مذكرة

الرياضيات

11

علمي

الاسم ....

الصف ....

الفصل الدراسي الثاني

2025 - 2026

أ : سلامة علي الركاض

الوحدة التخيلية

هي العدد الذي مربعه (-1) ويرمز إليه بالرمز i

$$i = \sqrt{-1} \qquad , \qquad i^2 = -1$$

الأعداد التخيلية

لأي عدد حقيقي موجب m

$$\sqrt{-m} = \sqrt{m}\, i$$

تسمى الأعداد التي على الصورة bi حيث $b \in \mathbb{R}^*$ أعداداً تخيلية

مثال 1

بسط كلاً مما يلي مستخدماً الوحدة التخيلية i

$\sqrt{-8}$ $\qquad\qquad$ $\sqrt{-4}$

....

....

حاول أن تحل 1

بسط كل عدد مما يلي مستخدماً الوحدة التخيلية i

$\sqrt{-36}$ $\qquad\qquad$ $\sqrt{-12}$ $\qquad\qquad$ $\sqrt{-2}$

....

....

....

....

العدد المركب هو عدد على الصورة $z = a + bi$ حيث a, b عددان حقيقيان , i الوحدة التخيلية

$a + bi$ تسمى الصورة الجبرية للعدد المركب

$a, b \in \mathbb{R}$

$$z = a + bi$$

العدد المركب

الوحدة التخيلية

الجزء الحقيقي

الجزء التخيلي

عدد تخيلي

ويرمز لمجموعة الأعداد المركبة بالرمز $\mathbb{C}$

نشاط

العدد المركب	الجزء الحقيقي	الجزء التخيلي
$2 + 3i$	2	3
	4	-5
$i - 1$		
7		
	0	أ

مثال 2

اكتب كلاً من الأعداد المركبة التالية على الصورة الجبرية

$\sqrt{-9} + 6$ ....

$\dfrac{1 + \sqrt{-25}}{4}$ ....

$1 - \sqrt{-20}$ ....

حاول أن تحل 2

اكتب كلاً من الأعداد المركبة التالية على الصورة الجبرية

$\sqrt{-18}+7$ ....

$\dfrac{10-\sqrt{-100}}{5}$ ....

$\dfrac{\sqrt{-9}+5}{7}$ ....

ملاحظات

إذا كان $b=0$، فإن $z=a$ يسمى **عددًا حقيقيًّا**.

إذا كان $b\neq 0\ ,\ a=0$، فإن $z=bi$ يسمى **عددًا تخيليًّا**.

كل عدد حقيقي هو أيضًا عدد مركب: $a=a+0i$.

تساوي عددين مركبين

$$z_1=a_1+b_1 i$$
$$z_2=a_2+b_2 i$$

$$a_1=a_2 \ \ \text{and} \ \ b_1=b_2 \longleftrightarrow z_1=z_2$$

مثال 3

أوجد قيم كل من $x , y \in R$ في كل مما يلي

a) $12 + 3i = 4x - 9yi$

b) $x^2 - y^2 i = 9 - 25i$

c) $2x + yi = 1$

حاول أن تحل 3

أوجد قيم كل من $x , y \in R$ في كل مما يلي

a) $x + 5i = 7 - 3yi$

b) $(x+3) + y^2 i = 5 - yi$

c) $3i = 2x - 5yi$

ملاحظة

إذا ساوى عدد مركب الصفر فإن جزءه الحقيقي يساوي الصفر وجزءه التخيلي يساوي الصفر أيضًا، والعكس صحيح

$$x + yi = 0 \Longleftrightarrow (x = 0 \ , \ y = 0)$$

التمثيل البياني لعدد مركب

يمكن وضع العدد المركب $z = a + bi$ على صورة الزوج المرتب (a, b).

الإحداثي السيني هو الجزء الحقيقي والإحداثي الصادي هو الجزء التخيلي.

الصورة الديكارتية: يمثل كل عدد مركب بنقطة في مستوى أرجاند (المستوى المركب) ونكتب

$$M(a, b) \longleftrightarrow z = a + bi$$

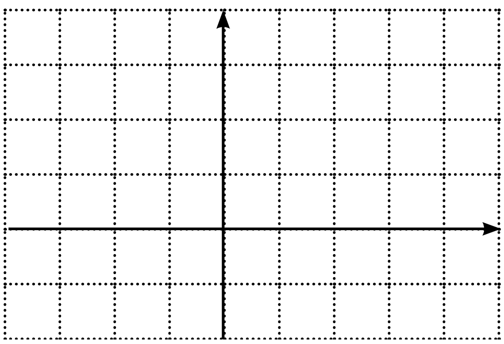
الصورة الديكارتية — الصورة الجبرية

يسمى محور السينات بالمحور الحقيقي ويسمى محور الصادات بالمحور التخيلي

مثال 4

مثل كلاً مما يلي في المستوى المركب

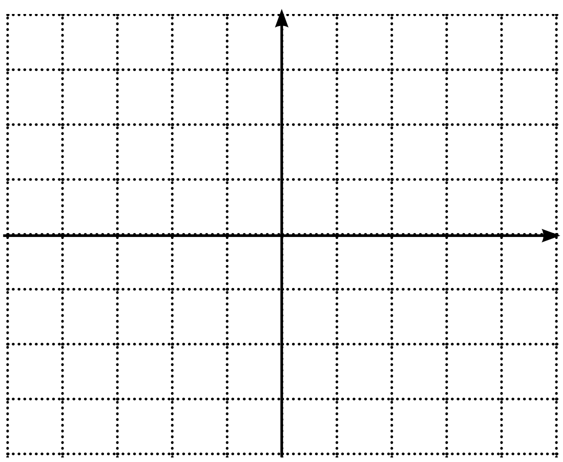
$a)\ z_1 = 3 + 2i$ $\quad b)\ z_2 = -1$ $\quad c)\ z_3 = -i - 2$ $\quad d)\ z_4 = i$



حاول أن تحل 4

مثل كلاً مما يلي في المستوى المركب

a) $z_1 = 4 - i$ $\quad$ b) $z_2 = -3i$ $\quad$ c) $z_3 = -4 - 3i$ $\quad$ d) $z_4 = 2$



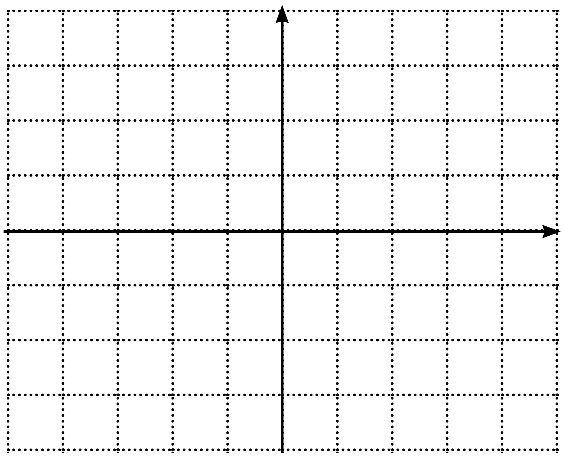
مثال 5 اكتب العدد المركب المناظر لكل من النقاط $M(3,2)$, $L(2,-1)$, $J(0,-5)$.

حاول أن تحل 4 اكتب العدد المركب المناظر لكل من النقاط $N(-4,1)$, $H(1,-2)$, $K(7,0)$.

كراسة التمارين

(12) مثّل كلًّا مما يلي في المستوى المركب:

(a) $z_1 = -2 + 3i$ **(b)** $z_2 = -4$ **(c)** $z_3 = -i$ **(d)** $z_4 = 2(2+i)$



(13) اكتب العدد المركب المناظر لكل من النقاط التالية:

(a) $L(4,5)$ **(b)** $M(-4,-2)$ **(c)** $N(-2,6)$ **(d)** $P(0,-3)$

العمليات على مجموعة الأعداد المركبة

أولاً : جمع وطرح الأعداد المركبة

إذا كان $z_2 = a_2 + b_2 i$ ، $z_1 = a_1 + b_1 i$ عددين مركبين فإن

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (a_1 + b_2)i$$

$$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$$

ملاحظات

الجمع في z عملية إبدالية وتجميعية.

- الصفر هو العنصر المحايد لعملية الجمع على مجموعة الأعداد المركبة $(0 = 0 + 0i)$.
- المعكوس الجمعي للعدد المركب $z = a + bi$ هو العدد المركب $-z = -a - bi$

مثلًا: إذا كان $z = 2 + 5i$ فإن $-z = -2 - 5i$

- إذا كان مجموع عددين مركبين يساوي صفرًا فإن كلًّا منهما معكوس جمعي للآخر والعكس صحيح.

أي أن: $z_1 = -z_2 \Longleftrightarrow z_1 + z_2 = 0$

- لإيجاد ناتج طرح: $z_1 - z_2$ يمكن إضافة المعكوس الجمعي لِـ z_2 إلى z_1 أي $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$

مثال 6

إذا كان:

$z_3 = 2i$ ، $z_2 = 4 - 7i$ ، $z_1 = 2 + 3i$ فأوجد:

c) $z_3 + z_2 + z_1$

b) $z_1 - z_2$

a) $z_1 + z_2$

حاول أن تحل 6

إذا كان $z_3 = -0.3i$, $z_2 = 3.4 - 1.2i$, $z_1 = -2 + 5i$ فأوجد:

a $z_1 + z_2$

b $z_2 - z_1$

c $z_3 - z_2 - z_1$

ثانياً : ضرب الأعداد المركبة

قاعدة الضرب

$$c.z = c.a + c.bi$$
$$c \in \mathbb{R}$$

$$z_1.z_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i$$

خواص عملية الضرب على C

الضرب في C عملية إبدالية وتجميعية وتقبل التوزيع على الجمع والطرح من اليمين واليسار

العدد 1 هو العنصر المحايد لعملية ضرب الأعداد المركبة $(1 = 1 + 0i)$

ملاحظة

عند ضرب عددين مركبين نستخدم نفس الخطوات التي تستخدم في عملية ضرب

مع مراعاة أن $i^2 = -1$

مثال 7

أوجد الناتج

a $(5i)(-4i)$

b $3(7+5i)$

c $(2+3i)(-3+5i)$

d $4i\left(1-\frac{1}{2}i\right)\left(1+\frac{1}{2}i\right)$

حاول أن تحل 7

أوجد الناتج

a $(6-5i)(4-3i)$

b $(9+4i)(4-9i)$

c $(12i)(7i)(i+1)$

مثال 8

إذا كان $z_2 = 5 - i$, $z_1 = 2 + 3i$ فأوجد:

b $z_1 \cdot z_2$

a $-3\,z_2$

حاول أن تحل 8

إذا كان $z_2 = 1 + 4i$, $z_1 = 2 - 3i$ فأوجد:

b $z_1 \cdot z_2$

a $\frac{1}{2}\,z_1$

قوى العدد المركب

إذا كان p عدد كلي فإن

$$i^{4p} = 1 \quad , \quad i^{4p+1} = i \quad , \quad i^{4p+2} = -1 \quad , \quad i^{4p+3} = -i$$

لاحظ أنه عند رفع (i) لعدد كلي فإن الناتج يكون أحد عناصر المجموعة $\{-1 , 1 , i , -i\}$

$i^{15} =$ ....

$i^{2013} =$ ....

$i^{29} =$ ....

مثال 9

إذا كان $z_1 = i\ ,\ z_2 = -2i\ ,\ z_3 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$

فأوجد:

a z_1^{21} ....

b z_2^{6} ....

c z_3^{2} ....

....

حاول أن تحل 9

أوجد:

a $5(i)^{73}$ ....

كراسة التمارين

بسّط كل تعبير مما يلي:

(23) $i(-6i)^3$

ثالثاً : قسمة الأعداد المركبة

مرافق العدد المركب

مرافق العدد المركب $z = a + bi$ هو العدد المركب $\bar{z} = \overline{a + bi} = a - bi$

خواص مرافق العدد المركب

- $z + \bar{z} = 2a$
- $z - \bar{z} = 2bi$
- $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$
- $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$
- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
- $\overline{(\overline{z_1})} = z_1$
- $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

مثال 10

إذا كان $z_2 = 5 - 2i$, $z_1 = 3 + 4i$ فأوجد:

a) $z_1 + \overline{z_1}$

b) $z_1 - \overline{z_1}$

c) $\overline{(\overline{z_1})}$

d) $\overline{z_1 + z_2}$

e) $\overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

f) $\overline{z_1 \cdot z_2}$

حاول أن تحل 10

إذا كان $z_2 = 3 + 5i$, $z_1 = 2 - 7i$ فأوجد:

a) $\overline{z_1} + \overline{z_2}$

b) $\overline{z_1 - z_2}$

المعكوس الضربي لعدد مركب غير صفري $z = a + bi$ يرمز له بالرمز z^{-1}:

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi} \quad <==> \quad z^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i \quad <==> \quad z^{-1} = \frac{\bar{z}}{a^2+b^2}$$

نضرب البسط والمقام بمرافق المقام

مثال 11

أوجد المعكوس الضربي لكل من:

a) $z_1 = 3 - 5i$

b) $z_2 = 2i - 1$

c) $z_3 = -7i$

حاول أن تحل 11

أوجد المعكوس الضربي لكل من:

a) $z_1 = -3i - 7$

b) $z_2 = 5 + 11i$

c) $z_3 = 6i$

كراسة التمارين

أوجد المعكوس الضربي لكل مما يلي:

(a) $-3-2i$ **(b)** $5i$ **(c)** $3i-4$

ملاحظة

لقسمة عددين مركبين نكتبهما على شكل كسر $\frac{z_1}{z_2}$ ثم نضرب البسط والمقام بمرافق المقام

مثال 12

أوجد ناتج قسمة $5-6i$ على $2+3i$

حاول أن تحل 12

وجد ناتج قسمة $3-2i$ على $1+2i$

مثال 13

اكتب كلًّا مما يلي في الصورة الجبرية للعدد المركب:

a $\frac{2}{3-i}$

b $\overline{\left(\frac{5+i}{2-3i}\right)}$

حاول أن تحل 13

اكتب كلًّا مما يلي في الصورة الجبرية:

a $\frac{3+i}{2+5i}$

b $\frac{2-i}{2+i}$

c $\overline{\frac{5+i}{2-3i}}$

7 - 2

الإحداثيات القطبية والصورة المثلثية لعدد مركب

مطلق العدد المركب

$$|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

مثال 1

أوجد:

b $|3 - 4i|$ a $|5i|$

حاول أن تحل 1

أوجد:

b $|-2 + 5i|$ a $|6 - 4i|$

كراسة التمارين

(1) أوجد:

