



مدرسة الحصن للتعليم الثانوي



Mathematics, Grade 12 general

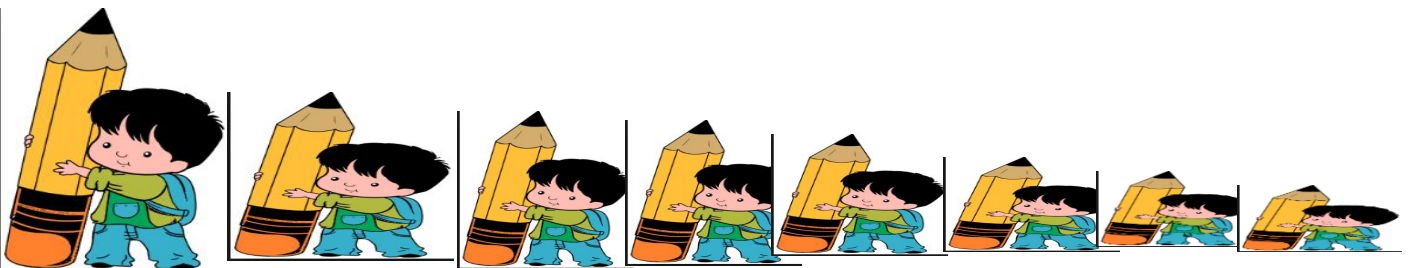
Chapters:

- 09 – Polar Coordinates and Complex Numbers
- 10 - Statistics and Probability
- 11 – Derivative and Integration

Term Three

2023-2024

أ.محمد راشد الزن (0553230397)



- **Grade:** 12 general
- **Lesson 9-1:** Polar Coordinates
- * **day:** , .../4/2024

* **Emirates Schools Establishment**
Unit9: Polar Coordinates and complex Numbers
 * **Name :**

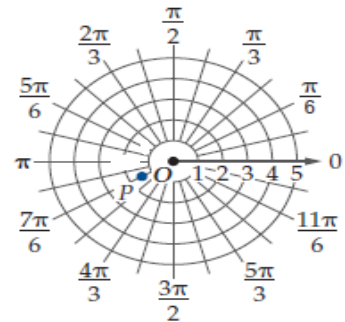
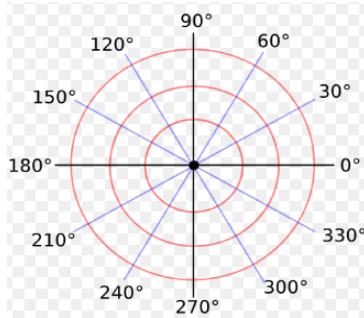
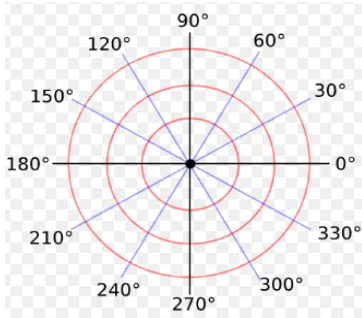
Example (1): Graph each point on a **polar grid** .

مثال (1): مثل كل نقطة مما يلي على **المستوى القطبي** .

a) $A(2, 45^\circ)$

b) $B(3, -30^\circ)$

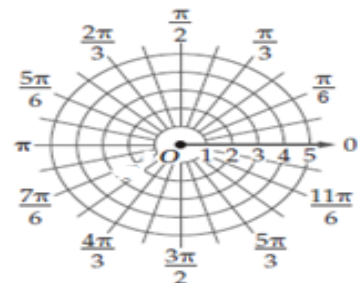
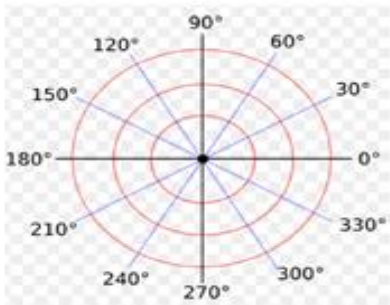
c) $C\left(-3, \frac{2\pi}{3}\right)$



Guided Practice : Graph each points:

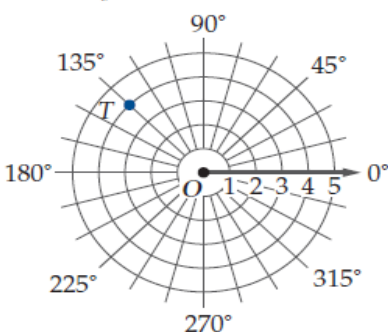
1) $Z(2, 135^\circ)$

2) $V\left(4, \frac{7\pi}{6}\right)$



Example (2): a) Find four different pairs of polar coordinates that name point T – $360^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$.

مثال (2): ا) إذا كانت $-360^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$ – اوجد اربعة ازواج مختلفة كل منها يمثل احداثيين قطبيين للنقطة T في الشكل المجاور .



b) Find three additional pairs of polar coordinates that name the given point

$$U(2, \frac{\pi}{6}), \text{ if } -360^\circ \leq \theta \leq 360^\circ \text{ or } -2\pi \leq \theta \leq 2\pi.$$

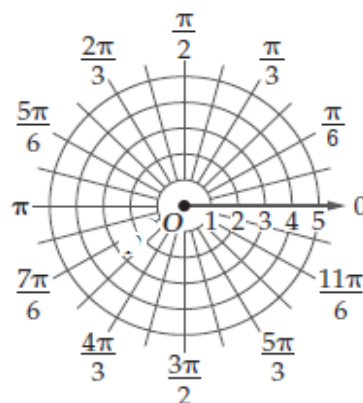
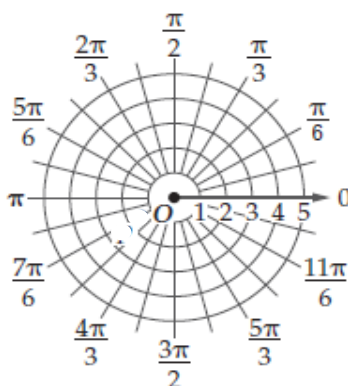
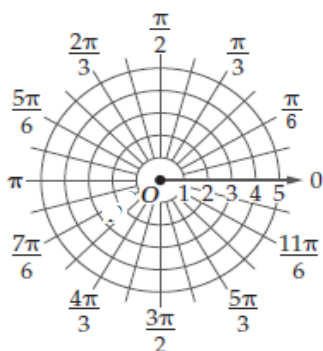
Moh'd Rashed Alzen

 **Example (3):** Graph each polar equation . مثل المعادلات القطبية التالية

a) $r = 2$

b) $\theta = \frac{2\pi}{3}$

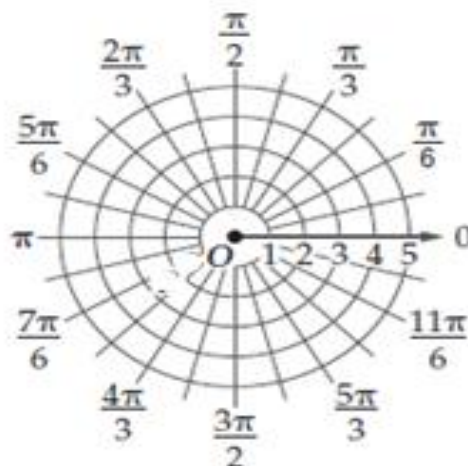
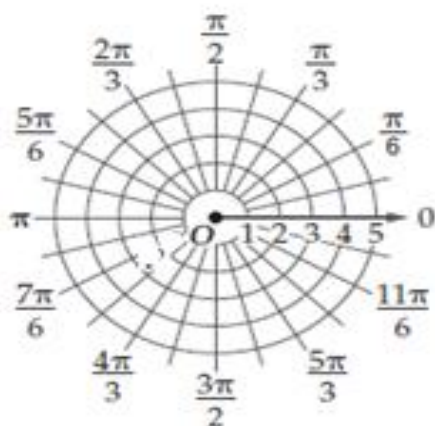
c) $\theta = -\frac{\pi}{6}$



Guided Practice : Graph each polar equation . مثل المعادلات القطبية التالية

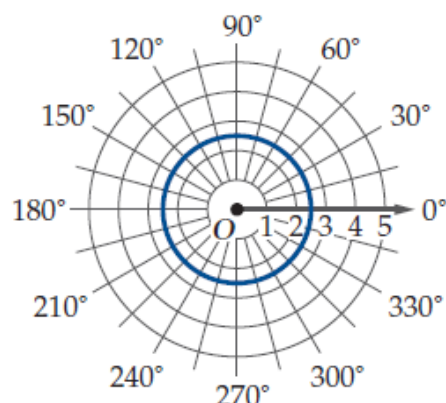
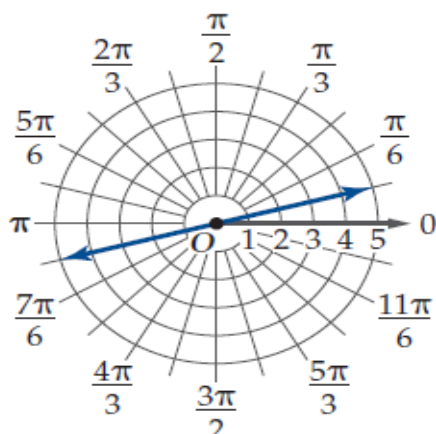
a) $r = 5$

b) $\theta = 240^\circ$



📌 **Example (4):** Write an Equation for each polar graph.

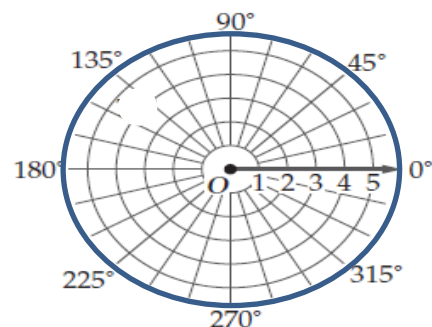
اكتب المعادلة لكل تمثيل قطبي مما يأتي :



- **Polar Distance Formula** : If $P_1(r_1, \theta_1)$ and $P_2(r_2, \theta_2)$ are two points in the polar plane , then the distance P_1P_2 given by

$$\sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)}$$

- 📌 **Example (4):** An air traffic controller two airplanes that are flying at the same altitude, the coordinates of the planes are $A(8, 310^\circ)$ and $B(10, 345^\circ)$, What is the distance between airplanes in kilometers?



- 📌 **Example (5):** Find the distance between each pair of points

$$\left(3, \frac{\pi}{2}\right), \left(8, \frac{4\pi}{3}\right)$$

Moh'd Rashed Alzzen

 **Polar and Rectangular Coordinates** : If a point P has polar coordinates (r, θ) , then rectangular coordinates (x, y) of p are given by $x = r \cos \theta$ and $y = r \sin \theta$ that is, $(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$.

