

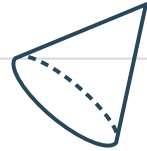


x

رياضيات 12 عام

2024/2025

Term 1



$$2+2=4$$

y



أ/ محمد طه

٩٧١٥٦٦١٥١٩٨٨/٠١٠



الوحدة الأولى

الدوال من منظور حساب
التفاضل والتكامل

1.3

عنوان الدرس

الاتصال والسلوك الطرفي والنهايات



$$2+2=4$$

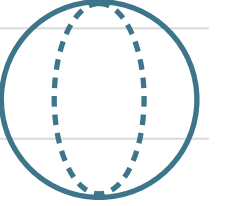
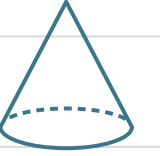
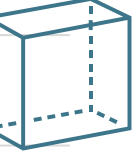


أ/ محمد طه



نواتج التعلم

1. استخدام النهايات لتحديد اتصال دالة ما وتطبيق نظرية القيمة الوسطية على الدوال المتصلة.
2. استخدام النهايات لوصف السلوك الطرفي للدوال.

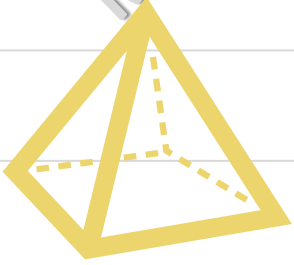
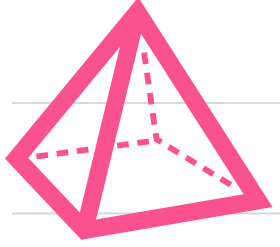
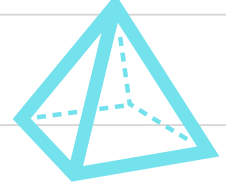


$$2+2=4$$



أ/ محمد طه

$$\sqrt{x}$$

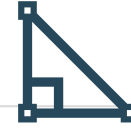


٩٧١٥٦٦١٥١٩٨٨/

مفردات الدرس



مدرسة الشراكات التعليمية الافتراضية
VIRTUAL CHARTER SCHOOL

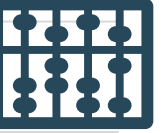


$\sqrt{x}$



Mohamed Taha

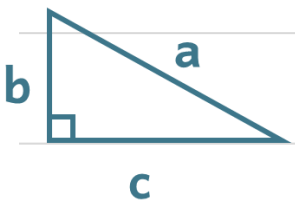
Mohamed Taha



Mohamed Taha



Mohamed Taha



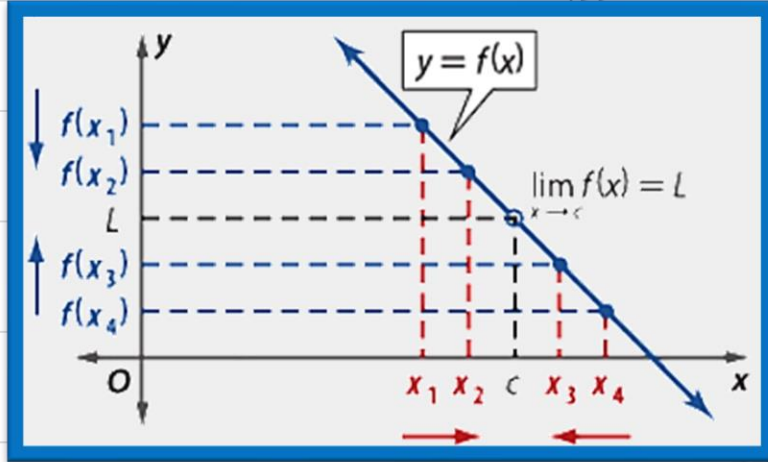
$2+2=4$
أ/ محمد طه



٩٧١٥٦٦١٥١٩٨٨/



الاتصال التمثيل البياني لدالة متصلة لا يحتوي على فواصل أو فجوات فراغات. (عند رسمها لا يرفع القلم عن الورقة)



من شروط اتصال الدالة :

يجب أن تقترب الدالة من إحدى قيمها الفريدة من كلا الجانبين الأيمن والأيسر.

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L \quad \text{تعني نهاية } f(x) \text{ مع اقتراب } x \text{ من القيمة } c \text{ هي } L$$

نهاية : الاقتراب من قيمة دون الوصول إليها بالضرورة.





