



الرياضيات للصف الثانى عشر

المستوى المتقدم

السنة الدراسية 2023 / 2024

الفصل الدراسى الثالث





الوحدة السادسة

تطبيقات التكامل المحدود

الدرس الأول

اسم الدرس : المساحة المحصورة بين منحنيين





Mohamed

MO





Friday, 19 April 2024

تسلسل الحصة

حصر الحضور والغياب

النشيد الوطني

قواعد التعلم عن بعد ونواتج
الدرس

تهيئة الدرس
باستخدام كويزز

تقويم ختامي على

روابط الأنشطة في الصفحة الخاصة
بالنشاط بالإضافة للبوابة

روابط الأنشطة في الصفحة الخاصة
بالنشاط بالإضافة للبوابة







التزام الهدوء وقت الشرح



الالتزام بالوقت المحدد للحصة



كتم الصوت



اتباع تعليمات المعلم



المشاركة الفعالة







الاختبار القبلي

https://quizizz.com/admin/quiz/661bc032961468147c9d6dd0?source=quiz_share

<https://quizizz.com/admin/quiz/5e86156a498c35001e1a3fd3/>





أهداف التعلم

- إيجاد المساحة المحصورة بين منحنين باستخدام المكامل dx .
- إيجاد المساحة المحصورة بين منحنين باستخدام المكامل dy .
- إيجاد المساحة المحصورة بين ثلاث منحنيات.



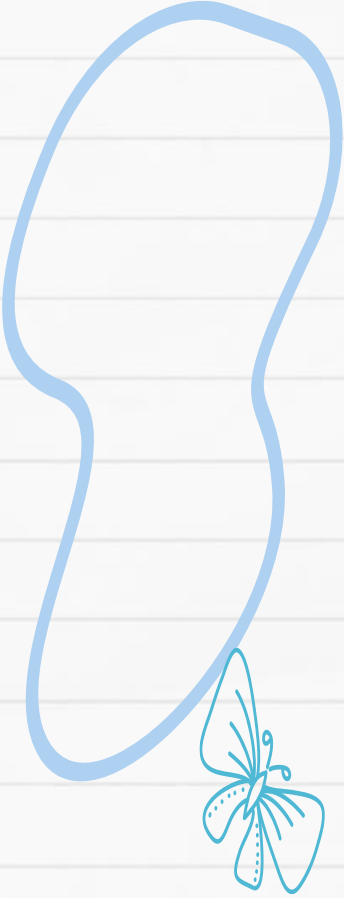


مفردات الدرس

• المساحة المحصورة بين منحنين

• المكامل dx

• المكامل dy





في البدء طورنا التكامل المحدود لحساب المساحة تحت منحنى. على وجه الخصوص، لتكن f دالة متصلة معرفّة على $[a, b]$ حيث $f(x) \geq 0$ على $[a, b]$. لأيجاد المساحة تحت المنحنى $y = f(x)$ على الفترة $[a, b]$ ، بتجزئة $[a, b]$ إلى n فترات جزئية متساوية

فيكون $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ والنقاط في التجزئة عندئذ هي $x_0 = a$ $x_1 = x_0 + \Delta x$ $x_2 = x_1 + \Delta x$ وهكذا، أي إنّ

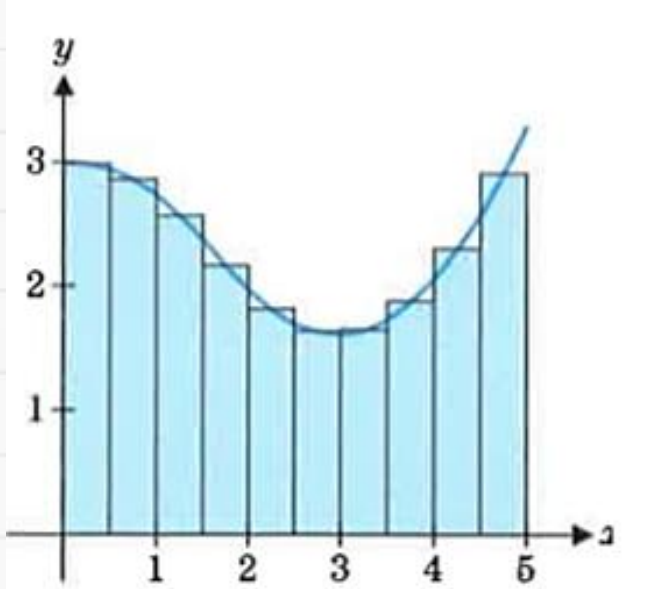
$$x_i = a + i\Delta x \quad \text{لكل } i = 0, 1, 2, \dots, n$$

على كل فترة جزئية $[x_{i-1}, x_i]$ ، نقوم بإنشاء مستطيل له الارتفاع $f(c_i)$ ، لبعض $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ كما هو مبين في الشكل 6.1 وحساب مجموع مساحات n من المستطيلات كقيمة تقريبية للمساحة A الواقعة تحت المنحنى:

$$A \approx \sum_{i=0}^n f(c_i) \Delta x$$

بينما نأخذ عددًا أكبر من المستطيلات، يقترب هذا المجموع من القيمة الدقيقة للمساحة، وهي

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n f(c_i) \Delta x = \int_a^b f(x) dx$$