 **Example (1):** Find the rectangular Coordinates for each point with the given polar coordinates. اوجد الاحداثيات الديكارتية للإحداثيات القطبية المعطاة

a) $P(4, \frac{\pi}{6})$

b) $T(-2, 135^\circ)$

 **Example (2):** Find two pairs of polar Coordinates for each point with the given rectangular coordinates . اوجد زوج من الاحداثيات القطبية للإحداثيات الديكارتية المعطاة.

a) $S(1, -\sqrt{3})$

b) $T(-3, 6)$

 **Example (3):** Write the rectangular equation in polar form .

 **مثال (3):** اكتب المعادلة الديكارتية على صورة معادلة قطبية

a) $y = x^2$

b) $x^2 + y^2 = 4$

c) $(x - 4)^2 + y^2 = 16$

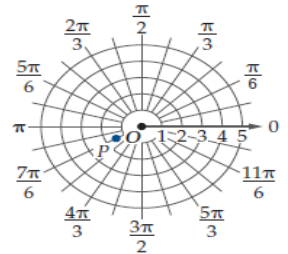
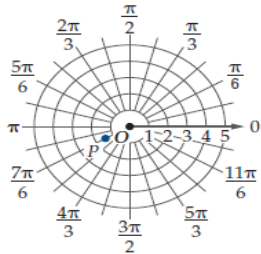
d) $x^2 + (y - 3)^2 = 9$

 **Example (4):** Write each polar equation in rectangular equation, and then identify its graph.

مثال (4): اكتب كل معادلة قطبية على صورة معادلة متعامدة، ثم حدد التمثيل البياني لها.

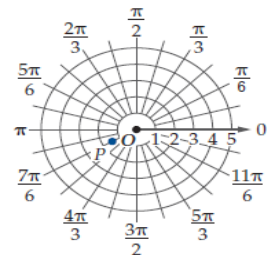
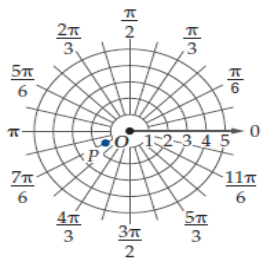
a) $r = 4$

b) $r = 4\sin\theta$



c) $r = -2\cos\theta$

d) $\theta = \frac{\pi}{3}$



e) $r = \sec\theta$

f) $r = 2\csc\theta$

Moh'd Rashed Alzzen

• **Grade:** 12 general

* Emirates Schools Establishment

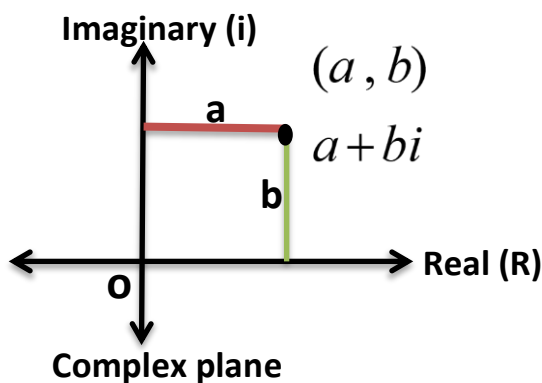
• **Lesson 9-3:** Complex Numbers and DeMoura's Theorem

Unit9

* **day:** , .../4/2024

* **Name :**

Complex plane (Argand plane)	Real axis	Imaginary axis	Absolute value of complex number	Argument
المستوى المركب (مستوى ارجاند)	محور حقيقي	محور تخيلي	القيمة المطلقة للعدد المركب	ازاحة زاوية



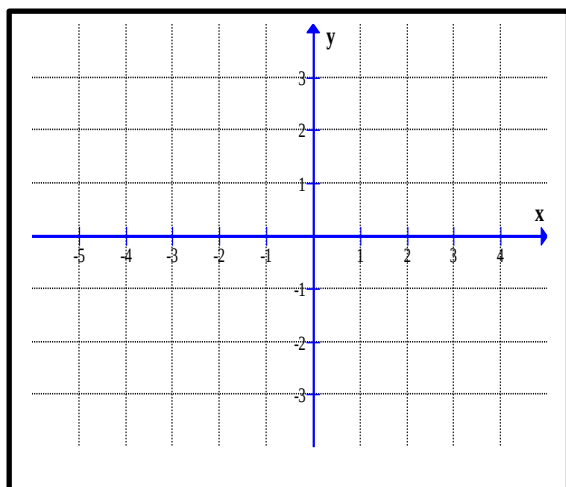
◆ **Absolute Value of Complex Number** : The absolute value of the complex number $z = a + bi$ is :

$$|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

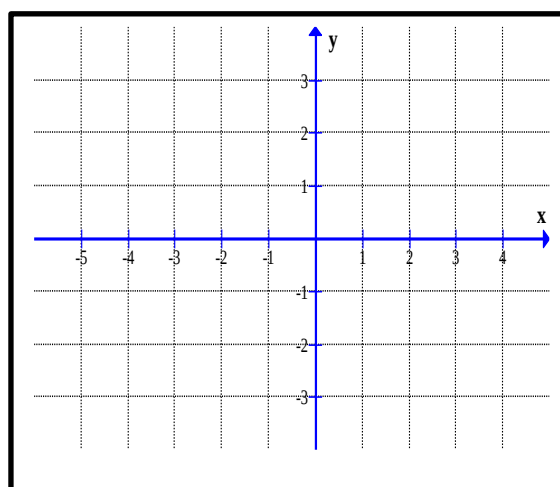
📌 **Example (1):** Graph each number in the complex plane, and find its **absolute value**:

مثال (1): مثل كل عدد بيانيا على المستوى المركب و جد قيمته المطلقة .

a) $z = 4 + 3i$



b) $z = -3 + 2i$



Moh'd Rashed Alzen

❖ **Polar Form of a Complex Number:** The polar of trigonometric form of the complex number $z = a + bi$ is $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, where :

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad a = r \cos \theta, \quad b = r \sin \theta \quad \text{and}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right), \text{ for } a > 0, \text{ or } \theta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) + \pi, \text{ for } a < 0$$

📌 **Example (2):** Express each complex number in polar form, then find the **modulus** (r) and **argument** (θ).

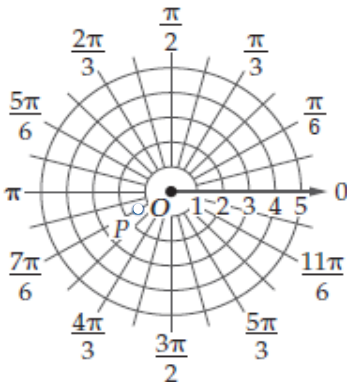
📌 **مثال (2):** عبّر عن كل عدد مركب بالصورة القطبية ثم اوجد السعة (r) و الازاحة الزاوية او المقياس (θ).

a) $z = 9 + 7i$

b) $z = -2 - 2i$

📌 **Example (3):** Graph $z = 3\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)$ on a polar form, Then express it in rectangular form.

📌 **مثال (3):** مثل بيانياً $z = 3\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)$ على شبكة قطبية، ثم عبّر عنه في صورة ديكارتية.



Moh'd Rashed Alzzen

◆ Product and Quotient of Complex Number in Polar Form:

Given the complex number is $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ and $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$.

Product Formula : $z_1 z_2 = r_1 \times r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2))$

Quotient Formula : $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2))$,

where $z_2 \neq 0$ and $r_2 \neq 0$.

🌸 **Example (4):** Find each product or quotient for each polar(trigonometric) form , and express it in rectangular form .

🌸 **مثال (4):** جد ناتج الضرب او القسمة للأعداد القطبية واكتبها على الصورة الاحداثية

a) $3\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) \bullet 5\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

b) $3\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) \div \frac{1}{2}(\cos\pi + i\sin\pi)$

c) $\frac{1}{2}(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ) \bullet 6(\cos 150^\circ + i\sin 150^\circ)$

Moh'd Rashed Alzzen

 DeMoivre's Theorem :

If the polar form of a complex number is $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$,
then for a positive integers n $z^n = (r(\cos\theta + i\sin\theta))^n$ or
 $r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$

 **Example (5):** Find each power and express it in rectangular form .

مثال (4):  جد كل قوة اسية وعبر عنها بالصورة الديكارتية .

a) $(1 + \sqrt{3}i)^4$

b) $(2\sqrt{2} - 2i)^8$

c) $\left[3\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) \right]^3$



دائرة التعليم والمعرفة
DEPARTMENT OF EDUCATION
AND KNOWLEDGE



مؤسسة الإمارات للتعليم المدرسي
EMIRATES SCHOOLS ESTABLISHMENT

مدرسة الحصن للتعليم الثانوي

الوحدة 11 : التفاضل و التكامل

Unit 11 : Derivative and Integration

الصف: الثاني عشر / مسار عام

العام الدراسي 2023-2024

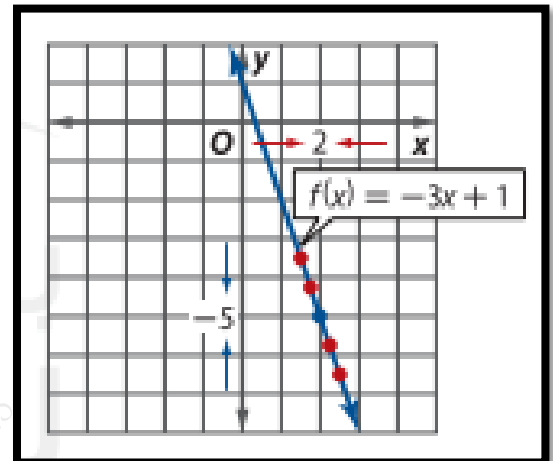
إعداد : أ. محمد راشد الزّرن

Example (1): Estimate all limits using a graph, support your conjecture using a table of values.

مثال (1): قدر النهايات التالية باستخدام التمثيل البياني او المنحنى، ادعم تخمينك باستخدام جدول القيم.

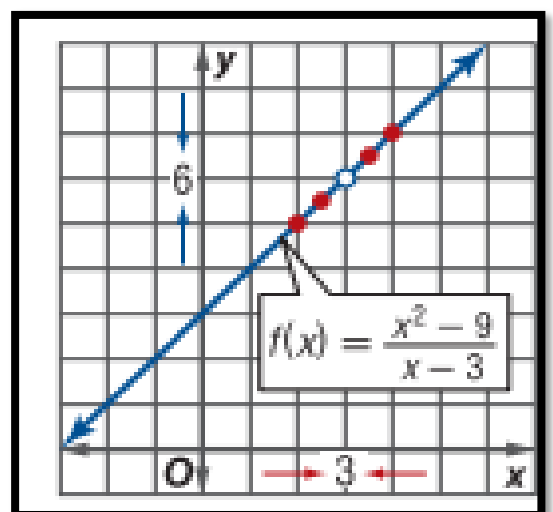
a) $\lim_{x \rightarrow 2} (-3x + 1)$

x			
$f(x)$			



b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$

x			
$f(x)$			

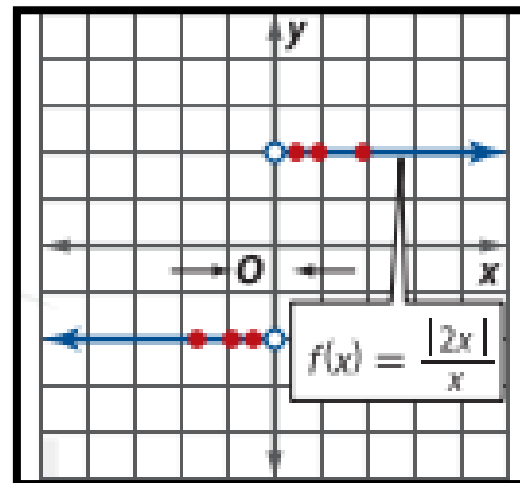


c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|2x|}{x} =$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|2x|}{x} =$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|2x|}{x} =$

x			
$f(x)$			

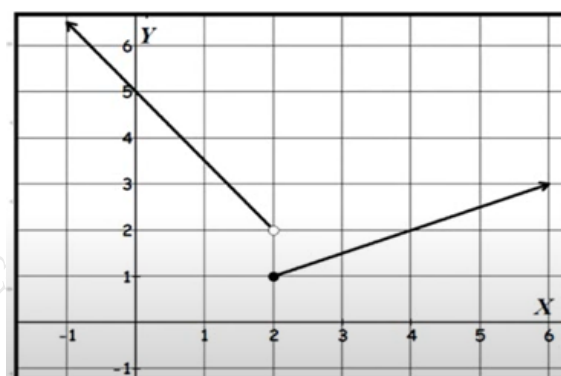


d) If $f(x) = \begin{cases} -\frac{3}{2}x + 5 & \text{if } x < 2 \\ \frac{1}{2}x & \text{if } x \geq 2 \end{cases}$

