

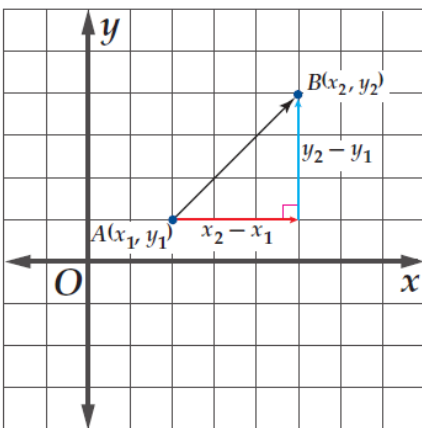


7-2 المتجهات في المستوى الإحداثي

ورقة عمل الحادي عشر المتقدم

1- تمثيل وإجراء العمليات على المتجهات في المستوى الإحداثي. 2- كتابة المتجه باستخدام متجهي الوحدة.

في هذا الدرس سوف نتعلم:



الصورة المركبة للمتجه

مفهوم أساسي

الصورة المركبة للمتجه $\vec{AB}$ الذي نقطة بدايته $A(x_1, y_1)$ ونقطة نهايته $B(x_2, y_2)$ هي:

$$\langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle$$

التعبير عن المتجه بالصورة (المركبة)

أوجد الصورة (المركبة) لـ $\vec{AB}$ المعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كلٍّ مما يأتي:

$$A(-4, 2), B(3, -5)$$

$$\begin{aligned}\vec{AB} &= \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle \\ &= \langle 3 - (-4), -5 - 2 \rangle \\ &= \langle 7, -7 \rangle\end{aligned}$$

$$A(0, 8), B(-9, -3)$$

$$\begin{aligned}\vec{AB} &= \langle -9 - 0, -3 - 8 \rangle \\ &= \langle -9, -11 \rangle\end{aligned}$$

$$A(-2, -7), B(6, 1)$$

$$\begin{aligned}\vec{AB} &= \langle 6 - (-2), 1 - (-7) \rangle \\ &= \langle 8, 8 \rangle\end{aligned}$$

إذا كان $\vec{v}$ متجهًا، نقطة بدايته (x_1, y_1) ونقطة نهايته (x_2, y_2) ، فإن طول $\vec{v}$ يُعطى بالصيغة:

$$|\vec{v}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

وإذا كانت $\langle a, b \rangle$ هي الصورة الإحداثية للمتجه $\vec{v}$ فإن: $|\vec{v}| = \sqrt{a^2 + b^2}$

إيجاد طول (مقدار) متجه

أوجد طول $\vec{AB}$ المعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كلٍّ مما يأتي:

$$A(-4, 2), B(3, -5)$$

$$\begin{aligned}|\vec{AB}| &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ &= \sqrt{(3 - (-4))^2 + (-5 - 2)^2} \\ &= 7\sqrt{2} = \boxed{9.9}\end{aligned}$$

$$A(0, 8), B(-9, -3)$$

$$\begin{aligned}|\vec{AB}| &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ &= \sqrt{(-9 - 0)^2 + (-3 - 8)^2} \\ &= \sqrt{202} = \boxed{14.21}\end{aligned}$$

$$A(-2, -7), B(6, 1)$$

$$\begin{aligned}|\vec{AB}| &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ &= \sqrt{(6 - (-2))^2 + (1 - (-7))^2} \\ &= 8\sqrt{2} = \boxed{11.31}\end{aligned}$$





مفهوم أساسي

العمليات على المتجهات

إذا كان $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2 \rangle$ متجهين، و k عددًا حقيقيًا، فإن:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2 \rangle \quad \text{جمع متجهين}$$

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2 \rangle \quad \text{طرح متجهين}$$

$$k\mathbf{a} = \langle ka_1, ka_2 \rangle \quad \text{ضرب متجه في عدد حقيقي}$$

العمليات على المتجهات

جد كلاً مما يأتي للمتجهات $\mathbf{y} = \langle 2, 5 \rangle$, $\mathbf{z} = \langle -3, 0 \rangle$, $\mathbf{w} = \langle -4, 1 \rangle$

$$\mathbf{w} + \mathbf{y}$$

$$= \langle -4, 1 \rangle + \langle 2, 5 \rangle$$

$$= \langle -4 + 2, 1 + 5 \rangle$$

$$= \langle -2, 6 \rangle$$

$$\mathbf{z} - 2\mathbf{y}$$

$$= \langle -3, 0 \rangle - 2 \langle 2, 5 \rangle$$

$$= \langle -3, 0 \rangle - \langle 4, 10 \rangle$$

$$= \langle -3 - 4, 0 - 10 \rangle = \langle -7, -10 \rangle$$

$$2\mathbf{w} + 4\mathbf{y} - \mathbf{z}$$

$$= 2 \langle -4, 1 \rangle + 4 \langle 2, 5 \rangle - \langle -3, 0 \rangle$$

$$= \langle -8, 2 \rangle + \langle 8, 20 \rangle - \langle -3, 0 \rangle$$

$$= \langle -8 + 8 - (-3), 2 + 20 - 0 \rangle = \langle 3, 22 \rangle$$

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{1}{|\mathbf{v}|} \mathbf{v}$$

متجهات الوحدة: يُسمى المتجه الذي طوله 1 متجه الوحدة، ويرمز له بالرمز $\mathbf{u}$ ، ولإيجاد متجه الوحدة $\mathbf{u}$ الذي له نفس اتجاه المتجه $\mathbf{v}$ ، أقسم المتجه $\mathbf{v}$ على طوله $|\mathbf{v}|$.