الشكل 6.1

القيمة التقريبية للمساحة

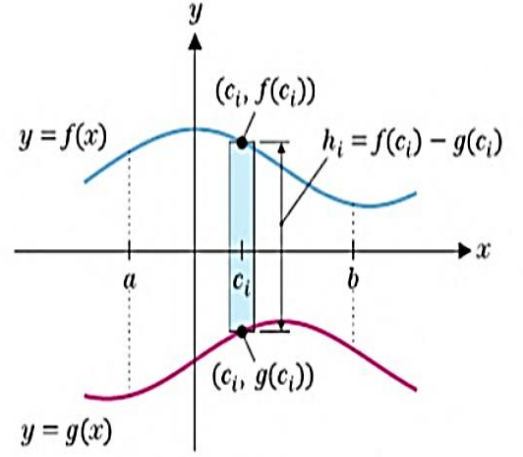




أولاً : إيجاد المساحة بين منحنين باستخدام المكامل dx

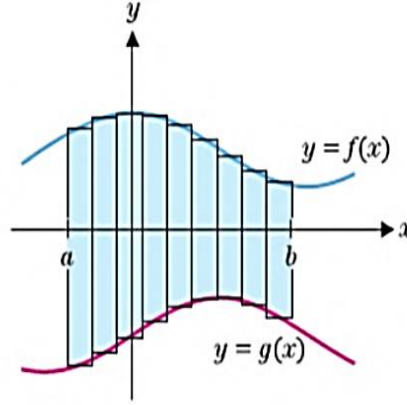
عرض المستطيل (السماكة) (dx) موازي لمحور السينات
وطول (ارتفاع) المستطيل $(f(x) - g(x))$ موازي لمحور الصادات

◀ الدوال تكون بدلالة x



الشكل 6.3b

مساحة المستطيل عند الحد i



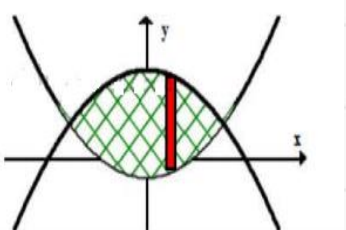
الشكل 6.3a

القيمة التقريبية للمساحة

فوق تحت	
$y = f(x), y = g(x)$	الدوال
أفقية من محور x : من اليسار الى اليمين $x = a, x = b$	حدود التكامل
$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$	المساحة

إذا كانت كل من f و g متصلتين حيث $f(x) \geq g(x)$ على الفترة $[a, b]$ فإن :

المساحة بين المنحنين $y = f(x)$ و $y = g(x)$ من a الى b هي تكامل $[f - g]$ من a الى b

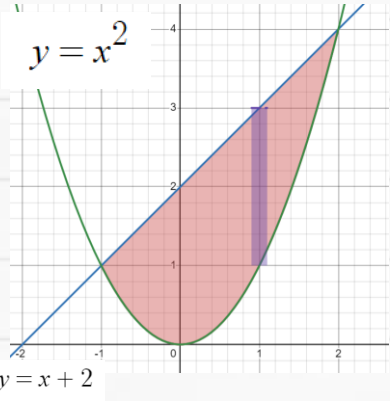


$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

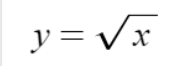
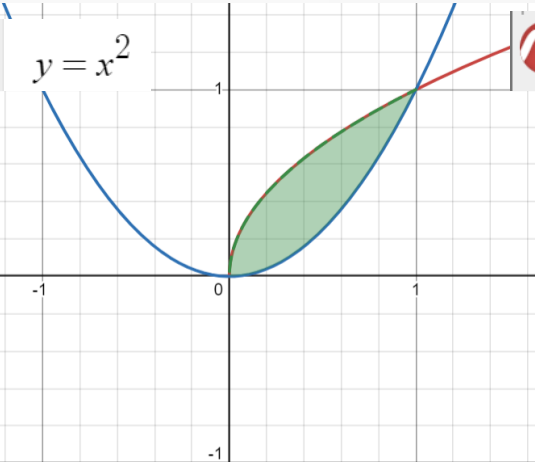




أولاً: إيجاد المساحة بين منحنيين باستخدام المكامل dx



مثال (1) اوجد المساحة المحصورة بين الدالتين $y = x^2$ و $y = x + 2$



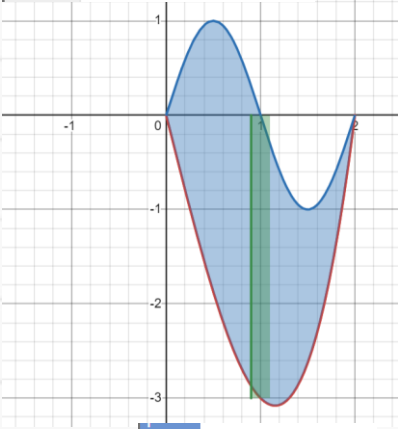
مثال (2) اوجد المساحة المحصورة بين الدالتين $y = x^2$ و $y = \sqrt{x}$





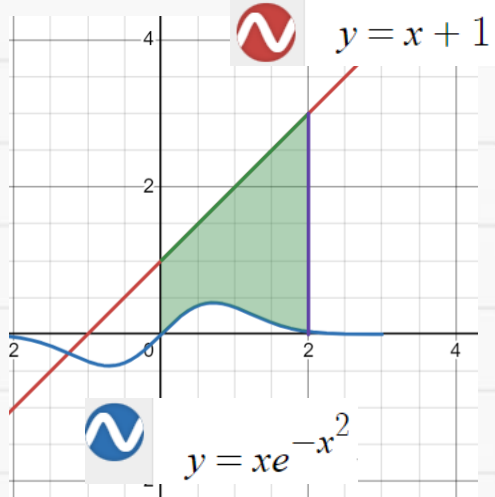
ناتج التعلم : إيجاد المساحة بين منحنين باستخدام المكامل dx

$y = \sin(\pi x)$



$y = x^3 - 4x$

مثال (3) اوجد المساحة المحصورة بين الدالتين $y = \sin \pi x$ و $y = x^3 - 4x$

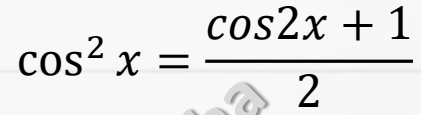


مثال (4) اوجد المساحة المحصورة بين الدالتين $f(x) = x + 1$ و $g(x) = xe^{-x^2}$

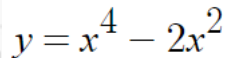




نتائج التعلم: إيجاد المساحة بين منحنيين باستخدام المكامل dx



مثال (5)