$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) =$

$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) =$

$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) =$



x			
$f(x)$			

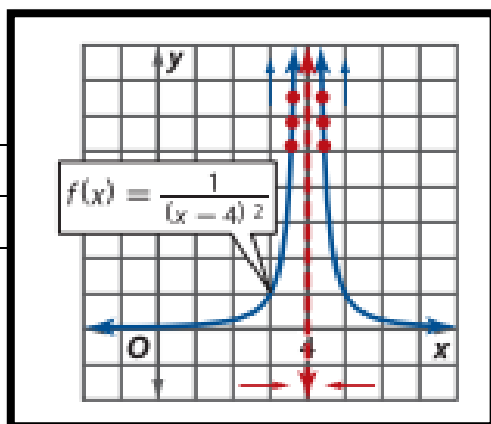
Guided Practice

3A. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$, and $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$,

where $f(x) = \begin{cases} x^3 + 2 & \text{if } x < 1 \\ 2x + 1 & \text{if } x \geq 1 \end{cases}$

Moh'd Rashed Alzzen

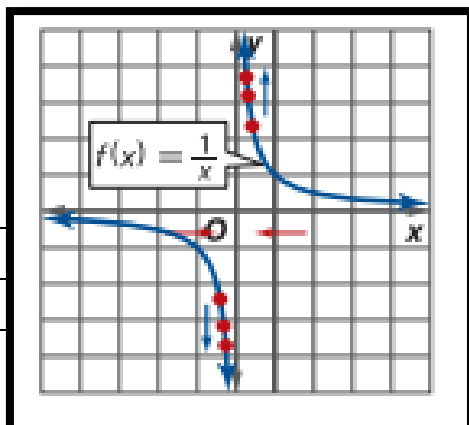
x	
$f(x)$	



$$e) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{(x-4)^2} =$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} =$$

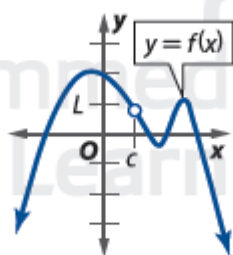
x	
$f(x)$	



KeyConcept Independence of Limit from Function Value at a Point

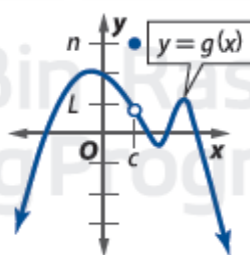
Words The limit of a function $f(x)$ as x approaches c *does not* depend on the value of the function at point c .

Symbols



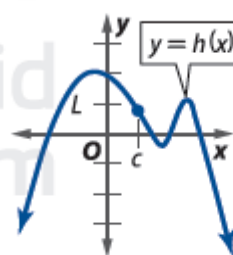
$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$$

$f(c)$ is undefined.



$$\lim_{x \rightarrow c} g(x) = L$$

$g(c) = n$



$$\lim_{x \rightarrow c} h(x) = L$$

$h(c) = L$

KeyConcept Existence of a Limit at a Point

The limit of a function $f(x)$ as x approaches c exists if and only if both one-sided limits exist *and* are equal. That is, if

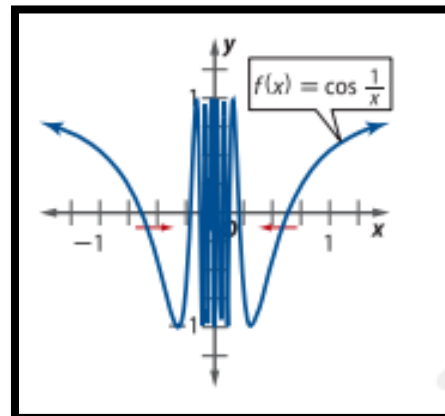
$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = L, \text{ then } \lim_{x \rightarrow c} f(x) = L.$$

Example (2): Estimate each limit if it exists.

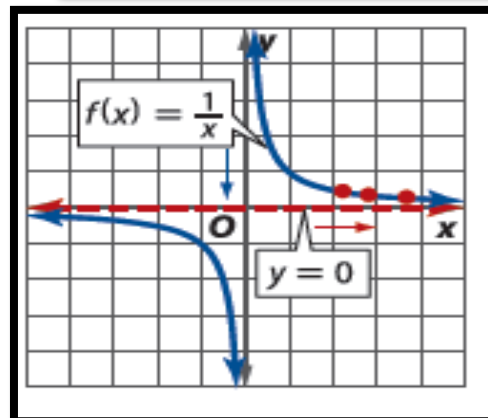
Moh'd Rashed Alzen

مثال (2): قدر النهايات التالية اذا كانت موجودة.

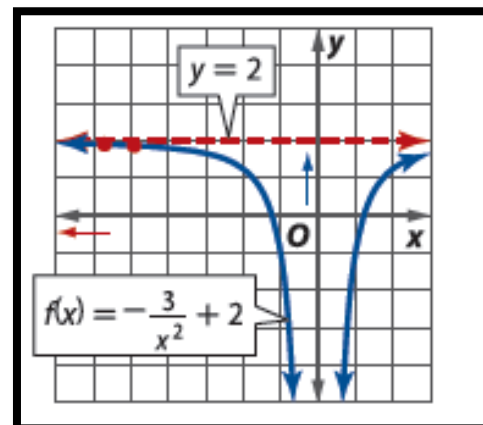
a) $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x$



b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}$

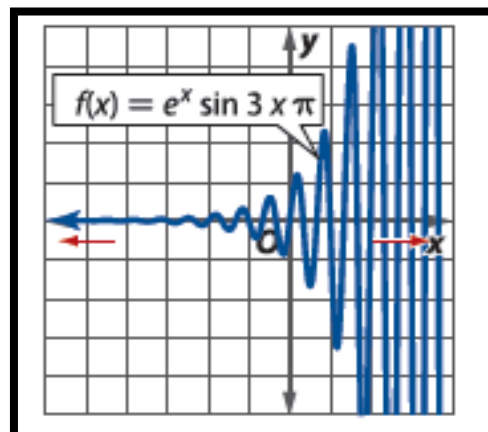


c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{3}{x^2} + 2\right)$



d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \sin 3\pi x =$

$\lim_{x \rightarrow \infty} e^x \sin 3\pi x =$



ConceptSummary Why Limits at a Point Do Not Exist

The limit of $f(x)$ as x approaches c does not exist if:

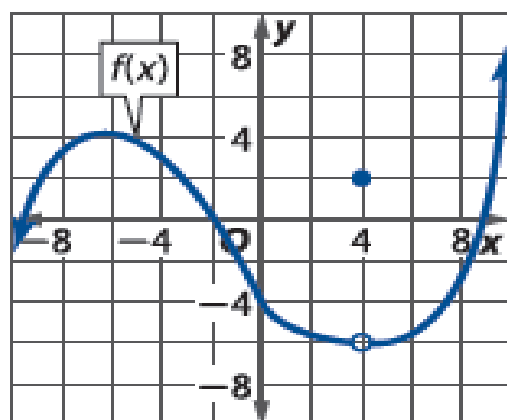
- $f(x)$ approaches a different value from the left of c than from the right,
- $f(x)$ increases or decreases without bound from the left and/or the right of c , or
- $f(x)$ oscillates between two fixed values.

KeyConcept Limits at Infinity

- If the value of $f(x)$ approaches a unique number L_1 as x increases, then $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L_1$, which is read *the limit of $f(x)$ as x approaches infinity is L_1 .*
- If the value of $f(x)$ approaches a unique number L_2 as x decreases, then $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L_2$, which is read *the limit of $f(x)$ as x approaches negative infinity is L_2 .*

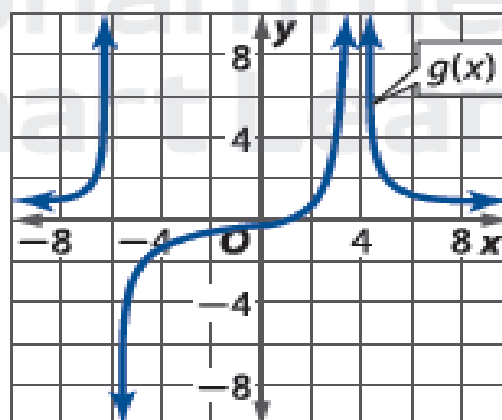
For each function below, estimate each limit if it exists.

(Examples 1–4)



29. $\lim_{x \rightarrow -6} f(x)$

30. $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$



31. $\lim_{x \rightarrow 4} g(x)$

32. $\lim_{x \rightarrow -6} g(x)$

Example (1): Use the properties of limits to evaluate each limit.

مثال (1): استخدم خواص النهايات لإيجاد قيمة كل من النهايات التالية:

a) $\lim_{x \rightarrow 4} (x^2 - 6x + 3) =$

b) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{4x^3 + 1}{x - 5} =$

c) $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{8 - x}$

d) $\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{2x - 8}$

e) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^3 - 6}{x - x^2} =$

f) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} =$

Moh'd Rashed Alzzen

$$g) \lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 - x - 20}{x + 4} =$$

$$h) \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9} =$$

$$i) \lim_{x \rightarrow 25} \frac{x - 25}{\sqrt{x} - 5} =$$

Example (2): Evaluate each limit.

مثال (2): اوجد قيمة كل من النهايات التالية:

$$a) \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 2x^2 + 5x - 1) =$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \infty} (4 + 3x - x^2) =$$

Moh'd Rashed Alzzen

$$c) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x + 5}{8x - 3} =$$

$$d) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x^2 - x}{3x^3 + 1} =$$

$$e) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 - 6x^5}{3x^5 + 8} =$$

$$f) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n^4} \left(\frac{n^2 (n + 1)^2}{4} \right) =$$

Moh'd Rashed Alzen

Example (3): If $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{kx^4 - 5x}{2x^4 + 8} = 7$, find the value of constant k ? .

- a) 7 b) 8 c) 14 d) 21

Example (1): Find the slope of the line tangent to the graph of $y = 3x - 5$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Example (2): Find the slope of the line tangent to the graph of

$$f(x) = x^2 \text{ at point } (1, 1)$$

Example (3): Find the slope of the line tangent to the graph of

$$f(x) = x^2 + 7 \text{ at any point.}$$

Example (4): Find the slope of the line tangent to the graph of $y = \sqrt{3x}$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \text{ at any point.}$$

• **Grade:** 12 general

* Emirates Schools Establishment

• **Lesson 11-4:** Derivatives

Unit 11

* **day:** , .../5/2024

* **Name :**.....