(c) $|2i|$ (b) $|2 - 2i|$ (a) $|5 + 12i|$

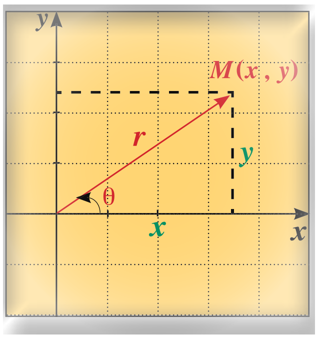
الاحداثيات القطبية

يمكن تمثيل أي نقطة في المستوى باستخدام الإحداثيات القطبية (r, θ) حيث:

r : بعد النقطة عن نقطة الأصل θ: هي الزاوية الموجهة في الوضع القياسي التي يمر ضلعها النهائي بالنقطة

للتحويل من الاحداثيات القطبية إلى الديكارتي: $M(x,y)$ $\longrightarrow$ $M(r,\theta)$

$y = r.\sin\theta$, $x = r.\cos\theta$



مثال 2

حوّل الإحداثيات القطبية إلى إحداثيات ديكارتية:

a $M\left(5,\frac{\pi}{4}\right)$

b $N\left(\sqrt{2},\frac{5\pi}{6}\right)$

حاول أن تحل 2

أوجد الزوج المرتب $(x\,,y)$ الذي يمثل الإحداثيات الديكارتية لكل من النقطتين:

a $A(5,300^{\circ})$

b $B\left(2,\frac{2\pi}{3}\right)$

كراسة التمارين

في التمارين (2—7)، حول الإحداثيات القطبية إلى إحداثيات ديكارتية:

(2) $\left(2,\frac{\pi}{3}\right)$ **(3)** $\left(1,\frac{3\pi}{4}\right)$

(4) $\left(1.5,\frac{7\pi}{3}\right)$ **(5)** $(2,\pi)$

(6) $(2,270^\circ)$ **(7)** $\left(\sqrt{2},-\frac{\pi}{6}\right)$

للتحويل من الاحداثيات الديكارتية إلى القطبية: $M(r,\theta)$ $\longrightarrow$ $M(x,y)$

$\alpha = \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|$ "زاوية الاسناد" , $r=\sqrt{x^2+y^2}$

ثم يتم حساب الزاوية θ حسب الربع:

$$\theta=\begin{cases}\alpha & x>0\ ,\quad y>0\\ \pi-\alpha & x<0\ ,\quad y>0\\ \pi+\alpha & x<0\ ,\quad y<0\\ 2\pi-\alpha & x>0\ ,\quad y<0\end{cases} \quad ; \quad 0\le\theta<2\pi$$

مثال 3

حوّل من الإحداثيات الديكارتية إلى الإحداثيات القطبية (r, θ) لكل مما يلي:

a $L(1, -\sqrt{3})\ ,\ 0 \leq \theta < 2\pi$

b $M(-3, -4)\ ,\ 0^{\circ} \leq \theta < 360^{\circ}$

حاول أن تحل 3

أوجد الزوج المرتب (r, θ) لكل نقطة مما يلي حيث $0 \leqslant \theta < 2\pi$

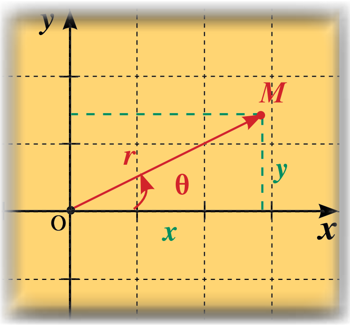
a $D(3\sqrt{3}, 3)$

b $C(4, -2\sqrt{5})$

الصورة المثلثية

الصورة الجبرية $z = x + yi \longleftrightarrow z = r(\cos\theta + i\ \sin\theta)$ الصورة المثلثية

حيث r مقياس العدد أو القيمة المطلقة $r = |z|$ و θ سعة العدد المركب



ملاحظات

الصورة المثلثية للعدد المركب ليست وحيدة، لأنه إذا كانت θ سعة العدد المركب $x + yi$ فإن كلًّا مما يلي سعة للعدد نفسه: $\theta + 2\pi\ ,\ \theta + 4\pi, \ldots\ ,\ \theta + 2\pi k\ :\ k \in \mathbb{Z}$.

إذا كانت $\theta \in [0, 2\pi)$ أو $0^\circ \leqslant \theta < 360^\circ$ فتسمى السعة **بالسعة الأساسية**

إذا كان $z = 0$ ، فإن: $r = 0\ ,\ y = 0\ ,\ x = 0$ θ غير معيّنة.

الصورة المثلثية في حالات خاصة

العدد	المقياس	السعة الأساسية (راديان)
a	a	0
$-a$	$\|-a\| = a$	π
bi	b	$\frac{\pi}{2}$
$-bi$	$\|-b\| = b$	$\frac{3\pi}{2}$

مثال 4

ضع كلًّا مما يلي في الصورة المثلثية:

a $z_1 = 1 + \sqrt{3}\, i$

b $z_2 = -2 - 2i$

c $z_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i$

حاول أن تحل 4

ضع كلًّا مما يلي في الصورة المثلثية:

a $z_1 = \frac{5}{\sqrt{2}} - \frac{5}{\sqrt{2}}i$

b $z_2 = -1 - i$

c $z_3 = -2 + 2\sqrt{3}i$

مثال 6

ضع كلًّا مما يلي في الصورة الجبرية:

a $z_1 = 2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$

b $z_2 = 3\left(\cos\left(\frac{-\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{6}\right)\right)$

حاول أن تحل 6

ضع كلًّا مما يلي في الصورة الجبرية:

a $z_1 = 4\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

b $z_2 = \left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$

مثال 7

ضع في الصورة المثلثية كلًّا من الأعداد التالية:

a $z_1 = 3$

b $z_2 = -5$

c $z_3 = i$

d $z_4 = -3i$

حاول أن تحل 7

ضع في الصورة المثلثية كلًّا من الأعداد التالية:

a $z_1 = 2i$

b $z_2 = 5$

c $z_3 = \frac{-3}{4}$

d $z_4 = -\frac{5}{2}i$

حل معادلات

أولاً : حل معادلات من الدرجة الأولى في C

تحل معادلات الدرجة الأولى في مجموعة الأعداد المركبة بالطريقة نفسها التي تستخدم لحل معادلات الدرجة الأولى في مجموعة الأعداد الحقيقية.

مثال 1

أوجد مجموعة حل المعادلة: $3z + 1 - i = 7 + 3i$ في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$.

حاول أن تحل 1

أوجد مجموعة حل المعادلة: $2z + i = 3 + 2i$ في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$.

كراسة التمارين

في التمارين (1—4)، أوجد مجموعة حل كلّ من المعادلات التالية:

(1) $3z - 1 + i = 5 - 2i$

مثال 2

أوجد مجموعة حل المعادلة: $2z + i\bar{z} = 5 - 2i$ في $\mathbb{C}$.

حاول أن تحل 2

أوجد مجموعة حل المعادلة: $z + i = 2\bar{z} + 1$ في $\mathbb{C}$.

كراسة التمارين

في التمارين (1—4)، أوجد مجموعة حل كلّ من المعادلات التالية:

(2) $z + 2\bar{z} = 4 + i$

(3) $5z - 4 + 2i = 3z + 1 - 4i$

(4) $z + 3(1 + i)z - 8(2 - i) = 0$

ثانياً : حل معادلات من الدرجة الثانية في متغير واحد في C

مثال 3

أوجد مجموعة حل المعادلة: $4x^2 + 100 = 0$ حيث $x \in \mathbb{C}$.

حاول أن تحل 3

أوجد مجموعة حل كل معادلة مما يلي حيث $x \in \mathbb{C}$:

a $3x^2 + 48 = 0$

b $-5x^2 - 150 = 0$

c $8x^2 + 2 = 0$

كراسة التمارين

في التمارين (5–9)، أوجد مجموعة حل كلّ من المعادلات التالية:

(5) $16x^2 + 64 = 0$

مثال 4 أوجد مجموعة حل المعادلة: $4z^2 + 16z + 25 = 0$ في $\mathbb{C}$.

حاول أن تحل 4 أوجد مجموعة حل المعادلة: $z^2 - 2z + 2 = 0$ في $\mathbb{C}$.

كراسة التمارين

في التمارين (5–9)، أوجد مجموعة حل كلّ من المعادلات التالية:

(9) $z + \frac{4}{z} = 2$

إذا كان z جذر لمعادلة تربيعية معاملاتها حقيقية فإن $\overline{z}$ هو جذر آخر لها بشرط أن الجزء التخيلي لا يساوي الصفر

الجذر التربيعي لعدد مركب

إذا كان z جذر تربيعي للعدد المركب فإن $-z$ الجذر الآخر.

لإيجاد جذر تربيعي لعدد مركب z نبحث عن عدد w يكون مربعه يساوي z.

ليكن $z = a + bi$

ابحث عن $w = m + ni$، بحيث يكون $w^2 = z$

مثال 6 أوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب $z = 3 + 4i$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

حاول أن تحل 6 أوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب $z = -3 - 4i$

....

....

....

....

مثال 7

أوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب $z = 7 - 24i$.

حاول أن تحل 7

أوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب $z = 5 + 12i$.

مثال 8

أوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب $z = -21 - 20i$.

حاول أن تحل 8

أوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب $z = 7 + 24i$

التمثيل البياني للدوال المثلثية (الجيب , جيب التمام , الظل)

الدوال الجيبية

تسمّى الدالة على الصورة $y = a\sin bx$ **دالة الجيب** والدالة على الصورة $y = a\cos bx$ **دالة جيب التمام** حيث $b \neq 0$, $a \neq 0$ وهما دالتان جيبيتان وكل منهما دورية.

1. تسمى $|a|$ سعة الدالة الجيبية.
2. $|b|$ تمثل عدد الدورات في الفترة $[0, 2\pi]$
3. $\frac{2\pi}{|b|}$ تمثل دورة الدالة.

مثال 1 أوجد الدورة والسعة لكل دالة مما يلي:

a) $y = 2\cos x$

b) $y = -5\cos\frac{x}{3}$

حاول أن تحل 1 أوجد الدورة والسعة لكل دالة مما يلي:

a $y=-2\cos 5x$

b $y=\frac{1}{2}\cos(-x)$

مثال 2 اكتب معادلة الدالة على الصورة $y=a\sin bx$ إذا كانت:

a الدورة هي $\frac{\pi}{2}$ ، $a=3$

b الدورة هي 2π ، $a=-\frac{1}{2}$

c الدورة هي 3 ، $a = 1.5$

حاول أن تحل 2

اكتب معادلة الدالة على الصورة $y = a\cos bx$ إذا كانت:

a الدورة هي $\frac{\pi}{3}$ ، $a = -2$

b الدورة هي π ، $a = 0.25$

c الدورة هي 2 ، $a = 1$

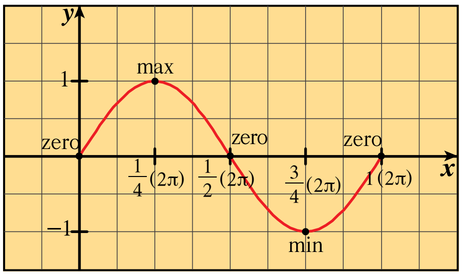
التمثيل البياني للدوال الجيبية

أولاً : دالة الجيب

$y=\sin x$ هي دالة مثلثية مجالها $\mathbb{R}$ ومداها $[-1,1]$، وهي دالة دورية ذات دورة 2π وسعتها تساوي واحد.

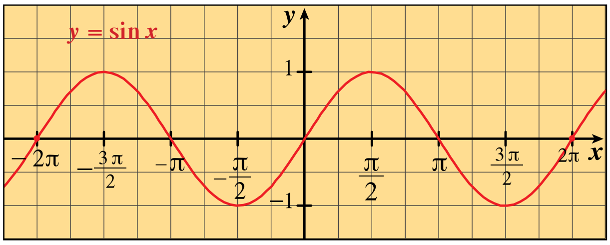
للحصول على التمثيل البياني لِـ $y=\sin x$ في دورة واحدة، تقسم الدورة الواحدة إلى أرباع، ثم نكوّن الجدول في الفترة $[0,2\pi]$ كالتالي:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	1	0	-1	0



وحيث إنها دالة دورية، دورتها 2π فإنها تكرر قيمها ومن ذلك يمكن رسم بيان الدالة: $f(x)=\sin x \ , \ x\in\mathbb{R}$

يمكنك التحقق باستخدام آلة حاسبة.



من بيان دالة الجيب نلاحظ:

1. لأي عدد صحيح n فإن $\sin(n\pi)=0$
2. لأي عدد صحيح n فإن للدالة $f(x)=\sin x$ قيمة عظمى تساوي (1) عند $x=\frac{\pi}{2}+2n\pi$ وقيمة صغرى تساوي (-1) عند $x=\frac{3\pi}{2}+2n\pi$
3. دالة الجيب دالة فردية لأن: $\sin(-x)=-\sin x \, , \forall x\in\mathbb{R}$
4. منحنى الدالة متناظر حول نقطة الأصل.
5. سعة الدالة هي: $\frac{\max f-\min f}{2}$

مثال 3

أوجد السعة والدورة لكل دالة مما يلي ثم ارسم بيانها:

a $y=3\sin 2x$

السعة

الدورة

ربع الدورة

b $y = -2\sin\left(\frac{1}{2}x\right)$, $-4\pi \leq x \leq 4\pi$

السعة

الدورة

ربع الدورة

حاول أن تحل 3

أوجد السعة والدورة لكل دالة مما يلي ثم ارسم بيانها:

a $y=\frac{1}{2}\sin 4x$

السعة

الدورة

ربع الدورة

b $y=-4\sin x \ , \ x\in[-\pi \ , \ 2\pi]$

السعة

الدورة

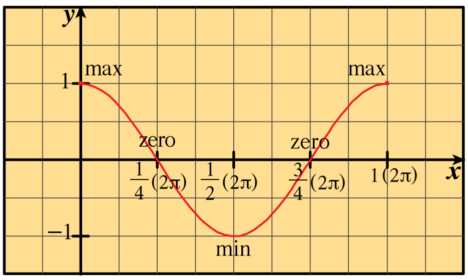
ربع الدورة

ثانياً : دالة جيب التمام

$y = \cos x$ هي دالة مثلثية مجالها هو أيضًا $\mathbb{R}$ ومداها هو $[-1,1]$، وهي دالة دورية ذات دورة 2π وسعتها تساوي واحد.

