

توقعات نصار فاينال

عمل / أ . أحمد نصار

تجميع لأهم أفكار المسائل المتوقعة و الأكثر تكرارا
فى أختبارات السنوات السابقة

الاختبار الفاينال 8 مسائل مقالى

الوحدة الأولى (التكامل):

3 مسائل مقالى.

الوحدة الثانية (تطبيقات التكامل):

2 مسائل مقالى.

الوحدة الثالثة (القطوع):

2 مسائل مقالى.

الوحدة الرابعة (الأحصاء):

1 سؤال مقالى.

مسائل الموضوعى من كراسه التمارين بنفس الارقام

(1)

a

أثبت أن $F(x) = x^3 + 5x + 3$ هي مشتقة عكسية للدالة $f(x) = 3x^2 + 5$
ثم اكتب الصورة العامة للمشتقة العكسية

$$F(x) = x^3 + 5x + 3$$

$$F'(x) = 3x^2 + 5 = f(x)$$

$\therefore F$ هي مشتقة عكسية للدالة f

الصورة العامة للمشتقة العكسية هي

$$H(x) = x^3 + 5x + C \quad \text{حيث } c \text{ ثابت}$$

b

$$\int \frac{x^4 - 27x}{x^2 - 3x} dx$$

$$\int \frac{x(x^3 - 27)}{x(x-3)} dx = \int \frac{(x-3)(x^2 + 3x + 9)}{(x-3)} dx$$

$$= \int (x^2 + 3x + 9) dx$$

$$\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 9x + c$$

(2)

$$\begin{aligned}
\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{x}+1} dx &= \int \frac{(\sqrt[3]{x}+1)[(\sqrt[3]{x})^2 - \sqrt[3]{x} + 1]}{\sqrt[3]{x}+1} dx = \\
\int [(\sqrt[3]{x})^2 - \sqrt[3]{x} + 1] dx &= \int (x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{3}} + 1) dx = \\
&= \frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} - \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} + x + C \\
&= \frac{3}{5} x \sqrt[3]{x^2} + \frac{3}{4} x \sqrt[3]{x} + x + C
\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}
&\int \frac{x-1}{\sqrt{x}+1} dx \\
&= \int \frac{(x-1)}{\sqrt{x}+1} \times \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1} dx \\
&= \int \frac{(x-1)(\sqrt{x}-1)}{(x-1)} dx \\
&= \int (\sqrt{x}-1) dx \\
&= \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - x + c
\end{aligned}$$

(4)

$$\int (x+2)\sqrt[3]{x^2+4x-1} dx$$

الحل :

$$u = x^2 + 4x - 1 \quad \text{بفرض}$$

$$du = (2x + 4)dx \quad , \quad \frac{1}{2} du = (x + 2)dx$$

$$\begin{aligned} \int (x+2)\sqrt[3]{x^2+4x-1} dx &= \int u^{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{2} du \right) \\ &= \frac{1}{2} \int u^{\frac{1}{3}} du \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{3}{4} u^{\frac{4}{3}} \right] + C \end{aligned}$$

$$\therefore \int (x+2)\sqrt[3]{x^2+4x-1} dx = \frac{3}{8} (x^2 + 4x - 1)^{\frac{4}{3}} + C$$

(5)

$$\int \frac{5}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)^3} dx \quad \text{أوجد :}$$

$$\int \frac{5}{x^{\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{2}}+2)^3} dx =$$

$$= \int 5 x^{\frac{-1}{2}} (x^{\frac{1}{2}}+2)^{-3} dx = 5 \int (x^{\frac{1}{2}}+2)^{-3} x^{\frac{-1}{2}} dx$$

نفرض أن $u = x^{\frac{1}{2}} + 2$  $du = \frac{1}{2} x^{\frac{-1}{2}} dx$

$$2 du = x^{\frac{-1}{2}} dx$$

$$5 \int (x^{\frac{1}{2}}+2)^{-3} x^{\frac{-1}{2}} dx = 5 \int u^{-3} \cdot 2 du = 10 \int u^{-3} du$$

$$= 10 \cdot \frac{u^{-2}}{-2} + C = \frac{-5}{u^2} + C = \frac{-5}{(\sqrt{x}+2)^2} + C$$

(6)

$$\int x(2x - 1)^3 dx$$

الحل:

$$u = 2x - 1 \Rightarrow du = 2dx \Rightarrow \frac{du}{2} = dx$$

$$u = 2x - 1 \Rightarrow 2x = u + 1 \Rightarrow x = \frac{u + 1}{2}$$

$$\int x(2x - 1)^3 dx = \int \left(\frac{u + 1}{2} \right) u^3 \frac{du}{2} = \frac{1}{4} \int (u^4 + u^3) du$$

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{u^5}{5} + \frac{u^4}{4} + C \right) = \frac{1}{20} (2x - 1)^5 + \frac{1}{16} (2x - 1)^4 + C$$

(7)

$$\int x^5 \sqrt{3+x^2} dx$$

الحل:

$$u = 3 + x^2 \Rightarrow du = 2x dx \Rightarrow \frac{du}{2} = x dx$$

$$\int x^5 \sqrt{3+x^2} dx = \int \sqrt{3+x^2} (x^4)(x dx)$$

$$u = 3 + x^2 \Rightarrow x^2 = u - 3 \Rightarrow x^4 = (u - 3)^2$$

$$\int x^5 \sqrt{3+x^2} dx = \int \sqrt{3+x^2} (x^4)(x dx)$$

$$= \int \sqrt{u} (u - 3)^2 \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \int u^{\frac{1}{2}} (u^2 - 6u + 9) du = \frac{1}{2} \int \left(u^{\frac{5}{2}} - 6u^{\frac{3}{2}} + 9u^{\frac{1}{2}} \right) du$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{u^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} - \frac{6u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + \frac{9u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C \right) = \frac{1}{7} u^{\frac{7}{2}} - \frac{6}{5} u^{\frac{5}{2}} + 3u^{\frac{3}{2}} + C$$

$$= \frac{1}{7} (3+x^2)^{\frac{7}{2}} - \frac{6}{5} (3+x^2)^{\frac{5}{2}} + 3(3+x^2)^{\frac{3}{2}} + C$$

(8)

$$\int x \sec^2(x^2 + 2) dx$$

الحل:

$$u = x^2 + 2 \Rightarrow du = 2x dx \Rightarrow \frac{1}{2} du = x dx$$

$$\begin{aligned} \int x \sec^2(x^2 + 2) dx &= \int \sec^2 u \left(\frac{1}{2} du \right) \\ &= \frac{1}{2} \int \sec^2 u du = \frac{1}{2} \tan u + C = \frac{1}{2} \tan(x^2 + 2) + C \end{aligned}$$

(9)

$$\int \csc^5 x \cot x dx$$

الحل:

$$u = \csc x \Rightarrow du = -\csc x \cot x dx \Rightarrow -du = \csc x \cot x dx$$

$$\int \csc^5 x \cot x dx = \int \csc^4 x \cdot \csc x \cot x dx = \int u^4 (-du)$$

$$= -\int u^4 du = -\frac{u^5}{5} + C = -\frac{1}{5} \csc^5 x + C$$

(10)

$$\int \cot x \, dx$$

الحل:

$$\int \cot x \, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} \, dx$$

$$u = \sin x \Rightarrow du = \cos x \, dx$$

$$\int \cot x \, dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln|\sin x| + C$$