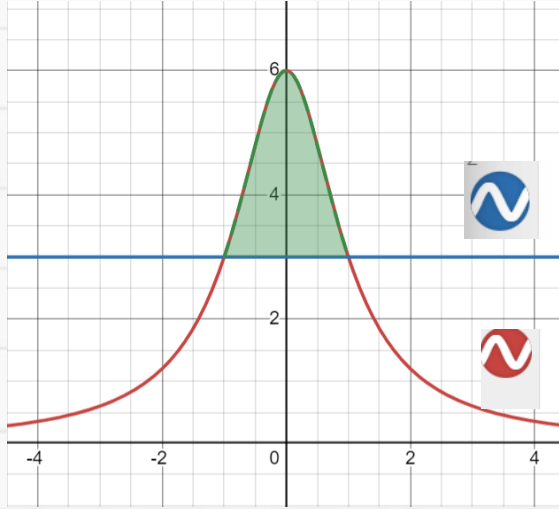
مثال (6)



+971 50 513 1300 / 



ناتج التعلم : إيجاد المساحة بين منحنيين باستخدام المكامل dx

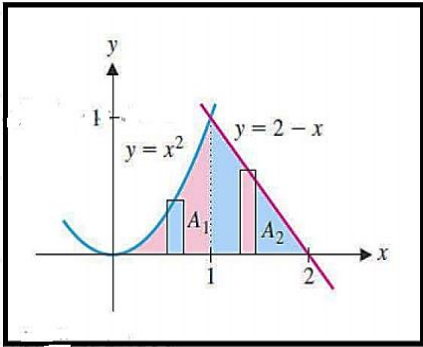


$$y = 3$$



$$y = \frac{6}{x^2 + 1}$$

مثال (7) اوجد المساحة المحصورة بين الدالتين $f(x) = \frac{6}{x^2 + 1}$ و $g(x) = 3$



تجزئة المساحة

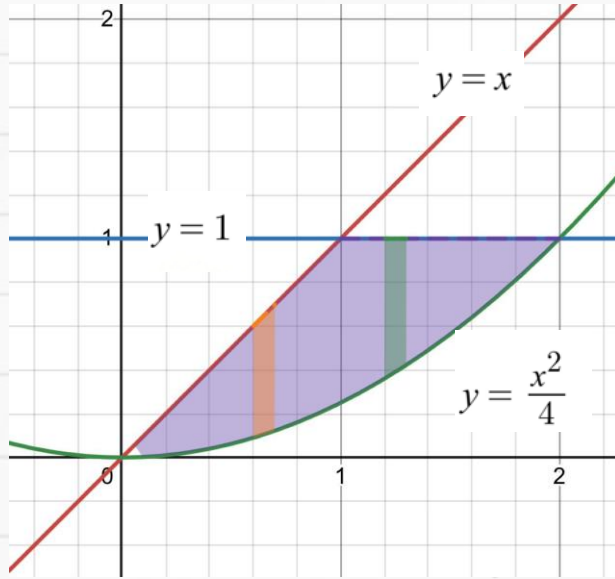
مثال (8) اوجد المساحة المحصورة بين الدالتين ومحور السينات

جزء المساحة عندما يتغير ارتفاع الشريحة





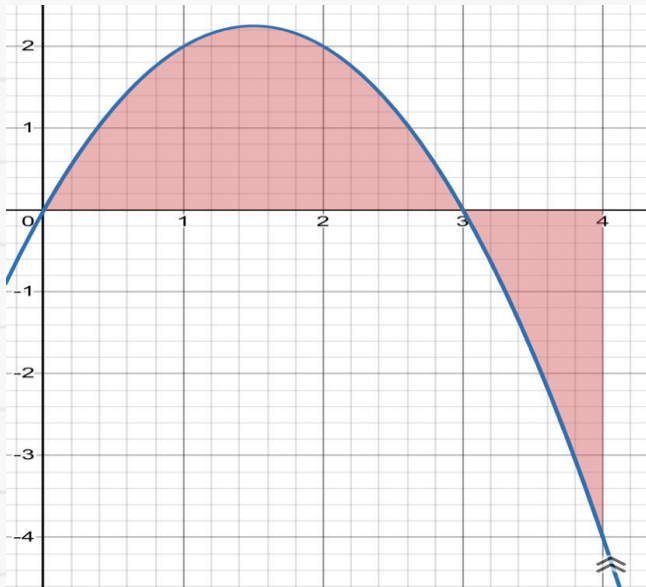
نتائج التعلم : إيجاد المساحة بين منحنيين باستخدام المكامل dx



◀ تجزئة المساحة

أوجد المساحة المحصورة في الشكل المجاور

مثال (9)



أوجد المساحة المحصورة بين الدالة $f(x) = 3x - x^2$ ومحور السينات والمستقيمين

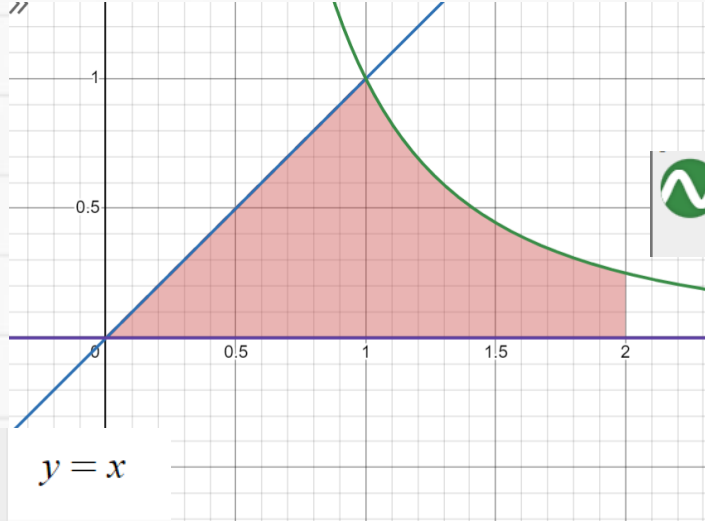
مثال (10)