☐ **Example (1):** Find the derivative of each functions :

3) $y = \frac{4}{5}$

4) $y = 2x$

5) $f(x) = \pi$

6) $p(t) = t^4$

8) $f(x) = 2x^3 + 4x - 8$

9) $y = x^5 - 6x^3 + x - \pi$

10) $f(x) = 2x^{-3} + 5x - 1$, at $x=0.25$

Moh'd Rashed Alzzen

$$11) \quad y = \frac{1}{x^2}$$

$$12) \quad f(x) = 3x^{\frac{2}{3}} + 4x + 10$$

$$13) \quad f(x) = 4x(2x - 5)$$

$$14) \quad y = \frac{2x^4 - 4x^2 + 6x}{2x}$$

$$15) \quad f(x) = \frac{6x^3 + 3x^2 - 9}{3x^2}$$

$$16) \quad y = \sqrt{x}$$

Moh'd Rashed Alzzen

17) $y = \sqrt[3]{x}$

□ **Example (2):** Find the derivative of each product functions :

19) $f(x) = (4x - 4)(2x + 7)$, at $x=1$

20) $y = (x^2 + 3)(x - 5)$

Moh'd Rashed Alzen

□ **Example (3):** Find the derivative of each quotient

21) $y = \frac{3x + 7}{2x - 6}$

22) $y = \frac{8}{2x + 10}$, at $x=0$

Mohammed Alzzen - 2023



□ **Example (4):** Average Velocity of an Object

MARATHON The distance in kilometers that a runner competing in the Boston Marathon has traveled after a certain time t in hours can be found by $f(t) = -1.3t^2 + 12t$. What was the runner's average velocity between the second and third hour of the race?

متوسط سرعة جسم ما

□ **مثال (4) :**

الماراثون يمكن إيجاد المسافة بالكيلومترات التي قطعها عداء مشترك في منافسة ماراثون بوسطن بعد زمن محدد t بالساعات من خلال $f(t) = -1.3t^2 + 12t$. ماذا كان متوسط سرعة العداء بين الساعتين الثانية والثالثة من السباق؟

Moh'd Rashed Alzzen

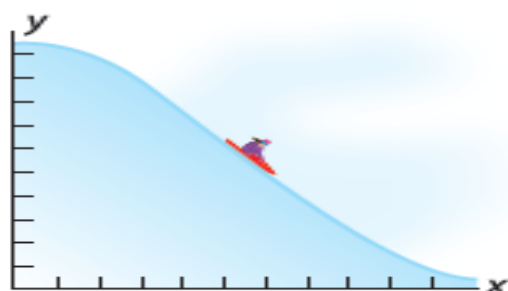
□ Example (5): Instantaneous Velocity at a Point

A football is dropped from the top of a building 600 meters above the ground. The height of the football in meters after t seconds is given by $f(t) = 600 - 5t^2$. Find the instantaneous velocity $v(t)$ of the football at 5 seconds.

□ مثال (5): السرعة اللحظية عند نقطة ما

تم إسقاط كرة بيسبول من أعلى مبنى يرتفع عن الأرض 600 m. يُمكن إيجاد ارتفاع كرة قدم بالأمتار بعد مرور t من الثواني باستخدام $f(t) = 600 - 5t^2$. أوجد السرعة اللحظية $v(t)$ لكرة قدم عند 5 ثوانٍ.

SLEDDING A person's vertical position on a sledding hill after traveling a horizontal distance x units away from the top of the hill is given by $y = 0.06x^3 - 1.08x^2 + 51.84$. (Example 2)



- Find an equation for the hill's slope m at any distance x .
- Find the hill's slope for $x = 2$.

طريقة إيجاد المساحة تحت المنحنى باستعمال المستطيلات:

- 1) نوجد طول الفترة (ب طرح بدايتها من نهايتها)
- 2) نوجد عرض كل مستطيل (بقسمة طول الفترة على عدد المستطيلات)
- 3) نقسم الفترة على حسب عدد المستطيلات
- 4) ارسم على كل فترة جزئية مستطيلا أحد بعديه يساوي طول هذه الفترة و البعد الآخر يساوي قيمة الدالة عند الطرف الأيمن للفترة

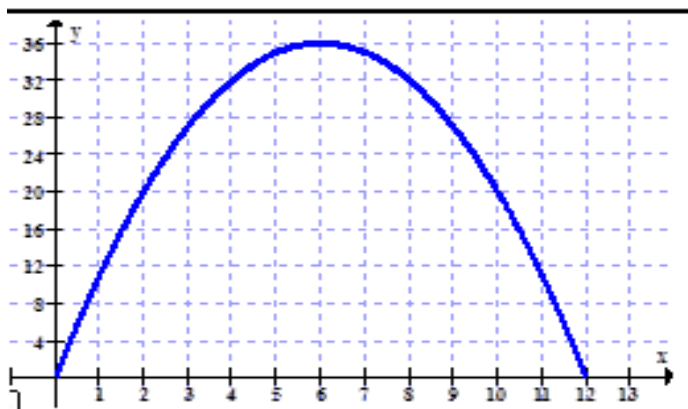
Example 1 Area Under a Curve Using Rectangles

Approximate the area between the curve $f(x) = -x^2 + 12x$ and the x -axis on the interval $[0, 12]$ using 4, 6, and 12 rectangles. Use the right endpoint of each rectangle to determine the height.

(i) قرب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $f(x) = -x^2 + 12x$ والمحور x على الفترة $[0, 12]$ باستعمال 6 مستطيلات، استعمل الطرف الأيمن لقاعدة كل مستطيل لتحديد ارتفاعه .

INTERVAL	X	$ f(x) $	Δx	$ f(x) \times \Delta x$

$$\Delta x = \frac{b - a}{n}$$



Example (2): Approximate the area between the curve $f(x) = -x^2 - 3x + 6$ and the x-axis on the interval $[2, 6]$ using 4 rectangles, Use the left endpoint of each rectangle to determine the height

INTERVAL	X	$ f(x) $	Δx	$ f(x) \times \Delta x$

Example (3) Area Under a Curve Using Left and Right Endpoints

Approximate the area between the curve $f(x) = x^2$ and the x-axis on the interval $[0, 4]$ by first using the right endpoints and then by using the left endpoints of the rectangles. Use rectangles with a width of 1.

قرب المساحة بين المنحنى $f(x) = x^2$ والمحور x على الفترة $[0, 4]$ باستخدام نقاط النهاية اليمنى أولاً ثم نقاط النهاية اليسرى للمستطيلات. استخدم مستطيلات عرضها يساوي 1.

Left endpoint

INT.	X	$ f(x) $	Δx	$ f(x) \times \Delta x$

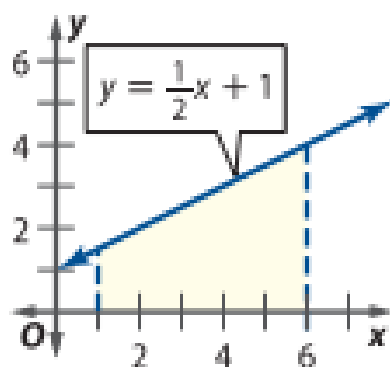
Right endpoint

INT.	X	$ f(x) $	Δx	$ f(x) \times \Delta x$

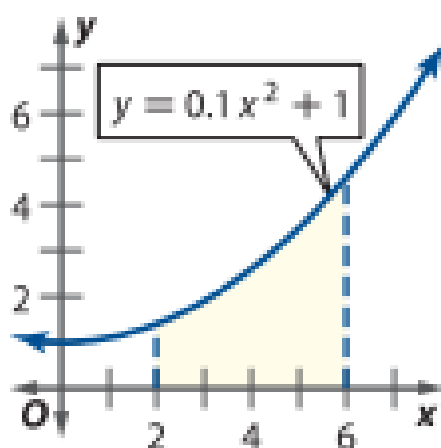
Approximate the area of the shaded region for each function using the indicated number of rectangles. Use the specified endpoints to determine the heights of the rectangles.

(Example 1)

1. 5 rectangles
right endpoints



9. width = 1.0



Moh'd Rashed Alzzen

Example (1) : Find all antiderivative for each function .

مثال (1): اوجد جميع لمشتقة العكسية لكل دالة مما يلي :

a) $f(x) = 4x^7$

b) $f(x) = \frac{2}{x^4}$

c) $f(x) = x^2 - 8x + 5$

d) $f(x) = -3x^{-2}$

Example (2) : Find two different antiderivative for each function .

a) $f(x) = 2x$

b) $f(x) = -3x^{-4}$

Moh'd Rashed Alzzen

Example (3) : Evaluate each integral .

مثال (3): اوجد قيمة كلا من التكاملات التالية :

a) $\int 5x^4 dx$

b) $\int (3x^3 - 5x + 7) dx$

c) $\int (3t^2 + 6t + 7) dt$

d) $\int m^{-2} dm$

e) $\int x^{\frac{1}{3}} dx$

f) $\int 5x(3x + 1) dx$

g) $\int \frac{4x^4 + 6x^6}{2x} dx$

المفهوم الاساسي التكامل غير المحدود

بتحدد التكامل غير المحدود للدالة $f(x)$ عن طريق $\int f(x)dx = F(x) + C$ ، حيث $F(x)$ هي المشتقة العكسية للدالة $f(x)$ و C هي أي حد ثابت.

Example (3): Real –word : indefinite integral

1) Students of Ms. Nisreen's technology class are participating in an egg drop competition. Each team of students must build a protective device that will keep an egg from cracking after a 9-meter drop. The instantaneous velocity of an egg can be defined as $v(t) = -10t$, where t is given in seconds and velocity is measured in meters per second.

a. Find the position function $s(t)$ of a dropped egg.

إسقاط البيض يشارك طلاب صف التكنولوجيا للأستاذة نسرین في مسابقة لإسقاط البيض. فيها، يتعين على كل فريق بناء أداة حماية تحفظ البيض من الكسر بعد إسقاطه من ارتفاع 9 أمتار. يمكن تحديد السرعة اللحظية للبيضة كالآتي $v(t) = -10t$ ، حيث t معطاة بالثواني والسرعة المتجهة مقبسة بالأمتار لكل ثانية. أوجد دالة الموقع $s(t)$ للبيضة التي تسقط.

b. Find how long it will take for the egg to hit the ground.

b. أوجد المدة التي ستستغرقها البيضة للاصطدام بالأرض.

2) The velocity of a flea's jump can be defined as $v(t) = -10t + 11$, where t is given in seconds and velocity is given in meters per second.

a. Find the position function $s(t)$ for the flea's jump.
Assume that for $t = 0$, $s(t) = 0$.

حشرات يمكن تحديد السرعة المتجهة لقفزة برغوث كالآتي $v(t) = -10t + 11$ ، حيث t الزمن معطى بالثواني والسرعة المتجهة معطاة بالأمتار لكل ثانية. أوجد دالة الموقع $s(t)$ لقفز البرغوث. وافترض أنه عندما نكون $t = 0$ ، يكون $s(t) = 0$.

b. After a flea jumps, how long does it take before the flea lands on the ground?

b. بعد أن يقفز البرغوث، كم سيستغرق من الوقت قبل أن ينزل على الأرض؟

Example (4): Evaluate each integral : اوجد قيمة كلا من التكاملات التالية :

1) $\int_1^2 (3x^2 + 5) dx$

2) $\int_0^5 2x(3x + 4) dx$

3) $\int_0^8 \sqrt[3]{x} dx$

5) $\int_0^{2x} 3t^2 dt$

6) $\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} 6t dt$

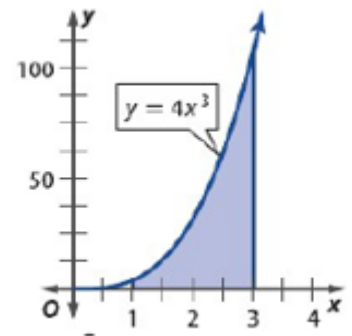
أ. محمد راشد الزن

Example (5): Area Under a curve المساحة تحت المنحنى

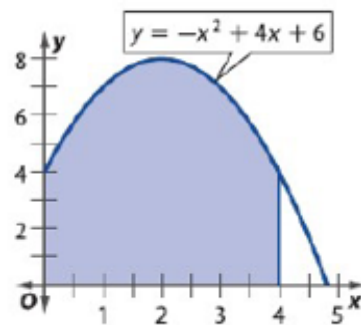
Use the Fundamental Theorem of Calculus to find the area of the region between the graph of each function and the x -axis on the given interval.