الدوال غير المتصلة



أنواع الانفصال

انفصال قابل للإزالة	انفصالات غير قابلة للإزالة	
	انفصال قفزي	انفصال لا نهائي
عندما تكون الدالة متصلة في كل مكان باستثناء فجوة عند $x=c$	في حالة وجود نهايتين للدالة بينما تقترب x من c من اليسار واليمين ولكن بقيمتين مختلفتين.	إذا زادت قيمة الدالة أو تناقصت بشكل لا نهائي مع x من c من اليسار واليمين.
مثال	مثال	مثال

لا يمكن إزالة **انفصال غير قابل للإزالة** عن طريق إعادة تعريف الدالة عند تلك النقطة، حيث تقترب الدالة من قيم مختلفة من الجانبين الأيمن والأيسر عند النقطة c أو لا تقترب من قيمة واحدة على الإطلاق وبدلاً من ذلك تشهد **زيادة** أو **نقصان** بصورة لا نهائية.





شروط إذا حققتها الدالة $f(x)$ تكون متصلة عند $x=c$:

$F(x)$ معرفة عند c بمعنى $f(c)$ موجودة.

$F(x)$ تقترب من القيمة ذاتها من جانبي c . بمعنى $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ موجودة.

القيمة التي تقترب $f(x)$ منها من جانبي c هي $f(c)$ بمعنى $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$





تحديد نقطة اتصال

حدد ما إذا كانت $f(x) = 2x^2 - 3x - 1$ متصلة أم لا عند $x = 2$. برر إجابتك باستخدام اختبار الاتصال.



تحقق من الشروط الثلاثة في اختبار الاتصال :

① $F(x)$ معرفة عند c بمعنى $f(c)$ موجودة.

هل $f(2)$ موجودة؟

$$F(2) = 2(2)^2 - 3(2) - 1 = 1 \quad \text{إذا} \quad f(2) = 1 \quad \text{معرفة عند} \quad x = 2$$

② $F(x)$ تقترب من القيمة ذاتها من جانبي c . بمعنى $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ موجودة.

هل $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ موجودة؟

X	1.9	1.99	1.999	2	2.001	2.01	2.1
F(x)	0.52	0.95	0.995	1	1.005	1.05	1.52

عندما تقترب قيم x من 2 من اليمين ومن اليسار، تقترب $f(x)$ من 1.

③ القيمة التي تقترب $f(x)$ منها من جانبي c هي $f(c)$ بمعنى $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$

هل $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$ ؟

نعم، لأنها متصلة عند $x=2$





حدد ما إذا كانت كل دالة متصلة أم لا عند $x = 0$. برر إجابتك باستخدام اختبار الاتصال.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} , & x < 0 \\ x , & x \geq 0 \end{cases}$$

هل $f(0)$ موجودة؟

$f(0) = (0) = 0$ إذاً $f(0) = 0$ معرفة عند $x = 0$

هل $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ موجودة؟

x	-0.01	-0.001	0	0.001	0.01
f(x)	-100	-1000	0	0.001	0.01

عندما تقترب قيم x من 0 من اليمين ومن اليسار لا تقترب $f(x)$ من 0 .

هل $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ ؟

لا، لأنها منفصلة عند $x=0$ ، نوع الانفصال قفزي

$$f(x) = x^3$$

هل $f(0)$ موجودة؟

$f(0) = (0)^3 = 0$ إذاً $f(0) = 0$ معرفة عند $x = 0$

هل $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ موجودة؟

x	-0.01	-0.001	0	0.001	0.01
f(x)	-0.000001	0	0	0	0.000001

عندما تقترب قيم x من 0 من اليمين ومن اليسار تقترب $f(x)$ من 0 .

هل $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ ؟

نعم، لأنها متصلة عند $x=0$





تحديد نقاط الانفصال

حدد ما إذا كانت كل دالة متصلة أم لا عند قيم x المذكورة. برر إجابتك باستخدام اختبار الاتصال.
إذا كانت منفصلة، فحدد نوع الانفصال سواء لا نهائي أو قفزي أو قابل للإزالة.



$$f(x) = \begin{cases} 5x + 4, & x > 2 \\ 2 - x, & x \leq 2 \end{cases} \text{ عند } x=2$$

هل $f(2)$ موجودة؟

$$f(2) = 2 - (2) = 0 \text{ إذا } f(2) = 0 \text{ معرفة عند } x = 2$$

هل $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ موجودة؟

x	1.99	1.999	2	2.001	2.01
f(x)	0.01	0.001	0	14.005	14.05

عندما تقترب قيم x من 0 من اليمين ومن اليسار لا تقترب $f(x)$ من 0.