$x = 0, x = 4$





ناتج التعلم : إيجاد المساحة بين منحنيين باستخدام المكامل dx

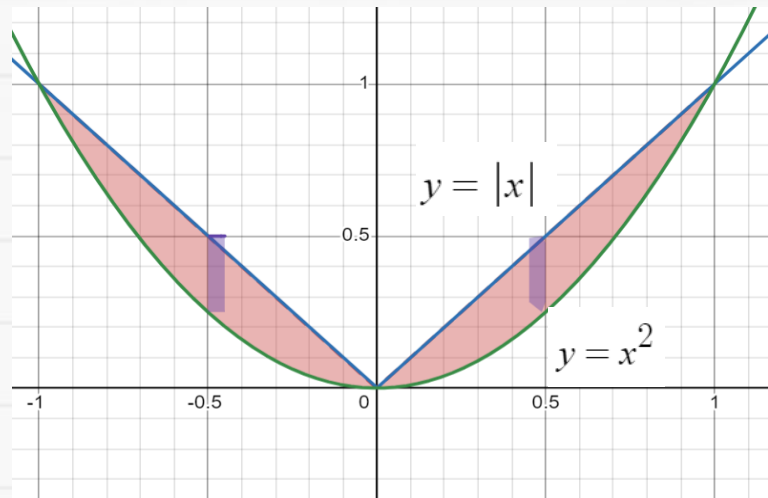


$$y = \frac{1}{x^2}$$

◀ تجزئة المساحة

أوجد المساحة المحصورة في الشكل المجاور

مثال (11)



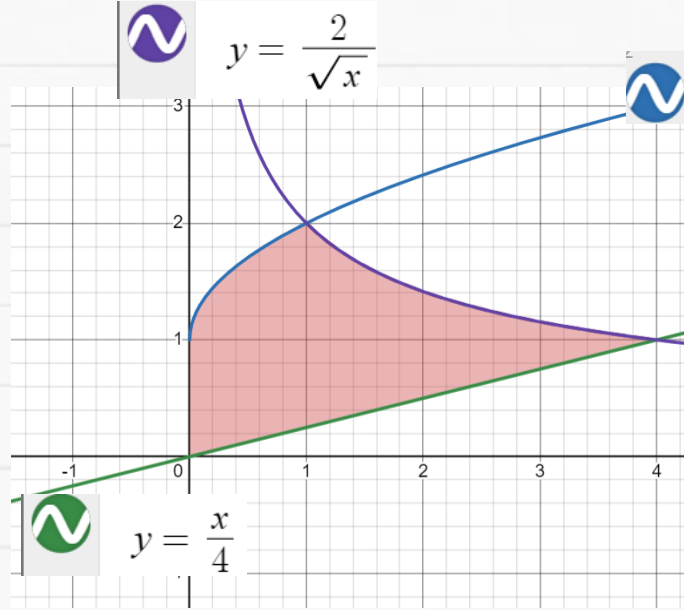
أوجد المساحة المحصورة في الشكل المجاور

مثال (12)





ناتج التعلم : إيجاد المساحة بين منحنيين باستخدام المكامل dx



◀ تجزئة المساحة

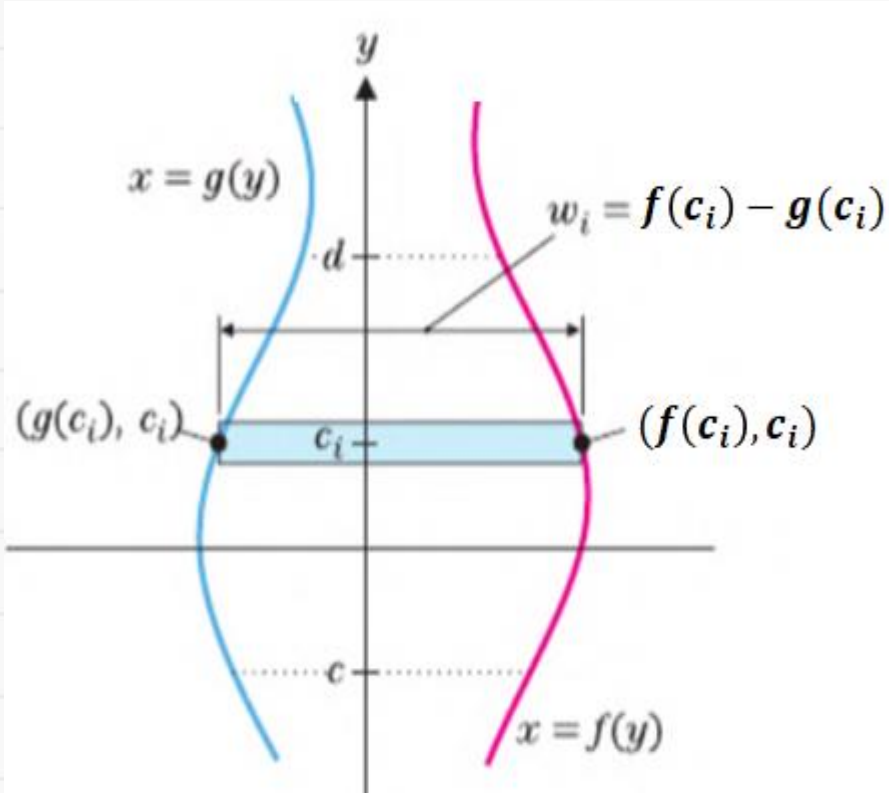
اوجد المساحة المحصورة في الشكل المجاور

مثال (13)



شاهد الفيديو ثم استنتج المساحة بين منحنين باستخدام المكامل dy

https://youtu.be/6N6ycD_8wWs



يمين_يسار	
$x = f(y), x = g(y)$	الدوال
رأسية من محور y : من اسفل الى اعلى	حدود التكامل
$x = c, x = d$	
$A = \int_c^d [f(y) - g(y)] dy$	المساحة

حالات استخدام المكامل dy

(1) اجباري اذا كانت الخيارات كلها في dy .