ونستطيع الحصول على التمثيل البياني للدالة $y = \cos x$ على مجالها عن طريق رسمها على الفترة $[0, 2\pi]$ تمامًا مثلما فعلنا في دالة الجيب.

وتكرر نفسها ونحصل على البيان التالي:

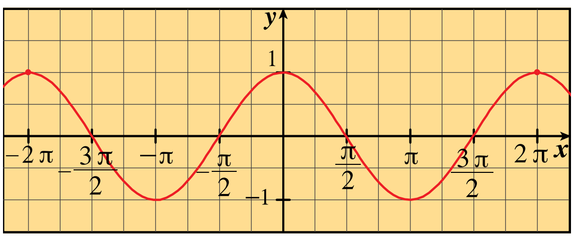


x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos x$	1	0	-1	0	1

يمكنك التحقق باستخدام الآلة الحاسبة.

من بيان دالة جيب التمام نلاحظ أن:

1. لأي عدد صحيح n فإن $\cos\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) = 0$
2. لأي عدد صحيح n فإن للدالة $f(x) = \cos x$ قيمة عظمى تساوي (1) عند $x = 2n\pi$ وقيمة صغرى تساوي (-1) عند $x = \pi + 2n\pi$
3. دالة جيب التمام دالة زوجية لأن: $\cos(-x) = \cos x \quad , \forall x \in \mathbb{R}$
4. محور الصادات هو خط تناظر لمنحنى الدالة.
5. سعة الدالة هي: $\frac{\max f - \min f}{2}$



مثال 4

أوجد السعة والدورة لكل دالة مما يلي ثم ارسم بيانها:

a $y = 2\cos 4x$

السعة

الدورة

ربع الدورة

b $y = -5\cos\left(\frac{2}{3}x\right)\ ,\ x \in [-3\pi\ ,\ 3\pi]$

السعة

الدورة

ربع الدورة

حاول أن تحل 4 أوجد السعة والدورة لكل دالة مما يلي ثم ارسم بيانها:

a $y = 3\cos 2x$

السعة

الدورة

ربع الدورة

b $y = -2\cos\left(\frac{3}{4}x\right)\ ,\ 0 \leq x \leq 2\pi$

السعة

الدورة

ربع الدورة

ثالثاً : دالة الظل

هي الدالة المثلثية على الصورة $y = \tan x$ وتكتب:

$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$: $\cos x \neq 0$

مجالها: $D = \mathbb{R} - \left\{x : x = \dfrac{\pi}{2} + n\pi \ , \ n \in \mathbb{Z}\right\}$

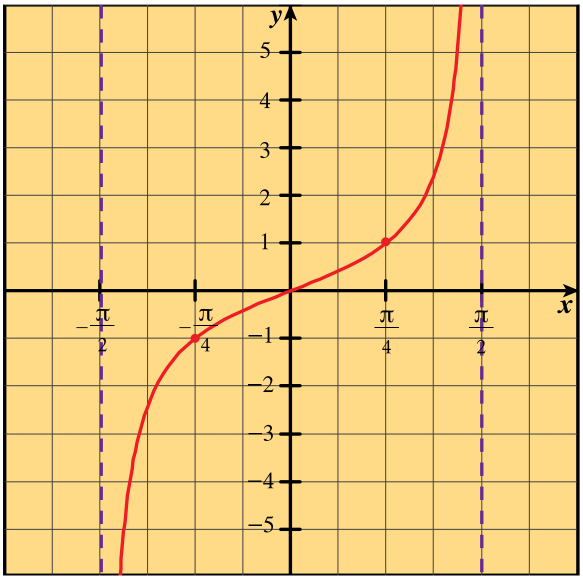
ومداها: $\mathbb{R}$

وهي دالة دورية ذات دورة π

وللحصول على التمثيل البياني لـ: $y = \tan x$

في دورة واحدة $\left(\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$

نقسم الدورة إلى أرباع كما هو في الجدول التالي:



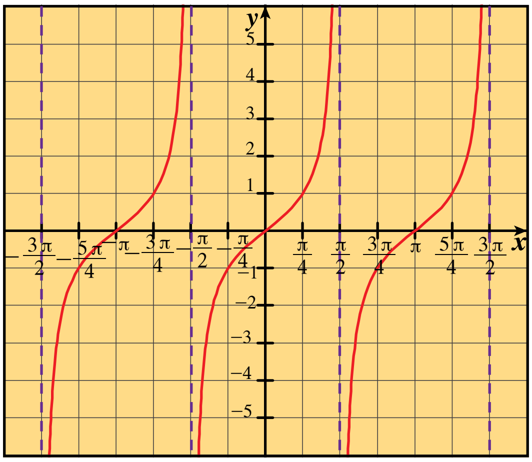
x	$\dfrac{-\pi}{2}$	$\dfrac{-\pi}{4}$	0	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{2}$
$\tan x$	غير معرف	-1	0	1	غير معرف

وحيث إنها دالة دورية دورتها π فإنها تكرر قيمتها.

ومن ذلك يمكننا رسم الدالة $y = \tan x$ على مجالها.

من بيان دالة الظل نلاحظ أن دالة الظل:

1. ليس لها سعة.
2. لأي عدد صحيح n فإن $\tan(n\pi) = 0$
3. لأي عدد صحيح n فإن $\tan\left(\dfrac{\pi}{2} + n\pi\right)$ غير معرف.
   وتسمى المستقيمات $x = \dfrac{\pi}{2} + n\pi$ محاذيات رأسية لبيان الدالة $y = \tan x$
4. دالة فردية لأن: $\tan(-x) = -\tan x \ , \ \forall x \in D$
5. منحناها متناظر حول نقطة الأصل.



وبصفة عامة: الدالة $y = a \tan bx$،

دورتها: $\dfrac{\pi}{|b|}$ أي في الفترة $\left(\dfrac{-\pi}{2b} \ , \ \dfrac{\pi}{2b}\right)$ وتكرر منحناها على مجالها.

مثال 5 أوجد الدورة لكل دالة مما يلي ثم ارسم بيانها.

a $y = \tan 2x \ , \ x \in \left(\frac{-\pi}{4} \ , \ \frac{3\pi}{4} \right)$

الدورة

ربع الدورة

b $y = 2\tan\left(\frac{1}{2}x\right)$

الدورة

ربع الدورة

حاول أن تحل 5 **أوجد الدورة لكل دالة مما يلي ثم ارسم بيانها:**

a $y = -\tan x$

الدورة

ربع الدورة

b $y = \frac{1}{2} \tan x$

الدورة

ربع الدورة

خصائص الدوال المثلثية باعتبار $n \in Z$

الخاصية	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$
الدورة	2π	2π	π
المجال	$(-\infty , \infty)$	$(-\infty , \infty)$	$\mathbb{R} - \left\{x , x = \frac{\pi}{2} + n\pi\right\}$
المدى	$[-1 , 1]$	$[-1 , 1]$	$(-\infty , \infty)$
الأصفار	$x = n\pi$	$x = \frac{\pi}{2} + n\pi$	$x = n\pi$
زوجية أو فردية	فردية	زوجية	فردية

قانون الجيب

في أي مثلث ABC: فإن

$$\frac{\sin\alpha}{a}=\frac{\sin\beta}{b}=\frac{\sin\gamma}{c}$$

ملاحظات

١) يستخدم قانون الجيب عند وجود زاوية وضلع متقابلين معلومين.

٢) إذا علمنا زاويتين في مثلث يمكن دائماً حساب الزاوية الثالثة من قانون مجموع زوايا المثلث ١٨٠°

٣) إذا علمنا ضلعين وزاوية مقابلة لأحدهما في مثلث فإن الزاوية الثانية يمكن أن تكون حادة أو منفرجة وتكون الزاوية المنفرجة مقبولة إذا كان مجموع الزاويتين أقل من $180°$.

مثال 1

حل ΔABC حيث: $\alpha=40°\ ,\ \beta=60°\ ,\ a=4\,\text{cm}$

....

....

....

....

....

....

حاول أن تحل 1

حل ΔABC حيث: $\alpha=36°\ ,\ \beta=48°\ ,\ a=8\,\text{cm}$

....

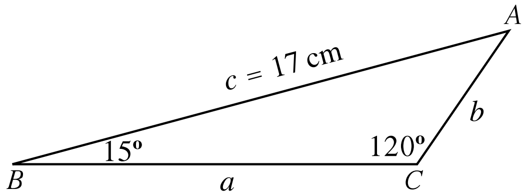
....

....

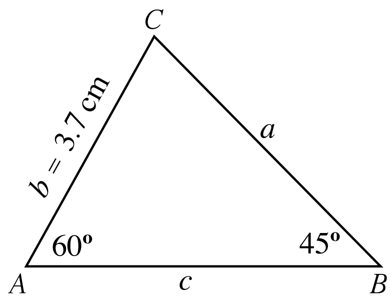
كراسة التمارين

(2–1)، حلّ كلًّا من المثلثين التاليين:

(1)



(2)



مثال 2

حل ΔABC حيث: $\alpha = 40^{o}$, $b = 2\,\text{cm}$, $a = 3\,\text{cm}$

حاول أن تحل 2

حل ΔABC حيث: $\alpha = 26.3^{o}$, $b = 6\,\text{cm}$, $a = 7\,\text{cm}$

مثال 3

حل ΔABC حيث: $a = 5\text{ cm}$, $b = 8\text{ cm}$, $\alpha = 30^{o}$

حاول أن تحل 3

حل ΔABC حيث: $a = 6\text{ cm}$, $b = 7\text{ cm}$, $\alpha = 45^{o}$

قانون جيب التمام

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos\alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2.a.c.\cos\beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2.a.b.\cos\gamma$$

ملاحظات: تستخدم القوانين السابقة لإيجاد ضلع بمعلومية ضلعين وزاوية محصورة بينهما.

يمكن كتابة القوانين الثلاثة السابقة بطريقة أخرى تستخدم لإيجاد زاوية ما بمعلومية الأضلاع الثلاثة

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2.b.c}$$

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2.a.c}$$

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2.a.b}$$

عند استخدام قانون جيب التمام في حساب احدى الزوايا "إذا علم قياس زاوية و3 أضلاع" نحصل على قياس واحد فقط مناسب بعكس قانون الجيب الذي يمكن أن يعطينا احتمالين

مثال 1

حل ΔABC حيث: $a = 2\,\text{cm}\ ,\ b = 3\,\text{cm}\ ,\ \gamma = 60^{o}$

حاول أن تحل 1

حل ΔABC حيث: $a = 11\,\text{cm}\ ,\ b = 5\,\text{cm}\ ,\ \gamma = 20^{o}$

مثال 2 حل ΔABC حيث: $a = 4\,\text{cm}\ ,\ b = 3\,\text{cm}\ ,\ c = 6\,\text{cm}$

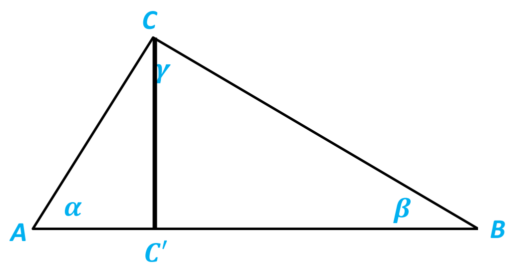
حاول أن تحل 2 في ΔABC حيث: $a = 9\,\text{cm}\ ,\ b = 7\,\text{cm}\ ,\ c = 5\,\text{cm}$ أوجد قياس الزاوية الأكبر.

مثال 3 حل ΔABC حيث: $\alpha = 30^{\circ}$, $b = 7\,cm$, $a = 6\,cm$

حاول أن تحل 3 حل ΔABC حيث: $\alpha = 25^{\circ}$, $b = 6.5\,cm$, $a = 5\,cm$

مساحة المثلث

$$Area\ (ABC) = \frac{1}{2}\ a.b.\sin\gamma$$
$$= \frac{1}{2}\ a.c.\sin\beta$$
$$= \frac{1}{2}\ b.c.\sin\alpha$$



نصف القاعدة ضرب الارتفاع $Area\ (ABC) = \frac{1}{2}\ AB.CC'$

مثال 1 أوجد مساحة المثلث ABC حيث $c = 7\,\text{cm}$ ، $b = 5\,\text{cm}$ ، $a = 8\,\text{cm}$

حاول أن تحل 1 أوجد مساحة المثلث ABC حيث: $c = 8\,\text{cm}$, $b = 6\,\text{cm}$, $a = 5\,\text{cm}$

قاعدة هيرون

يمكننا أيضًا إيجاد مساحة مثلث بمعرفة أطوال أضلاعه الثلاثة بالقاعدة التالية:

$$Area\ (\boldsymbol{ABC}) = \sqrt{\boldsymbol{s}(\boldsymbol{s}-\boldsymbol{a})(\boldsymbol{s}-\boldsymbol{b})(\boldsymbol{s}-\boldsymbol{c})}$$

حيث نصف محيط المثلث

$$\boldsymbol{s} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$$

مثال 2 أوجد مساحة سطح مثلث أطوال أضلاعه: 8 cm ، 5 cm ، 7 cm

....

....

....

....

....

....

حاول أن تحل 2 أوجد مساحة المثلث ABC حيث: $c = 3\text{ cm}$ ، $b = 4\text{ cm}$ ، $a = 4\text{ cm}$

....

....

....

....

....

....