هل $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$ ؟

لا، لأنها منفصلة عند $x=2$ ، نوع الانفصال قفزي

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \text{ عند } x=0$$

هل $f(0)$ موجودة؟

$$f(0) = \frac{1}{(0)^2} = \text{DNE} \text{ غير معرفة عند } x = 0$$

هل $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ موجودة؟

x	-0.01	-0.001	0	0.001	0.01
f(x)	10,000	1,000,000	DNE	1,000,000	10,000

عندما تقترب قيم x من 0 من اليمين ومن اليسار تقترب $f(x)$ من 0.

هل $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ ؟

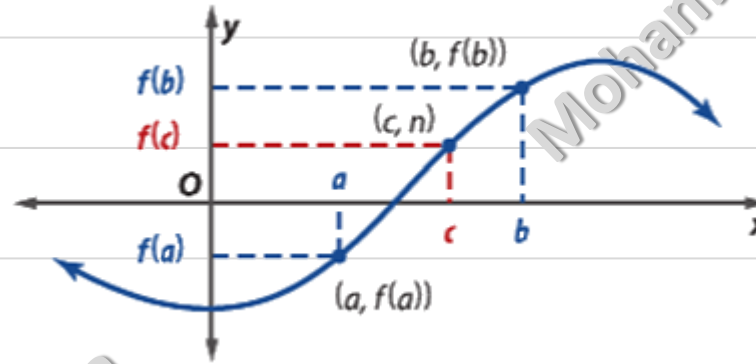
لا، لأنها منفصلة عند $x=0$ ، نوع الانفصال لا نهائي



نظرية القيمة الوسطية

إذا كانت $f(x)$ دالة متصلة و $a < b$ وهناك قيمة n بحيث تكون n بين $f(a)$ و $f(b)$ ، فهناك العدد c ، بحيث $a < c < b$ و $f(c) = n$.

باختصار نختار نقط a و b التي يكون عندها
ال $f(a)$ و $f(b)$ متعاكستان في الإشارة



مبدأ تحديد الموقع إذا كانت $f(x)$ دالة متصلة وكانت $f(a)$ و $f(b)$ متعاكستان بالإشارة، فهناك على الأقل قيمة واحدة c ، بحيث $a < c < b$ و $f(c) = 0$.
بمعنى، يوجد صفر بين a و b .





الأصفار التقريبية

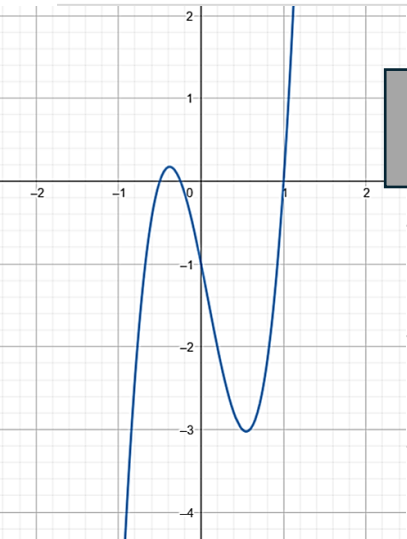


حدد الأعداد الصحيحة المتتالية التي تنحصر بينها الأصفار الحقيقية لكل دالة على الفترة المعينة.

$$f(x) = 8x^3 - 2x^2 - 5x - 1 ; [-5, 0]$$

X	-5	-4	-3	-2	-1	0
f(x)	-1026	-525	-220	-63	-6	-1

لا يوجد أصفار حقيقية؟! تحقق من هذا بيانًا



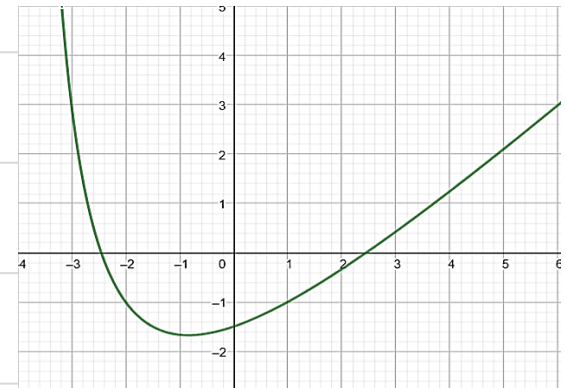
ملاحظة: نأخذ بعين الاعتبار الفترة المعطاة في المسألة.