(2) يفضل اذا كانت المساحة مع dx تحتاج الى تجزئة.

(3) يفضل اذا كانت الارتفاع بين نفس الدالتين.

مثال

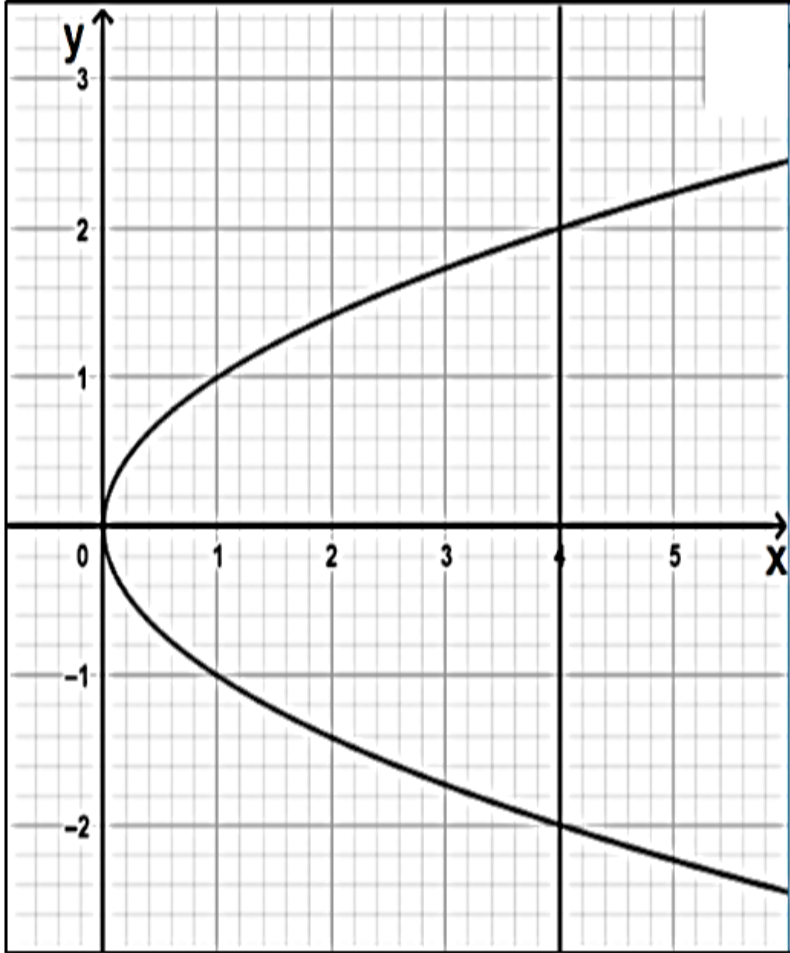
https://youtu.be/wGU_a9IDc-g



أ/ محمد طه



24. $x = y^2, x = 4$

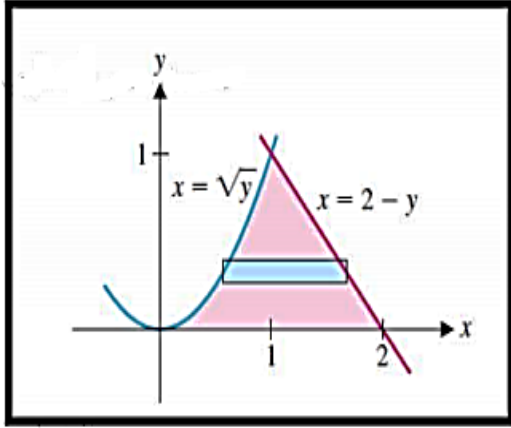


اوجد المساحة المحصورة بين الدالتين

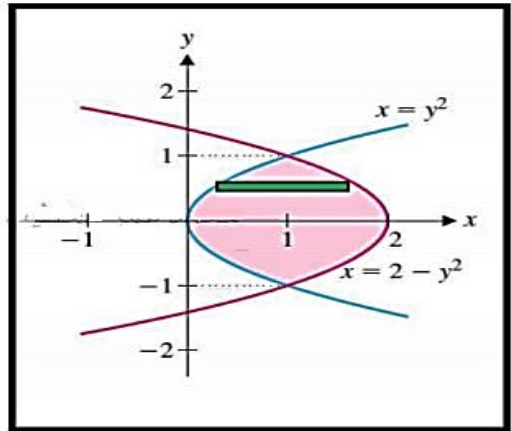




ناتج التعلم : إيجاد المساحة بين منحنين باستخدام المكامل dy



مثال (14) اوجد المساحة المحصورة بين الدالتين ومحور السينات

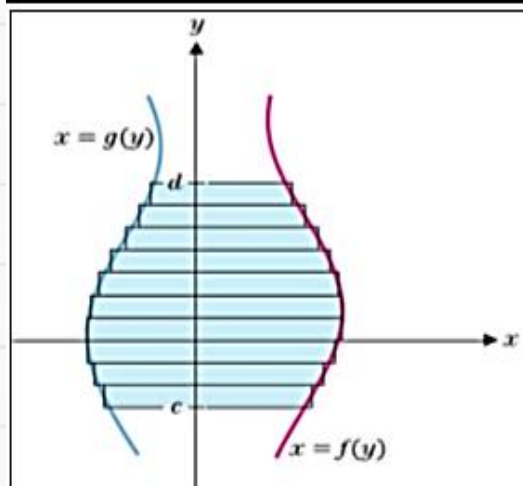


مثال (15) اوجد المساحة المحصورة بين الدالتين

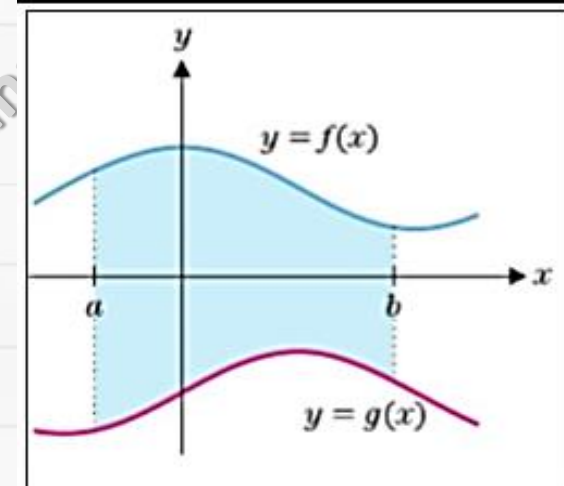




يمين- يسار

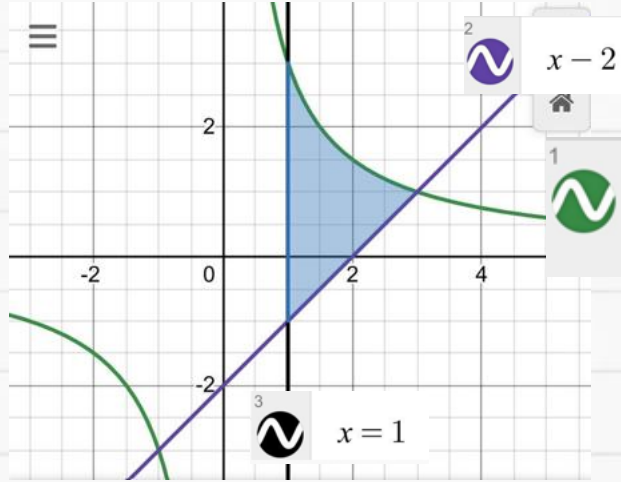