المتطابقات المثلثية

المتطابقات المثلثية الأساسية

المتطابقات المثلثية الأساسية **Trigonometric Identities**

- متطابقات القسمة (الظل وظل التمام)

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \quad , \quad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

- متطابقات المقلوب

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \quad , \quad \csc\theta = \frac{1}{\sin\theta} \quad , \quad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

- متطابقات فيثاغورث

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \quad , \quad 1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta \quad , \quad 1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$$

مثال 1 أثبت صحة المتطابقة:

$$\frac{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}{\cos^2\theta}=\tan^2\theta$$

حاول أن تحل 1 أثبت صحة المتطابقة:

$$\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}+\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}=2\csc\theta$$

مثال 2 أثبت صحة المتطابقة:

$$2\cot x\csc x=\frac{1}{\sec x-1}+\frac{1}{\sec x+1}$$

حاول أن تحل 2 أثبت صحة المتطابقة: $\frac{1+\sin x}{1-\sin x}-\frac{1-\sin x}{1+\sin x}=4\tan x \cdot \sec x$

مثال 3 أثبت صحة المتطابقة: $\frac{\cos x}{1-\sin x}=\frac{1+\sin x}{\cos x}$

حاول أن تحل 3 أثبت صحة المتطابقة: $\frac{1-\cos x}{1+\cos x}=(\csc x-\cot x)^2$

مثال 4 أثبت صحة المتطابقة: $\frac{\cot^2\theta}{1+\csc\theta} = (\cot\theta)(\sec\theta - \tan\theta)$

حاول أن تحل 4 أثبت أن: $\frac{\sec x + \tan x}{\cot x + \cos x} = \sin x + \sin x \tan^2 x$

كراسة التمارين

في التمارين (1–14)، أثبت صحة كل من المتطابقات التالية:

(1) $(\cos x)(\tan x + \sin x \cot x) = \sin x + \cos^2 x$

(2) $(\sin x)(\cot x + \cos x \tan x) = \cos x + \sin^2 x$

(3) $(1 - \tan x)^2 = \sec^2 x - 2\tan x$

(4) $\tan x + \cot x = \sec x \csc x$

(5) $\tan x + \cot x + 2 = \dfrac{(\sin x + \cos x)^2}{\sin x \cos x}$

(6) $\dfrac{1}{1 - \cos x} + \dfrac{1}{1 + \cos x} = 2\csc^2 x$

(7) $\dfrac{\tan^2 x}{\sec x + 1} = \dfrac{1 - \cos x}{\cos x}$

(8) $\cot^2 x - \cos^2 x = \cos^2 x \cot^2 x$

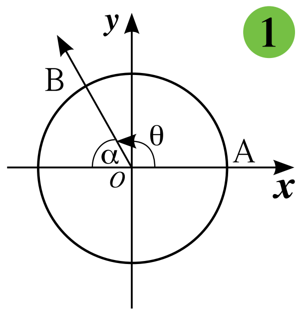
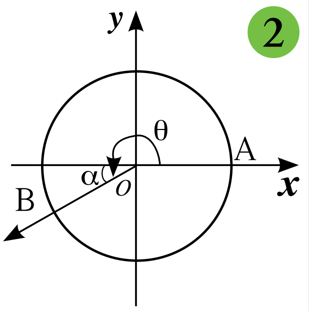
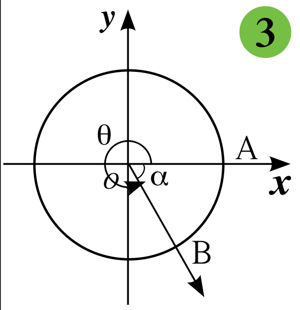
(9) $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos^2 x - \sin^2 x$

(10) $\dfrac{\tan x}{\sec x - 1} = \dfrac{\sec x + 1}{\tan x}$

(11) $\dfrac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} = \dfrac{2\sin^2 x - 1}{1 + 2\sin x \cos x}$

حل معادلات مثلثية

زاوية الاسناد

الشكل	1	2	3
			
الربع من المستوى الإحداثي	θ تقع في الربع ...	θ تقع في الربع ...	θ تقع في الربع ...
زاوية الإسناد	$\alpha = ...$	$\alpha = ...$	$\alpha = 2\pi - \theta$
الزاوية في الوضع القياسي	$\theta = ...$	$\theta = ...$	$\theta = 2\pi - \alpha$

مثال توضيحي

حل المعادلة: $\sin x = \frac{1}{2}$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

مثال 1

حل المعادلة: $2\cos x+\sqrt{3}=0$

حاول أن تحل 1

حل المعادلة: $\sqrt{2}\cos x=1$

مثال 2

حل المعادلة: $\sin\theta = 4\sin\theta + 1$، حيث $0 \leq \theta < 2\pi$

حاول أن تحل 2

حل المعادلة: $\sin\theta = 5\sin\theta - 3$

مثال 3 حل المعادلة: $\tan x = \sqrt{3}$

حاول أن تحل 3 حل المعادلة: $\tan x = 1$

مثال 4 حل المعادلة: $2\cos\theta \sin\theta = -\sin\theta$

حاول أن تحل 4 حل المعادلة: $\sin\theta\cos\theta - \cos\theta = 0$

مثال 5 حل المعادلة: $4\sin^2 x - 8\sin x + 3 = 0$

حاول أن تحل 5 حل المعادلة: $\cos^2 x + 3\cos x + 2 = 0$

كراسة التمارين

في التمارين (7–1)، حل كلًّا من المعادلات التالية:

(1) $\sin x = \frac{-1}{2}$

(2) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(3) $2\cos x = -1$

(4) $\sqrt{3}\tan a = 1$

(5) $2\cos x \sin x - \cos x = 0$

(6) $\tan^2 x = 3$

(7) $4\cos^2 x - 4\cos x + 1 = 0$

في التمرينين (11—12)، حلّ المعادلات التالية:

(11) $\sin^2 x - 2\sin x = 0$

متطابقات المجموع والفرق

متطابقات الدوال المتكافئة

$\sec\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\csc\theta$ $\quad$ $\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cot\theta$ $\quad$ $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$

$\csc\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sec\theta$ $\quad$ $\cot\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\tan\theta$ $\quad$ $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$

مثال 1 أثبت أن: $\sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos\theta$

....

....

....

حاول أن تحل 1 أثبت أن: $\cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\theta$

....

....

....

مثال 2 أثبت أن: $\csc\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=-\sec\theta$

....

....

....

حاول أن تحل 2 أثبت أن: $\sec\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=\csc\theta$

....

....

....

متطابقات المجموع والفرق

متطابقات المجموع والفرق

$$\cos(\beta+\alpha)=\cos\beta\cos\alpha-\sin\beta\sin\alpha$$

$$\cos(\beta-\alpha)=\cos\beta\cos\alpha+\sin\beta\sin\alpha$$

$$\sin(\beta+\alpha)=\sin\beta\cos\alpha+\cos\beta\sin\alpha$$

$$\sin(\beta-\alpha)=\sin\beta\cos\alpha-\cos\beta\sin\alpha$$

$$\tan(\beta+\alpha)=\frac{\tan\beta+\tan\alpha}{1-\tan\beta\tan\alpha}$$

$$\tan(\beta-\alpha)=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}$$

مثال 3

أوجد دون استخدام الآلة الحاسبة كلًّا مما يلي:

a $\cos 15°$ **b** $\sin 105°$ **c** $\tan 75°$

حاول أن تحل 3

أوجد دون استخدام الآلة الحاسبة كلًّا مما يلي:

a $\sin 15°$ **b** $\cos 75°$ **c** $\tan 105°$

مثال 4

إذا كان: $\sin\alpha = \frac{4}{5}\ ,\ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

$\cos\beta = \frac{-12}{13}\ ,\ \pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$

أوجد كلًّا مما يلي:

a $\sin(\alpha + \beta)$

b $\cos(\alpha - \beta)$

c $\tan(\alpha - \beta)$

حاول أن تحل 4

باستخدام المعطيات من المثال (4)، أوجد كلًّا مما يلي:

a $\cos(\alpha+\beta)$ b $\tan(\alpha+\beta)$ c $\sin(\beta-\alpha)$

متطابقات ضعف الزاوية ونصفها

متطابقات ضعف الزاوية

أولاً : جيب تمام ضعف الزاوية

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$

مثال 1 أثبت صحة متطابقة جيب تمام ضعف الزاوية: $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$

....

....

....

....

....

....

حاول أن تحل 1

أثبت صحة متطابقة جيب تمام ضعف الزاوية: $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$

....

....

....

....

....

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$$
$$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$$

مثال 2

إذا كان $\cos x = \frac{3}{5}$ استخدم متطابقة جيب تمام ضعف الزاوية لإيجاد $\cos 2x$

حاول أن تحل 2

إذا كان $\sin x = \frac{5}{13}$ استخدم متطابقة جيب تمام ضعف الزاوية لإيجاد: $\cos 2x$

ثانياً : جيب ضعف الزاوية

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

مثال 3

إذا كان: $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$, $\sin\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}}$ ، فأوجد $\sin 2\theta$.

حاول أن تحل 3

إذا كان $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, $\cos\theta = \frac{3}{5}$ فأوجد $\sin 2\theta$.

ثالثاً : ظل ضعف الزاوية

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

مثال 4

إذا كان: $\tan\theta = -1 + \sqrt{2}$ ، استخدم متطابقة ظل ضعف الزاوية لإيجاد $\tan 2\theta$

....

....

....

....

....

حاول أن تحل 4

إذا كان $\tan\theta = \sqrt{3}$ ، استخدم متطابقة ظل ضعف الزاوية لإيجاد $\tan 2\theta$

....

....

....

....

....

مثال 5

أثبت صحة المتطابقة: $\cos 2\theta = \dfrac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$

....

....

....

....

....

حاول أن تحل 5 أثبت صحة المتطابقة: $2\cos 2\theta = 4\cos^2\theta - 2$

مثال 6 أثبت صحة المتطابقة: $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

حاول أن تحل 6

أثبت صحة المتطابقة: $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$

كراسة التمارين

في التمارين (1—4)، اكتب المقدار بدلالة $\sin x$ أو $\cos x$.

(1) $\sin 2x + \cos x$

(2) $\sin 2x + \cos 2x$

(3) $\cos 3x$

(4) $\cos 4x$

في التمارين (5—7)، أثبت صحة كل من المتطابقات التالية:

(5) $2\csc 2x = \csc^2 x \tan x$

(6) $\sin 3x = (\sin x)(4\cos^2 x - 1)$

....

....

....

....

(7) $\cos 4x = 1 - 8\sin^2 x\cos^2 x$

....

....

....

....

متطابقات نصف الزاوية

متطابقات نصف الزاوية

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

مثال 7

استخدم متطابقات نصف الزاوية لإيجاد $\sin 15^\circ$

حاول أن تحل 7

استخدم متطابقات نصف الزاوية لإيجاد $\cos 15^\circ$

مثال 8

إذا كانت: $180^\circ < \theta < 270^\circ$ ، $\sin\theta = -\frac{24}{25}$ ،
فأوجد $\sin\frac{\theta}{2}$.

حاول أن تحل 8

في المثال (8)، أوجد: $\cos\frac{\theta}{2}$, $\tan\frac{\theta}{2}$

كراسة التمارين

في التمارين (8–10)، استخدم متطابقات نصف الزاوية لإيجاد كل من:

(8) $\sin 15^\circ$

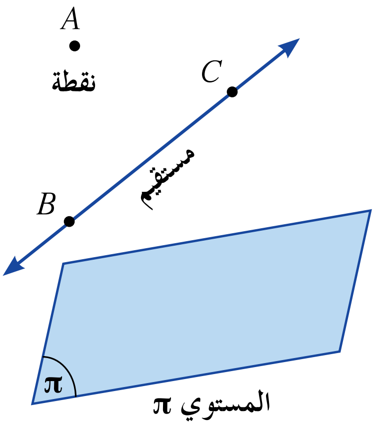
(9) $\tan 195^\circ$

(10) $\cos 75^\circ$

(12) إذا كانت $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$, $\sin x = -\frac{12}{13}$ فأوجد $\sin\frac{x}{2}$

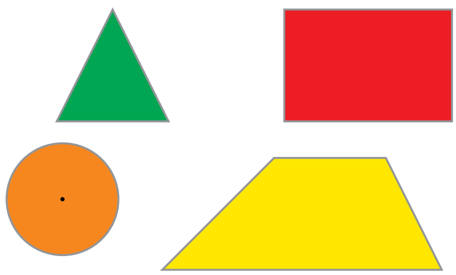
المستقيمات والمستويات في الفضاء

استخدمت في دراستك السابقة بعض المسميات الأولية مثل النقطة، المستقيم، المستوي وذلك لتعريف بعض المفاهيم أو وصف أشياء معينة.

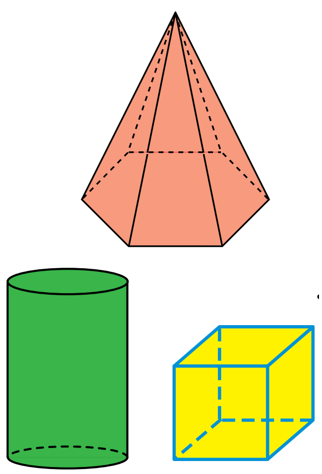


وعلمت أن المستوي هو سطح يمتد إلى ما لا نهاية في جميع الاتجاهات مثل سطح الطاولة أو سطح السبورة وغيرها.

يمثل المستوي هندسيًّا بشكل رباعي أو أي منحنى مغلق (غالبًا ما يكون متوازي أضلاع) ويرمز له بالرمز π أو بثلاث نقاط على هذا المستوي ليست على استقامة واحدة مثلًا A, B, C ويرمز إليه بالرمز (ABC). يضم المستوي مجموعة غير منتهية من النقاط. الأشكال المستوية مثل المثلث، المستطيل، شبه المنحرف، الدائرة وغيرها هي أشكال **ذات بعدين**.



أشكال الفراغ الثلاثي.



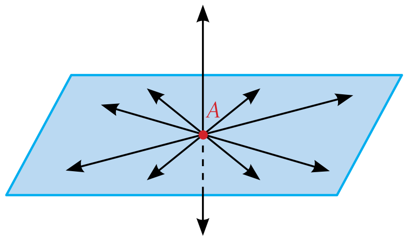
a

(i) أي نقطتين مختلفتين في الفضاء يمر بهما مستقيم وحيد (واحد فقط).

(ii) كل مستقيم يحوي على الأقل نقطتين مختلفتين.

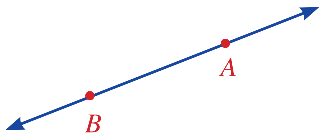
(iii) من نقطة خارج مستقيم يوجد مستقيم وحيد يمر بالنقطة ويوازي المستقيم المعلوم.

أي نقطة يمر بها عدد لا نهائي من المستقيمات في المستوي أو في الفضاء. ولكن أي نقطتين مختلفتين يمر بهما مستقيم وحيد لذلك يعيّن المستقيم بنقطتين مختلفتين.



نقطة واحدة

عدد لا نهائي من المستقيمات

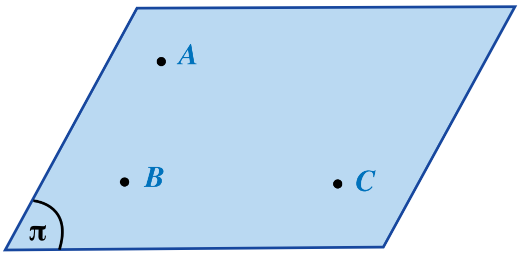


نقطتان مختلفتان

مستقيم واحد فقط

b

(i) في كل مستوٍ يوجد على الأقل ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة.