(11)

$$\int \cos^3(2x-3) \cdot \sin(2x-3) \, dx$$

$$= \int u^3 \frac{du}{-2}$$

$$= \frac{-1}{2} \cdot \frac{u^4}{4} + C = \frac{-1}{8} (\cos(2x-3))^4 + C$$

$$u = \cos(2x-3)$$

$$du = -2 \sin(2x-3) \, dx$$

$$\frac{du}{-2} = \sin(2x-3) \, dx$$

(12)

$$\int \frac{dx}{(\sin^2 x) \sqrt{1 + \cot x}} dx$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{1 + \cot x}} \cdot \frac{1}{\sin^2 x} dx$$

$$= \int (1 + \cot x)^{-1/2} \cdot \csc^2 x dx$$

نفرض أن

$$u = 1 + \cot x$$

$$du = -\csc^2 x dx$$

$$\therefore \ominus \int (1 + \cot x)^{-1/2} \cdot \ominus \csc^2 x dx$$

بالعويض

$$= - \int u^{-1/2} du$$

$$= - \frac{u^{1/2}}{1/2} + C$$

$$= -2 \sqrt{u} + C$$

$$= -2 \sqrt{1 + \cot x} + C$$

(13)

$$\int \frac{3t^2 - 6t}{t^3 - 3t^2 + 8} dt$$

$$\text{نفرض أن } u = t^3 - 3t^2 + 8 \longrightarrow du = (3t^2 - 6t) dt$$

$$\begin{aligned} \int \frac{3t^2 - 6t}{t^3 - 3t^2 + 8} dx &= \int \frac{1}{u} du = \ln |u| + C \\ &= \ln |t^3 - 3t^2 + 8| + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\int \frac{x^3 + 4}{x} dx \\ &= \int \left(\frac{x^3}{x} + \frac{4}{x} \right) dx \\ &= \int \left(x^2 + \frac{4}{x} \right) dx \\ &= \frac{x^3}{3} + 4 \ln |x| + C \end{aligned}$$

(14)

$$\int (x^2 - 2)e^{x^3 - 6x} dx$$

أوجد:

الحل

$$I = \int e^{\underline{x^3 - 6x}} \cdot \underline{(x^2 - 2) dx}$$

$$= \int e^u \cdot \frac{1}{3} du$$

$$= \frac{1}{3} e^u + C$$

$$= \frac{1}{3} e^{x^3 - 6x} + C$$

$$u = \underline{x^3 - 6x}$$

$$du = (3x^2 - 6) dx$$

$$du = 3(x^2 - 2) dx$$

$$\frac{1}{3} du = \underline{(x^2 - 2) dx}$$

(15)

$$\int \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx$$

أوجد:

الحل

$$I = \int e^{\underline{\frac{1}{x}}} \cdot \underline{\frac{1}{x^2} dx}$$

$$= \int e^u \cdot du$$

$$= -e^u + C = -e^{\frac{1}{x}} + C$$

$$u = \underline{\frac{1}{x}}$$

$$du = \underline{-\frac{1}{x^2} dx}$$

$$-du = \underline{\frac{1}{x^2} dx}$$

(16)

$$\int \frac{e^x}{e^x + 1} dx$$

أوجد:

الحل

$$I = \int \frac{1}{u} du$$

$$= \ln |u| + C$$

$$= \ln |e^x + 1| + C$$

$u = e^x + 1$
 $du = e^x dx$

(17)

$$\int (2 \tan x - \csc^2 x) dx$$

$$\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx \quad \left| \begin{array}{l} u = \cos x \\ du = -\sin x dx \end{array} \right.$$

$$= - \int \frac{du}{u}$$

$$= - \ln |u| + C$$

$$= - \ln | \cos x | + C$$

$$\therefore I = -2 \ln |\cos x| + \cot x + C$$

(18)

حلل المقام $\int \frac{x^2-2}{2x^3-5x^2-3x} dx$ أوجد:

$$2x^3 - 5x^2 - 3x = x(2x^2 - 5x - 3) = x(2x + 1)(x - 3)$$

أصفار المقام: $0, -\frac{1}{2}, 3$

بالضرب في $x(2x+1)(x-3)$

$$\frac{x^2-2}{x(2x+1)(x-3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(2x+1)} + \frac{C}{(x-3)}$$

$$x^2 - 2 = A(2x+1)(x-3) + Bx(x-3) + Cx(2x+1)$$

التعويض بأصفار المقام

بالتعويض في 1 $x = 0 \rightarrow A = \frac{2}{3}$

بالتعويض في 1 $x = -0.5 \rightarrow B = -1$

بالتعويض في 1 $x = 3 \rightarrow C = \frac{1}{3}$

تابع الحل

أوجد: $\int \frac{x^2-2}{2x^3-5x^2-3x} dx$

$$\frac{x^2-2}{x(2x+1)(x-3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(2x+1)} + \frac{C}{(x-3)}$$

$A = \frac{2}{3}$

$B = -1$

$C = \frac{1}{3}$

$$\int \frac{x^2-2}{2x^3-5x^2-3x} dx = \int \left(\frac{\frac{2}{3}}{x} + \frac{-1}{2x+1} + \frac{\frac{1}{3}}{x-3} \right) dx =$$

$$= \frac{2}{3} \ln |x| - \frac{1}{2} \ln |2x+1| + \frac{1}{3} \ln |x-3| + C$$

(19)

أوجد: $\int \frac{4x^2 - 4x + 1}{x^3 - 2x^2 + x} dx$

حلل المقام $x^3 - 2x^2 + x = x(x^2 - 2x + 1) = x(x-1)^2$

أصفار المقام: 0 (مكرر 1), 1

المقامات: 0, 1, 1

الأصفار: 0, 1, 1

المقامات: x , $x-1$, $(x-1)^2$

بالضرب في $x(x-1)^2$

$$\frac{4x^2 - 4x + 1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{C}{(x-1)^2}$$

$$4x^2 - 4x + 1 = A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx$$

1

التعويض بأصفار المقام

بالتعويض في $x=0$ $A=1$

بالتعويض في $x=1$ $C=1$

بالتعويض في $x=2$, $A=1$, $C=1$ $B=3$

تابع الحل

أوجد: $\int \frac{4x^2 - 4x + 1}{x^3 - 2x^2 + x} dx$

$$\frac{4x^2 - 4x + 1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{C}{(x-1)^2}$$

$$\frac{4x^2 - 4x + 1}{x(x-1)^2} = \frac{1}{x} + \frac{3}{(x-1)} + \frac{1}{(x-1)^2}$$

$$\int \frac{4x^2 - 4x + 1}{x(x-1)^2} dx = \int \frac{1}{x} + \frac{3}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} dx$$

$$= \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{3}{x-1} dx + \int \frac{1}{(x-1)^2} dx =$$

$$= \ln |x| + 3 \ln |x-1| - \frac{1}{x-1} + C$$

(20)

حلل المقام

$$\int \frac{x^2 + 1}{x^3 + 4x^2} dx$$

$$x^3 + 4x^2 = x^2(x + 4)$$

اصفار المقام

0 مكرر -4

الاصفار

0

0

-4

المقامات

x

x²

x + 4

بالضرب في

$$\frac{x^2 + 1}{x^2(x + 4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x + 4}$$

$$x^2 + 1 = Ax(x + 4) + B(x + 4) + Cx^2$$

$$0^2 + 1 = \cancel{A(0)} + B(0 + 4) + \cancel{C(0)}$$

$$B = \frac{1}{4}$$

بالتعويض في 1 بـ x = 0

$$(-4)^2 + 1 = \cancel{A(0)} + \cancel{B(0)} + C(-4)^2$$

$$C = \frac{17}{16}$$

بالتعويض في 1 بـ x = -4

x قيمة اختيارية لا تساوي اصفار المقام و B, C من الحل

بالتعويض في 1 بـ x = 1, B = 1/4, C = 17/16

$$(1)^2 + 1 = A(1)(1 + 4) + \frac{1}{4}(1 + 4) + \frac{17}{16}(1)^2 \quad A = \frac{-1}{16}$$