فوق- تحت



فوق_ تحت (المكامل dx)	يمين_ يسار المكامل dy)	
$y = f(x), y = g(x)$	$x = f(y), g(y)$	الدوال
أفقية من محور x : من اليسار الى اليمين $x = a, x = b$	رأسية من محور y : من أسفل الى أعلى $y = c, y = d$	حدود التكامل
$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$	$A = \int_c^d [f(y) - g(y)] dy$	المساحة



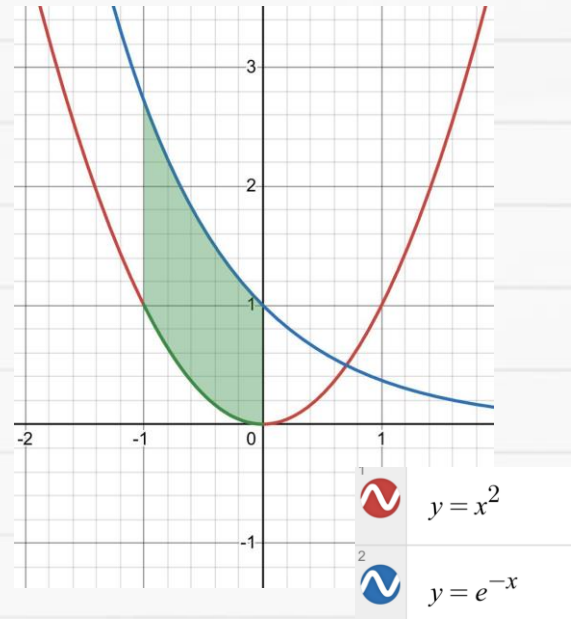


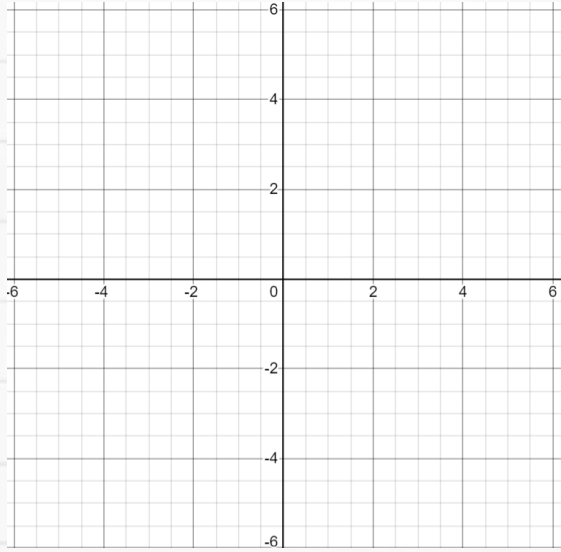
أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنى $y = \frac{3}{x}$ والمستقيمين $x = 1, y = x - 2$

مثال (18)

أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين $y = x^2$ و $y = e^{-x}$ على الفترة $[-1, 0]$