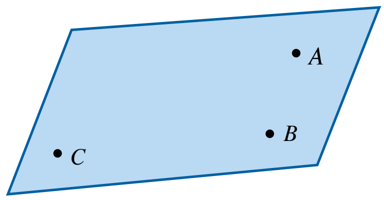


A, B, C ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة

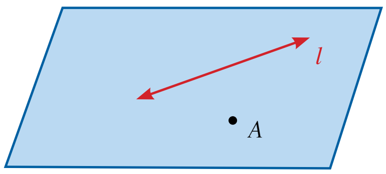
(ii) أي ثلاث نقاط مختلفة وليست على استقامة واحدة يحويها مستوٍ وحيد.

حالات تعيين المستوي في الفضاء

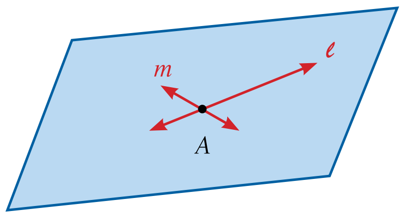
- أي ثلاث نقاط مختلفة ليست على استقامة واحدة تعيّن مستويًا واحدًا فقط.
- أي مستقيم ونقطة خارجة عنه يعيّنان مستويًا واحدًا فقط.
- أي مستقيمان متقاطعان يعينان مستويًا واحدًا فقط.
- أي مستقيمان متوازيان مختلفان يعينان مستويًا واحدًا فقط.



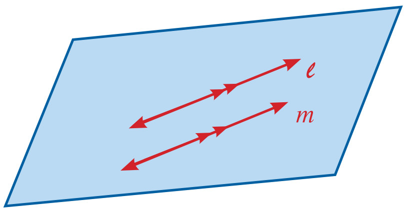
ثلاث نقاط غير مستقيمة



مستقيم ونقطة خارجة عنه

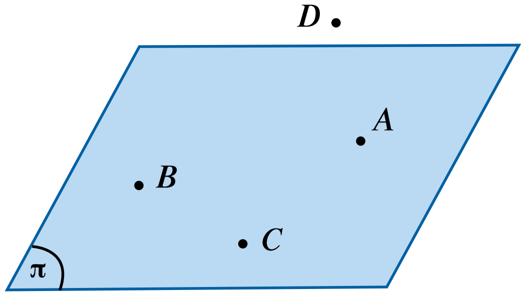


مستقيمان متقاطعان



مستقيمان متوازيان

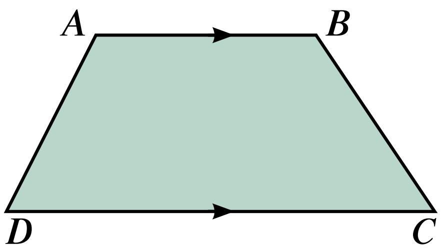
c يحوي الفضاء على الأقل أربع نقاط مختلفة غير مستوية.



النقاط A, B, C, D لا تقع في مستوٍ واحد

مثال 1

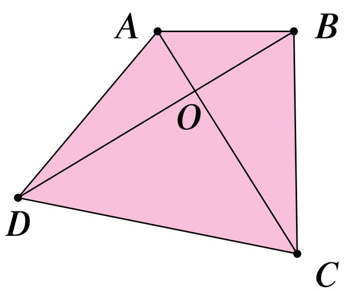
أثبت أن أضلاع أي شبه منحرف تقع جميعها في مستو واحد.



حاول أن تحل 1

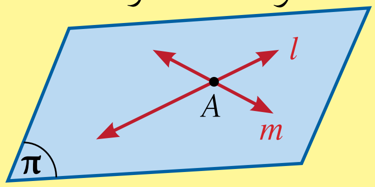
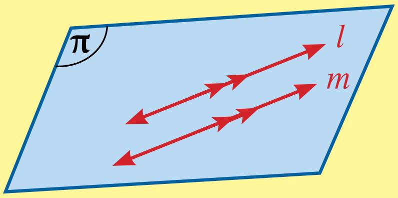
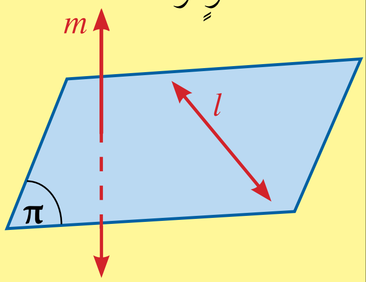
في الشكل المقابل $\overline{BD}$, $\overline{AC}$ يتقاطعان في O

أثبت أن أضلاع الرباعي $ABCD$ تقع جميعها في مستوٍ واحد.

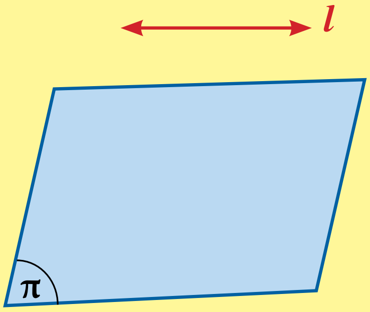
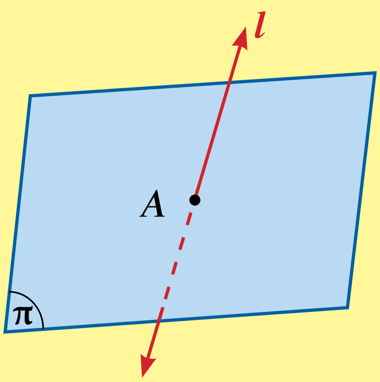
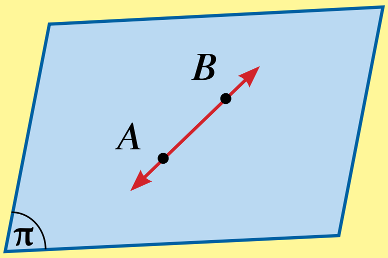


أوضاع المستقيمات في الفضاء

يقال لمستقيمين مختلفين في الفضاء أنهما:

<table dir="rtl">
<tr>
<td>a متقاطعان
إذا وقعا في مستوٍ واحد وكان بينهما نقطة واحدة مشتركة فقط.
</td>
<td>b متوازيان
إذا وقعا في مستوٍ واحد وكانا غير متقاطعين.
</td>
<td>c متخالفان
إذا كان لا يحويهما مستوٍ واحد.
</td>
</tr>
<tr>
<td>$\overleftrightarrow{l} \cap \overleftrightarrow{m} = \{A\}$
مستقيمان متقاطعان</td>
<td>$\overleftrightarrow{l} \subset \pi$, $\overleftrightarrow{m} \subset \pi$,
$\overleftrightarrow{l} \cap \overleftrightarrow{m} = \phi \Longrightarrow \overleftrightarrow{l} // \overleftrightarrow{m}$
مستقيمان متوازيان</td>
<td>$\overleftrightarrow{l} \subset \pi$, $\overleftrightarrow{m} \not\subset \pi$
$\Longrightarrow \overleftrightarrow{l} \cap \overleftrightarrow{m} = \phi$
مستقيمان متخالفان</td>
</tr>
</table>

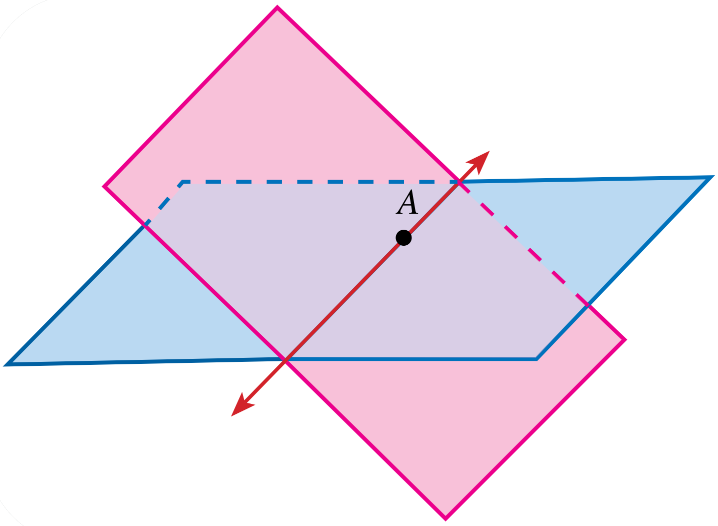
أوضاع مستقيم ومستوٍ في الفضاء

<table dir="rtl">
<tr>
<td>a صفر نقطة مشتركة:
المستقيم موازٍ للمستوي (في هذه الحالة يكون البعد بينهما ثابت).
</td>
<td>b نقطة مشتركة واحدة:
المستقيم يقطع المستوي.
</td>
<td>c نقطتان مختلفتان مشتركتان على الأقل
المستقيم يقع بكامله (بتمامه) في المستوي (المستقيم يوازي المستوي).
</td>
</tr>
<tr>
<td>$\overleftrightarrow{l} \cap \pi = \phi \Rightarrow \overleftrightarrow{l} // \pi$</td>
<td>$\overleftrightarrow{l} \cap \pi = \{A\}$</td>
<td>$\overleftrightarrow{AB} \cap \pi = \overleftrightarrow{AB} \Rightarrow \overleftrightarrow{AB} \subset \pi$
$\therefore \overleftrightarrow{AB} // \pi$</td>
</tr>
</table>

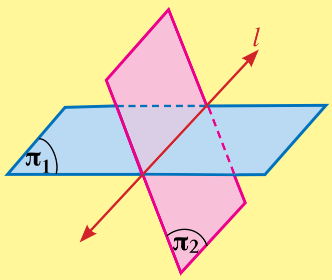
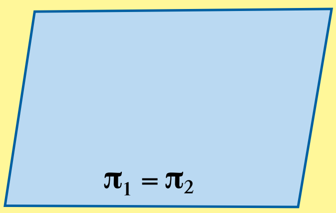
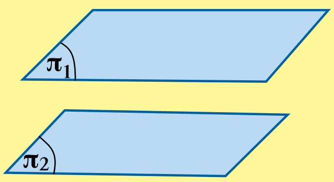
أوضاع مستقيم ومستوٍ في الفضاء

إذا اشترك مستويان مختلفان في نقطة فإنه يوجد على الأقل نقطة أخرى مشتركة بين هذين المستويين.

إذا تقاطع مستويان مختلفان فإنهما يتقاطعان في مستقيم.



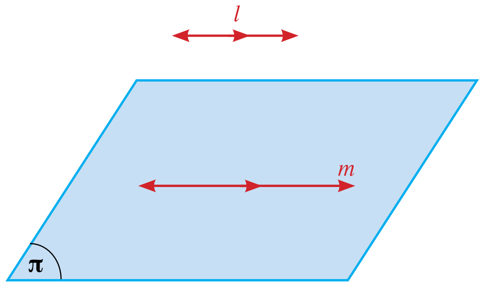
إذا اشترك مستويان في ثلاث نقاط مختلفة وليست على استقامة واحدة يكون المستويان منطبقين.

a المستويان متقاطعان في مستقيم. 	**b** المستويان منطبقان (يشتركان في جميع النقاط). 	**c** المستويان متوازيان (لا توجد نقاط مشتركة بينهما). 
$\pi_1 \cap \pi_2 \neq \phi \Longrightarrow \pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{l}$	$\pi_1 = \pi_2 \Longrightarrow \pi_1 \mathbin{/\!/} \pi_2$	$\pi_1 \cap \pi_2 = \phi \Longrightarrow \pi_1 \mathbin{/\!/} \pi_2$

المستقيمات والمستويات المتوازية في الفضاء

نظرية (1)

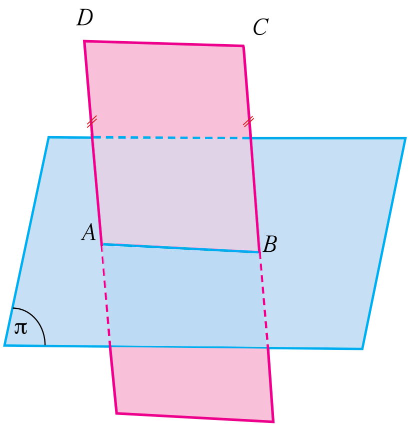
إذا وازى مستقيم خارج مستوٍ مستقيمًا في المستوي، فإنه يوازي المستوي.



مثال 1

في الشكل المقابل: $AD = BC$ ، $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BC}$ ، $\overleftrightarrow{AB} \subset \pi$

أثبت أن: $\overleftrightarrow{CD} \parallel \pi$

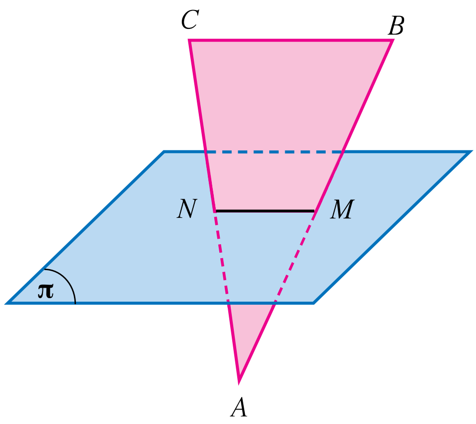


حاول أن تحل 1

في الشكل المقابل: المثلث ABC فيه M منتصف $\overline{AB}$ ، N منتصف $\overline{AC}$ ،

M ، N تنتميان إلى المستوي π .

أثبت أن $\overleftrightarrow{BC} \parallel \pi$.



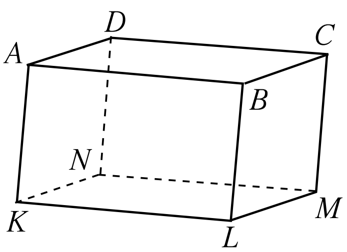
كراسة التمارين

(1) $ABCDKLMN$ شبه مكعب.

(a) أثبت أن: $\overleftrightarrow{AK} \parallel \overleftrightarrow{CM}$

(b) أثبت أن النقاط A, K, M, C تنتمي إلى مستو واحد.