تابع الحل

$$\frac{x^2 + 1}{x^2(x + 4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x + 4}$$

$$\frac{x^2 + 1}{x^2(x + 4)} = \frac{-1}{16x} + \frac{1}{4x^2} + \frac{17}{16(x + 4)}$$

$$A = \frac{-1}{16}$$

$$B = \frac{1}{4}$$

$$C = \frac{17}{16}$$

$$\int \frac{x^2 + 1}{x(x + 4)^2} dx = \int \frac{-1}{16x} + \frac{1}{4x^2} + \frac{17}{16(x + 4)} dx =$$

$$= \int \frac{-1}{16x} dx + \int \frac{1}{4x^2} dx + \int \frac{17}{16(x + 4)} dx =$$

$$= -\frac{1}{16} \ln |x| - \frac{1}{4x} + \frac{17}{16} \ln |x + 4| + C$$

(21)

$$\int \frac{x^2 - 3x + 7}{x^2 - 4x + 4} dx$$

∴ درجة البسط = درجة المقام

∴ نبدأ بقسمة البسط على المقام باستخدام القسمة المطولة

$$\begin{array}{r} \text{ناتج القسمة} \leftarrow 1 \\ x^2 - 4x + 4 \overline{) x^2 - 3x + 7} \\ \underline{- x^2 - 4x + 4} \\ x + 3 \end{array}$$

الباقى ←

$$\frac{x^2 - 3x + 7}{x^2 - 4x + 4} = 1 + \frac{x + 3}{(x - 2)^2}$$

$$\frac{x + 3}{(x - 2)^2} = \frac{A_1}{x - 2} + \frac{A_2}{(x - 2)^2}$$

الحدودية النسبية

$$x + 3 = A_1(x - 2) + A_2$$

نضرب كلاً من طرفي المعادلة في $(x - 2)^2$ ثم نبسط

$$2 + 3 = A_1(0) + A_2$$

نعوض عن x بـ 2

$$\therefore A_2 = 5$$

نعوض في المعادلة عن $A_2 = 5$ وإحدى قيم x ولتكن $x = 1$ لإيجاد قيمة A_1 .

$$1 + 3 = -A_1 + 5$$

$$\therefore A_1 = 1$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 - 3x + 7}{x^2 - 4x + 4} dx &= \int \left(1 + \frac{1}{x - 2} + \frac{5}{(x - 2)^2} \right) dx \\ &= x + \ln|x - 2| - \frac{5}{x - 2} + C \end{aligned}$$

(22)

بأستخدام القسمة المطولة:A)

$$\frac{x^2 + 3x + 2}{(x-3)^2} = 1 + \frac{9x-7}{(x-3)^2}$$

$$\frac{9x-7}{(x-3)^2} = \frac{A_1}{x-3} + \frac{A_2}{(x-3)^2}$$

$$9x-7 = A_1(x-3) + A_2$$

عوض عن x بـ 3 $\therefore A_2 = 20$ عوض عن A_2 بـ 20 ولتكن $x = 1$ لإيجاد قيمة A_1 .

$$\therefore A_1 = 9$$

$$\frac{x^2 + 3x + 2}{(x-3)^2} = 1 + \frac{9}{x-3} + \frac{20}{(x-3)^2}$$

$$\int \frac{x^2 + 3x + 2}{(x-3)^2} dx = x + 9 \ln|x-3| - \frac{20}{x-3} + C$$

B)

$$\frac{2x^2 + x + 3}{x^2 - 1} = 2 + \frac{x+5}{x^2 - 1}$$

$$\frac{x+5}{x^2 - 1} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x+1}$$

$$x+5 = A_1(x+1) + A_2(x-1)$$

عوض عن x بـ 1 $\therefore A_1 = 3$ عوض عن x بـ -1 $\therefore A_2 = -2$

$$\frac{2x^2 + x + 3}{x^2 - 1} = 2 + \frac{3}{x-1} - \frac{2}{x+1}$$

$$\int \frac{2x^2 + x + 3}{x^2 - 1} dx = \int \left(2 + \frac{3}{x-1} - \frac{2}{x+1} \right) dx$$

$$= 2x + 3 \ln|x-1| - 2 \ln|x+1| + C$$

(23)

$$\int x \cos x \, dx$$

الحل:

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

$$\begin{aligned} \int x \cos x \, dx &= x \sin x - \int \sin x \, dx \\ &= x \sin x + \cos x + C \end{aligned}$$

$u = x$ $du = dx$	$\swarrow$ $\nwarrow$	$dv = \cos x \, dx$ $v = \sin x$
----------------------	--------------------------	-------------------------------------

(24)

$$\int (4x - 1) \ln x \, dx$$

الحل :

$$u = \ln x$$

$$dv = (4x - 1) \, dx$$

$$du = \frac{1}{x} \, dx$$

$$v = 2x^2 - x = x(2x - 1)$$

$$\int u \, dv = u \cdot v - \int v \, du$$

$$\int (4x - 1) \ln x \, dx$$

$$= x(2x - 1) \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot x(2x - 1) \, dx$$

$$= x(2x - 1) \ln x - \int (2x - 1) \, dx$$

$$= x(2x - 1) \ln x - (x^2 - x) + c$$

$$= x(2x - 1) \ln x - x^2 + x + c$$

(25)

$$\int 4xe^{-5x} dx$$

الحل :

$$\begin{aligned} \int u dv &= uv - \int v du \\ \int 4xe^{-5x} dx &= 4x \left(-\frac{1}{5} e^{-5x} \right) - \int -\frac{4}{5} e^{-5x} dx \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ll} u = 4x & dv = e^{-5x} dx \\ du = 4dx & v = -\frac{1}{5} e^{-5x} \end{array}$$

$$= -\frac{4}{5} x e^{-5x} - \frac{4}{25} e^{-5x} + C$$

(26)

$$\int \ln x dx$$

الحل :

$$\begin{aligned} \int u dv &= uv - \int v du \\ \int \ln x dx &= x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ll} u = \ln x & dv = dx \\ du = \frac{1}{x} dx & v = x \end{array}$$

$$= x \ln x - \int dx = x \ln(x) - x + C$$

(27)

$$\int x^2 \sin x \, dx$$

الحل :

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

$$\int x^2 \sin x \, dx = -x^2 \cos x + \int 2x \cos x \, dx$$

$$\begin{array}{l} u = x^2 \quad dv = \sin x \, dx \\ \quad \quad \quad \swarrow \quad \quad \quad \searrow \\ du = 2x \, dx \quad \quad \quad v = -\cos x \end{array}$$

$$\begin{aligned} \int 2x \cos x \, dx &= 2x \sin x - \int 2 \sin x \, dx \\ &= 2x \sin x + 2 \cos x + C \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l} u = 2x \quad dv = \cos x \, dx \\ \quad \quad \quad \swarrow \quad \quad \quad \searrow \\ du = 2 \, dx \quad \quad \quad v = \sin x \end{array}$$

$$\therefore \int x^2 \sin x \, dx = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C$$

(28)

$$\int x \sin(5x) \, dx$$

$$\begin{array}{l} u = x \quad dv = \sin(5x) \, dx \\ du = dx \quad \quad \quad v = \frac{-\cos(5x)}{5} \end{array}$$