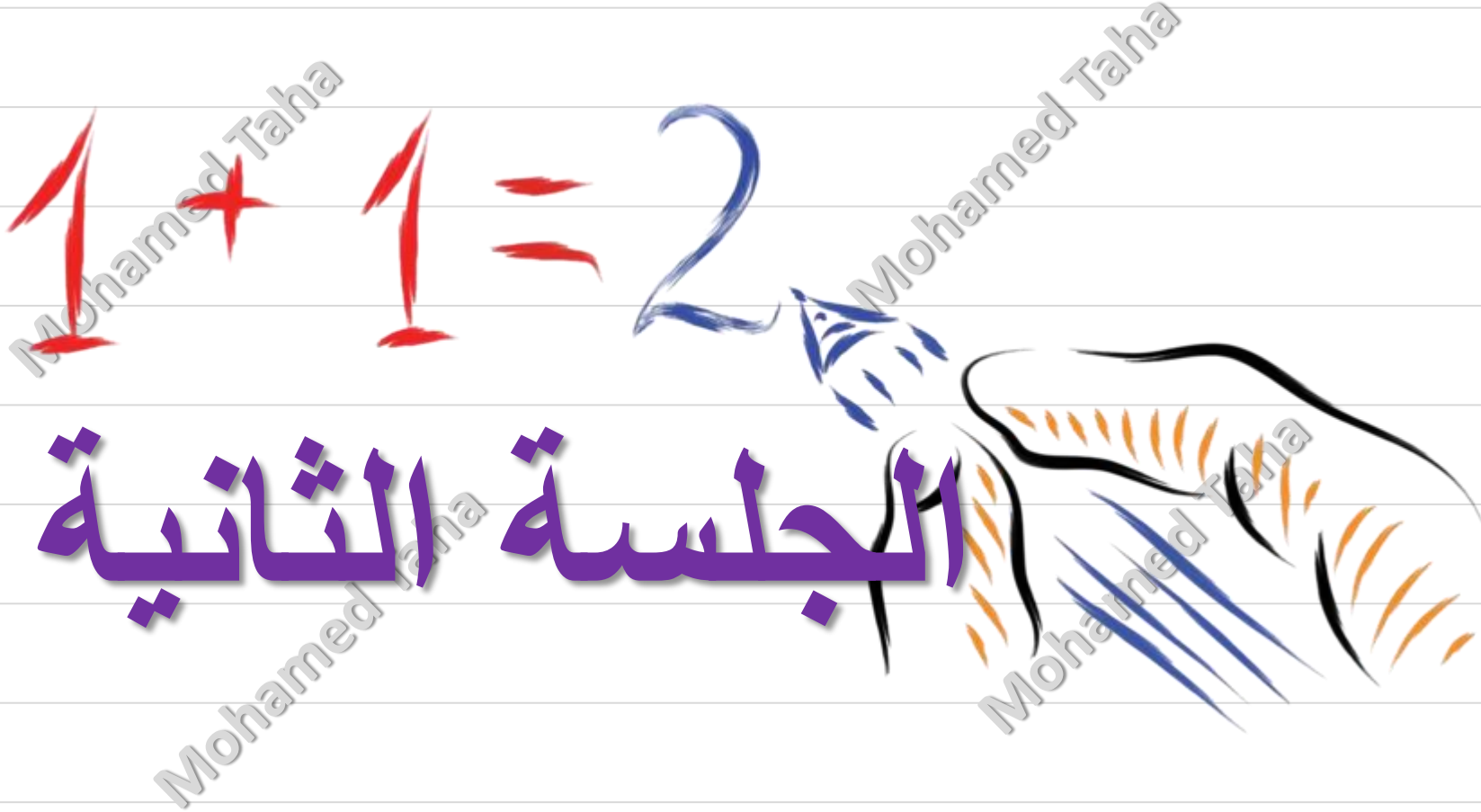
يوجد أصفار حقيقية بين -1 و 0

$$f(x) = \frac{x^2 - 6}{x + 4} ; [-3, 4]$$

X	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
f(x)	3	-1	$-\frac{5}{3}$	-1.5	-1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{3}{7}$	1.25

يوجد أصفار حقيقية بين -3 و -2 ، 2 و 3







- استخدام النهايات لوصف السلوك الطرفي للدوال.





