقاربي ونقاط تقاطع. ثمّ مثّل الدالة واذكر مجالها.

69. $h(x) = \frac{x}{x+6}$

70. $h(x) = \frac{x^2 + 6x + 8}{x^2 - 7x - 8}$

71. $f(x) = \frac{x^2 + 8x}{x+5}$

72. $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 3}{x^3 + x^2 - 6x}$

حلّ كل من المعادلات التالية.

73. $\sqrt{3z-5} - 3 = 1$

74. $\sqrt{5n-1} = 0$

75. $\sqrt{2c+3} - 7 = 0$

76. $\sqrt{4a+8} + 8 = 5$

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

78. يقوم صالح و سلطان بتجربة في الفيزياء يطلقان خلالها نموذج صاروخ. من المفروض أن يحترق الصاروخ مظلة عند ارتفاع 91.5 m في الهواء، وبعد 7 s من الإقلاع. يطلق الطالبان الصاروخ عند زاوية قياسها 78° بالنسبة للاتجاه الأفقي. ولحماية الطلاب الآخرين من الصاروخ الساقط، يحتاج المعلم إلى وضع شارات تحذيرية على بعد 45.7 m من موضع تحرير المظلة. فكم ينبغي أن تبعد الإشارات التحذيرية عن نقطة إطلاق الصاروخ؟

- F 111.6 m
G 116.2 m
H 121.6 m
J 126.2 m

77. SAT/ACT باستثناء المربعات المظللة، يحوي كل مربع في التمثيل البياني عددًا يساوي مجموع العدد الموجود في المربع الواقع فوقه والعدد الموجود في المربع الواقع إلى يساره. فعلى سبيل المثال، العدد 4 في المربع غير المظلل هو مجموع العدد 2 الموجود في المربع الواقع فوقه والعدد 2 في المربع الواقع إلى يساره مباشرة. ما قيمة X؟

0	1	2	3	4	5
1	2	4			
2					
3			x		
4					
5					

A 7

B 8

C 15

D 23

E 30

79. إجابة حرة يتحرّك جسم على طول منحني معادلته الوسيطيتين $x = \sqrt{t}$, $y = \frac{10\sqrt{3t} \pm \sqrt{496 - 2304t}}{62}$

a. حوّل المعادلتين الوسيطيتين إلى معادلتين بالصورة الديكارتية في المستوى الإحداثي المتعامد.

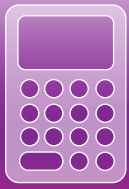
b. حدّد القطع المخروطي الذي يمثّله المنحنى.

c. اكتب معادلة تمثّل المنحنى في المستوى xy . على فرض أنه تمّ دورانه بزاوية 30° .

d. حدّد الاختلاف المركزي للقطع المخروطي.

e. حدّد موقع البؤرتين في المستوى xy إن وجدت.

مختبر تقنية التمثيل البياني النمذجة باستخدام المعادلات الوسيطة



الهدف

- استخدام حاسبة التمثيل البياني لتمثيل الدوال بارامترياً.

كما هو مبين في الدرس 6-7، يمثل المتغير المستقل t في المعادلات الوسيطة الزمن. ويعكس هذا الوسيط سرعة رسم التمثيل البياني. إذا أُتِمَّ تمثيل بياني خلال زمن $0 \leq t \leq 10$ ، في حين استغرق إتمام تمثيل بياني مطابق له الزمن $0 \leq t \leq 10$ ، إذا فإن التمثيل البياني الأول أسرع.

النشاط التمثيل البياني الوسيطي

لعبة الكرة يقف عمر بجوار شقيقته نورا و يرميان كرة في الزمن نفسه تماماً. ترمي نورا الكرة عند سرعة ابتدائية تساوي 20 m/s وبزاوية قياسها 60° . ويرمي عمر الكرة عند سرعة ابتدائية تساوي 15 m/s وبزاوية قياسها 45° . على فرض أن الكرتين ترميان من الارتفاع الابتدائي نفسه، مثل الرميّتين على حاسبة للتمثيل البياني.

الخطوة 1

المعادلات الوسيطة لكل رمية هي كالتالي:

$$\begin{aligned} \text{نورا: } x &= 20t \cos 60 & y &= 20t \sin 60 - 4.9t^2 \\ &= 10t & &= 10\sqrt{3}t - 4.9t^2 \\ \text{عمر: } x &= 15t \cos 45 & y &= 15t \sin 45 - 4.9t^2 \\ &= 7.5\sqrt{2}t & &= 7.5\sqrt{2}t - 4.9t^2 \end{aligned}$$

الخطوة 2

ضبط النمط. من القائمة **MODE** اختر **degree** و **par** و **simul**. وهذا يتيح تمثيل المعادلات بيانياً في الوقت نفسه. أدخل المعادلات الوسيطة. في الصيغة الوسيطة، تستخدم **X,T,θ,n** الرمز t بدلاً من x . اضبط إظهار المجموعة الثانية من المعادلات على الوضعية المظلمة للتمييز بين الرميات.

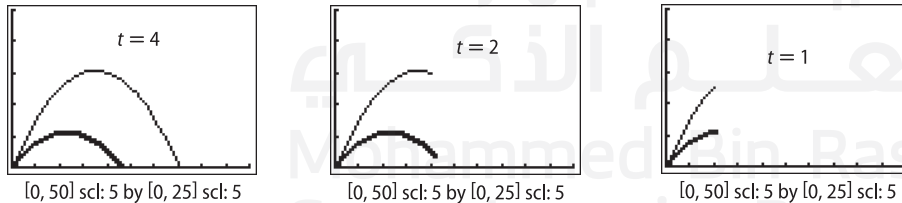


الخطوة 3

اضبط قيم t لتتراوح بين 0 و 8 بمثابة تقدير لمدد الرمي. اضبط $tstep$ على 0.1 لتشاهد الرميات على التمثيل البياني.

الخطوة 4

مثل المعادلات بيانياً.



ترتفع رمية نورا أكثر تقطع مسافة أكبر في حين تحط رمية عمر على الأرض أولاً.

نصيحة دراسية

ضبط الوسيطات استخدم الحالة الواردة في المعادلة بمثابة دليل إرشادي لضبط مجال قيم x و y و t .