استخدم النظرية الأساسية للتفاضل والتكامل لإيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى كل دالة والمحور x في الفترة المعطاة.

a) $y = 4x^3$ on the interval $[1, 3]$ or $\int_1^3 4x^3 dx$



b) $y = -x^2 + 4x + 6$ on the interval $[0, 4]$ or $\int_0^4 (-x^2 + 4x + 6) dx$



Moh'd Rashed Alzen

Example (6): Find work : ايجاد الشغل

The work, in joules, required to stretch a certain spring a distance of 0.5 meter beyond its natural length is given by $\int_0^{0.5} 360x \, dx$. How much work is required?

(أ) يتحدد الشغل المطلوب بالجول لتمديد نابض معين لمسافة 0.5 m إضافي عن طوله الطبيعي بالآتي $\int_0^{0.5} 360x \, dx$. فما مقدار الشغل المطلوب؟

(ب) يعطى الشغل اللازم لشد نابض ما مسافة 1.4m من موضعه الطبيعي بالتكامل $\int_0^{1.4} 512x \, dx$ ، ما قيمة الشغل اللازم لشد النابض مقيسا بوحدة الجول ؟

Mohammed Alzzen -202~

Guided Practice

Find the work required to stretch a spring if it is defined by the following integrals.

6A. $\int_0^{0.7} 476x \, dx$

6B. $\int_0^{1.4} 512x \, dx$

Moh'd Rashed Alzen



دائرة التعليم والمعرفة
DEPARTMENT OF EDUCATION
AND KNOWLEDGE



مؤسسة الإمارات للتعليم المدرسي
EMIRATES SCHOOLS ESTABLISHMENT

مدرسة الحصن للتعليم الثانوي

الوحدة 10 : الإحصاء و الاحتمالات

Unit 10 : Statistics and Probability

الصف: الثاني عشر / مسار عام

العام الدراسي 2023-2024

إعداد : أ. محمد راشد الزّن

• **Grade: 12 general**

* **Emirates Schools Establishment**

• **Lesson 10-1: Designing a Study**

* **Unit: 10**

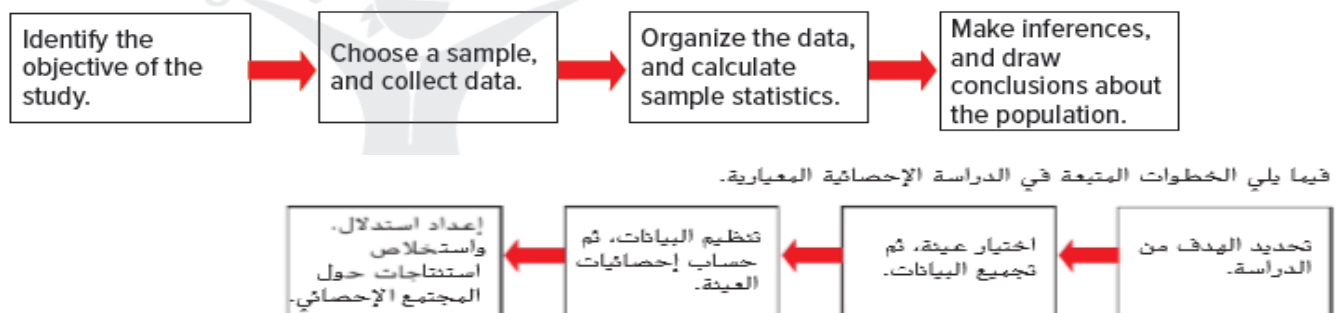
day: , .../5/2024

* **Name :**.....

Therefore, in many studies as sample of the population is taken, and a measure called a **statistic** is calculated using the data, the sample statistics, such as the sample mean or sample standard deviation.

في العديد من الدراسات يجري اخذ عينة من المجتمع الاحصائي المستهدف ثم احتساب مقياس يسمى **الإحصاء** باستخدام البيانات، وتستخدم المعلومات الإحصائية عن العينة؛ مثل متوسط العينة أو انحراف العينة المعياري.

The steps in a typical statistical study are shown below.



A bias: is an error that results in a misrepresentation of members of a population. A poorly chosen sample can cause biased results.

A random sample: can be taken in which members of the population are selected entirely by chance, and to reduce the possibility of selecting a biased sample .

التحيز : هو خطأ يؤدي الى سوء تمثيل أفراد المجتمع الاحصائي المستهدف ، حيث يمكن أن يؤدي سوء اختيار العينة الى نتائج متحيزة .

العينة العشوائية : يجري فيها اختيار افراد المجتمع الاحصائي على أساس الصدفة البحتة ، وبالتالي تقلل من احتمال اخيار عينة متحيزة .

KeyConcept	Study Types
Definition	تعريف
In a survey , data are collected from responses given by members of a population regarding their characteristics, behaviors, or opinions.	في الاستطلاع ، يجري تجميع البيانات من الإجابات التي يعطيها أفراد المجتمع الإحصائي بخصوص سماتهم أو سلوكياتهم أو آرائهم.
In an experiment , the sample is divided into two groups: • an <i>experimental group</i> that undergoes a change, and • a <i>control group</i> that does not undergo the change. The effect on the experimental group is then compared to the control group.	في التجربة ، يجري تقسيم العينة إلى مجموعتين: • المجموعة التجريبية التي تخضع للتغيير • المجموعة الضابطة التي لا تخضع للتغيير. تم مقارنة التأثير الحاصل على المجموعة التجريبية لاحقًا بالمجموعة الضابطة.
In an observational study , members of a sample are measured or observed without being affected by the study.	في الدراسة المسحية ، يجري قياس استجابة أفراد إحدى العينات أو ملاحظة ردود أفعالهم دون تأثرهم بالدراسة.

Example 1 Classify Study Types

Determine whether each situation describes a *survey*, an *experiment*, or an *observational study*. Then identify the sample, and suggest a population from which it may have been selected.

مثال 1 تصنيف أنواع الدراسة

حدد ما إذا كان كل موقف يصف استطلاعاً أم تجربة أم دراسة مسحية، ثم حدد العينة، واقترح مجتمعاً إحصائياً يمكن اختيارها منه.

- a. **MUSIC** A record label wants to test three designs for an album cover. They randomly select 50 teenagers from local high schools to view the covers while they watch and record their reactions.
- a. **أناشيد** تريد شركة تعمل في تسجيل الأناشيد اختبار ثلاثة تصاميم لغطاف ألبوم. تختار الشركة 50 مراهقاً من المدارس الثانوية المحلية بصورة عشوائية لعرض الأغلفة عليهم ومشاهدة ردود أفعالهم وتسجيلها.
- b. **RECYCLING** The city council wants to start a recycling program. They send out a questionnaire to 200 random citizens asking what items they would recycle.
- b. **إعادة التدوير** يريد مجلس المدينة أن يبدأ برنامجاً لإعادة التدوير. يرسلون استبياناً إلى 200 مواطن بشكل عشوائي يسألونهم فيه عن الأشياء التي يرغبون بإعادة تدويرها.

Guided Practice

- 1A. **RESEARCH** Scientists study the behavior of one group of cats given a new heartworm treatment and another group of cats given a false treatment or *placebo*.
- 1A. **أبحاث** قام علماء بدراسة سلوك مجموعة واحدة من القطط ثم إعطاؤها علاجاً للديدان القلبية، في حين تم إعطاء مجموعة أخرى من القطط علاجاً زائفاً أو دواء وهمياً.
- 1B. **YEARBOOKS** The yearbook committee conducts a study to determine whether students would prefer to have a print yearbook or both print and digital yearbooks.
- 1B. **الكتب السنوية** تجري لجنة الكتاب السنوي دراسة لتحديد ما إذا كان الطلاب سيحصلون الحصول على نسخة مطبوعة من الكتاب السنوي أم نسختين مطبوعة ورقمية من الكتب السنوية.
- a. **MEDICINE** A pharmaceutical company wants to test whether a new medicine is effective.
- a. **دواء** تريد إحدى شركات الأدوية اختبار مدى فعالية دواء جديد.
- b. **ELECTIONS** A news organization wants to randomly call citizens to gauge opinions on a presidential election.
- b. **انتخابات** تريد إحدى المنظمات الإخبارية دعوة مواطنين بطريقة عشوائية لتقدير الآراء حول الانتخابات الرئاسية.

Example 3 Identify Bias in Survey Questions

Determine whether each survey question is *biased* or *unbiased*. If biased, explain your reasoning.

مثال 3 تحديد التحيز في أسئلة الاستطلاع

حدد ما إذا كان كل سؤال بالاستطلاع متحيّزاً أو غير متحيّز. وإن كان متحيّزاً، فاشرح استنتاجك.

a. Don't you agree that the cafeteria should serve healthier food?

a. ألا توافق على وجوب تقديم الكافيتريا لطعام صحي؟

b. How often do you exercise?

b. ما مقدار ممارستك للتمارين الرياضية؟

Guided Practice

تمرين موجّه

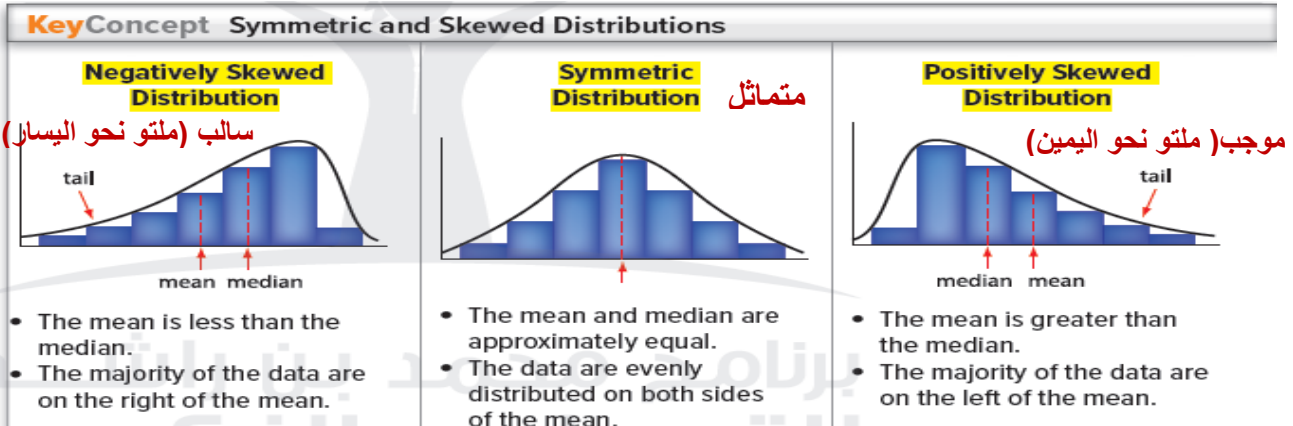
3A. How many glasses of water do you drink a day?

3A. كم كأساً من الماء تشرب يومياً؟

3B. Do you prefer watching exciting action movies or boring documentaries?