إيجاد متجه وحدة له نفس اتجاه متجه معلوم

أوجد متجه الوحدة الذي له نفس اتجاه المتجه المُعطى في كلٍّ مما يأتي:

$$\mathbf{v} = \langle -2, 3 \rangle$$

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{(-2)^2 + (3)^2} = \sqrt{13}$$

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$$

$$= \frac{\langle -2, 3 \rangle}{\sqrt{13}}$$

$$= \left\langle \frac{-2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}} \right\rangle$$

$$= \left\langle \frac{-2\sqrt{13}}{13}, \frac{3\sqrt{13}}{13} \right\rangle$$

$$\mathbf{x} = \langle -4, -8 \rangle$$

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{(-4)^2 + (-8)^2} = 4\sqrt{5}$$

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}$$

$$= \frac{\langle -4, -8 \rangle}{4\sqrt{5}}$$

$$= \left\langle \frac{-4}{4\sqrt{5}}, \frac{-8}{4\sqrt{5}} \right\rangle$$

$$= \left\langle \frac{-\sqrt{5}}{5}, \frac{-2\sqrt{5}}{5} \right\rangle$$

$$\mathbf{w} = \langle 6, -2 \rangle$$

$$|\mathbf{w}| = \sqrt{6^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{10}$$

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{w}}{|\mathbf{w}|}$$

$$= \frac{\langle 6, -2 \rangle}{2\sqrt{10}}$$

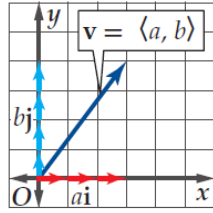
$$= \left\langle \frac{6}{2\sqrt{10}}, -\frac{2}{2\sqrt{10}} \right\rangle$$

$$= \left\langle \frac{3\sqrt{10}}{10}, -\frac{\sqrt{10}}{10} \right\rangle$$

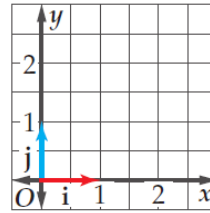




يُرمز لمتجهي الوحدة بالاتجاه الموجب لمحور x ، والاتجاه الموجب لمحور y بالرمزين $i = \langle 1, 0 \rangle$ ، $j = \langle 0, 1 \rangle$ ، على الترتيب كما في الشكل 1.2.3. كما يُسمَّى المتجهان i, j متجهي الوحدة القياسيين.



الشكل 1.2.4



الشكل 1.2.3

ويمكن استعمال هذين المتجهين للتعبير عن أي متجه $v = \langle a, b \rangle$ على الصورة $v = ai + bj$ كما في الشكل 1.2.4. تسمى الصورة $ai + bj$ توافقًا خطيًا للمتجهين i, j . ويُقصد بها كتابة المتجه بدلالة متجهي الوحدة i, j .

كتابة متجه على صورة توافق خطي لمتجهي الوحدة

اكتب المتجه $\overrightarrow{DE}$ المُعطى نقطتا بدايته ونهايته على صورة توافق خطي لمتجهي الوحدة i, j في كلِّ ممَّا يأتي :

$$D(-2, 3), E(4, 5)$$

الصورة المركبة

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DE} &= \langle 4 - (-2), 5 - 3 \rangle \\ &= \langle 6, 2 \rangle\end{aligned}$$

صورة التوفيق الخطي

$$\overrightarrow{DE} = 6i + 2j$$

$$D(-3, -8), E(-7, 1)$$

الصورة المركبة

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DE} &= \langle -7 - (-3), 1 - (-8) \rangle \\ &= \langle -4, 9 \rangle\end{aligned}$$

صورة التوفيق الخطي

$$\overrightarrow{DE} = -4i + 9j$$

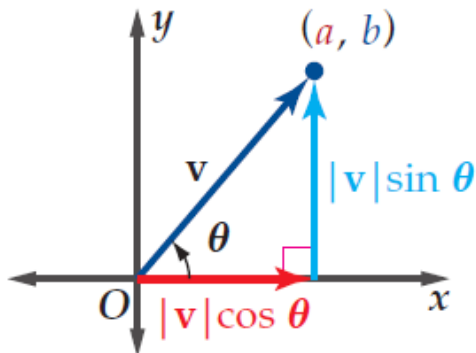
$$D(-6, 0), E(2, 5)$$

الصورة المركبة

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DE} &= \langle 2 - (-6), 5 - 0 \rangle \\ &= \langle 8, 5 \rangle\end{aligned}$$