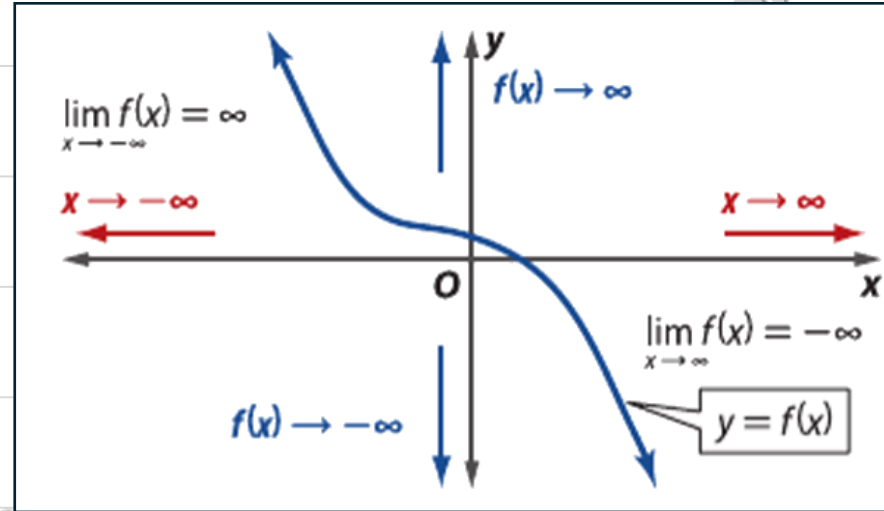
السلوك الطرفي

السلوك الطرفي : سلوك الدالة على جانبي التمثيل البياني.

لوصف السلوك الطرفي لتمثيل بياني، يمكنك استخدام مفهوم النهاية.

من إمكانات السلوك الطرفي للتمثيل البياني لدالة هو أن تزداد قيمة $f(x)$ أو تنقص دون قيد، أي أن $f(x)$ تقترب من موجب ما لانهاية أو سالب ما لانهاية.

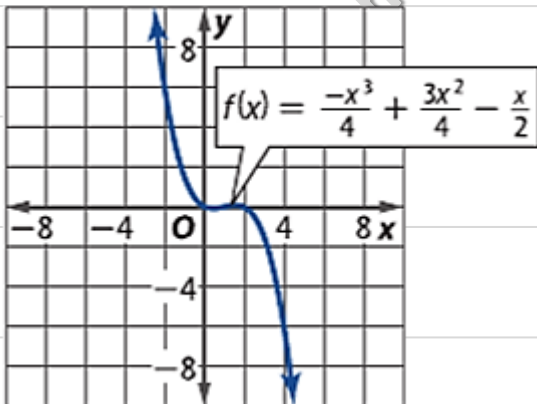
السلوك الطرفي الأيسر
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$



السلوك الطرفي الأيمن
 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$



استخدم التمثيل البياني لكل دالة لوصف سلوكها الطرفي. وادعم الفرضية بالأرقام.