نموذج الإجابة: عند $t = 2.5 \text{ s}$ تكون الكرتان عند الارتفاع نفسه تقريباً. عند حوالي $t = 3.25 \text{ s}$ تكون رمية نوال قد قطعت المسافة الأفقية نفسها التي قطعتها رمية أمين. وعند $t = 3.25 \text{ s}$ تكون رمية أمين قد حطت للتو على الأرض بينما تكون رمية نوال لا تزال في الهواء.

تمارين

- لعبة الكرة** بلغت سرعة رمية عمر التالية 21 m/s عند زاوية قياسها 50° . وبعد مرور ثانية واحدة، رمت نورا كرتها بسرعة 24 m/s عند زاوية قياسها 35° . مثل الرميّتين على حاسبة للتمثيل البياني وفشر النتائج.
- البيسبول** رمت نورا كرة بيسبول بسرعة 27 m/s وبزاوية قياسها 82° . وبعد مرور ثانية واحدة، ضرب عمر كرة بسرعة 45 m/s وبزاوية قياسها 20° . فعلى فرض أن الكرتين لا تزالان متجاورتين وأن الارتفاع الابتدائي لضربة عمر أخفض بمتر واحد، مثل الموقف على حاسبة للتمثيل البياني وفشر النتائج.

دليل الدراسة والمراجعة

دليل الدراسة

المفاهيم الأساسية

القطع المكافئ (الدرس 6-1)

- الصيغة القياسية: $y = a(x - h)^2 + k$
- $x = a(y - k)^2 + h$

الدوائر (الدرس 6-2)

- يمكن كتابة معادلة دائرة بمركز (h, k) ونصف قطر r في الصيغة $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

القطع الناقص (الدرس 6-3)

- الصيغة القياسية: أفقي $\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$
- رأسي $\frac{(y - k)^2}{a^2} + \frac{(x - h)^2}{b^2} = 1$

القطع الزائد (الدرس 6-4)

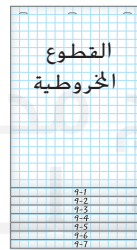
- الصيغة القياسية: أفقي $\frac{(x - h)^2}{a^2} - \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$
- رأسي $\frac{(y - k)^2}{a^2} - \frac{(x - h)^2}{b^2} = 1$

حل الأنظمة الخطية وغير الخطية (الدرس 6-6)

- يمكن حل نظام المعادلات التربيعية باستخدام التعويض والحذف.
- ويمكن أن يكون لنظام المعادلات التربيعية حلاً أو اثنين أو ثلاثة أو أربعة أو لا يكون لها حلاً على الإطلاق.

مطويات منظم الدراسة

تأكد من إدراج المفاهيم الأساسية في المطوية.



الدوران المحوري للقطوع المخروطية (الدرس 6-7)

- يمكن تحويل معادلة في المستوى xy إلى معادلة في المستوى $x'y'$ باستخدام العلاقة $y = x' \sin \theta + y' \cos \theta$ و $x = x' \cos \theta - y' \sin \theta$
- يمكن تحويل معادلة في المستوى $x'y'$ إلى معادلة في المستوى xy باستخدام العلاقات $x = x' \cos \theta + y' \sin \theta$ و $y = y' \cos \theta - x' \sin \theta$

المعادلات الوسيطة (الدرس 6-8)

- تستخدم المعادلات الوسيطة لوصف المركبتين الأفقية والرأسية لمعادلة على نحو منفصل، وذلك بدلالة المتغير t بصورة عامة.
- بالنسبة لجسم قُذِفَ بزاوية θ مع خط الأفق وبسرعة متجهة ابتدائية v_0 ، حيث أن g ثابت الجاذبية الأرضية و t الزمن و h_0 الارتفاع الابتدائي، فإن مسافته الرأسية تعطى بالعلاقة $x = tv_0 \cos \theta$ ، وتعطى مسافته الأفقية بالعلاقة $y = tv_0 \sin \theta - \frac{1}{2}gt^2 + h_0$

المفردات الأساسية

foci of an ellipse	بؤرتا القطع الناقص	center of a circle	مركز الدائرة
focus	بؤرة	center of an ellipse	مركز القطع الناقص
hyperbola	قطع زائد	circle	دائرة
latus rectum	وتر بؤري عمودي	conjugate axis	محور مرافق
major axis	محور أكبر	constant difference	فرق ثابت
minor axis	محور أصغر	constant sum	مجموع ثابت
parabola	قطع مكافئ	رؤوس مرافقة للقطع الزائد	رؤوس مرافقة للقطع الزائد
radius	نصف القطر	co-vertices of a hyperbola	رؤوس مرافقة للقطع الناقص
transverse axis	محور قاطع	co-vertices of an ellipse	رؤوس مرافقة للقطع الناقص
رؤوس القطع الزائد		directrix	دليل
vertices of a hyperbola		ellipse	قطع ناقص
رؤوس القطع الناقص		بؤرتا القطع الزائد	
vertices of an ellipse		foci of a hyperbola	بؤرتا القطع الزائد
Parametric curve	المنحنى الوسيطي	Center	المركز
Parametric equation	معادلة وسيطية	Eccentricity	المركزي الاختلاف
محور التماثل	محور التماثل	Axis of symmetry	محور التماثل
Eccentricity	المركزي الاختلاف	Center	المركز
Parametric Equation	المعادلة الوسيطة		
Parametric Curve	المنحنى الوسيطي		

مراجعة المفردات

حدد ما إذا كانت كل عبارة صحيحة أم خاطئة. إذا كانت خاطئة، فاستبدل المصطلح الموضوع تحته خط لتكوين عبارة صحيحة.