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

$$\int x \sin(5x) \, dx$$

$$= \frac{-1}{5} x \cos(5x) - \int \frac{-\cos(5x)}{5} \, dx$$

$$= \frac{-1}{5} x \cos(5x) + \frac{1}{5} \int \cos(5x) \, dx$$

$$= \frac{-1}{5} x \cos(5x) + \frac{1}{5} \left(\frac{\sin(5x)}{5} \right) + c$$

$$= \frac{-1}{5} x \cos(5x) + \frac{1}{25} (\sin(5x)) + c$$

(29)

$$\int x^2 \ln x^2 dx$$

أوجد:

$$I = \int 2x^2 \cdot \ln x dx$$

الحل

$$u = \ln x \quad dv = 2x^2 dx$$

$$du = \frac{1}{x} dx$$

$$v = \frac{2}{3} x^3$$

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$I = \ln x \cdot \frac{2}{3} x^3 - \int \frac{2}{3} x^3 \cdot \frac{1}{x} dx$$

$$I = \frac{2}{3} x^3 \cdot \ln x - \frac{2}{3} \int x^2 dx$$

$$I = \frac{2}{3} x^3 \cdot \ln x - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} x^3 + C$$

$$I = \frac{2}{3} x^3 \cdot \ln x - \frac{2}{9} x^3 + C$$

(30)

$$\int x^2 e^{2x-3} dx$$

$$u = x^2$$

$$dv = e^{2x-3} dx$$

$$du = 2x dx$$

$$v = \frac{1}{2} e^{2x-3}$$

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$\int x^2 e^{2x-3} dx = \frac{1}{2} x^2 e^{2x-3}$$

$$- \int x e^{2x-3} dx \dots \dots \dots (1)$$

نستخدم قاعدة التجزيء مرة أخرى لإيجاد تكامل

$$\int x e^{2x-3} dx$$

$$u = x$$

$$dv = e^{2x-3} dx$$

$$du = dx$$

$$v = \frac{1}{2} e^{2x-3}$$

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$\int x e^{2x-3} dx = \frac{1}{2} x e^{2x-3} - \frac{1}{2} \int e^{2x-3} dx$$

$$= \frac{1}{2} x e^{2x-3} - \frac{1}{4} e^{2x-3} + c \quad (2)$$

من (1) ، (2) نحصل على

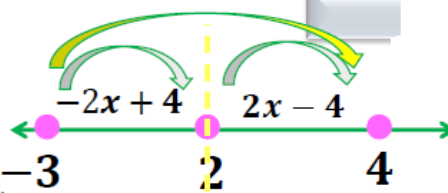
$$\therefore \int x^2 e^{2x-3} dx$$

$$= \frac{1}{2} x^2 e^{2x-3} - \frac{1}{2} x e^{2x-3} + \frac{1}{4} e^{2x-3} + c$$

$$= \left(\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \right) e^{2x-3} + c$$

(31)

$$\int_{-3}^4 |2x - 4| dx$$



$$\begin{aligned} 2x - 4 &= 0 \\ 2x &= 4 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_{-3}^2 |2x - 4| dx + \int_2^4 |2x - 4| dx = \\ & \int_{-3}^2 (-2x + 4) dx + \int_2^4 (2x - 4) dx = \\ & = \left[-\frac{2x^2}{2} + 4x \right]_{-3}^2 + \left[\frac{2x^2}{2} - 4x \right]_2^4 = \\ & = [-x^2 + 4x]_{-3}^2 + [x^2 - 4x]_2^4 = \\ & [- (2)^2 + 4(2)] - [- (-3)^2 + 4(-3)] + [4^2 - 4(4)] - [2^2 - 4(2)] \\ & = 29 \end{aligned}$$

(32)

$$\int_{-2}^3 (x|x| + 3) dx$$

$$= \int_{-2}^0 (x|x| + 3) dx + \int_0^3 (x|x| + 3) dx$$

$$= \int_{-2}^0 (-x^2 + 3) dx + \int_0^3 (x^2 + 3) dx$$

$$= \left[\frac{-x^3}{3} + 3x \right]_{-2}^0 + \left[\frac{+x^3}{3} + 3x \right]_0^3$$

$$= - \left[\frac{8}{3} - 6 \right] + [9 + 9 - 0]$$

$$= \frac{10}{3} + 18 = \frac{64}{3} = 21,3333$$

(33)

$$\int_3^5 (x^2 + x) dx \geq 0$$

دون حساب قيمة التكامل أثبت أن:

الحل:

بفرض

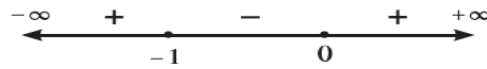
وهي دالة متصلة على $[3, 5]$

نضع

$$f(x) = x^2 + x$$

$$x^2 + x = 0$$

$$x(x + 1) = 0$$



$$f(x) \geq 0 \quad \forall \quad x \in (-\infty, -1] \cup [0, \infty)$$

$$\therefore [3, 5] \subseteq [0, \infty)$$

$$\therefore x^2 + x \geq 0 \quad \forall \quad x \in [3, 5]$$

$$\int_3^5 (x^2 + x) dx \geq 0$$

(34)

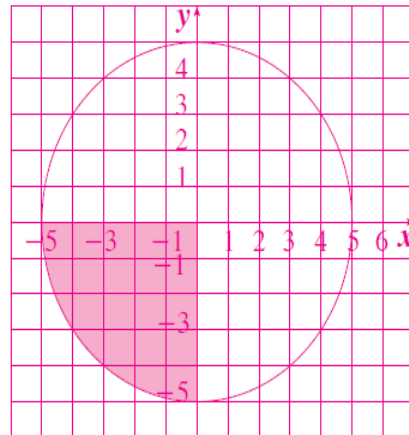
$$y = -\sqrt{25 - x^2} \quad \therefore \quad y^2 = 25 - x^2 \quad \therefore \quad y^2 + x^2 = 25$$

وهي معادلة دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها 5 وحدات.

والدالة $y = -\sqrt{25 - x^2}$ تمثل معادلة النصف السفلي للدائرة.

$$\int_{-5}^0 -\sqrt{25 - x^2} dx = -A$$

$$= \frac{-1}{4} \pi (5)^2 = \frac{-25}{4} \pi$$



(35)

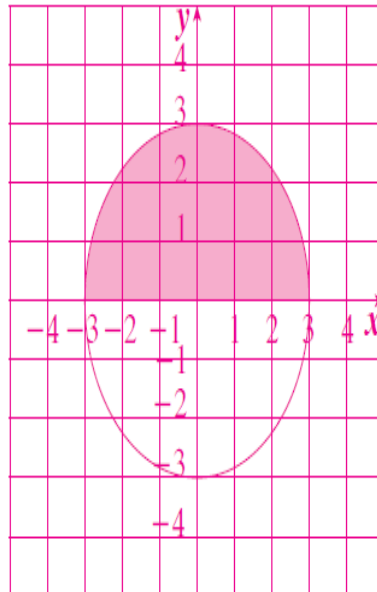
$$y = \sqrt{9 - x^2} \quad \therefore y^2 = 9 - x^2 \quad \therefore y^2 + x^2 = 9$$

وهي معادلة دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها 3 وحدات.

والدالة $y = \sqrt{9 - x^2}$ تمثل معادلة النصف العلوي للدائرة.

$\therefore \int_{-3}^3 \sqrt{9 - x^2} dx$ مساحه المنطقة المظللة تساوي:

$$= \frac{1}{2} \pi (3)^2 = \frac{9}{2} \pi$$



(36)

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \sec^2 x \, dx$$

$$u = \tan x \Rightarrow du = \sec^2 x \, dx$$

$$u = \tan(0) = 0 \quad \Leftarrow \quad x = 0 \quad \text{عندما}$$

$$u = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \quad \Leftarrow \quad x = \frac{\pi}{4} \quad \text{عندما}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \sec^2 x \, dx = \int_0^1 u \, du$$

$$= \left[\frac{u^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2} - 0$$

$$= \frac{1}{2}$$

(37)