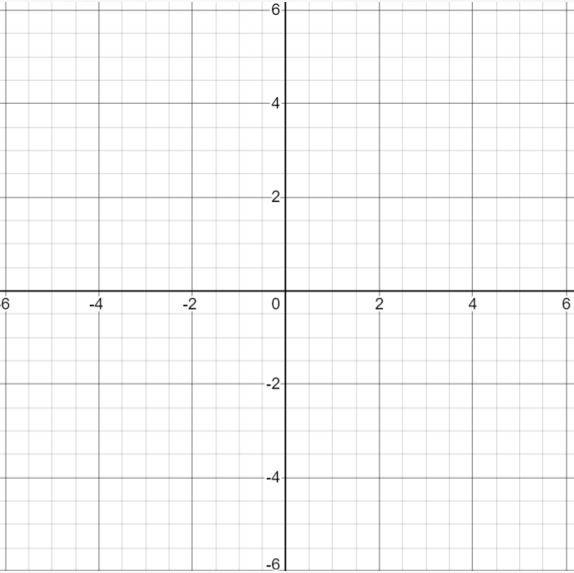
مثال (19)





اوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيات $y = 0$ و $y = x$ و $y = 4 - x$

مثال (16)



اوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنى $y = 2 - x^2$ والمستقيم $y = -x$

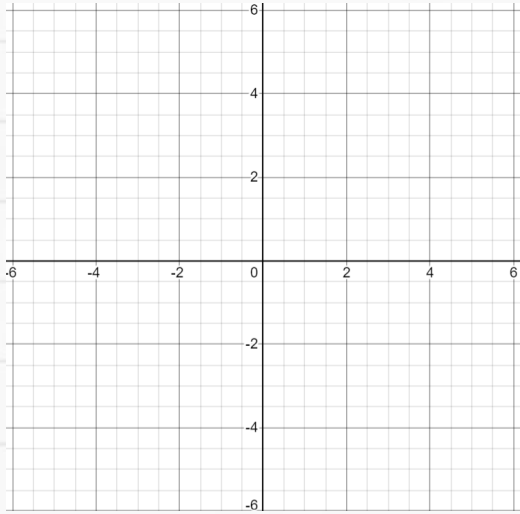
مثال (17)





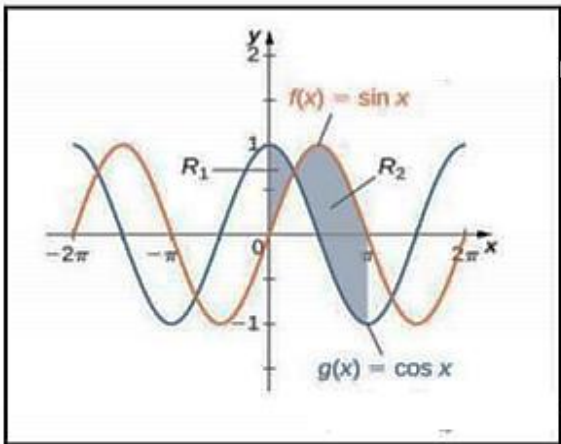
مثال (20)

اوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين $y = x^2$ و $y = 2 - x^2$ على $[0, 2]$



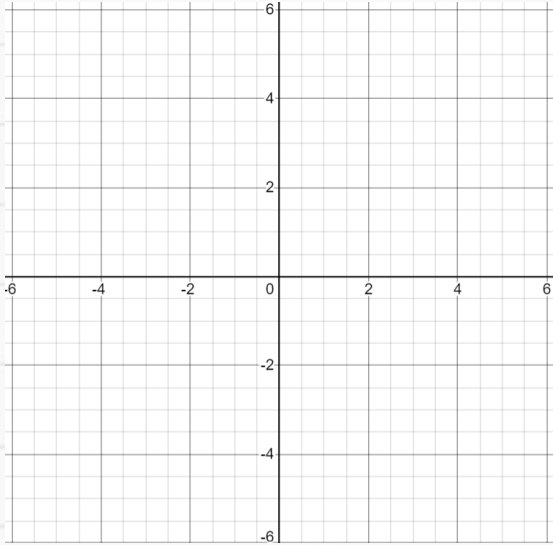
مثال (21)

اوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين $y = \sin x$ و $y = \cos x$ على الفترة $[0, \pi]$

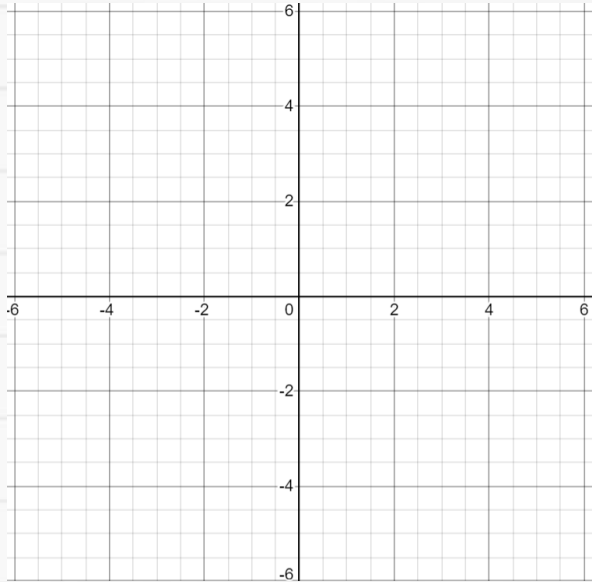




مثال (22) اوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنى $y = x^2$ والمستقيم $y = 2 - x$



مثال (23) اوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيات $y = e^x$ و $y = 4e^{-x}$ و $x = 0$





في التمارين 19-26 ارسم وأوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيات المُعطاة. اختر متغير التكامل بحيث تتم كتابة المساحة كتكامل واحد. تحقق من إجاباتك على التمارين 19 – 21 باستخدام صيغة هندسية أساسية للمساحة.