3B. هل تفضل مشاهدة أفلام الحركة المثوقة أم الأفلام الوثائقية المملة؟

Moh'd Rashed Alzen



- **الوسط mean:** اكثر تأثراً بالقيمة المتطرفة ، ويكون الوسط اقرب الى الذيل من **الوسيط median** في التوزيعات الملتوية ، لذلك يطلق على **الوسط** القيمة الاحصائية غير المقاومة للقيمة المتطرفة ، عكس **الوسيط** الذي يطلق عليه القيمة الاحصائية المقاومة **resistant statistic** للقيمة المتطرفة .
- في التوزيع المتماثل الوسط يساوي الوسيط او متقاربين الى حد معقول .
- في التوزيع غير المتماثل تكون **القيمة المتطرفة outlier** جهة الذيل.
- لاختيار مقياس النزعة المركزية او الانتشار (التشتت) لوصف توزيع ، فيطلب منا دراسة شكل التوزيع **فنستنتج من ذلك :**

❖ إذا كان التوزيع **متماثل symmetric** الى حد معقول وخالي من القيمة المتطرفة فأفضل مقياس لتمثيله هو **الوسط والانحراف المعياري.**

❖ If the distribution is skewed or has strong outlier, the five-numbers summary (minimum, **quartile 1 , median , quartile 3 , maximum**).

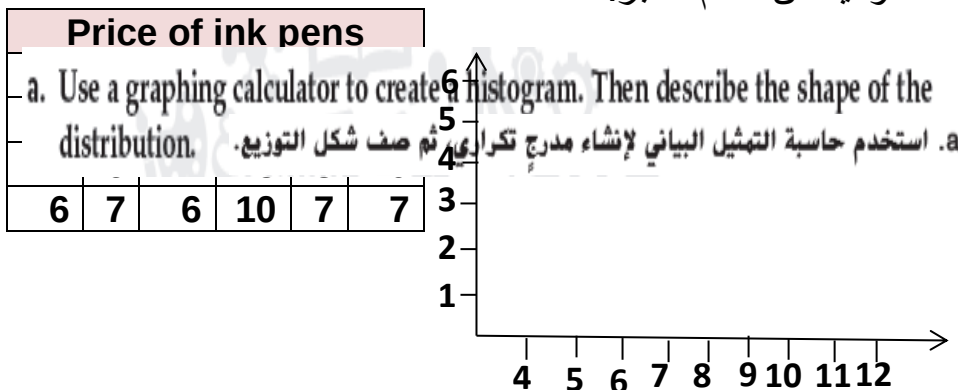
❖ إذا كان التوزيع ملتو او له قيمة متطرفة قوية فأفضل مقياس لتمثيله هو **ملخص** (القيمة الصغرى ، الربع الاول ، الوسط و الربع الثالث ، القيمة العظمى) يعطي افضل تمثيل للنمط .

Real-World Example 1 Describe a Distribution Using a Histogram

The following

table displays prices of a random sample of ink pens.

يعرض الجدول التالي اسعار عينة عشوائية من اقلام الحبر.



b. Describe the center and spread of the data using either the mean and standard deviation or the five-number summary. Justify your choice.

b. صف مركز البيانات وانتشارها مستخدماً إما المتوسط والانحراف المعياري أو ملخص الأعداد الخمسة. علل اختيارك.

Guided practice : The annual rainfall for a region over a 24-year period is shown below , Describe the center and spread of the data using either the mean and standard deviation or the five -number summary, Justify your choice ?

تمرين موجّه

مطول الأمطار السنوي (cm)					
69	76	90	66	99	52
73	58	83	68	57	64
75	93	84	72	55	52
62	77	70	79	88	94

1. **مطول الأمطار** يوضح الجدول التالي هطول الأمطار السنوي لمنطقة ما على مدار 24 عامًا. صف مركز البيانات وانتشارها مستخدماً إما المتوسط والانحراف المعياري أو ملخص الأعداد الخمسة. علل اختيارك.

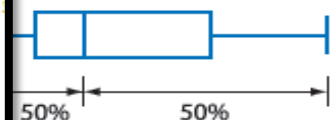
.....



DISTRIBUTIONS Which of the following is a characteristic of a negatively skewed distribution?

- A The majority of the data are on the left of the mean.
- B The mean and median are approximately equal.
- C The mean is greater than the median.
- D The mean is less than the median.

Positively Skewed



data to the right of the median are distributed over a wider range than the data to the left. The data have a longer tail to the right.

Moh'd Rashed Alzzen

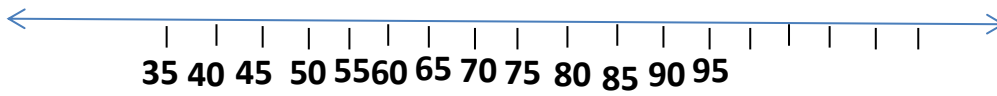
Example (2): The table shows the populations in thousands of people, during a recent year for fifteen cities.

عدد السكان بالآلاف				
45	87	90	62	60
55	74	65	57	48
70	80	36	92	81

مثال رقم (2): يعرض الجدول التالي عدد السكان بالآلاف خلال السنوات السابقة لخمس عشرة مدينة .

a) Construct a box plot and use it to describe the shape of the distribution.

أ) أنشئ مخططاً صندوقياً واستخدمه لوصف شكل التوزيع .



د. Summarize the center and spread of the data using either the mean and standard deviation or the five-number summary. Justify your choice.

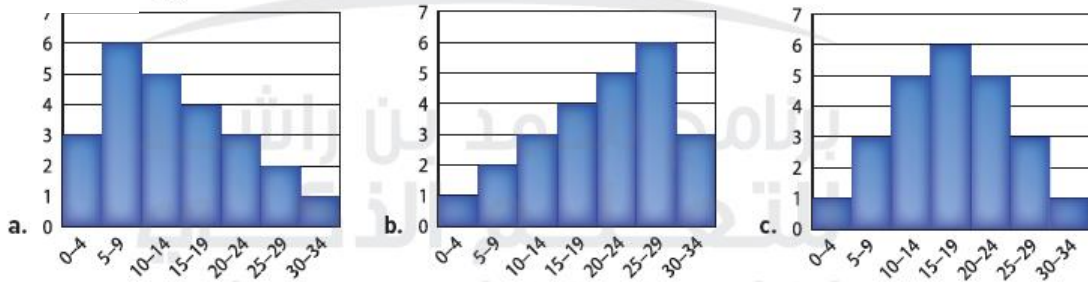
ب) صف تمركز البيانات وانتشارها باستخدام أما الوسط والانحراف المعياري او ملخص الاعداد الخمسة.

.....

.....

.....

Example (3): Approximate the mean and median for each distribution of data.



Moh'd Rashed Alzzen

مقاييس الموقع: الذي يحدد مواقع قيم البيانات هي الارباع الاحصائية التي يعطيها ملخص القيم الخمسة.

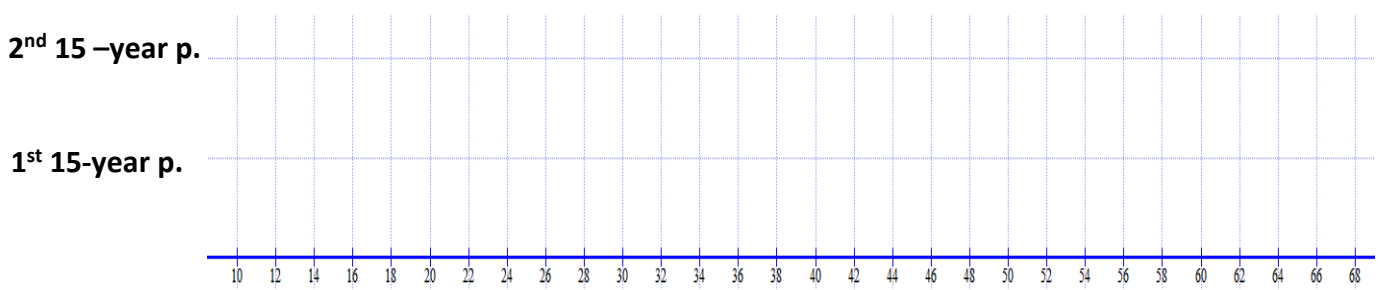
Example (4) Compare Position Using Box Plots

BASKETBALL The number of games won by the Boston Celtics during two different 15-year periods are shown. Construct side-by-side box plots of the data sets. Then use this display to compare the distributions.

1st 15-Year Period				
49	52	59	57	60
60	54	62	59	58
54	48	34	44	56

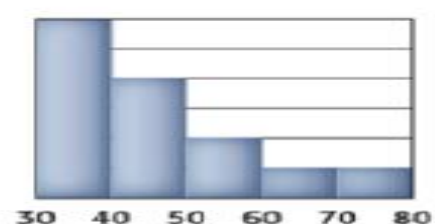
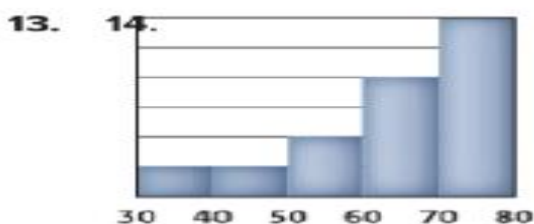
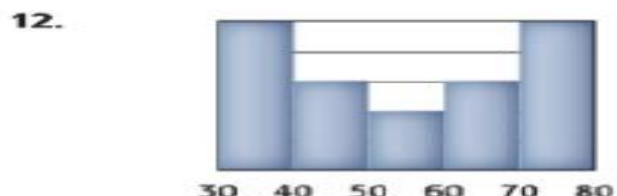
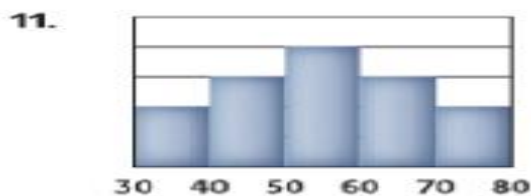
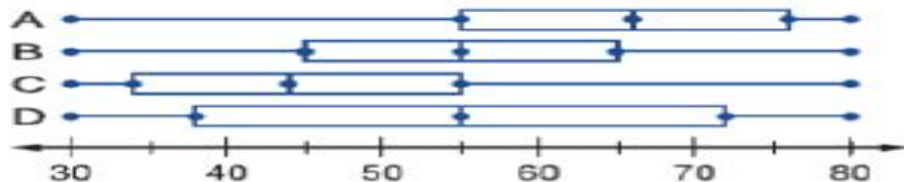
2nd 15-Year Period				
48	32	35	33	15
36	19	36	35	49
44	36	45	33	24

مثال رقم 4: قارن بين البيانات التالية باستخدام مقاييس الموقع (مخططات الصندوق) يعرض الجدولين التاليين عدد المباريات التي فاز بها فريق الوحدة خلال فترتين زمنيتين مختلفتين مدة كل 15 عاما ، أنشئ مخططين صندوقين متجاورين لمجموعتي البيانات ثم استخدم طريقة العرض هذه لمقارنة التوزيعين .



Example (6):

Write the letter of the box plot that corresponds to each of the following histograms.



Moh'd Rashed Alzzen

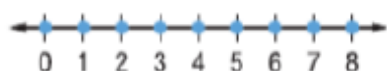
- **Grade: 12 general** * Emirates Schools Establishment
- **Lesson 10-3: Probability Distribution** * **Unit: 10**
- day:, .../5/2024** * **Name :**

KeyConcept Discrete and Continuous Random Variables

A **discrete random variable** can take on a finite or countable number of possible values.

Example

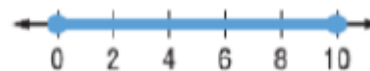
Number of Car Accidents Per Year, X



A **continuous random variable** can take on an infinite number of possible values within a specified interval.