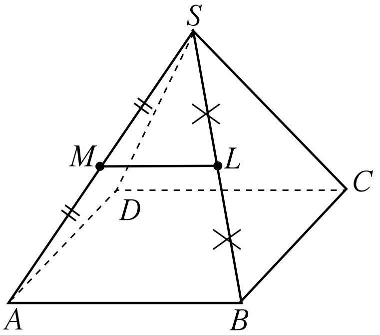
(c) أثبت أن: $\overleftrightarrow{AD}$ يوازي المستوي MKN

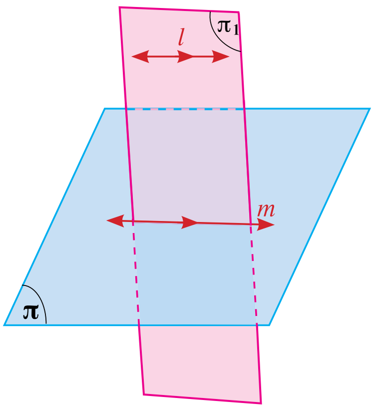


(3) $SABCD$ هرم قاعدته $ABCD$ مربعة الشكل.

M منتصف $\overline{SA}$، L منتصف $\overline{SB}$

أثبت أن: $\overleftrightarrow{ML} \parallel (ABCD)$



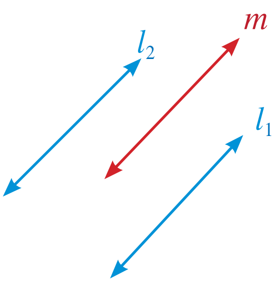


نظرية (2)

إذا وازى مستقيم مستويًا، فكل مستوٍ مار بالمستقيم ويقطع المستوي، يقطعه في مستقيم موازٍ للمستقيم المعلوم.

$\because\ \overleftrightarrow{l} \parallel \pi\ ,\ \overleftrightarrow{l} \subset \pi_1\ ,\ \pi_1 \cap \pi = \overleftrightarrow{m}$

$\therefore\ \overleftrightarrow{m} \parallel \overleftrightarrow{l}$



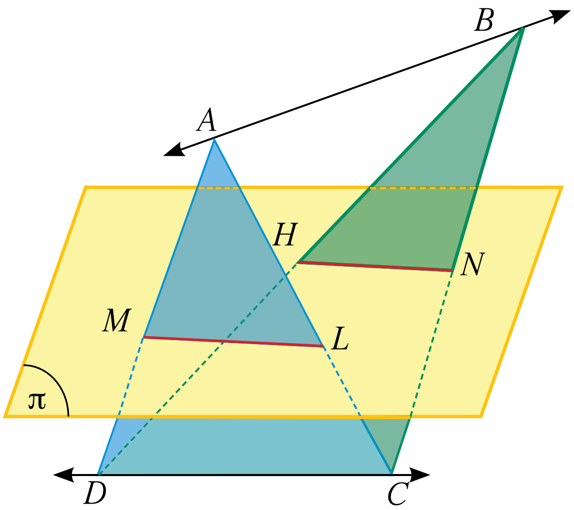
نظرية (3)

المستقيمان الموازيان لمستقيم ثالث في الفضاء متوازيان.

$\because \overleftrightarrow{l_1} \parallel \overleftrightarrow{m}\ ,\ \overleftrightarrow{l_2} \parallel \overleftrightarrow{m}$

$\therefore\ \overleftrightarrow{l_1} \parallel \overleftrightarrow{l_2}$

مثال 2

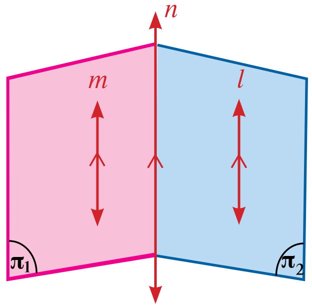


في الشكل المقابل: إذا كان $\overleftrightarrow{CD}$, $\overleftrightarrow{AB}$ متخالفان، $\overleftrightarrow{CD} \parallel \pi$.

$\overleftrightarrow{AD}$ تقطع π في M، $\overleftrightarrow{AC}$ تقطع π في L .

$\overleftrightarrow{BD}$ تقطع π في H، $\overleftrightarrow{BC}$ تقطع π في N .

أثبت أن: $\overleftrightarrow{NH} \parallel \overleftrightarrow{LM}$



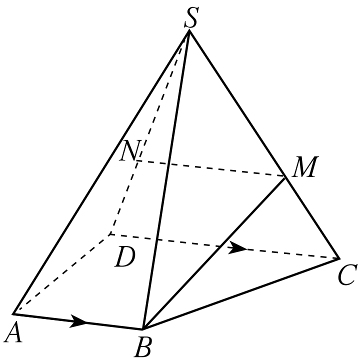
نتيجة (1)

إذا توازى مستقيمان ومرّ بهما مستويان متقاطعان،

فإن تقاطعهما هو مستقيم يوازي كلًّا من هذين المستقيمين.

$$(\overleftrightarrow{m} \parallel \overleftrightarrow{l} \;,\; \overleftrightarrow{m} \subset \pi_1 \;,\; \overleftrightarrow{l} \subset \pi_2 \;,\; \pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{n}) \Rightarrow (\overleftrightarrow{m} \parallel \overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{n})$$

كراسة التمارين



(5) $SABCD$ هرم قاعدته شبه المنحرف $ABCD$ حيث إن $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{DC}$

$M \in \overline{SC}$، المستوي ABM يقطع $\overleftrightarrow{SD}$ في N

(a) أثبت أن: $\overleftrightarrow{AB}$ يوازي المستوي SDC

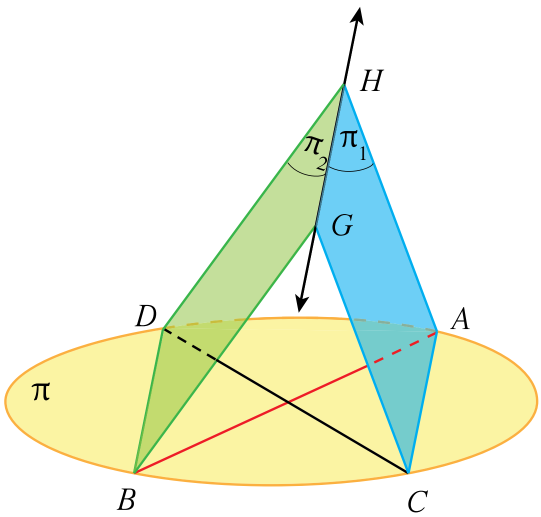
(b) أثبت أن: $\overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

مثال 3

في الشكل المقابل: $\overline{CD}$, $\overline{AB}$ قطران في مستوي الدائرة π.

$\pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{GH}$

أثبت أن مستوي الدائرة π يوازي $\overleftrightarrow{GH}$.



كراسة التمارين

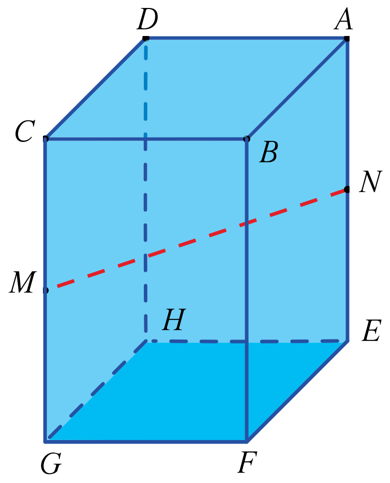
(7) ليكن π_1, π_2 مستويان متقاطعان في $\overleftrightarrow{MN}$ حيث:

$\overleftrightarrow{AB} \subset \pi_1$, $\overleftrightarrow{AB} \parallel \pi_2$

و $\overleftrightarrow{CD} \subset \pi_2$, $\overleftrightarrow{CD} \parallel \pi_1$

أثبت أن: $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

حاول أن تحل 3



$ABCDEFGH$ شبه مكعب.

M منتصف $\overline{CG}$, N منتصف $\overline{AE}$.

أثبت أن $(EFGH)$ يوازي $\overleftrightarrow{MN}$.

كراسة التمارين

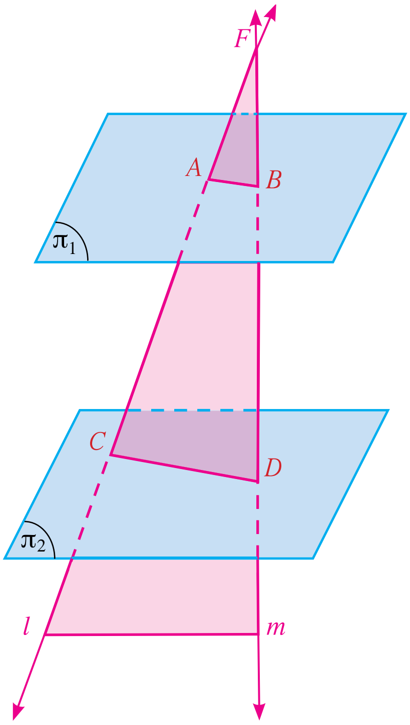
(8) $ABEF$, $ABCD$ متوازيا أضلاع غير مستويين معًا ويتقاطعان في $\overleftrightarrow{AB}$

أثبت أن: $CDFE$ متوازي أضلاع

نظرية (4)

إذا قطع مستوٍ مستويين متوازيين فإن خطي تقاطعه معهما يكونان متوازيين.

مثال4



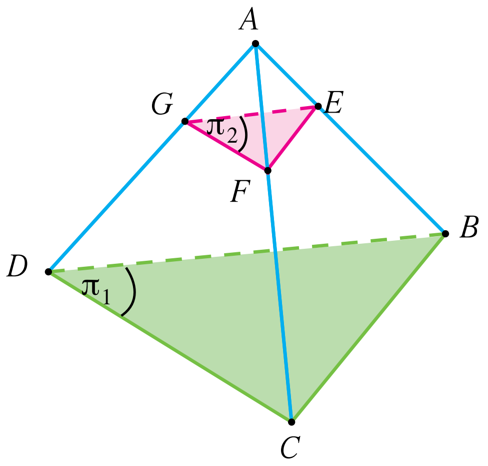
في الشكل المقابل: π_1 , π_2 مستويين متوازيين.

$\overleftrightarrow{l} , \overleftrightarrow{m}$ مستقيمان متقاطعان في F ويقطعان كلًّا من π_1 في A, B، π_2 في C, D

إذا كان $BD = 4\text{ cm}$, $AC = 6\text{ cm}$, $CD = 9\text{ cm}$, $FB = 5\text{ cm}$

فأوجد محيط المثلث FAB

حاول أن تحل 3



في الشكل المقابل، $ABCD$ هرم ثلاثي.

المستويان π_2 , π_1 متوازيان.

إذا كان $\frac{AE}{EB}=\frac{1}{3}$ ، $FG = 6\,\text{cm}$

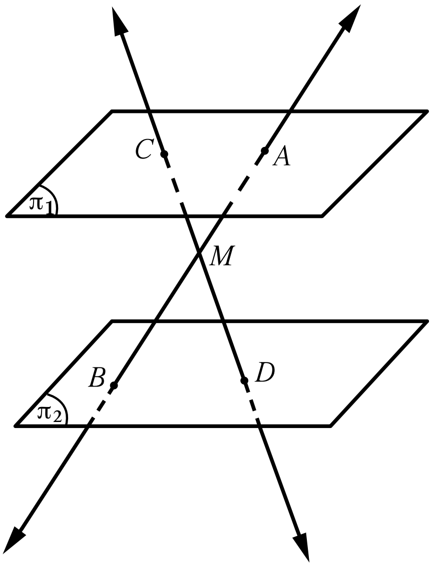
فأوجد DC

كراسة التمارين

(9) في الشكل المقابل π_2 ,π_1 مستويان متوازيان، M نقطة واقعة بينهما،

حيث $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{CD} = \{M\}$

أثبت أن: $\frac{AM}{MB} = \frac{AC}{BD}$



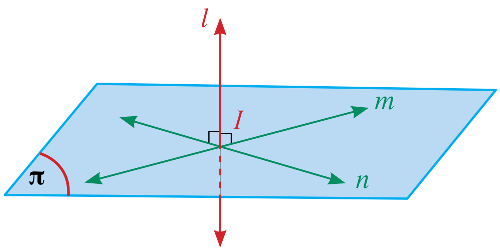
تعامد مستقيم مع مستوٍ

تعريف

الزاوية بين مستقيمين متخالفين هي الزاوية التي يصنعها أحدهما مع أي مستقيمٍ قاطعٍ له وموازٍ للآخر.

تعريف

يكون المستقيم l عموديًّا على المستوي π إذا كان $\overleftrightarrow{l}$ عموديًّا على جميع المستقيمات الواقعة في π ويرمز لذلك بـ : $\overleftrightarrow{l} \perp \pi$



نقول أيضًا إن π عمودي على $\overleftrightarrow{l}$

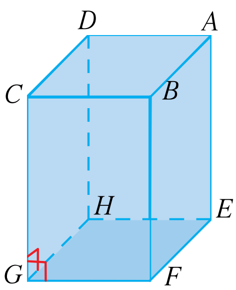
ونرمز لذلك بـ: $\pi \perp \overleftrightarrow{l}$

والعكس صحيح ،

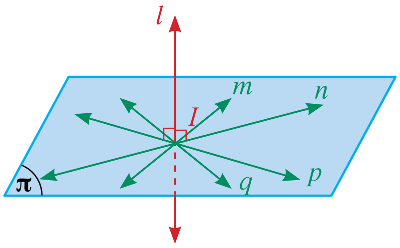
فإذا كان $\pi \perp \overleftrightarrow{l}$ فإن l عموديًّا على كل المستقيمات في المستوي π

نظرية (5)

المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين يكون عموديًّا على مستويهما.



$$\left.\begin{array}{l}\overleftrightarrow{GF} \cap \overleftrightarrow{GH} = \{G\} \\ \overleftrightarrow{CG} \perp \overleftrightarrow{GF} \;,\; \overleftrightarrow{CG} \perp \overleftrightarrow{GH}\end{array}\right\} \Rightarrow \overleftrightarrow{CG} \perp (EFGH)$$



نتيجة (2)

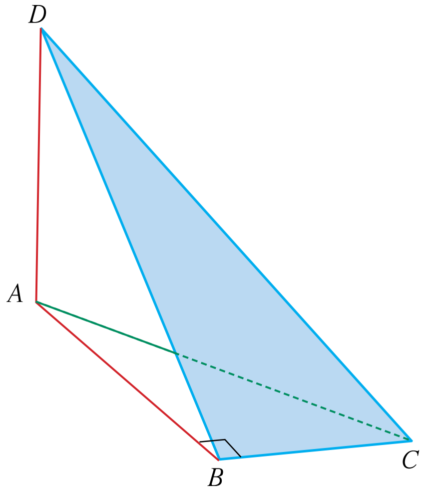
جميع المستقيمات العمودية على مستقيم معلوم من نقطة تنتمي إلى هذا المستقيم تكون محتواة في مستوٍ واحد عموديًّا على المستقيم المعلوم.