- مجموعة جميع النقاط في المستوى التي تقع على بعد متساوٍ من نقطة محددة، تسمى البؤرة يُطلق عليها المركز.
- القطع الناقص هو مجموعة جميع النقاط في مستوي والتي يكون مجموع بعدي كلٍ منها عن نقطتين ثابتتين ثابتًا.
- النقاط الطرفية للمحور الأكبر لقطع ناقص هما بؤرتا القطع الناقص.
- نصف القطر هو المسافة من مركز الدائرة لأي نقطة عليها.
- يطلق على القطعة المستقيمة ذات النقاط الطرفية على قطع مكافئ البارة من بؤرة القطع المكافئ والعمودية على محور التماثل اسم وتر بؤري عمودي.
- لكل قطع زائد محورا تماثل، محور قاطع ومحور أكبر.
- الدليل هي مجموعة جميع النقاط في مستوى والتي تقع على مسافة واحدة من نقطة محددة في ذلك المستوى.
- القطع الزائد هو مجموعة جميع النقاط في مستوي والتي تكون القيمة المطلقة لمجموع البعد من أي نقطة على القطع الزائد إلى نقطتين محددين ثابتًا.
- يمكن تعريف القطع المكافئ على أنه مجموعة جميع نقاط المستوى التي تبعد مسافةً واحدةً عن البؤرة ومستقيمٍ محدد يدعى الدليل.
- المحور الأكبر هو المحور الأطول من محوري التناظر لقطع ناقص.
- يمكن كتابة معادلة أي تمثيل بياني بواسطة المتغيرين x و y أو باستخدام المعادلات الوسيطية مع استخدام الرمز t أو الزاوية θ .
- التمثيل البياني للعلاقة $f(t) = (\sin t, \cos t)$ هو — — — على شكل دائرة ترسم باتجاه عقارب الساعة.

مراجعة درس بدرس

6-1 القطع المكافئ

مثال 1

اكتب $3y - x^2 = 4x + 7$ في الصيغة القياسية. حدد رأس القطع المكافئ ومحور تماثله واتجاه فتحته.

اكتب المعادلة في الصيغة $y = a(x - h)^2 + k$ بإكمال المربع.

$$3y = x^2 + 4x + 7$$

$$3y = (x^2 + 4x + \blacksquare) + 7 - \blacksquare$$

$$3y = (x^2 + 4x + 4) + 7 - 4 \quad \left(\frac{4}{2}\right)^2 = 4$$

$$3y = (x + 2)^2 + 3$$

$$y = \frac{1}{3}(x + 2)^2 + 1$$

الرأس: $(-2, 1)$ ؛ محور التماثل: $x = -2$ ؛ اتجاه الفتحة: لأعلى حيث $a > 0$.

اعزل الحد الذي يحوي x .

أكمل المربع.

$$\frac{(4}{2})^2 = 4$$

$$(x^2 + 4x + 4) = (x + 2)^2$$

اقسم كل طرف على 3.

مثّل كل معادلة بيانيًا.

13. $y = 3x^2 + 24x - 10$

14. $3y - x^2 = 8x - 11$

15. $x = \frac{1}{2}y^2 - 4y + 3$

16. $x = y^2 - 14y + 25$

اكتب كل معادلة بالصيغة القياسية. حدد رأس القطع المكافئ ومحور تماثله واتجاه فتحته.

17. $y = -\frac{1}{2}x^2$

18. $y = 4x^2 - 16x + 9$

19. $x - 6y = y^2 + 4$

20. $x = y^2 + 14y + 20$

21. **الرياضة** عندما تُركل كرة قدم، فإنها تتحرك في مسار له شكل قطع مكافئ. افترض أن كرة القدم زُكّلت من مستوى الأرض ووصلت إلى أقصى ارتفاع وهو 50 ft. ثم هبطت على الأرض على بعد 200 ft. وبافتراض أنه تم ركل الكرة من نقطة الأصل، اكتب معادلة القطع المكافئ التي تمثل رحلة الكرة.

6-2 الدوائر

مثال 2

جد مركز الدائرة ونصف قطرها عن طريق معادلة $x^2 - 2x + y^2 + 6y + 6 = 0$. ثم مثّل الدائرة بيانيًا.

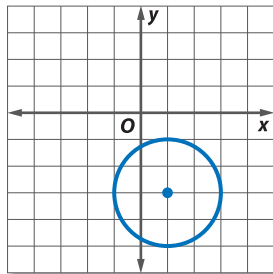
أكمل المربعات.

$$x^2 - 2x + y^2 + 6y + 6 = 0$$

$$(x^2 - 2x + \blacksquare) + (y^2 + 6y + \blacksquare) = -6 + \blacksquare + \blacksquare$$

$$(x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 6y + 9) = -6 + 1 + 9$$

$$(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 4$$



مركز الدائرة عند $(1, -3)$.
ونصف القطر هو 2.

اكتب معادلة للدائرة التي تحقق كل مجموعة من الشروط.

22. المركز $(-1, 6)$. نصف القطر 3 وحدات

23. النقطتان الطرفيتان للقطر $(2, 5)$ و $(0, 0)$

24. النقطتان الطرفيتان للقطر $(4, -2)$ و $(-2, -6)$

جد مركز كل دائرة ونصف قطرها. ثم مثّل الدائرة بيانيًا.

25. $(x + 5)^2 + y^2 = 9$

26. $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 25$

27. $(x + 2)^2 + (y - 8)^2 = 1$

28. $x^2 + 4x + y^2 - 2y - 11 = 0$

29. **الصوت** تقع سماعة خارجية في مدرسة عند النقطة $(65, 40)$. ويمكن سماع السماعة في دائرة نصف قطرها 30.5 m. اكتب معادلة تمثل الحدود لمحتملة لصوت السماعة الخارجية.

6-3 القطع الناقص

مثال 3

جد إحداثيات المركز والبؤرتين وطولي المحورين الأكبر والأصغر لقطع ناقص بالمعادلة. ثم مثل القطع الناقص بيانياً.

$$9x^2 + 16y^2 - 54x + 32y - 47 = 0$$

أولاً، حوّل إلى الصيغة القياسية.

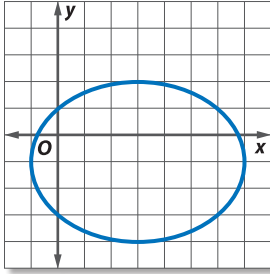
$$9x^2 + 16y^2 - 54x + 32y - 47 = 0$$

$$9(x^2 - 6x + \blacksquare) + 16(y^2 + 2y + \blacksquare) = 47 + 9(\blacksquare) + 16(\blacksquare)$$

$$9(x^2 - 6x + 9) + 16(y^2 + 2y + 1) = 47 + 9(9) + 16(1)$$

$$9(x - 3)^2 + 16(y + 1)^2 = 144$$

$$\frac{(x - 3)^2}{16} + \frac{(y + 1)^2}{9} = 1$$



يقع مركز القطع الناقص عند $(3, -1)$. القطع الناقص أفقي. $a^2 = 16$. إذا $a = 4$ و $b^2 = 9$ ، إذا $b = 3$.