بأستخدام الكسور الجزئية:

$$\int_{-2}^0 \frac{5x - 1}{x^2 + 2x - 3} dx$$

$$\frac{5x - 1}{x^2 + 2x - 3} = \frac{A}{(x - 1)} + \frac{B}{(x + 3)}$$

$$5x - 1 = A(x + 3) + B(x - 1)$$

$$\text{عوض عن } x=1 \rightarrow 4 = 4A \xrightarrow{\text{ينتج}} A = 1$$

$$\text{عوض عن } x=-3 \rightarrow -16 = -4B \xrightarrow{\text{ينتج}} B = 4$$

$$= \int_{-2}^0 \left(\frac{1}{(x - 1)} + \frac{4}{(x + 3)} \right) dx$$

$$= [\ln|x - 1|]_{-2}^0 + 4\ln|x + 3|_{-2}^0$$

$$= 3\ln 3$$

(38)

$$\int_1^e \frac{\ln^6 x}{x} dx$$

$$\int_1^e \frac{\ln^6 x}{x} dx = \int_1^e \frac{(\ln x)^6}{x} dx$$

$$u = \ln x \quad du = \frac{1}{x} dx$$

$$x \xrightarrow{=} e \quad u \xrightarrow{=\ln e} 1$$

$$x \xrightarrow{=} 1 \quad u \xrightarrow{=\ln 1} 0$$

$$\int_0^1 u^6 du$$

$$\left[\frac{u^7}{7} \right]_0^1 = \frac{1}{7}$$

(39)

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \sec^2 x \, dx =$$

نحل كتكامل غير محدد بالتجزئي
ثم وضع حدود التكامل بعد الحصول على الحل النهائي

تفاضل

نفرض أن

تكامل

$$\begin{array}{l} u = x \\ du = dx \end{array} \quad \begin{array}{l} dv = \sec^2 x \, dx \\ v = \tan x \end{array}$$

$$\begin{aligned} \int u \, dv &= u \, v - \int v \, du \\ \int x \sec^2 x \, dx &= x \tan x - \int \tan x \, dx \\ &= x \tan x + \ln|\cos x| + C \end{aligned}$$

$$\int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx$$

$$\begin{aligned} u &= \cos x \\ du &= -\sin x \, dx \\ -du &= \sin x \, dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \tan x \, dx &= \int -\frac{1}{u} \, du \\ &= -\ln|u| + C \\ &= -\ln|\cos x| + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \sec^2 x \, dx &= \left[x \tan x + \ln|\cos x| \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \left[\frac{\pi}{4} \tan \frac{\pi}{4} + \ln \left| \cos \frac{\pi}{4} \right| \right] - [(0) \tan(0) + \ln|\cos(0)|] \\ &= \left[\frac{\pi}{4} (1) + \ln \left| \frac{\sqrt{2}}{2} \right| \right] - [(0)(0) + \ln|1|] = \frac{\pi}{4} + \ln \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

(40)

$$f(x) = x^3 - 9x, \quad [-2, 1]$$

الحل: نوجد قيم x بحيث :

$$f(x) = 0$$

$$x^3 - 9x = 0$$

$$x(x^2 - 9) = 0$$

$$x(x - 3)(x + 3) = 0$$

$$x = 0$$

$$x = 3$$

$$x = -3$$

$$0 \in (-2, 1)$$

$$3 \notin (-2, 1)$$

$$-3 \notin (-2, 1)$$

$$A = \left| \int_{-2}^0 f(x) dx \right| + \left| \int_0^1 f(x) dx \right|$$

$$A = \left| \int_{-2}^0 (x^3 - 9x) dx \right| + \left| \int_0^1 (x^3 - 9x) dx \right|$$

$$= \left| \left[\frac{x^4}{4} - \frac{9}{2}x^2 \right]_{-2}^0 \right| + \left| \left[\frac{x^4}{4} - \frac{9}{2}x^2 \right]_0^1 \right|$$

$$= \left| \left[\frac{(0)^4}{4} - \frac{9}{2}(0)^2 \right] - \left[\frac{(-2)^4}{4} - \frac{9}{2}(-2)^2 \right] \right| + \left| \left[\frac{(1)^4}{4} - \frac{9}{2}(1)^2 \right] - \left[\frac{(0)^4}{4} - \frac{9}{2}(0)^2 \right] \right| = \frac{73}{4} \text{ square units}$$

(41)

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات في الفترة المبينة.

$$f(x) = \cos x, \quad [0, \pi]$$

الحل:

نلاحظ أنه في الفترة $[0, \pi]$

تتقسم المنطقة المطلوبة إلى منطقتين حيث $f(x) = 0$ عند $x = \frac{\pi}{2}$

$$A = \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx \right| + \left| \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x) dx \right|$$

فتكون المساحة المطلوبة كما يلي :

$$= \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x) dx \right| + \left| \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\cos x) dx \right|$$

$$= \left| [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} \right| + \left| (\sin x) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \right|$$

$$= \left| \left[\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right] - [\sin(0)] \right| + \left| [\sin(\pi)] - \left[\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right] \right| = 2 \text{ square units}$$

(42)

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = x^2 - 3x$ ومحور السينات.

الحل:

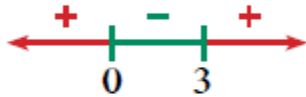
نوجد الإحداثيات السينية لنقاط تقاطع منحنى الدالة f مع محور السينات بوضع

$$f(x) = 0$$

$$x^2 - 3x = 0$$

$$x(x - 3) = 0$$

$$x = 0 \text{ أو } x = 3$$



نبحث هل $f(x) \geq 0$ أو $f(x) \leq 0$ في $[0, 3]$

$$\therefore f(x) \leq 0 \quad \forall x \in [0, 3]$$

$$A = - \int_0^3 f(x) dx$$

∴ المساحة:

$$= - \int_0^3 (x^2 - 3x) dx$$

$$= - \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 \right]_0^3$$

$$= - \left[\left(9 - \frac{27}{2} \right) - (0) \right]$$

$$= - \left(-\frac{9}{2} \right)$$

$$= \frac{9}{2} \text{ units square}$$

ملاحظه:

يمكن حل السؤال بطريقة المطلق دون الاحتياج لخطوه اختبار الداله موجبہ ولا سالبہ.

(43)

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحني: $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = -x^2 + 9$

الحل:

لإيجاد الإحداثيات السينية لنقاط تقاطع المنحنيين نضع

$$f(x) = g(x)$$

$$x^2 + 1 = -x^2 + 9$$

$$2x^2 = 8$$

$$x^2 = 4$$

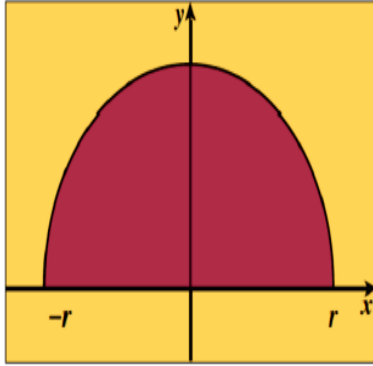
$$x = \pm 2$$

يكون التكامل من $x = -2$ إلى $x = 2$ ومساحة المنطقة هي:

$$\begin{aligned} A &= \left| \int_{-2}^2 (f(x) - g(x)) dx \right| \\ &= \left| \int_{-2}^2 (x^2 + 1 + x^2 - 9) dx \right| = \left| \int_{-2}^2 (2x^2 - 8) dx \right| \\ &= \left| \left[\frac{2x^3}{3} - 8x \right]_{-2}^2 \right| \\ &= \left| \left[\frac{2(2)^3}{3} - 8(2) \right] - \left[\frac{2(-2)^3}{3} - 8(-2) \right] \right| \\ &= \frac{64}{3} \quad (\text{وحدة مربعة}) \end{aligned}$$

(44)

باستخدام التكامل المحدد أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دوراً كاملة



شكل توضيحي

حول محور السينات والمحددة بنصف الدائرة $y = \sqrt{r^2 - x^2}$

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

الحل:

تمثل معادلة نصف دائرة مركزها $(0,0)$ وطول نصف قطرها r

المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دوراً كاملة حول محور السينات هو كرة

$$V = \pi \int_{-r}^r y^2 dx = \pi \int_{-r}^r (\sqrt{r^2 - x^2})^2 dx$$

$$= \pi \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx$$

$$= \pi \left[r^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right]_{-r}^r$$

$$= \pi \left[\left(r^2(r) - \frac{1}{3}(r)^3 \right) - \left(r^2(-r) - \frac{1}{3}(-r)^3 \right) \right]$$

$$= \frac{4}{3} \pi r^3 \text{ cubic units}$$

(45)

أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بمنحنى الدالة f :

$$f(x) = \sqrt{x-1} \text{ ومحور السينات في الفترة } [1, 5].$$

الحل:

$$V = \pi \int_1^5 (f(x))^2 dx$$

$$= \pi \int_1^5 (\sqrt{x-1})^2 dx$$

$$= \pi \int_1^5 (x-1) dx$$

$$= \pi \left[\frac{x^2}{2} - x \right]_1^5$$

$$= \pi \left(\left[\frac{(5)^2}{2} - (5) \right] - \left[\frac{(1)^2}{2} - (1) \right] \right)$$

$$= 8\pi \text{ cubic units}$$

(46)

أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بمنحني الدالتين

$$f(x) = x^2, \quad g(x) = \sqrt{x} : g$$

الحل:

المنطقة المستوية محددة بمنحني الدالتين

نجد التقاطع بوضع:

$$f(x) = g(x)$$

$$x^2 = \sqrt{x} \quad (x \geq 0)$$

بتربيع الطرفين

$$x^4 = x$$

$$x^4 - x = 0$$

$$x(x^3 - 1) = 0$$

$$x(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$$

$$x = 0, \quad x = 1$$

$$x^2 + x + 1 = 0$$

نحصل على:

وبالنسبة إلى المعادلة

نوجد المميز Δ :

$$\Delta = 1 - 4(1)(1) = -3, \quad -3 < 0$$

$\therefore$ المعادلة ليس لها حلول في $\mathbb{R}$ فيكون التكامل على $[0, 1]$

نأخذ قيمة اختيارية في $(0, 1)$ ولتكن $x = \frac{1}{4}$

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{16}, \quad g\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\therefore g(x) \geq f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [0, 1]$$

$$V = \pi \int_0^1 [(g(x))^2 - (f(x))^2] dx \quad \therefore \text{حجم المجسم الناتج عن الدوران:}$$

$$V = \pi \int_0^1 [(\sqrt{x})^2 - (x^2)^2] dx$$

$$V = \pi \int_0^1 (x - x^4) dx$$

$$= \pi \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \pi \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right) - (0) \right]$$

$$= \frac{3}{10} \pi \quad \text{units cube}$$

(47)

اوجد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بين منحنى الدالتين

$$f(x) = \frac{x^2}{2} + 1, \quad g(x) = \frac{x}{2} + 2$$

الحل: نوجد نقاط التقاطع

$$f(x) = g(x)$$

$$\frac{x^2}{2} + 1 = \frac{x}{2} + 2$$

$$\frac{x^2}{2} + 1 - \frac{x}{2} - 2 = 0$$

$$\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} - 1 = 0$$

$$x = 2, \quad x = -1$$

نأخذ نقطة اختيارية في الفترة $(-1, 2)$ و لتكن $x = 0$

$$f(0) = \frac{(0)^2}{2} + 1 = 1$$

$$g(0) = \frac{(0)}{2} + 2 = 2$$

$$g(x) \geq f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [-1, 2]$$

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-1}^2 ((g(x))^2 - (f(x))^2) dx = \pi \int_{-1}^2 \left(\left(\frac{x}{2} + 2 \right)^2 - \left(\frac{x^2}{2} + 1 \right)^2 \right) dx \\ &= \pi \int_{-1}^2 \left(\left(\frac{x^2}{4} + 2x + 4 \right) - \left(\frac{x^4}{4} + x^2 + 1 \right) \right) dx \\ &= \pi \int_{-1}^2 \left(\frac{x^2}{4} + 2x + 4 - \frac{x^4}{4} - x^2 - 1 \right) dx \\ &= \pi \int_{-1}^2 \left(-\frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{4} + 2x + 3 \right) dx \\ &= \pi \left[-\frac{x^5}{20} - \frac{x^3}{4} + x^2 + 3x \right]_{-1}^2 \\ &= \pi \left[\left(-\frac{32}{20} - 2 + 4 + 6 \right) - \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{4} + 1 - 3 \right) \right] \\ &= \frac{81}{10} \pi \text{ cubic units} \end{aligned}$$

(48)

حاله خاصة :

تمتد المنطقة المظللة من $x = -1$ إلى $x = 2$ ويتقاطعا عند النقطة $x = \frac{1}{2}$.

$$V = \pi \int_{-1}^{\frac{1}{2}} [(-x+3)^2 - (x+2)^2] dx + \pi \int_{\frac{1}{2}}^2 [(x+2)^2 - (-x+3)^2] dx = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} (5-10x) dx + \int_{\frac{1}{2}}^2 (-5+10x) dx$$

$$= [5x - 5x^2]_{-1}^{\frac{1}{2}} + [-5x + 5x^2]_{\frac{1}{2}}^2 = 22.5 \text{ unit cub}$$

(49)

أوجد طول القوس من منحنى الدالة f : $f(x) = \frac{2}{9}(9 + 3x)^{\frac{3}{2}}$ في الفترة $[2, 5]$

الحل

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \left(\frac{2}{9}\right) \left(\frac{3}{2}\right) (9 + 3x)^{\frac{1}{2}} (3) \\
 &= (9 + 3x)^{\frac{1}{2}} \\
 L &= \int_2^5 \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, dx \\
 &= \int_2^5 \sqrt{1 + 9 + 3x} \, dx = \int_2^5 \sqrt{10 + 3x} \, dx \\
 &= \int_2^5 (10 + 3x)^{\frac{1}{2}} \, dx \\
 &= \frac{1}{3} \int_2^5 3(10 + 3x)^{\frac{1}{2}} \, dx \\
 &= \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{2}{3}\right) \left[(10 + 3x)^{\frac{3}{2}}\right]_2^5 \\
 &= \left(\frac{2}{9}\right) \left[(25)^{\frac{3}{2}} - (16)^{\frac{3}{2}}\right] \\
 &= \frac{122}{9} \text{ units}
 \end{aligned}$$

(50)

أوجد طول القوس من منحنى الدالة f :

$$f(x) = 5 + 2\sqrt{x^3} \quad \text{في الفترة } \left[0, \frac{1}{3}\right]$$

الحل :

$$f(x) = 5 + 2x^{\frac{3}{2}}$$

$$f'(x) = 3x^{\frac{1}{2}}$$

$$L = \int_0^{\frac{1}{3}} \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{3}} \sqrt{1 + 9x} \, dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{3}} (1 + 9x)^{\frac{1}{2}} \, dx$$

$$= \frac{1}{9} \int_0^{\frac{1}{3}} 9 (1 + 9x)^{\frac{1}{2}} \, dx$$

$$= \frac{1}{9} \left[\frac{2}{3} (1 + 9x)^{\frac{3}{2}} \right]_0^{\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{1}{9} \times \frac{2}{3} \left[(4)^{\frac{3}{2}} - (1)^{\frac{3}{2}} \right]$$

$$\therefore L = \frac{14}{27} \text{ (وحدة طول)}$$

(51)

أوجد معادلة منحنى الدالة f الذي ميله عند أي نقطة $P(x, y)$ يساوي $3x^2 + x$ ويمر بالنقطة $(2, 2)$

الحل:

$$f'(x) = 3x^2 + x$$

$$f(x) = \int (3x^2 + x) dx$$

$$= \frac{3x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + C$$

$$= x^3 + \frac{x^2}{2} + C$$

لإيجاد قيمة الثابت C نعوض بالنقطة $(2, 2)$ في المعادلة السابقة فنجد :

$$2 = (2)^3 + \frac{(2)^2}{2} + C$$

$$2 = 8 + 2 + C$$

$$C = -8$$

معادلة منحنى الدالة f المطلوب هو :

$$f(x) = x^3 + \frac{x^2}{2} - 8$$

(52)