مثال 1

في الشكل المقابل، المثلث ABC قائم في $\widehat{B}$

$\overleftrightarrow{AD} \perp (ABC)$.

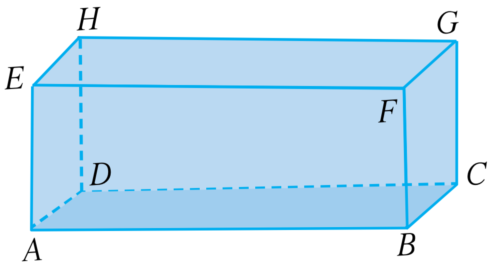
أثبت أن المثلث DBC قائم في $\widehat{B}$



حاول أن تحل 1

في شبه المكعب المقابل،

أثبت أن المثلث BEH قائم في $\widehat{E}$.



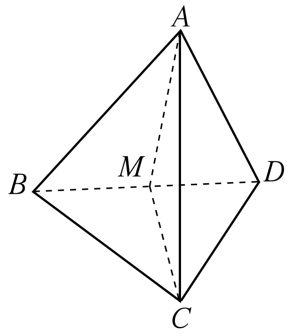
(3) $ABCD$ هرم ثلاثي القاعدة.

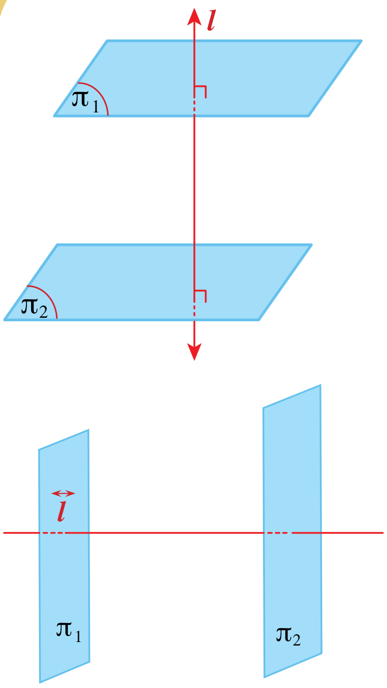
$AD = AB$ ،$CD = CB$

النقطة M منتصف $\overline{DB}$

(a) أثبت أن: $\overleftrightarrow{BD} \perp (AMC)$

(b) استنتج أن: $\overleftrightarrow{BD} \perp \overleftrightarrow{AC}$





نظرية (6)

إذا كان مستقيم عموديًّا على كلٍّ من مستويين مختلفين فإنهما يكونان متوازيين.

$$\overleftrightarrow{l} \perp \pi_1 \ , \ \overleftrightarrow{l} \perp \pi_2 \implies \pi_1 \parallel \pi_2$$

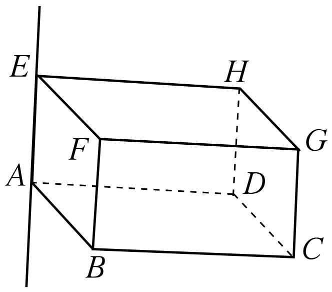
نظرية (7)

إذا كان مستقيم عموديًّا على أحد مستويين متوازيين فإنه يكون عموديًّا على المستوي الآخر.

$$\overleftrightarrow{l} \perp \pi_1 \ , \ \pi_1 \parallel \pi_2 \implies \overleftrightarrow{l} \perp \pi_2$$

كراسة التمارين

(2) $ABCDEFGH$ شبه مكعّب.



(a) سمّ المستقيمات المتعامدة مع $\overleftrightarrow{AE}$

(b) سمّ المستويات المتعامدة مع $\overleftrightarrow{AE}$

(c) أثبت أن $\overleftrightarrow{AD}$ عمودي على المستوي CGH

مثال 2

في الشكل المقابل:

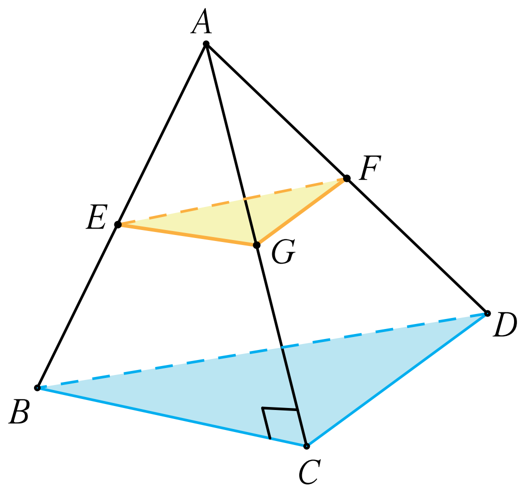
A نقطة خارج المستوى BCD،

والنقاط E, G, F منتصفات $\overline{AD}$, $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ على الترتيب.

إذا كان $\overline{AC} \perp \overline{CB}$

وكان $AD = 13\text{ cm}$ ، $AC = 12\text{ cm}$ ، $CD = 5\text{ cm}$

فأثبت أن: $(EGF) /\!/ (BCD)$.

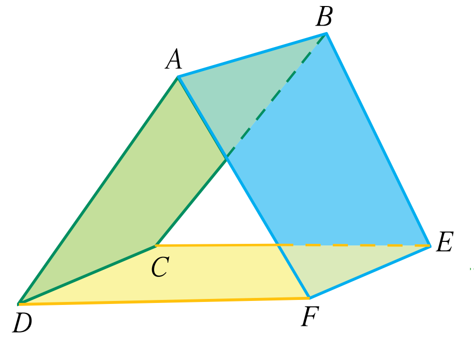


حاول أن تحل 2

في الشكل المقابل:

$ABCD$, $ABEF$ مستطيلان

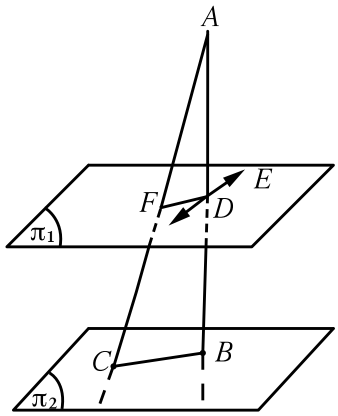
أثبت أن: $(BEC) /\!/ (AFD)$



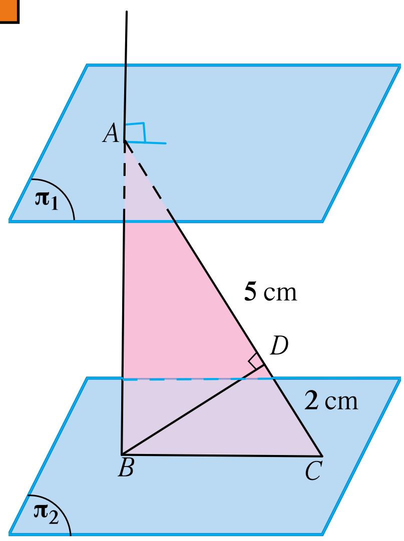
(5) في الشكل المقابل، $\overleftrightarrow{AB}$ عمودي على المستوي π_2 , π_1 , $\overleftrightarrow{DE} \subset \pi_1$, $\overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{DE}$

فإذا كانت D منتصف $\overline{AB}$، F منتصف $\overline{AC}$

أثبت أن: $\pi_1 \mathbin{/\mkern-6mu/} \pi_2$



مثال 3

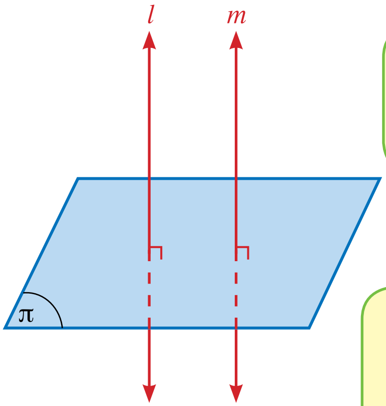


في الشكل المقابل، $\overleftrightarrow{BC} \subset \pi_2$ ، $A \in \pi_1$ ، $\overleftrightarrow{AB} \perp \pi_1$ ، $\pi_1 \parallel \pi_2$

رسم: $\overleftrightarrow{BD} \perp \overleftrightarrow{AC}$ في المستوي ABC

إذا كان: $DC = 2\text{ cm}$ ، $AD = 5\text{ cm}$

أوجد: BD



نظرية (8)

المستقيمان العموديان على مستوٍ متوازيان.

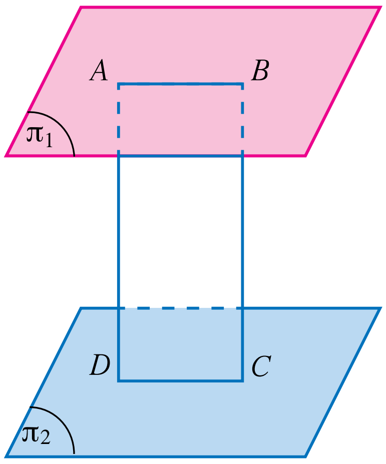
$$\overleftrightarrow{l} \perp \pi \, , \, \overleftrightarrow{m} \perp \pi \implies \overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m}$$

نظرية (9)

إذا توازى مستقيمان أحدهما عموديًّا على مستوٍ كان المستقيم الآخر عموديًّا على المستوي أيضًا.

$$\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m} \, , \, \overleftrightarrow{l} \perp \pi \implies \overleftrightarrow{m} \perp \pi$$

حاول أن تحل 3



في الشكل المقابل: $\pi_1 \mathbin{/\mkern-6mu/} \pi_2$

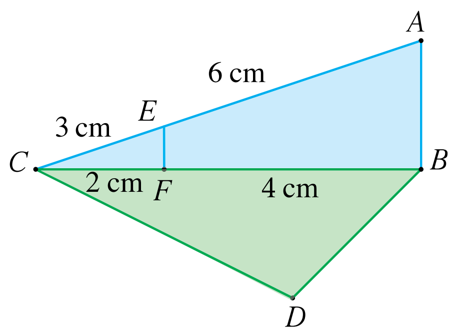
A, B نقطتان في π_1،

C, D نقطتان في π_2 حيث: A, B, C, D في مستوى واحد

$\overline{AD} \perp \pi_2 \;\; , \;\; \overline{BC} \perp \pi_2$

أثبت أن $ABCD$ مستطيل.

مثال 4



في الشكل المقابل إذا كان $\overline{AB} \perp (BCD)$

وكان $CE = 3\text{ cm} \;,\; EA = 6\text{ cm} \;,\; CF = 2\text{ cm} \;,\; FB = 4\text{ cm}$

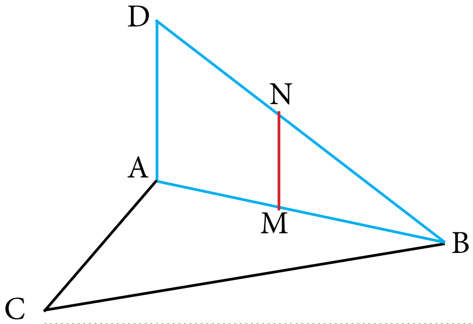
أثبت أن: $\overline{EF} \perp \overline{DB}$

كراسة التمارين

(8) ليكن $\overleftrightarrow{EF}$, $\overleftrightarrow{CD}$ عموديان على المستوي π ويقطعانه في D, F على الترتيب. فإذا كان $\overleftrightarrow{CE}$ يوازي π. أثبت أن $CDFE$ مستطيل.

(9) ABC مثلث، أخذت النقطة D خارج مستوي المثلث بحيث كان: $\overleftrightarrow{DA}$ عموديًّا على كل من $\overleftrightarrow{AB}$، $\overleftrightarrow{AC}$

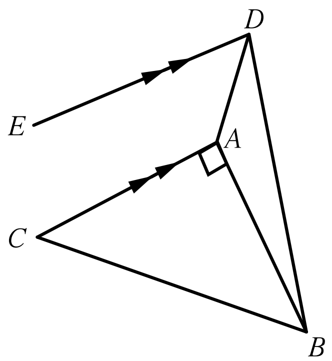
فإذا كانت M منتصف $\overline{AB}$، N منتصف $\overline{DB}$، أثبت أن: $\overleftrightarrow{MN} \perp (ABC)$

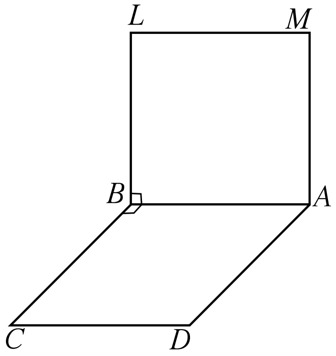


(10) في الشكل المقابل، ABC مثلث قائم الزاوية في A

رسم $\overleftrightarrow{AD}$ عمودي على مستوي المثلث ABC، ورسم $\overleftrightarrow{ED} \mathbin{/\!/} \overleftrightarrow{CA}$

أثبت أن: $\overleftrightarrow{ED} \perp \overleftrightarrow{AB}$



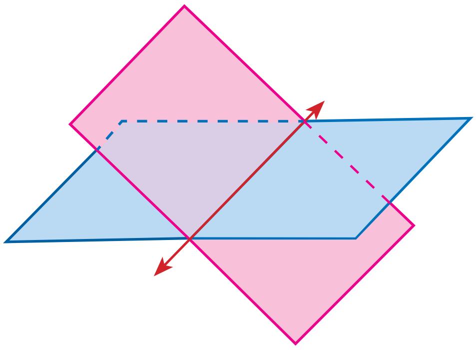


(11) $ABCD$، $ABLM$ مربعان ليسا في مستو واحد، لهما ضلع مشترك $\overline{AB}$،

أثبت أن: $\overleftrightarrow{LM} \perp (LBC)$

الزاوية الزوجية

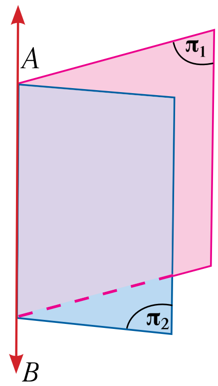
إذا تقاطع مستويان مختلفان في الفضاء فإنهما يتقاطعان في مستقيم وينتج من هذا التقاطع أربع زوايا تسمى كل منها **زاوية زوجية**.