Example

Number of Kilometers Driven, X



The value of a **random variable** is the numerical outcome of a random event. A random variable can be discrete or continuous. **Discrete random variables** represent countable values. **Continuous random variables** can take on any value.

قيمة المتغير العشوائي هي الناتج العددي لحدث عشوائي. المتغير العشوائي يمكن أن يكون منفصلاً أو متصلاً. تمثل المتغيرات العشوائية المنفصلة القيم القابلة للعد. يمكن أن تأخذ المتغيرات العشوائية المتصلة أية قيمة.

Example 1 Classify Random Variables as Discrete or Continuous

Classify each random variable X as *discrete* or *continuous*. Explain your reasoning.

- X represents the weight of the cereal in a 450 gram box of cereal chosen at random from those on an assembly line.
- X represents the number of cars in a school parking lot chosen at a random time during the school day.
- The number of songs found on a random selection of mp3 players.
- The weights of bowling balls sent by a manufacturer.

GuidedPractice

- 1A. X represents the time it takes to serve a fast-food restaurant customer chosen at random.
- 1B. X represents the attendance at a randomly selected monthly school board meeting.

KeyConcept Probability Distribution

- A probability distribution can be determined theoretically or experimentally.
- A probability distribution can be discrete or continuous.
- The probability of each value of X must be at least 0 and not greater than 1.
- The sum of all the probabilities for all of the possible values of X must equal 1. That is, $\sum P(X) = 1$.

المفهوم الأساسي التوزيع الاحتمالي

- يمكن تحديد توزيع احتمالي نظريًا أو تجريبيًا.
- التوزيع الاحتمالي يمكن أن يكون منفصلًا أو متصلًا.
- يجب أن يكون احتمال كل قيمة من قيم X مساوية لـ 0 على الأقل ولا تزيد عن 1.
- يجب أن يكون مجموع كل الاحتمالات لجميع قيم X المحتملة مساويًا لـ 1. وذلك يعني $\sum P(X) = 1$.

KeyConcept Expected Value of a Discrete Random Variable

Words The expected value of a discrete random variable is the weighted average of the values of the variable. It is calculated by finding the sum of the products of every possible value of X and its associated probability $P(X)$.

Symbols $E(X) = \sum [X \cdot P(X)]$

On a teacher evaluation form, students were asked to rate the teacher's explanations of the subject matter using a score from 1 to 5 , where 1 was too simplified and 5 was too technical .

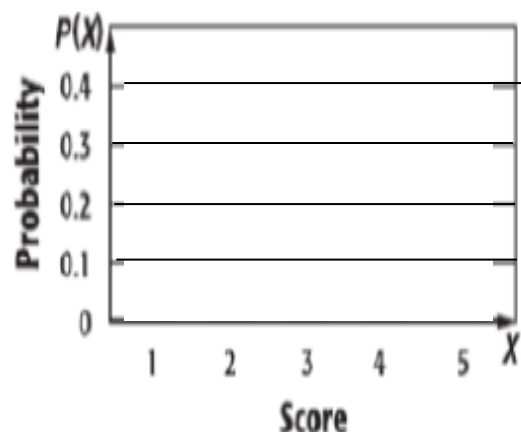
a) Use the frequency distribution shown to construct and graph a probability distribution for the random variable X

مثال (2) : طلب من الطلاب أن يقيموا شرح معلم إحدى المواد الدراسية على استمارة تقييم باستخدام مقياس تتراوح درجاته بين 1 و 5 ، حيث يشير العدد 1 الى أن الشرح مبسط جدا ويشير العدد 5 الى أن الشرح على درجة عالية جدا من التخصص .

Score, X	Frequency
1	1
2	8
3	20
4	16
5	5

(ا) استخدم التوزيع التكراري الموضح لإنشاء توزيع احتمالي للمتغير العشوائي X ومثله بيانيا .

Score x					
frequency					
Relative frequency					



KeyConcept Expected Value of a Discrete Random Variable

Words The expected value of a discrete random variable is the weighted average of the values of the variable. It is calculated by finding the sum of the products of every possible value of X and its associated probability $P(X)$.

Symbols $E(X) = \sum [X \cdot P(X)]$

b) In the last example number 2, find the **expected value** (mean score).

الحل :

X	$P(X)$	$X \cdot P(X)$
		$E(X) = \sum [X \cdot P(X)]$

KeyConcept Standard Deviation of a Probability Distribution

Words For each value of X , subtract the mean from X and square the difference. Then multiply by the probability of X . The sum of each of these products is the variance. The standard deviation is the square root of the variance.

Symbols Variance: $\sigma^2 = \sum [(X - E(X))^2 \cdot P(X)]$
Standard Deviation: $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$

C) Find the variance and **standard deviation** of the probability distribution for the teacher evaluation question from example 2 to the nearest hundredth.

X	$P(X)$	$(X - E(X))^2$	$(X - E(X))^2 \times P(X)$

Moh'd Rashed Alzzen

Example (3): The table shows the probability distribution for a competition if 100 tickets are sold for AED 5 each. There is 1 prize for AED 100, 5 prizes for AED 50, and 10 prizes for AED 25.

Distribution of Prizes				
Prize	no prize	AED 100	AED 50	AED 25
Probability				----

A) Find the **expected** value.

X	P(X)	$E(X) = X * P(X)$

Example (4): A contestant has won one spin of the wheel at the right. Find the expected value of his winnings.

مسابقة ربح أحد المتسابقين فرصة واحدة لتدوير القرص الموضح على اليسار. جسد قيمة التوقع لها سيكسبه.

X	P(X)	$E(X) = X * P(X)$



Moh'd Rashed Alzzen

1 Binomial Experiments Each question on a multiple-choice quiz, like the one described above, can be thought of as a trial with two possible outcomes, correct or incorrect. If Houriiyya guesses on each question, the probability that she answers a question correctly is the same for all five questions.

Houriiyya's guessing on each question is an example of a binomial experiment. A **binomial experiment** is a probability experiment that satisfies the following conditions.

KeyConcept Binomial Experiments

- There is a fixed number of independent trials n .
- Each trial has only two possible outcomes, success or failure.
- The probability of success p is the same in every trial. The probability of failure q is $1 - p$.
- The random variable X is the number of successes in n trials.

1 التجارب ذات الحدين يمكن اعتبار كل سؤال في الاختبار متعدد الاختيارات - مثل الاختبار المذكور سابقاً - بأنه محاولة لها نتيجتان محتملتان، إما إجابة صحيحة أو خاطئة. إذا خمنت حورية في كل سؤال، فإن احتمال أن تجيب إجابة صحيحة هي نفسها في جميع الأسئلة الخمسة. تخمين حورية في كل سؤال عبارة هو مثال للتجربة ذات الحدين. **التجربة ذات الحدين** تجربة احتمالات تستوفي الشروط التالية.

المفهوم الأساسي التجارب ذات الحدين

- يوجد عدد ثابت من المحاولات المستقلة n .
- كل محاولة ليس لها سوى نتيجتان محتملتان، إما النجاح أو الفشل.
- احتمال النجاح p هو نفسه لكل محاولة. احتمال الفشل q تساوي $1 - p$.
- المتغير العشوائي X هو عدد مرات النجاح في n محاولة.

Example 1 Identify a Binomial Experiment

Determine whether each experiment is a binomial experiment or can be reduced to a binomial experiment. If so, describe a trial, determine the random variable, and state n , p , and q .

- a. The spinner at the right is spun 20 times to see how many times it lands on red.

تم لف القرص الدوار الموجود إلى اليسار 20 مرة لمعرفة كم مرة سيقف على اللون الأحمر.



b. One hundred students are randomly asked their favorite food.

. سُئِلَ مِئَةُ طَالِبٍ عَشَوَائِيًّا عَنْ طَعَامِهِمُ الْمَفْضَلِ.

c. Five cards are drawn at random from a deck to make a hand for a card game. The random variable represents the number of spades.

سُحِبَتْ خَمْسَ بَطَاقَاتٍ عَشَوَائِيًّا مِنْ رِزْمَةٍ مِنَ الْبَطَاقَاتِ مِنْ أَجْلِ تَوْزِيعِهَا خِلَالِ إِحْدَى الْأَلْعَابِ. يُمَثِّلُ الْمَتَغِيرُ الْعَشَوَائِيُّ عَدَدَ أَورَاقِ الْبَسْتُونِي.

d The results of a survey indicate that 61% of students like the new school uniforms and 24% do not. Twenty students are randomly selected and asked if they like the uniforms. The random variable represents the number who say that they do like the uniforms.

تُشِيرُ نَتَائِجُ اسْتِقْصَاءٍ إِلَى أَنَّ 61% مِنَ الطُّلَّابِ أُعْجِبَهُمُ الزِّيُّ الْمَدْرَسِيُّ الْجَدِيدُ وَإِلَى أَنَّ 24% لَمْ يُعْجِبَهُمْ هَذَا الزِّيُّ. اخْتِيرَ عِشْرُونَ طَالِبًا عَشَوَائِيًّا وَسُئِلُوا إِنْ كَانَ يُعْجِبُهُمُ الزِّيُّ الْجَدِيدُ. يُمَثِّلُ الْمَتَغِيرُ الْعَشَوَائِيُّ عَدَدَ الطُّلَّابِ الَّذِينَ أَفَادُوا بِأَنَّ الزِّيَّ الْجَدِيدَ يُعْجِبُهُمْ.

e. You complete a test by randomly guessing the answers to 20 multiple-choice questions that each have 4 answer choices, only one of which is correct. The random variable represents the number of correct answers.

تُؤَدِّي اخْتِبَارًا عِبْرَ التَّخْمِينِ الْعَشَوَائِيِّ لِلْإِجَابَاتِ عَنْ 20 سُؤَالٍ اخْتِيَارٍ مِنْ مُتَعَدِّدٍ لِكُلِّ مِنْهَا 4 خِيَارَاتٍ لِلْإِجَابَةِ، وَأَحَدُهَا صَحِيحٌ فَقَطْ. يُمَثِّلُ الْمَتَغِيرُ الْعَشَوَائِيُّ هُنَا عَدَدَ الْإِجَابَاتِ الصَّحِيحَةِ.

2 Binomial Distribution

A **binomial distribution** is a frequency distribution of the probability of each value of X , where the random variable X represents the number of successes in n trials.

Because X is a discrete random variable, a binomial distribution is a **discrete probability distribution**.

التوزيع ذو الحدين توزيع تكراري يبين احتمال كل قيمة من قيم المتغير العشوائي X ، حيث X يمثل عدد المحاولات الناجحة من أصل n محاولة. وعندما يكون X متغير عشوائي منفصل، فالتوزيع ذو الحدين يكون توزيعًا احتماليًا منفصلًا.

KeyConcept Binomial Probability Formula

The probability of X successes in n independent trials is

$$P(X) = {}_n C_X p^X q^{n-X},$$

where p is the probability of success of an individual trial and q is the probability of failure on that same individual trial ($q = 1 - p$).

احتمال تحقق X محاولة نجاح من أصل n محاولة مستقلة تساوي

$$P(X) = {}_n C_X p^X q^{n-X}$$

حيث تمثل p احتمال نجاح محاولة واحدة وتمثل q احتمال فشل المحاولة ذاتها ($q = 1 - p$).

Standardized Test Example 2 Find a Probability

Khamis is selling items from a catalog to raise money for school. He has a 40% chance of making a sale each time he solicits a potential customer. Khamis asks 10 people to purchase an item. Find the probability that 6 people make a purchase.