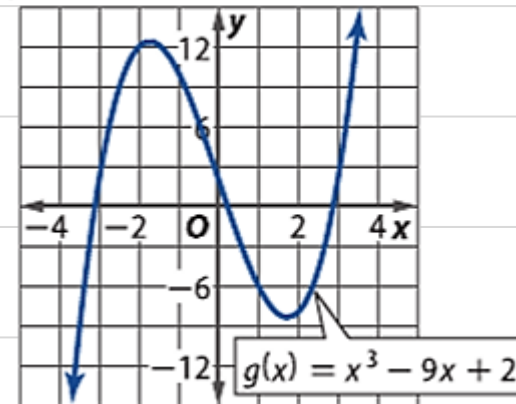
التحليل البياني

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$$

x	-1000	-100	0	100	1000
f(x)	2.5×10^8	2.5×10^5	0	-2.4×10^5	-2.5×10^8

من اليسار تقترب f(x) من ∞

من اليمين تقترب f(x) من $-\infty$



التحليل البياني

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

x	-1000	-100	0	100	1000
f(x)	-9.9×10^8	-9.9×10^5	2	9.9×10^5	9.9×10^8

من اليسار تقترب f(x) من $-\infty$

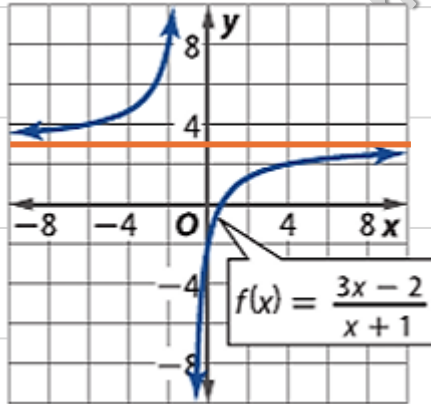
من اليمين تقترب f(x) من ∞





التمثيلات البيانية التي تقترب من قيمة محددة

استخدم التمثيل البياني لكل دالة لوصف سلوكها الطرفي. وادعم الفرضية بالأرقام.

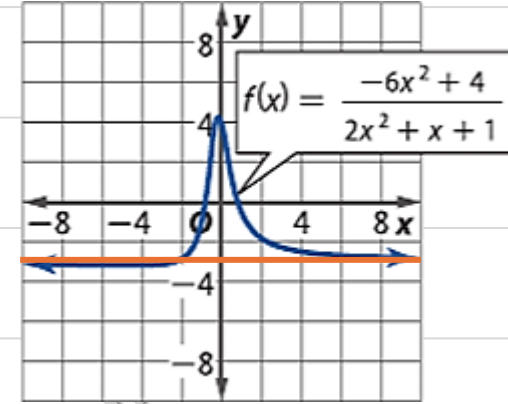


التحليل البياني

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 3$$

x	-1000	-100	0	100	1000
f(x)	3.005	3.05	-2	2.95	2.995

F(x) تقترب من 3



التحليل البياني

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -3, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -3$$

x	-1000	-100	0	100	1000
f(x)	-3.001	-3.01	4	-2.98	-2.998

F(x) تقترب من -3





تطبيق السلوك الطرفي

معلومات جديدة !!

$$\frac{\text{عدد}}{\infty} = 0, \quad \frac{\infty}{\text{عدد}} = \infty$$

الفيزياء تتحدد طاقة الجاذبية الكامنة لجسم بالقاعدة $u(r) = -\frac{GmM_e}{r}$ ، حيث تمثل G ثابت جاذبية نيوتن وتمثل m كتلة الجسم، وتمثل M_e كتلة الأرض، وتمثل r المسافة من الجسم إلى مركز الأرض كما هو موضح. ماذا يحدث لطاقة الجاذبية الكامنة لجسم عندما يتحرك مبتعدًا عن الأرض؟

قال في المسألة تحرك مبتعدًا وذلك يعني حدوث تزايد في المسافة r في $-\frac{GmM_e}{r}$

لذلك، نعوض الـ r بـ ∞ فتصبح $-\frac{GmM_e}{\infty}$

نستنتج أن الإجابة $\lim_{r \rightarrow \infty} u(r) = 0$ كتطبيق لقاعدة $\frac{\text{عدد}}{\infty} = 0$





الفيزياء الضغط الديناميكي هو الضغط المتولد بواسطة سرعة السائل المتحرك ويتحدد بالقاعدة $q(v) = \frac{pv^2}{2}$ ، حيث تمثل p كثافة السائل وتمثل v سرعة السائل. ماذا سيحدث للضغط الديناميكي لسائل لو استمرت السرعة في التزايد؟

قال في المسألة ماذا لو استمرت السرعة (v) في التزايد في $\frac{pv^2}{2}$

لذلك، نعوض ال v بـ ∞ فتصبح $\frac{p\infty^2}{2}$

نستنتج أن الإجابة $\lim_{v \rightarrow \infty} q(v) = \infty$ كتطبيق لقاعدة $\frac{\infty}{\text{عدد}} = \infty$





الواجب

Q4, Q6, Q8

Q14, Q18, Q20

Q22, Q24, Q28

Q30

صفحة 31 – 30 :