طول المحور الأكبر يساوي 2×4 أو 8. طول المحور الأصغر يساوي 2×3 أو 6. لإيجاد البؤرتين: $c^2 = 16 - 9$ أو $c = \sqrt{7}$. البؤرتان هي $(3 + \sqrt{7}, -1)$ و $(3 - \sqrt{7}, -1)$.

جد إحداثيات المركز والبؤرتين وطولي المحورين الأكبر والأصغر لقطع ناقص بالمعادلة المعطاة. ثم مثل القطع الناقص بيانياً.

$$30. \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{36} = 1$$

$$31. \frac{y^2}{10} + \frac{x^2}{5} = 1$$

$$32. \frac{x^2}{36} + \frac{(y - 4)^2}{4} = 1$$

$$33. 27x^2 + 9y^2 = 81$$

$$34. \frac{(x + 1)^2}{25} + \frac{(y - 2)^2}{16} = 1$$

$$35. 9x^2 + 4y^2 + 54x - 8y + 49 = 0$$

$$36. 9x^2 + 25y^2 - 18x + 50y - 191 = 0$$

$$37. 7x^2 + 3y^2 - 28x - 12y = -19$$

38. تصميم الحدائق تمتلك عائلة جاسم حديقة في الساحة الأمامية لمنزلهم تشبه القطع الناقص. وبلغ المحور الأكبر 10 m والمحور الأصغر 10 m. اكتب معادلة لتمثيل الحديقة. افترض أن نقطة الأصل تقع في مركز الحديقة وأن المحور الأكبر أفقي.

6-4 القطع الزائد

مثال 4

مثل كل قطع زائد بيانياً. حدّد الرأسين والبؤرتين وخطي التقارب.

$$9x^2 - 4y^2 - 36x - 8y - 4 = 0$$

أكمل المربعات.

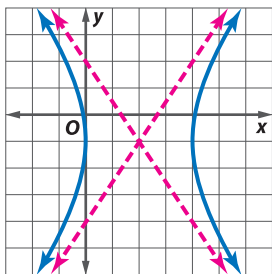
$$9x^2 - 4y^2 - 36x - 8y - 4 = 0$$

$$9(x^2 - 4x + \blacksquare) - 4(y^2 + 2y + \blacksquare) = 4 + 9(\blacksquare) - 4(\blacksquare)$$

$$9(x^2 - 4x + 4) - 4(y^2 + 2y + 1) = 4 + 9(4) - 4(1)$$

$$9(x - 2)^2 - 4(y + 1)^2 = 36$$

$$\frac{(x - 2)^2}{4} - \frac{(y + 1)^2}{9} = 1$$



يقع المركز عند $(2, -1)$.

يقع الرأسان عند $(4, -1)$ و $(0, -1)$.

تقع البؤرتان على $(2 + \sqrt{13}, -1)$ و $(2 - \sqrt{13}, -1)$.

معادلة خطوط التقارب هي $y + 1 = \pm \frac{3}{2}(x - 2)$.

مثل كل قطع زائد بيانياً. حدّد الرأسين والبؤرتين وخطي التقارب.

$$39. \frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{4} = 1$$

$$40. \frac{(x - 3)^2}{1} - \frac{(y + 2)^2}{4} = 1$$

$$41. \frac{(y + 1)^2}{16} - \frac{(x - 4)^2}{9} = 1$$

$$42. 4x^2 - 9y^2 = 36$$

$$43. 9y^2 - x^2 - 4x + 18y + 4 = 0$$

44. المرايا تتخذ مرآة زائدية شكل جزء من قطع زائد. وتنعكس أشعة الضوء المتوجّهة نحو إحدى البؤر إلى البؤرة الثانية. افترض أن المرآة الزائدية تمثل بالجزء العلوي من القطع الزائد $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$. يقع مصدر الضوء عند $(-10, 0)$.

أين سيقع الضوء على المرآة بحيث ينعكس على النقطة $(0, -5)$ ؟

6-5 تحديد التقاطع المخروطية

مثال 5

اكتب كل معادلة بالصيغة القياسية. اذكر إن كان التمثيل البياني للمعادلة قطعاً مكافئاً أم دائرة أم قطعاً ناقصاً أم قطعاً زائداً. ثم مثل بيانياً.

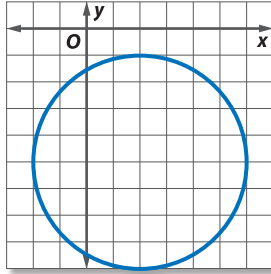
$$3x^2 + 3y^2 - 12x + 30y + 39 = 0$$

$$3(x^2 - 4x + \blacksquare) + 3(y^2 + 10y + \blacksquare) = -39 + 3(\blacksquare) + 3(\blacksquare)$$

$$3(x^2 - 4x + 4) + 3(y^2 + 10y + 25) = -39 + 3(4) + 3(25)$$

$$3(x - 2)^2 + 3(y + 5)^2 = 48$$

$$(x - 2)^2 + (y + 5)^2 = 16$$



في هذه المعادلة $A = 3$ و $C = 3$. حيث إن A و C كلاهما موجبان $A = C$. فإن التمثيل البياني لدائرة. يقع المركز عند $(-2, -5)$. ونصنف القطر 4.

اكتب كل معادلة بالصيغة القياسية. اذكر إن كان التمثيل البياني للمعادلة قطعاً مكافئاً أم دائرة أم قطعاً ناقصاً أم قطعاً زائداً. ثم مثل بيانياً.

$$45. 3x^2 + 12x - y + 8 = 0$$

$$46. 9x^2 + 16y^2 = 144$$

$$47. x^2 + y^2 - 8x - 2y + 8 = 0$$

$$48. -9x^2 + y^2 + 36x - 45 = 0$$

بدون كتابة المعادلة بالصيغة القياسية، اذكر إن كان التمثيل البياني لها قطعاً مكافئاً أم دائرة أم قطعاً ناقصاً أم قطعاً زائداً.

$$49. 7x^2 + 9y^2 = 63$$

$$50. 5y^2 + 2y + 4x - 13x^2 = 81$$

$$51. x^2 - 8x + 16 = 6y$$

$$52. x^2 + 4x + y^2 - 285 = 0$$

53. الضوء افترض أن حافة ظل يمكن تمثيلها من خلال المعادلة

$$16x^2 + 25y^2 - 32x - 100y - 284 = 0$$

a. ما شكل الظل؟

b. مثل المعادلة بيانياً.