صورة التوفيق الخطي

$$\overrightarrow{DE} = 8i + 5j$$



يمكن كتابة المتجه $v = \langle a, b \rangle$ ، باستخدام زاوية الاتجاه التي يصنعها v مع الاتجاه الموجب لمحور x . فمن الشكل يمكن كتابة v على الصور:

الصورة الإحداثية

$$v = \langle a, b \rangle$$

عوض

$$= \langle |v| \cos \theta, |v| \sin \theta \rangle$$

توافق خطي من i, j

$$= |v| (\cos \theta) i + |v| (\sin \theta) j$$





إيجاد الصورة (المركبة) لمتجه بمعلومية طوله وزاوية اتجاهه مع الأفقي

أوجد الصورة المركبة للمتجه v المُعطى طوله وزاوية اتجاهه مع الأفقي في كلِّ ممَّا يأتي:طوله 10 ، وزاوية اتجاهه 120° مع الأفقي.

$$v = 10 \cos 120^\circ i + 10 \sin 120^\circ j$$

$$= -5i + 5\sqrt{3}j$$

$$v = \langle -5, 5\sqrt{3} \rangle \text{ الصورة المركبة}$$

$$|v| = 8, \theta = 45^\circ$$

$$v = 8 \cos 45^\circ i + 8 \sin 45^\circ j$$

$$= 4\sqrt{2}i + 4\sqrt{2}j$$

$$v = \langle 4\sqrt{2}, 4\sqrt{2} \rangle$$

$$= \langle 5.7, 5.7 \rangle$$

$$|v| = 24, \theta = 210^\circ$$

$$v = 24 \cos 210^\circ i + 24 \sin 210^\circ j$$

$$= -12\sqrt{3}i - 12j$$

$$v = \langle -12\sqrt{3}, -12 \rangle$$

يمكن إيجاد زاوية اتجاه المتجه $v = \langle a, b \rangle$ مع الاتجاه الأفقي بحل المعادلة المثلثية: $\tan \theta = \frac{|v| \sin \theta}{|v| \cos \theta} = \frac{b}{a}$

زوايا الاتجاه للمتجهات

أوجد زاوية اتجاه كلِّ من المتجهات الآتية مع الاتجاه الموجب لمحور x .

$$p = 3i + 7j \quad \text{ع ١}$$

$$\tan \theta = \left| \frac{b}{a} \right|$$

$$\tan \theta = \frac{7}{3}$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{7}{3}$$

$$\theta = 66.8^\circ$$

$$r = \langle 4, -5 \rangle \quad \text{ع ٢}$$

$$\tan \theta = \left| \frac{b}{a} \right| = \frac{5}{4}$$

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{5}{4} \right) = 51.3^\circ$$

$$\text{في الربع الرابع}$$

$$\theta = 360^\circ - 51.3^\circ$$

$$= 308.7^\circ$$

$$\langle -3, -8 \rangle \quad \text{ع ٣}$$

$$\tan \theta = \left| \frac{-8}{-3} \right| = \frac{8}{3}$$

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{8}{3} \right) = 69.4^\circ$$

$$\text{في الربع الثالث}$$

$$\theta = 180^\circ + 69.4^\circ$$

$$= 249.4^\circ$$

$$-6i + 2j \quad \text{ع ٤}$$

$$\tan \theta = \left| \frac{2}{-6} \right| = \frac{2}{6}$$

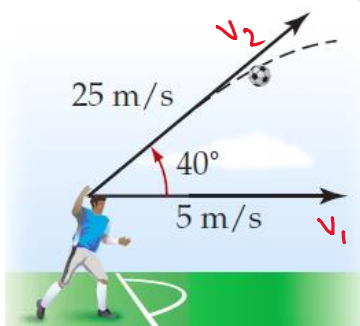
$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{2}{6} \right) = 18.4^\circ$$

$$\text{في الربع الثاني}$$

$$\theta = 180^\circ - 18.4^\circ$$

$$= 161.6^\circ$$

تطبيق العمليات على المتجهات



كرة قدم: يركض حارس مرمى في لعبة كرة القدم للأمام بسرعة 5 m/s ، ليرمي الكرة بسرعة 25 m/s ، بزاوية 40° مع الأفقي. أوجد محصلة السرعة، واتجاه حركة الكرة.

$$v_1 = \langle 5, 0 \rangle \text{ الركض للأمام}$$

$$v_2 = \langle 25 \cos 40^\circ, 25 \sin 40^\circ \rangle = \langle 19.2, 16.1 \rangle \text{ رمي الكرة}$$

$$r = v_1 + v_2 \text{ متجه المحصلة}$$

$$= \langle 5, 0 \rangle + \langle 19.2, 16.1 \rangle$$

$$= \langle 24.2, 16.1 \rangle$$

$$|r| = \sqrt{24.2^2 + 16.1^2} = 29.1 \text{ m/s}$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{16.1}{24.2} = 33.6^\circ \text{ الاتجاه}$$

السرعة 29.1 m/s في اتجاه 33.6° مع المركبة الأفقية.





0502509447 عمل المدرس / مصطفى أسامة علام