19- $y = x, y = 2 - x, y = 0$

20- $y = x, y = 2, y = 6 - x, y = 0$

21- $x = y, x = -y, x = 1$

22- $x = 3y, x = 2 + y^2, x = 0$

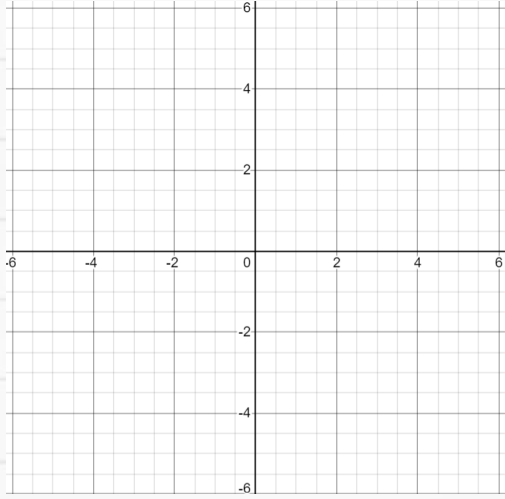
23- $y = 2x(x > 0), y = 3 - x^2, x = 0$

24- $x = y^2, x = 4$

25- $y = e^x, y = 4e^{-x}, x = 0$

26- y

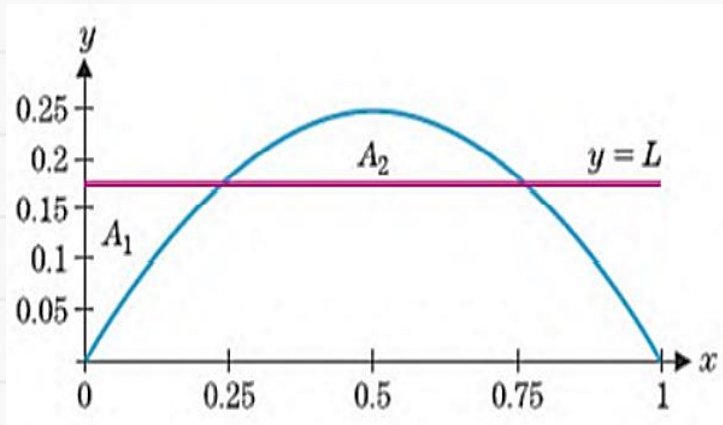




مثال (24) اوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنى $y = \ln x$ والمحور $y = 0$ و $x = e$

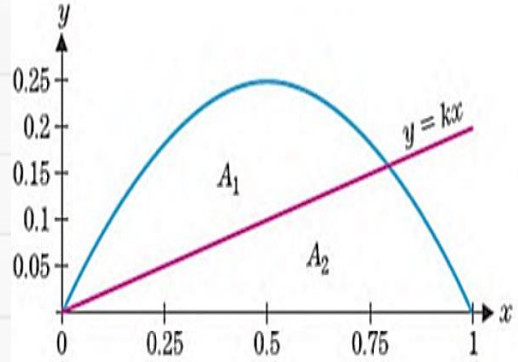
◀ كتاب الطالب سؤال 37

مثال (25) لأجل $y = x - x^2$ كما هو مبين، جد قيمة L بحيث تكون $A_1 = A_2$



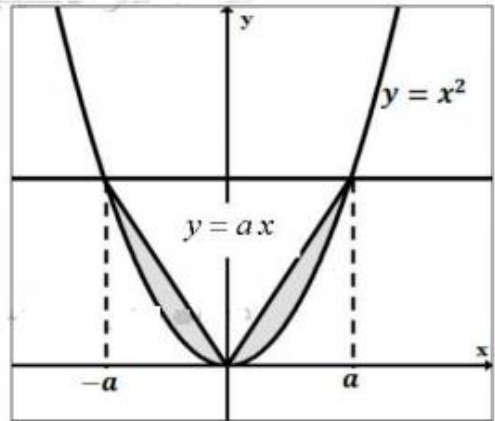


كتاب الطالب سؤال 38



لأجل $y = x - x^2$ و $y = kx$ كما هو مبين، جد k بحيث تكون $A_1 = A_2$

مثال (26)



اعتمد على الشكل الذي يمثل بيان الدالة $y = x^2$ والمستقيم $y = ax$ في إيجاد قيمة a التي

مثال (27)

تجعل المساحة المحصور 9 وحدات مربعة

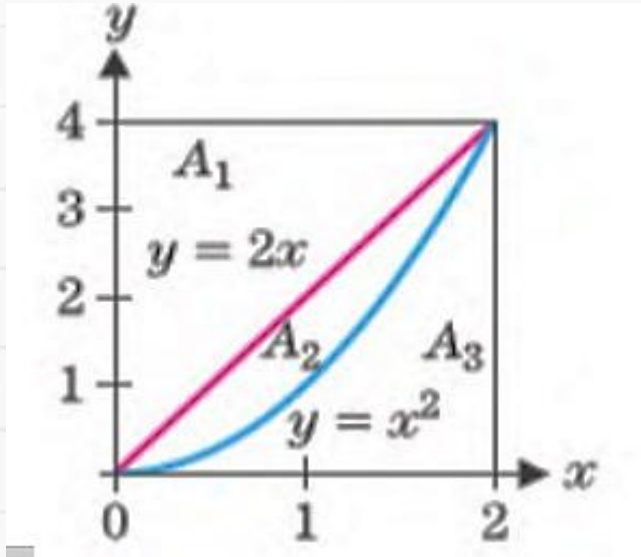




كتاب الطالب سؤال 40

مثال (28)

أعط تكاملاً مساوياً لكل مساحة



(a) $A_3 + A_3$

(b) $A_1 + A_2$

(c) A_1

(d) A_3





كتاب الطالب سؤال 39

مثال (29)

بدلالة A_1, A_2 و A_3 . حدد المساحة المُعطاة بكل تكامل.

(a) $\int_0^2 (2x - x^2) dx$

(b) $\int_0^2 (4 - x^2) dx$

(c) $\int_0^4 (2 - \sqrt{y}) dy$

(d) $\int_0^4 \left(\sqrt{y} - \frac{y}{2} \right) dy$