برنامج محمد بن راشد
للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid
Smart Learning Program

6-6 حل الأنظمة الخطية واللاخطية

مثال 6

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= 100 \\ 3x - y &= 10\end{aligned}$$

جد حلاً لنظام المعادلات.

استخدم التعويض لحل النظام.

أولاً، أعد كتابة $3x - y = 10$ في الصورة $y = 3x - 10$.

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= 100 \\ x^2 + (3x - 10)^2 &= 100 \\ x^2 + 9x^2 - 60x + 100 &= 100 \\ 10x^2 - 60x + 100 &= 100 \\ 10x^2 - 60x &= 0 \\ 10x(x - 6) &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}10x &= 0 & \text{أو} & & x - 6 &= 0 \\ x &= 0 & & & x &= 6\end{aligned}$$

والآن جد الحل بإيجاد قيمة y .

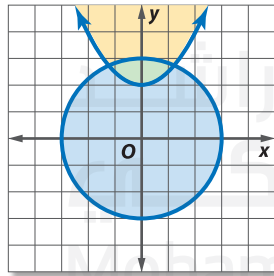
$$\begin{aligned}y &= 3x - 10 & y &= 3x - 10 \\ &= 3(0) - 10 & &= 3(6) - 10 \\ &= -10 & &= 8\end{aligned}$$

حلا النظام هما $(0, -10)$ و $(6, 8)$.

مثال 7

حل أنظمة المتباينات باستخدام التمثيل البياني.

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &\leq 9 \\ 2y &\geq x^2 + 4\end{aligned}$$



يقع الحل في المنطقة المظللة بالأخضر.

حل كل من أنظمة المعادلات التالية.

$$\begin{aligned}54. \quad x^2 + y^2 &= 8 \\ x + y &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}55. \quad x - 2y &= 2 \\ y^2 - x^2 &= 2x + 4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}56. \quad y + x^2 &= 4x \\ y + 4x &= 16\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}57. \quad 3x^2 - y^2 &= 11 \\ x^2 + 4y^2 &= 8\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}58. \quad 5x^2 + y^2 &= 30 \\ 9x^2 - y^2 &= -16\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}59. \quad \frac{x^2}{30} + \frac{y^2}{6} &= 1 \\ x &= y\end{aligned}$$

60. العلوم الفيزيائية دُفعت كرتين في الهواء في نفس الوقت.

وكان الارتفاع الذي دُفعت منه الكرتين مختلفاً. ويمثل أحد الارتفاعين y بالأقدام من خلال $y = -16t^2 + 80t + 25$ خلال t حيث إن t هو الزمن بالثواني. ويمثل ارتفاع الكرة الأخرى من خلال $y = -16t^2 + 30t + 100$.

a. كم ثانية ستمر حتى تكون الكرتان على نفس الارتفاع؟

b. ما الارتفاع؟

61. الهندسة المعمارية يبني مهندس معماري المدخل الأمامي

لمبنى على شكل قطع مكافئ بالمعادلة

$y = -\frac{1}{10}(x - 10)^2 + 20$. وبينما يتم بناء المدخل، يضع فريق الإنشاء دعامتين بالمعادلات $y = -x + 10$ و $y = x - 10$. أين تلتقي الدعامتين مع القطع المكافئ؟

حل أنظمة المتباينات باستخدام التمثيل البياني.

$$62. \quad x^2 + y^2 < 64$$

$$63. \quad x^2 + y^2 < 49$$

$$x^2 + 16(y - 3)^2 < 16$$

$$16x^2 - 9y^2 \geq 144$$

$$64. \quad x + y < 4$$

$$65. \quad x^2 + y^2 < 25$$

$$9x^2 - 4y^2 \geq 36$$

$$4x^2 - 9y^2 < 36$$

$$66. \quad x^2 + y^2 < 36$$

$$67. \quad y^2 < x$$

$$4x^2 + 9y^2 > 36$$

$$x^2 - 4y^2 < 16$$

6-7 الدوران المحوري للقطع المخروطية

المثال 8

استخدم حاسبة التمثيل البياني لتمثيل المعادلة التالية بيانياً
 $x^2 + 2xy + y^2 + 4x - 2y = 0$

المعادلة الأساسية
 $x^2 + 2xy + y^2 + 4x - 2y = 0$
 الكتابة بالصيغة التربيعية

استخدم الصيغة التربيعية.

$$y = \frac{-(2x-2) \pm \sqrt{(2x-2)^2 - 4(1)(x^2+4x)}}{2(1)}$$

$$= \frac{-2x+2 \pm \sqrt{4x^2-8x+4-4x^2-16x}}{2}$$

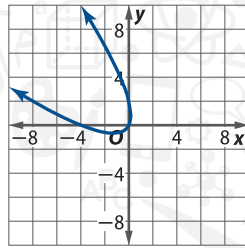
$$= \frac{-2x+2 \pm 2\sqrt{1-6x}}{2}$$

$$= -x+1 \pm \sqrt{1-6x}$$

مثل بيانياً العلاقتين

$$y_1 = -x+1+\sqrt{1-6x}$$

$$y_2 = -x+1-\sqrt{1-6x}$$



استخدم حاسبة التمثيل البياني لتمثيل القطع المخروطي المعطى من خلال كل معادلة مما يلي بيانياً.

68. $x^2 - 4xy + y^2 - 2y - 2x = 0$

69. $x^2 - 3xy + y^2 - 3y - 6x + 5 = 0$

70. $2x^2 + 2y^2 - 8xy + 4 = 0$

71. $3x^2 + 9xy + y^2 = 0$

72. $4x^2 - 2xy + 8y^2 = 7$

اكتب كل معادلة مما يلي في المستوى 'x'y' لكل قيمة معطاة لـ θ . ثم حدّد القطع المخروطي.