إذا كان ميل العمودي على منحنى الدالة f عند أي نقطة عليه (x, y) يساوي $\sqrt{5-4x}$ فأوجد معادلة المنحنى

عندما يمر بالنقطة $A(-5, 3)$

الحل : ميل العمودي $\frac{-1}{f'(x)}$

$$f'(x) \neq 0$$

$$\frac{-1}{f'(x)} = \sqrt{5-4x}$$

$$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{5-4x}}$$

$$f(x) = \int \frac{-1}{\sqrt{5-4x}} dx$$

$$= - \int (5-4x)^{-\frac{1}{2}} dx$$

$$= \frac{1}{4} \int -4(5-4x)^{-\frac{1}{2}} dx$$

$$= \frac{1}{4} \times \left[\frac{2}{1} (5-4x)^{\frac{1}{2}} + C \right]$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{5-4x} + \frac{1}{4} C$$

$$f(x) = \frac{1}{2} \sqrt{5-4x} + \frac{1}{4} C$$

تابع للحل :

لإيجاد قيمة الثابت C نعوض بالنقطة $A(-5, 3)$ في المعادلة السابقة فنجد :

$$3 = \frac{1}{2} \sqrt{5-4(-5)} + \frac{1}{4} C$$

$$3 = \frac{5}{2} + \frac{1}{4} C$$

$$C = 2$$

$$f(x) = \frac{1}{2} \sqrt{5-4x} + \frac{1}{2}$$

معادلة منحنى الدالة f المطلوب هو :

(53)

إذا كان ميل العمودي لمنحنى الدالة f عند أي نقطة عليه (x, y) هو $2x - 1$

فأوجد معادلة المنحنى علمًا بأنه يمر بالنقطة $B(1, 0)$

الحل: ميل العمودي $\frac{-1}{f'(x)}$

$$f'(x) \neq 0$$

$$\frac{-1}{f'(x)} = 2x - 1$$

$$f'(x) = \frac{-1}{2x - 1}$$

$$f(x) = \int \frac{-1}{2x - 1} dx$$

$$= \frac{-1}{2} \ln |2x - 1| + C$$

لإيجاد قيمة الثابت C نعوض بالنقطة $B(1, 0)$ في المعادلة السابقة فنجد :

$$0 = \frac{-1}{2} \ln |2(1) - 1| + C$$

$$C = 0$$

معادلة منحنى الدالة f المطلوب هو :

$$f(x) = \frac{-1}{2} \ln |2x - 1|$$

(54)

حل المعادلات التفاضلية التالية:

$$y' - 2xy = 0$$

الحل:

$$y' - 2xy = 0$$

$$\frac{dy}{dx} - 2xy = 0$$

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = 2xy$$

$$\frac{dy}{y} = 2x dx$$

فصل المتغيرات

$$\int \frac{dy}{y} = \int 2x dx$$

$$\int \frac{df(x)}{f(x)} = \ln|f(x)| + C \quad \text{كامل الطرفين}$$

$$\ln|y| = x^2 + C$$

$$|y| = e^{x^2+C} = e^{x^2} \cdot e^C$$

$$\ln y = x \Rightarrow y = e^x$$

$$y = \pm e^C \cdot e^{x^2}$$

$$y = ke^{x^2}$$

$$\pm e^C = k$$

(55)

حل المعادلة التفاضلية:

a) $\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{2dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = 2 \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|y| = 2 \ln|x| + C$$

$$y = \pm e^{2\ln|x|+C}$$

$$y = ke^{2\ln|x|}, \quad k = \pm e^C$$

b)

$$y' = -2y \text{ إذا كان } y = 3 \text{ عند } x = 0$$

كتابة المعادلة على الصورة: $y' = ay$

$$y = ke^{ax}$$

$$y = ke^{-2x}$$

$$3 = ke^0$$

$$k = 3$$

ومنه:

$$y = 3e^{-2x}$$

(56)

المعادلات التفاضلية على الصورة $y' = ay + b$ حيث $a \neq 0$, $b \neq 0$ تكون حلولها: $y = k e^{ax} - \frac{b}{a}$

a حل المعادلة: $2y' + y = 1$

b أوجد الحل الذي يحقق $y = 2$ عند $x = -1$

الحل:

اكتب المعادلة على الشكل $y' = ay + b$

a $2y' + y = 1$

$$y' = -\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}$$

$$y = k e^{-\frac{1}{2}x} + 1$$

b $k e^{\frac{1}{2}} + 1 = 2$

$$k = e^{-\frac{1}{2}}$$

$$y = e^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}x} + 1$$

$$y = e^{-\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}} + 1$$

طبّق القاعدة

عوّض x, y بقيمتهما

(57)

أوجد معادلة المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل و بؤرته $F(-4,0)$

الحل

الرأس نقطة الأصل

∴ البؤرة $F(-4,0)$ تنتمي إلى الجزء السالب من محور السينات

$p = -4$ ، معادلة الدليل : $x = 4$ (مستقيم رأسي)

محور تماثل القطع هو محور السينات (فتحة القطع لليسار)

∴ معادلة القطع المكافئ هي على الصورة $y^2 = 4 p x$

معادلة القطع المكافئ هي : $y^2 = -16 x$

(58)

أوجد البؤرة و الدليل لقطع مكافئ ، ثم إرسم شكلا تقريبا لهذا القطع في كل مما يلي :

$$y = \frac{x^2}{4} : \text{المعادلة}$$

الحل

نضع المعادلة على الصورة $x^2 = 4y$

المعادلة في الصورة $x^2 = 4py$

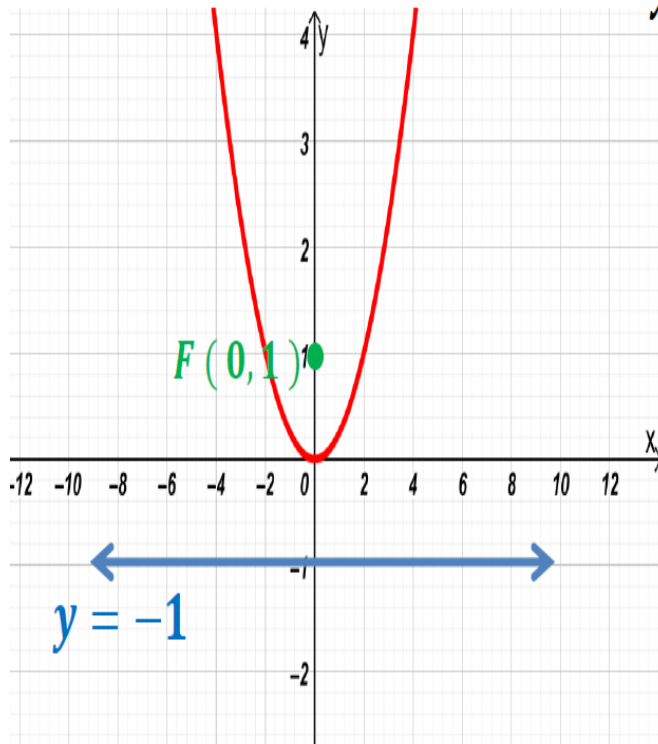
محور التماثل هو محور الصادات

$$\therefore 4p = 4 \Rightarrow p = 1$$

$\therefore$ البؤرة $F(0, p) = F(0, 1)$

معادلة الدليل :

$$y = -p \Rightarrow y = -1$$



(59)

أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل و يمر بالنقطة $A(1,2)$
و خط تماثله x -axis

الحل

رأس القطع المكافئ نقطة الأصل ، و خط تماثله x -axis
المعادلة في الصورة $y^2 = 4px$