- A 8.6% B 11.1% C 24% D 40%

يبيع خميس أصنافاً معروضة في فهرس مصور لجميع أموالاً للمدرسة. لديه فرصة نسبتها 40% لإتمام صفقة بيع في كل مرة يحاول فيها إقناع عميل محتمل بالشراء. يعرض خميس على 10 أشخاص أن يشتروا أحد المنتجات. جسد احتمال أن يشتري منه 6 أشخاص.

Guided Practice

- a) **TELEMARKETING** At Khawla's telemarketing job, 15% of the calls that she makes to potential customers result in a sale. She makes 20 calls in a given hour. What is the probability that 5 calls result in a sale?

التسويق عبر الهاتف تعمل خولة في وظيفة التسويق عبر الهاتف، حيث يمكنها تحقيق البيع في 15% من المكالمات التي تجريها مع العملاء المحتملين. وهي تجري 20 مكالمة في ساعة محددة. ما احتمال أن تنجح 5 مكالمات في إتمام البيع؟

- F 6.7% G 8.3% H 10.3% J 11.9%

- b) **5. GAMES** Saeed has earned five spins of the wheel on the right. He will receive a prize each time spinner lands on WIN. What is the probability he receives three prizes?



ألعاب ربح سعيد خمس دورات للفرص الموجود جهة اليسار. سيحصل على جائزة في كل مرة يستقر فيها الفرص على كلمة "فوز". ما احتمال أن يحصل على ثلاث جوائز؟

- A 4.2% C 7.1%
B 5.8% D 8.8%

Moh'd Rashed Alzzen

KeyConcept Mean of a Binomial Distribution

The mean μ of a binomial distribution is given by $\mu = np$, where n is the number of trials and p is the probability of success.

Real-World Example 4 Full Probability Distribution

- Houriiyya forgot to study for her civics quiz. The quiz consists of five multiple-choice questions with each question having four answer choices. Houriiyya randomly circles an answer for each question. In order to pass, she needs to answer at least four questions correctly.

نسيت حورية أن تذاكر دروسها من أجل اختبار التربية المدنية. يتكون الاختبار من خمسة أسئلة اختيار من متعدد، وفي كل سؤال توجد أربعة خيارات للإجابة. اختارت حورية إجابة عشوائية لكل سؤال. لنيل علامة النجاح، يجب عليها الإجابة عن أربعة أسئلة على الأقل بشكل صحيح.

- a. Determine the probabilities associated with the number of questions Houriiyya answered correctly by calculating the probability distribution.

a. حدد الاحتمالات المرتبطة بعدد الأسئلة التي أجابها حورية بشكل صحيح عن طريق حساب التوزيع الاحتمالي.

X	P(X)
1	
2	
3	
4	
5	

$$P(x) = nCx \cdot (p)^x (q)^{n-x}$$

- b. What is the probability that Houriiyya passes the quiz?

b. ما احتمال أن تنجح حورية في الاختبار؟

- c. How many questions should Houriiyya expect to answer correctly?

c. كم سؤالاً ينبغي أن تتوقع حورية الإجابة عنه إجابة صحيحة؟

Example 7 Binomial Distributions

EXERCISE In a recent poll, 35% of teenagers said they exercise regularly. Five teenagers chosen at random are asked if they exercise regularly. Construct and graph a binomial distribution for the random variable X , which represents the number of teenagers who said yes. Then find the probability that at least three of these teenagers said yes.

ممارسة التمارين الرياضية قال 35% من مراهقين خلال استقصاء جرى مؤخراً إنهم يمارسون التمارين الرياضية بصورة دورية. ثم سُئل خمسة مراهقين اختيروا عشوائياً إن كانوا يمارسون التمارين الرياضية على نحو دوري. أنشئ توزيعاً احتمالياً للمتغير العشوائي X الذي يمثل عدد المراهقين الذين أجابوا بنعم ومثله بيانياً. ثم أوجد احتمال أن ثلاثة من أولئك المراهقين على الأقل أجابوا بنعم.

$$P(x) = nCx \bullet (p)^x (q)^{n-x}$$

أ. محمد راشد الزن

X	P(X)
1	
2	
3	
4	
5	

a) $P(x \geq 3) =$

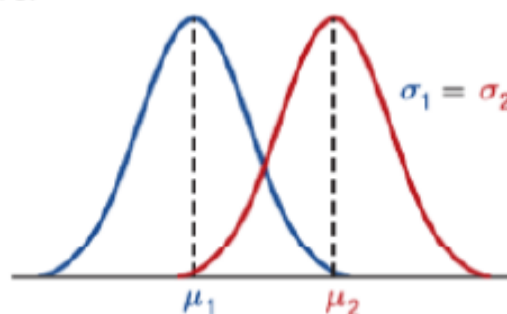
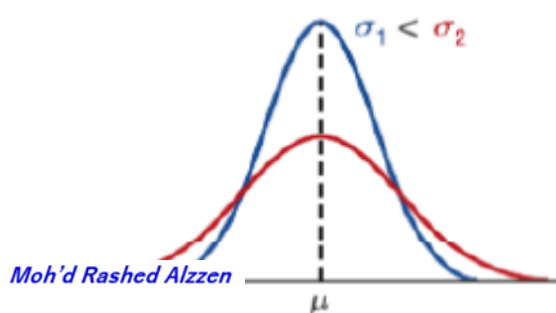
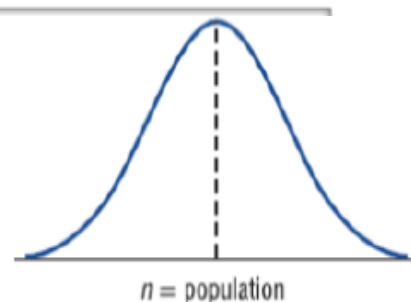
b) $P(x = 4) =$

c) $P(x \leq 2) =$

1 The Normal Distribution The probability distribution for a continuous variable is called a *continuous probability distribution*. The most widely used continuous probability distribution is called the **normal distribution**. The characteristics of the normal distribution are as follows.

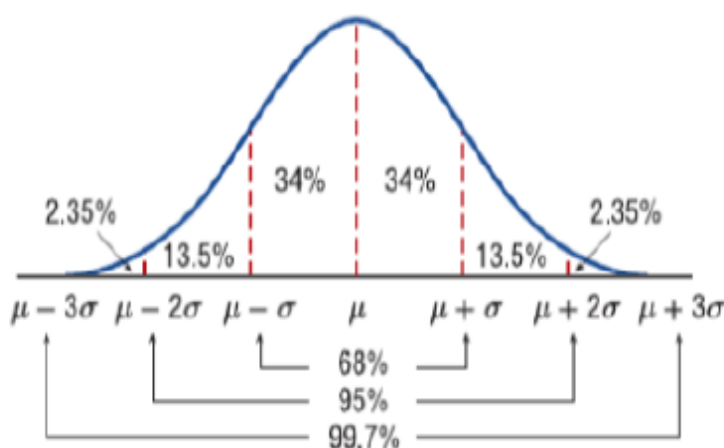
KeyConcept Characteristics of the Normal Distribution

- The graph of the curve is bell-shaped and symmetric with respect to the mean.
- The mean, median, and mode are equal and located at the center.
- The curve is continuous.
- The curve approaches, but never touches, the x-axis.
- The total area under the curve is equal to 1 or 100%.



KeyConcept The Empirical Rule القاعدة التجريبية

In a normal distribution with mean μ and standard deviation σ :



- approximately 68% of the data values fall between $\mu - \sigma$ and $\mu + \sigma$.
- approximately 95% of the data values fall between $\mu - 2\sigma$ and $\mu + 2\sigma$.
- approximately 99.7% of the data values fall between $\mu - 3\sigma$ and $\mu + 3\sigma$.

Example 1 Use the Empirical Rule

HEIGHT The heights of the 880 students at Al Sharq Secondary School are normally distributed with a mean of 168 centimeters and a standard deviation of 6 centimeters.

a. Approximately how many students are more than 180 centimeters tall?

مثال رقم (1): يتوزع طول 880 طالبا بمدرسة الحصن الثانوية توزيعا طبيعيا بوسط مقداره 168cm وانحراف معياري مقداره 6cm. اوجد ما يلي :
(أ): كم عدد الطلاب الذين يزيد طولهم عن 180cm ؟

b. What percent of the students are between 150 and 174 centimeters tall?

(ب): ما النسبة المئوية للطلاب الذين يتراوح طولهم بين 150cm و 174cm.

Guided Practice

1. **MANUFACTURING** A machine used to fill water bottles dispenses slightly different amounts into each bottle. Suppose the volume of water in 120 bottles is normally distributed with a mean of 1.1 liters and a standard deviation of 0.02 liter.
- A. Approximately how many bottles of water are filled with less than 1.06 liters?
- B. What percent of the bottles have between 1.08 and 1.14 liters?

تمرين موجّه

1. **التصنيع** توزع آلة لتعبئة قوارير الماء كميات مختلفة قليلاً من الماء في كل قارورة. افترض أن حجم الماء في 120 قارورة له توزيع طبيعي وسطه 1.1 L وانحراف معياري يساوي 0.02 L.
- A. ما العدد التقريبي لقوارير الماء التي تملأ بكمية أقل من 1.06 L ؟
- B. ما النسبة المئوية من القوارير التي تضم ما بين 1.08 L و 1.14 L ؟

Moh'd Rashed Alzzen

Key Concept Formula for z-Values

The z-value for a data value in a set of data is given by $z = \frac{X - \mu}{\sigma}$, where X is the data value, μ is the mean, and σ is the standard deviation.

Example 2 Find z-Values

Find each of the following.

a. z if $X = 24$, $\mu = 29$, and $\sigma = 4.2$

b. X if $z = -1.73$, $\mu = 48$, and $\sigma = 2.3$

Example 3 Use the Standard Normal Distribution

COMMUNICATION The average number of phone calls received by a customer service representative each day during a 30-day month was 105 with a standard deviation of 12. Find the number of days with fewer than 110 phone calls. Assume that the number of calls is normally distributed.

مثال 3 استخدام التوزيع المعياري

الاتصالات بلغ متوسط المكالمات التي يستقبلها مندوب خدمة العملاء كل يوم خلال شهر 30 يومًا 105 مكالمات بالانحراف المعياري 12. جسد عدد الأيام التي تقل المكالمات فيها عن 110 مكالمات. افترض أن عدد المكالمات يتم توزيعه طبيعيًا.

Moh'd Rashed Alzzen

Guided Practice

3. **BASKETBALL** The average number of points that a basketball team scored during a single season was 63 with a standard deviation of 18. If there were 15 games during the season, find the percentage of games in which the team scored more than 70 points. Assume that the number of points is normally distributed.

كرة السلة بلغ متوسط عدد النقاط التي أحرزها أحد فرق كرة السلة خلال موسم واحد 63 مع انحراف معياري 18. إذا كانت هناك 15 مباراة خلال الموسم، فأوجد النسبة المئوية للمباريات التي أحرز فيها الفريق أكثر من 70 نقطة. افترض أن توزيع عدد النقاط كان طبيعيًا.

2 Probability and the Normal Distribution

Example 5 Find Probabilities

METEOROLOGY The temperatures for one month for a city in California are normally distributed with $\mu = 81^\circ$ and $\sigma = 6^\circ$. Find each probability, and use a graphing calculator to sketch the corresponding area under the curve.

a. $P(70^\circ < X < 90^\circ)$

b. $P(X \geq 95^\circ)$

Moh'd Rashed Alzzen