73. $x^2 + y^2 = 4; \theta = \frac{\pi}{4}$

74. $x^2 - 2x + y = 5; \theta = \frac{\pi}{3}$

75. $x^2 - 4y^2 = 4; \theta = \frac{\pi}{2}$

76. $9x^2 + 4y^2 = 36; \theta = 90^\circ$

6-8 المعادلات الوسيطة

المثال 9

اكتب $x = 5 \cos t$ و $y = 9 \sin t$ بالصيغة الديكارتية في مستوى إحداثي متعامد. ثم مثل المعادلة بيانياً.

$$y = 9 \sin t \quad x = 5 \cos t$$

$$\cos t = \frac{x}{5}$$

$$\sin t = \frac{y}{9}$$

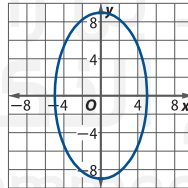
قم بإيجاد $\sin t$ و $\cos t$

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1$$

$$\left(\frac{x}{5}\right)^2 + \left(\frac{y}{9}\right)^2 = 1$$

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{81} = 1$$

تمثل المعادلتان الوسيطيتان التمثيل البياني لقطع ناقص.



مثل المنحنى المعطى بدلالة كل زوج مما يلي من المعادلات الوسيطة في الفترة المعطاة.

77. $x = \sqrt{t}, y = 1 - t; 0 \leq t \leq 9$

78. $x = t + 2, y = t^2 - 4; -4 \leq t \leq 4$

اكتب كل زوج من المعادلات الوسيطة بالصورة الديكارتية في مستوى إحداثي متعامد. ثم مثل المعادلة بيانياً.

79. $x = t + 5$ و $y = 2t - 6$

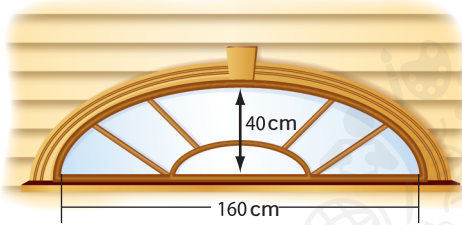
80. $x = 2t$ و $y = t^2 - 2$

81. $x = t^2 + 3$ و $y = t^2 - 4$

82. $x = t^2 - 1$ و $y = 2t + 1$

تدريب على الاختبار المعيارى

18. **النجارة** بنى فهد إطار نافذة صغيرة على شكل النصف الأعلى من قطع ناقص. ويبلغ طول النافذة عند أعلى نقطة فيها 40 cm وعرضها 160 cm عن أسفلها. فما طول النافذة على بعد 20 cm من مركز قاعدتها؟



حل كل من أنظمة المعادلات التالية.

19. $x^2 + y^2 = 100$
 $y = -x - 2$

20. $x^2 + 2y^2 = 11$
 $x + y = 2$

21. $x^2 + y^2 = 34$
 $y^2 - x^2 = 9$

حل كل من أنظمة المتباينات التالية.

22. $x^2 + y^2 \leq 9$
 $y > -x^2 + 2$

23. $\frac{(x-2)^2}{4} - \frac{(y-4)^2}{9} \geq 1$
 $x - 4y < 8$

24. **الاختيار من متعدد** أي مما يلي ليس بمعادلة لقطع مكافئ؟

F $y = 3x^2 + 5x - 3$

G $2y + 3x^2 + x - 9 = 0$

H $x = 3(y + 1)^2$

J $x^2 + 2y^2 + 6x = 10$

25. **إدارة الغابات** سمع كل من حارس متنزه الشارقة الوطني الموجود في موقع خارجي والحارس الآخر في المحطة الأساسية انفجارًا. ويبعد الموقع الخارجي عن المحطة الأساسية 6 km.

a. إذا سمع أحد الحراس صوت الانفجار قبل الثاني بـ 6 s. فاكتب معادلة تذكر جميع المواقع المحتملة للانفجار. ضع كل من الحارسين على المحور x على أن تكون نقطة المنتصف بين المحطات هي نقطة الأصل. ويكون المحور القاطع أفقيًا. (إرشاد: تبلغ سرعة الصوت نحو 0.35 km/s)

b. ارسم المواقع المحتملة للانفجار. واجعل الرسم يحتوي على محطات الحراسة.

جد نقطة المنتصف للقطعة المستقيمة ذات النقطتين الطرفيتين عند الإحداثيات المعطاة.

1. (8, 3), (-4, 9)

2. $(\frac{3}{4}, 0), (\frac{1}{2}, -1)$

3. (-10, 0), (-2, 6)

جد المسافة بين كل زوج من النقاط المعطاة إحداثياتها.

4. (-5, 8), (4, 3)

5. $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}), (-\frac{5}{6}, -\frac{11}{6})$

6. (4, -5), (4, 9)

اذكر إن كان التمثيل البياني لكل معادلة قطعًا مكافئًا أو دائرة أو قطعًا ناقصًا أو قطعًا زائدًا. ثم مثل المعادلة بيانيًا.

7. $y^2 = 64 - x^2$

8. $4x^2 + y^2 = 16$

9. $4x^2 - 9y^2 + 8x + 36y = 68$

10. $\frac{1}{2}x^2 - 3 = y$

11. $y = -2x^2 - 5$

12. $16x^2 + 25y^2 = 400$

13. $x^2 + 6x + y^2 = 16$

14. $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{16} = 1$

15. $(x + 2)^2 = 3(y - 1)$

16. $4x^2 + 16y^2 + 32x + 63 = 0$

الاختيار من متعدد أي المعادلات تمثل قطعًا زائدًا تقع رأسه عند (-3, -3) و (5, -3) ومحور مرافق طوله 6 وحدات؟

A $\frac{(y-1)^2}{16} - \frac{(x+3)^2}{9} = 1$

B $\frac{(x-1)^2}{16} - \frac{(y+3)^2}{9} = 1$

C $\frac{(y+1)^2}{16} - \frac{(x-3)^2}{9} = 1$

D $\frac{(x+1)^2}{16} - \frac{(y-3)^2}{9} = 1$

التحضير للاختبارات المعيارية

استخدام قانون

في بعض الأحيان، يكون استخدام القوانين لحل المسائل أمراً ضرورياً في الاختبارات المعيارية. وفي بعض الحالات، قد يقدم لك ورقة بها القوانين التي يسمح لك بمراجعتها أثناء حل الاختبار.