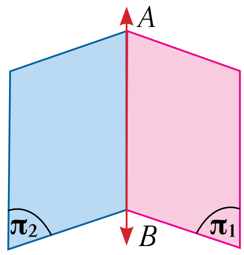


يقسم المستقيم المشترك كل مستوى إلى نصفين ويسمى المستقيم المشترك **حافة الزاوية الزوجية** أو **الفاصل المشترك**.

ويسمى كل من نصفي المستويين وجه الزاوية الزوجية.

يبيّن الشكلان أدناه زاويتين زوجيتين حافة كل منهما $\overleftrightarrow{AB}$



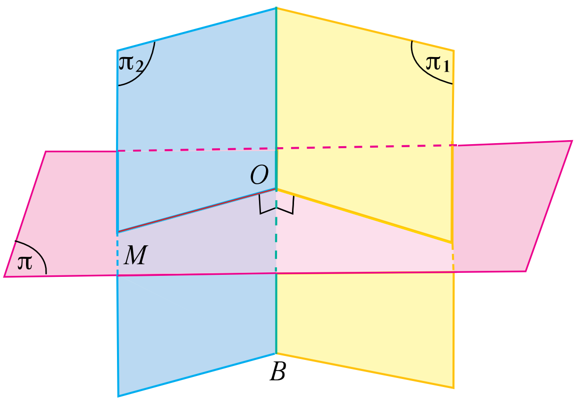


نقرأ الزاوية الزوجية بحافتها فنقول الزاوية الزوجية $\overleftrightarrow{AB}$، أو في حال وجود أكثر من زاوية زوجية: $(\pi_1 , \overleftrightarrow{AB} , \pi_2)$

تعريف: الزاوية المستوية لزاوية زوجية

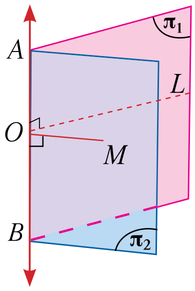
هي الزاوية التي تنشأ من تقاطع الزاوية الزوجية مع مستوٍ عمودي على حافتها.

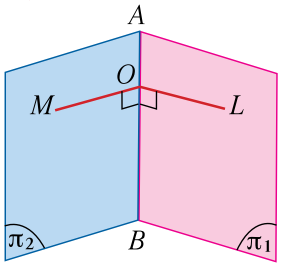
ويكون قياس الزاوية الزوجية هو قياس إحدى زواياها المستوية ودائمًا نأخذ قياس **الزاوية الحادة**



لإيجاد قياس الزاوية الزوجية نتبع التالي:

- نحدّد حافة الزاوية الزوجية ولتكن $\overleftrightarrow{AB}$
- نأخذ نقطة O على حافة الزاوية الزوجية $\overleftrightarrow{AB}$
- نرسم من O شعاعًا $\overrightarrow{OL}$ عموديًّا على $\overleftrightarrow{AB}$ يكون واقعًا بتمامه في المستوى π_1
- نرسم من O شعاعًا $\overrightarrow{OM}$ عموديًّا على $\overleftrightarrow{AB}$ يكون واقعًا بتمامه في المستوى π_2





فتكون الزاوية LOM تسمى **الزاوية المستوية** للزاوية الزوجية.

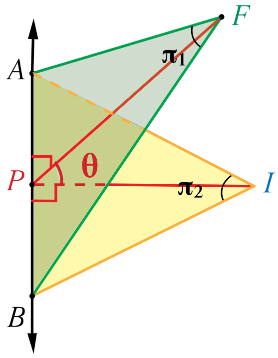
قياس الزاوية الزوجية يرمز له بالرمز $m(L\widehat{O}M)$

ونحصل على الزاوية المستوية بقطع الزاوية الزوجية بمستوٍ عمودي على حافتها.

تدريب 1

في كل من الأشكال التالية عيّن الزاوية المستوية للزاوية الزوجيّة بين المستويين π_1 , π_2.

1



$\overline{FP} \perp \overline{AB}$, $\overline{IP} \perp \overline{AB}$

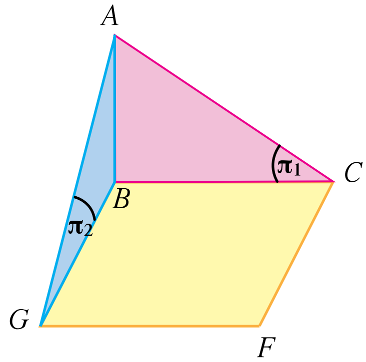
حافة الزاوية الزوجية ....

$...... \subset \pi_1$, $..... \perp \overline{AB}$

وكذلك $....... \subset \pi_2$, $...... \perp \overline{AB}$

$\therefore$ .... هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية بين π_1 , π_2

2



$\overline{AB} \perp (CBGF)$

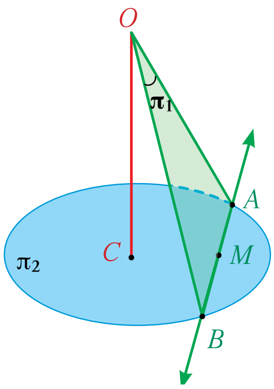
حافة الزاوية الزوجية ....

$\overline{BC} \subset \pi_1$, $...... \perp \overline{AB}$

وكذلك $......... \subset \pi_2$, $......... \perp \overline{AB}$

$\therefore$ .... هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية بين π_1 , π_2

3



M منتصف $\overline{AB}$ ، $\overline{OC} \perp \pi_2$

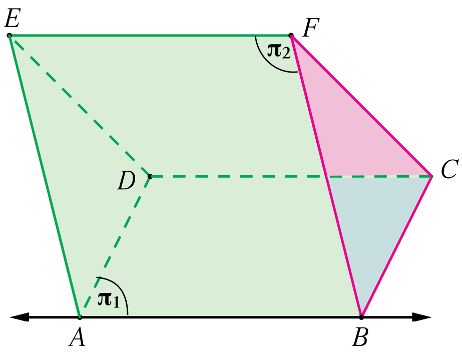
....

....

....

....

4



$ABCD$ مستطيل، $\overleftrightarrow{FC} \perp (ABCD)$

....

....

....

....

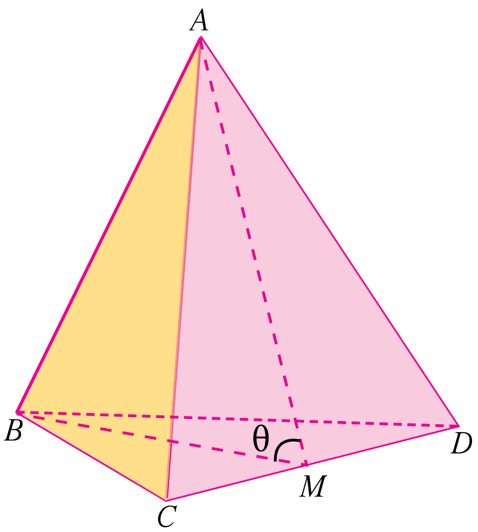
مثال 1

يبيّن الشكل المقابل هرمًا ثلاثي القاعدة أوجهه مثلثات متطابقة الأضلاع طول حرفه 8 cm

M منتصف $\overline{DC}$

a حدد الزاوية المستوية بين المستويين ADC , BDC

b أوجد قياس الزاوية المستوية للزاوية الزوجية $\overleftrightarrow{DC}$



....

....

....

....

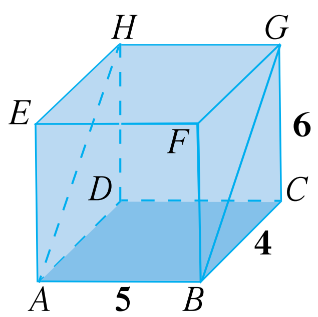
....

....

....

....

في شبه المكعب المقابل، أثبت أن الزاوية GBC هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية للمستويين $(ABCD)$, $(ABGH)$، ثم أوجد قياسها.



كراسة التمارين

(1) ABC مثلث متطابق الأضلاع وطول ضلعه x

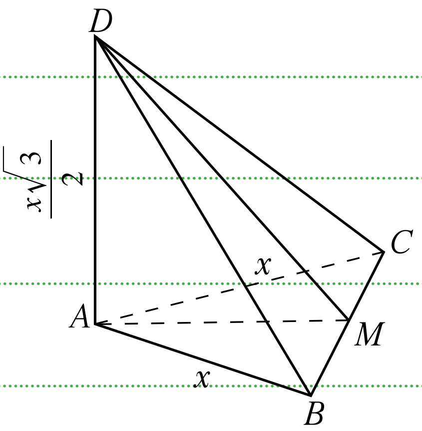
$\overleftrightarrow{AD}$ متعامد مع المستوي ABC، $AD = \frac{x\sqrt{3}}{2}$،

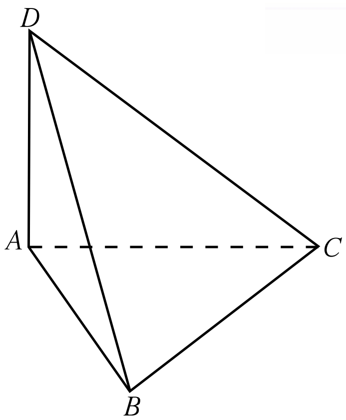
M منتصف $\overline{BC}$

(a) أثبت أن $\overleftrightarrow{CB}$ متعامد مع المستوي AMD

(b) عيّن الزاوية المستوية للزاوية الزوجية $(DCB, \overleftrightarrow{BC}, ACB)$

(c) أوجد قياس الزاوية الزوجية $(DCB, \overleftrightarrow{BC}, ACB)$



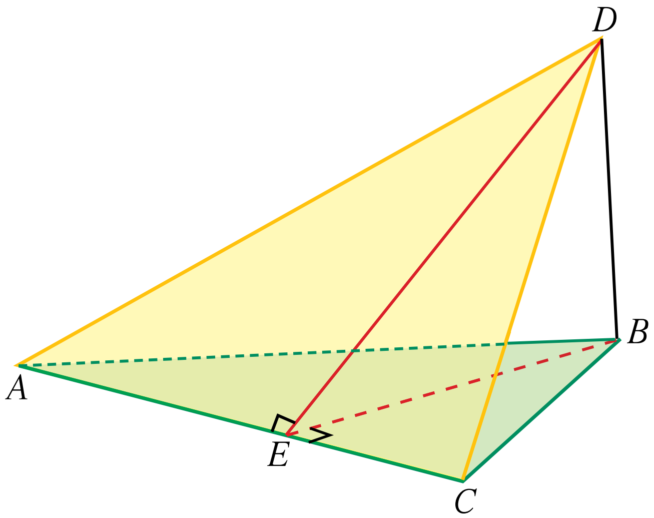


(2) ABC مثلث متطابق الأضلاع.

$\overleftrightarrow{AD}$ متعامد مع المستوي ABC

أوجد قياس الزاوية الزوجية $(DAB , \overleftrightarrow{DA} , DAC)$

مثال 2



في الشكل المقابل D نقطة خارج مستوى المثلث ABC،

$m(B\hat{A}C)=\frac{\pi}{6}$ ، $AB=10\text{ cm}$ ، $DB=5\text{ cm}$

$\overline{DB}\perp(ABC)$

$\overline{DE}\perp\overline{AC}$ ، $\overline{BE}\perp\overline{AC}$

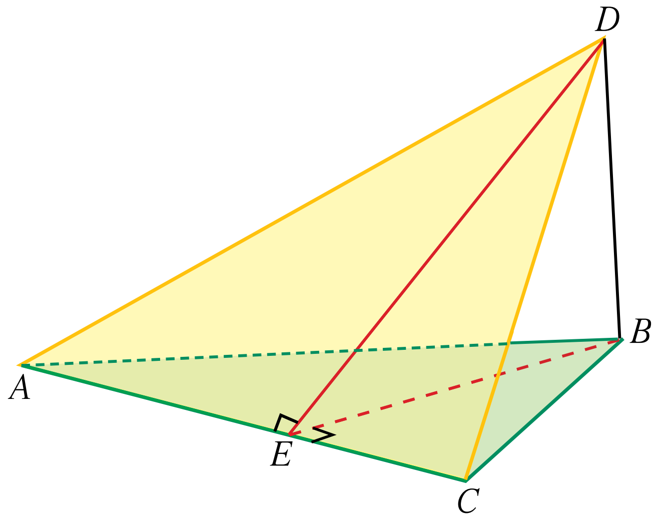
أوجد:

a BE , DE

b قياس الزاوية الزوجية بين المستويين BAC , DAC

حاول أن تحل 2

في المثال (2)، أوجد قياس الزاوية الزوجية بين المستويين BAC، DAC إذا كان $m(\widehat{BAC}) = 45^\circ$.

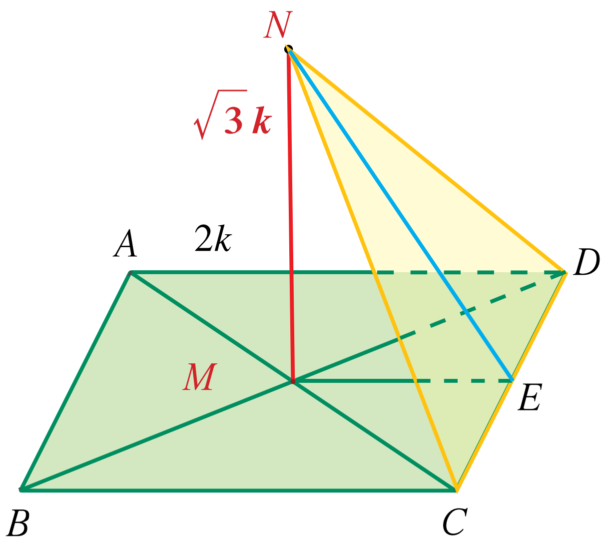


مثال 3

$ABCD$ مستطيل تقاطع قطراه في M، وفيه $AD = 2k$

أقيم $\overline{NM}$ عمودًا على $(ABCD)$ حيث N خارج مستواه بحيث $MN = \sqrt{3}\,k$

أوجد قياس الزاوية الزوجية بين المستويين NCD , $ABCD$



حاول أن تحل 3

في المثال (3)، إذا كان $AB = 6\,k$ ، فأوجد قياس الزاوية الزوجية بين المستويين $NBC\,,\,ABCD$