إستراتيجيات استخدام القوانين.

الخطوة 1

اقرأ المسألة بعناية.

اسأل نفسك:

- ما المطلوب مني حله؟
- ما معطيات المسألة؟
- هل هناك أي قوانين يمكنني استخدامها لتساعدني في حل المسألة؟

الخطوة 2

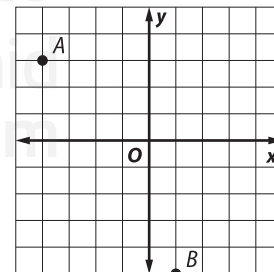
حل المسألة وتحقق من حلولك.

- عوّض الكميات المعروفة والمذكورة في نص المسألة في القانون.
- حوّل لأبسط صورة للحل بإيجاد القيم المجهولة في القانون.
- تحقق لتأكد من أن الإجابة صحيحة. إذا سمح الوقت، تحقق من الإجابة.

مثال على الاختبار المعياري

اقرأ المسألة. حدد ما تحتاج إلى معرفته. ثم استخدم معطيات المسألة لحلها. اكتب الحل هنا.

ما المسافة بين النقطة A والنقطة B على المستوى الإحداثي؟ قَرِّب إجابتك إلى أقرب جزء من عشرة، إذا لزم الأمر.



معايير رصد الدرجات	
النتيجة	المعايير
2	الدرجة الكاملة: الإجابة صحيحة وتم تقديم تفسير كامل يوضح كل خطوة.
1	الدرجة الجزئية: • الإجابة صحيحة ولكن التفسير غير كامل. • الإجابة غير صحيحة ولكن التفسير صحيح.
0	ولا درجة: إما أن الإجابة غير مذكورة أو غير صحيحة.

اقرأ المسألة بعناية. قدمت إليك إحداثيات نقطتين على المستوى الإحداثي وطلب منك إيجاد المسافة بينهما. لحل المسألة، يجب عليك استخدام **قانون المسافة**.

مثال على إجابة من نقطتين:

استخدم قانون المسافة لإيجاد المسافة بين النقطتين $A(-4, 3)$ و $B(1, -5)$.

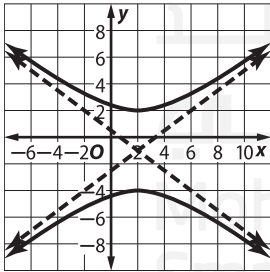
$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ &= \sqrt{[1 - (-4)]^2 + [(-5) - 3]^2} \\ &= \sqrt{5^2 + (-8)^2} \\ &= \sqrt{25 + 64} \\ &= \sqrt{89} = 9.4 \text{ حوالي} \end{aligned}$$

تبلغ المسافة بين النقطتين A و B نحو 9.4 وحدات.

الخطوات والحسابات والاستنتاج المذكورون بوضوح. يصل الطالب أيضًا إلى الإجابة الصحيحة. إذًا، تستحق هذه الإجابة النقطتين بالكامل.

تمارين

4. ما معادلة القطع الزائد الممثل بيانيًا أدناه مكتوبة في الصيغة القياسية؟



5. إذا زادت مساحة السطح لمكعب بمقدار 9 أمثال مساحته الأصلية، فما التغير في الطول في أضلاع المكعب؟

- A يبلغ الطول مثلي الطول الفعلي.
- B يبلغ الطول 3 أمثال الطول الفعلي.
- C يبلغ الطول 6 أمثال الطول الفعلي.
- D يبلغ الطول 9 أمثال الطول الفعلي.

اقرأ كل مسألة. حدد ما تحتاج إلى معرفته. ثم استخدم معطيات المسألة لحلها. اكتب الحل هنا.

1. ما نقطة المنتصف لقطعة مستقيمة CD والتي تكون نقطتها الطرفيتان $C(5, -12)$ و $D(-9, 4)$ ؟

2. تضع هدى خريطة لبيتها على المستوى الإحداثي. فتضع المدرسة عند النقطة $S(7, 3)$ والحديقة عند النقطة $P(-4, 12)$. فإذا كان مقياس الرسم للخريطة 1 وحدة واحدة = 250 m، فما المسافة الفعلية بين المدرسة والحديقة؟ قَرِّب إلى أقرب جزء من اليارد.

3. يصنع يوسف طاولة خرسانية لمساحة منزله الخلفية. وسيكون سطح الطاولة مستديرًا بقطر 6 ft وسماك 6 in. فما مقدار الخرسانة التي سيحتاجها يوسف ليصنع سطح الطاولة؟ قَرِّب إلى أقرب جزء من القدم المكعبة.

تدريب على الاختبار المعياري

تراكمي

6

الاختيار من متعدد

اقرأ كل سؤال. ثم اكتب الإجابة الصحيحة في ورقة الإجابة التي قدمها المعلم أو ورقة أخرى.

1. ما الخطوة الأولى غير الصحيحة في التحويل لأبسط صورة $\log_3 \frac{3}{48}$ ؟

$$\log_3 \frac{3}{48} = \log_3 3 - \log_3 48$$

الخطوة 2: $= 16 - 1$

الخطوة 3: $- =$

C الخطوة 3

A الخطوة 1

D كل الخطوات صحيحة.

B الخطوة 2

2. أي مما يلي معادلة القطع المكافئ بالرأس $(-3, -23)$ ويمر بالنقطة $(1, 9)$ ؟

F $y = x^2 + 10x + 7$

G $y = x^2 - 6x + 19$

H $y = 2x^2 + 12x - 5$

J $y = 2x^2 - 3x + 10$

3. ما رؤوس القطع الناقص بالمعادلة $\frac{(x-3)^2}{36} + \frac{(y-2)^2}{144} = 1$ ؟

A $(-3, 2)$ و $(9, 2)$

B $(-2, 3)$ و $(10, 3)$

C $(3, -10)$ و $(3, 14)$

D $(2, -11)$ و $(4, 13)$

4. ينص قانون هوك على أن القوة المبذولة للحفاظ على شد زنبرك x وحدة تتناسب طردياً مع x . فإذا كان لا بد من قوة قدرها 40 N لتحافظ على زنبرك مشدوداً بمقدار 5 cm، فما القوة اللازمة لتحافظ على الزنبرك مشدوداً بمقدار 14 cm؟

F 8 N

H 112 N

G 19 N

J 1600 N

نصيحة عند حل الاختبار

السؤال 2 يمكن التحقق من الإجابة بالتعويض عن x بـ 1 والتأكد من أن قيمة y تساوي 9.

5. تضع علياء خريطة لساحة منزلها الخلفية على المستوى الإحداثي. وقد حددت النقطة $G(-4, -6)$ لتمثل حديقة والدتها والنقطة $S(3, 7)$ لتمثل الأرجوحة المعلقة على شجرة البلوط. فإذا كان مقياس الرسم للخريطة 1 وحدة واحدة = 5 أقدام، فما المسافة الفعلية بين الحديقة والأرجوحة؟

C 82 متراً

A 74 متراً

D 90 متراً

B 79 متراً

6. إذا كان $\sqrt{x+5} + 1 = 4$ ، فما قيمة x ؟

F 4

G 10

H 11

J 20

7. تبلغ مساحة قاعدة حقيبة سفر مستطيلة $3x^2 + 5x - 4$ وحدات مربعة، ويبلغ ارتفاع الحقيبة $2x$ وحدة. ما التعبير كثير الحدود الذي يمثل حجم الحقيبة؟

A $3x^3 + 5x^2 - 4x$

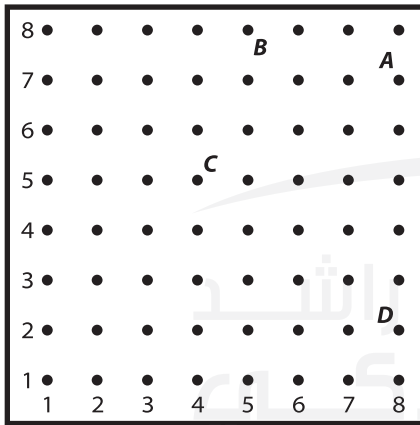
C $6x^3 + 10x^2 - 8x$

B $6x^2 + 10x - 8$

D $3x^3 + 10x^2 - 4$

8. قُدِّم لريهام هذا اللوح الهندسي لتمثيل

الميل $-\frac{3}{4}$



فإذا كانت العلامة الموجود أعلى الجزء الأيمن تمثل نقطة الأصل على المستوى الإحداثي، فأين يمكن لريهام وضع حزام مطاطي لتمثيل الميل المقدم؟

F من العلامة A للعلامة B

G من العلامة A للعلامة C

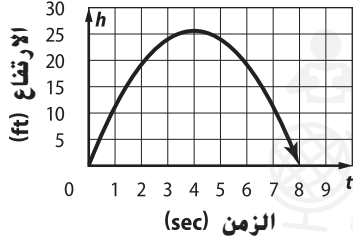
H من العلامة B للعلامة D

G من العلامة C للعلامة D

الإجابة الموسعة

اكتب إجاباتك على ورقة. اكتب الحل هنا.

14. مثل سلطان المعادلات التربيعية $h(t) = -16t^2 + 128t$ بيانياً لتمثيل طيران أحد الألعاب النارية. يوضح القطع المكافئ الارتفاع، بالقدم، للألعاب النارية بعد t ثانية من إطلاقها.



- a. ما رأس القطع المكافئ؟
b. ما الذي يمثله رأس القطع المكافئ؟
c. كم تظل الألعاب النارية في الهواء قبل هبوطها؟

15. يبيع موظفو الكتاب

السوي لمدرسة الشارقة
الثانوية الكتب السنوية
وإطارات الصور المطلوبة
بالكروم المنقوش عليها العام
الدراسي. ويوضح عدد الكتب
السنوية والإطارات التي
تم بيعها للأعضاء لكل
صف في الجدول.

مبيعات كل صف		
الصف	الكتب السنوية	الإطارات
التاسع	423	256
العاشر	464	278
الحادي عشر	546	344
الثاني عشر	575	497

- a. جد الفارق في المبيعات للكتب السنوية والإطارات التي تم صنعها في الصف العاشر والحادي عشر.
b. جد إجمالي عدد الكتب السنوية والإطارات التي تم بيعها.
c. يكلف الكتاب السنوي AED 48 ويكلف الإطار AED 18.

الإجابة القصيرة/الإجابة الشبكية

اكتب الإجابات في ورقة الإجابة التي قدمها المعلم أو ورقة أخرى.

9. ركل لاعب كرة قدم كرة للأعلى بسرعة 32 ft/s. فكم ستستغرق الكرة بعد ركلها لترتطم بالأرض؟ استخدم القانون $h(t) = v_0t - 16t^2$ ، حيث إن $h(t)$ هو ارتفاع جسم بالأقدام و v_0 هي السرعة الابتدائية للجسم بالقدم في الثانية و t هو الزمن بالثانية.

10. إجابة شبكية ما أقصى عدد ممكن من الحلول لنظام من المعادلات التي تتكون من دائرة قطع زائد؟

11. تُعدّ ليلي صناديق من الشوكولاتة المتنوعة. ويكلف الفول السوداني المغلف بالشوكولاتة 7 AED للجرام. ويكلف الكراميل المغلف بالشوكولاتة 6.50 AED للجرام. ويحتوي صندوق الحلوى المتنوعة على مقدار حلوى فول السوداني أكبر من مقدار حلوى الكراميل بخمسة جرام. فإذا كان إجمالي المبلغ 575 AED، فكم عدد الجرامات لكل نوع من الحلوى لازمة لصنع الصندوق؟

12. الإجابة الشبكية ما الإحداثي y لنقطة المنتصف للقطعة المستقيمة AB ذات النقطتين الطرفيتين $A(0.8, 5.32)$ و $B(0.44, 2.2)$ ؟

13. ذهب صالح للتسوق واشترى قميصين، وثلاثة سراويل، وحزام وزوجين من الأحذية. وتوضح المصفوفة التالية الأسعار لكل منتج بالتوالي.

[AED 20.15 AED 32 AED 15 AED 25.99]
استخدم ضرب المصفوفات لإيجاد المبلغ الإجمالي الذي أنفقه صالح أثناء التسوق.