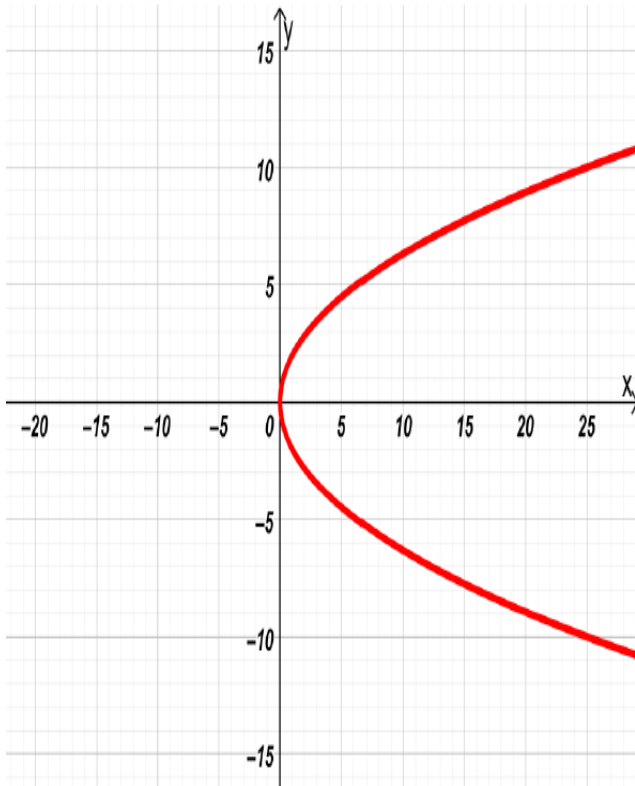
القطع المكافئ يمر بالنقطة $A(1,2)$
تحقق المعادلة أي أن :

$$(2)^2 = 4p(1)$$

$$\therefore 4 = 4p \Rightarrow p = 1$$

المعادلة هي : $y^2 = 4(1)x$

$$y^2 = 4x$$



(60)

أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل و معادلة دليله $y = 1$

الحل

معادلة الدليل $y = 1$ (مستقيم أفقي)

و الدليل متعامد مع خط التماثل

خط التماثل رأسي ($y - axis$)

معادلة القطع المكافئ هي على الصورة $x^2 = 4py$

معادلة الدليل هي على الصورة $y = -p$

$$y = 1 \Rightarrow p = -1$$

$$x^2 = 4py \quad \text{المعادلة}$$

$$x^2 = 4(-1)y$$

$$x^2 = -4y$$

(61)

إذا كانت: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ معادلة قطع ناقص فأوجد :

(a) رأسي القطع وطرفي المحور الأصغر.

(b) البؤرتين.

(c) معادلتا دليلي القطع.

(d) طول كل من المحورين ثم ارسم شكلا تقريبا للقطع.

الحل:

(a) معادلة القطع الناقص هي:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$a^2 = 9 \Rightarrow a = 3$$

ومن معادلة القطع الناقص نجد أن :

$$b^2 = 4 \Rightarrow b = 2$$

والمحور الأكبر ينطبق علي محور الصادات

رأسا القطع الناقص هما :

$$A_1(0, -3), A_2(0, 3)$$

طرفا المحور الأصغر هما :

$$B_1(-2, 0), B_2(2, 0)$$

$$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow c^2 = 9 - 4 = 5$$

(b) البؤرتين:

$$c = \sqrt{5}$$

$$F_1(0, -\sqrt{5}), F_2(0, \sqrt{5})$$

(c) معادلة الدليلين:

$$y = \frac{a^2}{c}, \quad y = -\frac{a^2}{c}$$

$$y = \frac{-9}{\sqrt{5}}$$

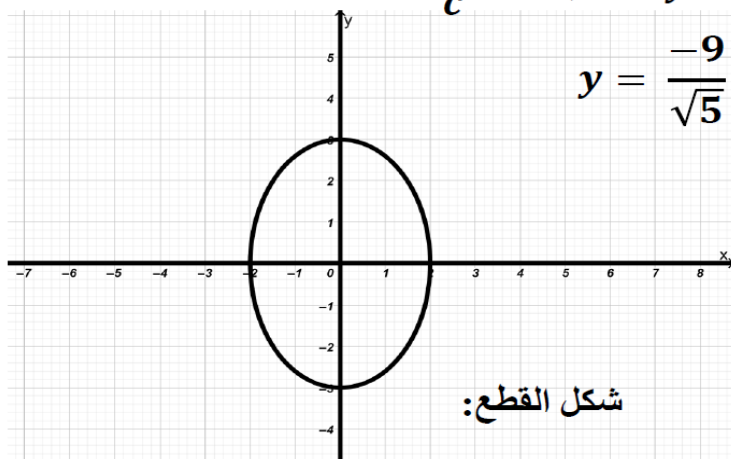
$$y = \frac{9}{\sqrt{5}}$$

(d) طول المحور الأكبر:

$$2a = 6$$

طول المحور الأصغر:

$$2b = 4$$



(62)

أوجد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه $F_1(-2,0), F_2(2,0)$ وطول محوره الأكبر 6 . ثم ارسم شكلا تقريبا لهذا القطع.

الحل:

تقع البؤرتان على محور السينات فتكون معادلة القطع على الصورة:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{وتكون } c=2$$

∴ طول المحور الأكبر = 6

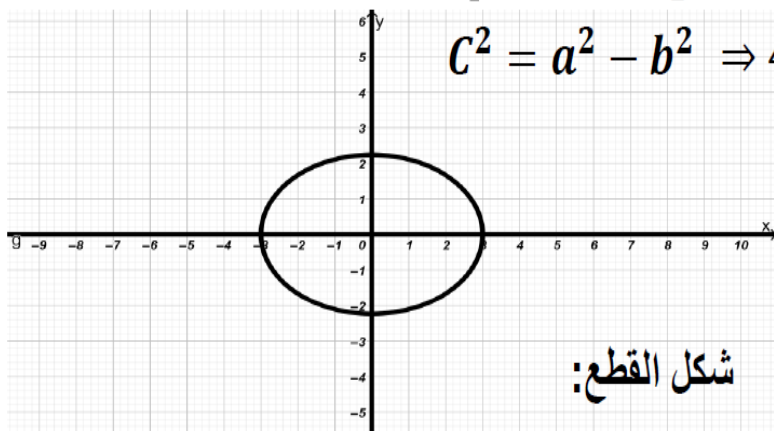
$$\therefore 2a = 6 \Rightarrow a = 3 \Rightarrow a^2 = 9$$

∴ طرفا المحور الأكبر هما : $A_1(-3, 0), A_2(3, 0)$

$$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow 4 = 9 - b^2 \Rightarrow b^2 = 5$$

∴ معادلة القطع الناقص هي:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$$



شكل القطع:

(63)

أوجد البؤرتين والرأسين وطول المحور الاكبر للقطع الناقص الذي
معادلته: $x^2 + 4y^2 = 16$

$$x^2 + 4y^2 = 16 \Rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{4y^2}{16} = \frac{16}{16} \Rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1 \quad \text{الحل:}$$

$$a^2 = 16 \Rightarrow a = 4, \quad b^2 = 4 \Rightarrow b = 2$$

$$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow c^2 = 16 - 4$$

$$c^2 = 12 \Rightarrow c = \sqrt{12} \Rightarrow c = 2\sqrt{3}$$

تقع البؤرتان على محور السينات : $F_1(-2\sqrt{3}, 0), F_2(2\sqrt{3}, 0)$

تقع الرأسان على محور السينات : $A_1(-4, 0), A_2(4, 0)$

طول المحور الاكبر: $2a = 2 \times 4 \Rightarrow a = 8$

(64)

اكتب معادلة القطع الناقص الذي فيه:

$V_1F_1 + V_1F_2 = 10$ ، حيث إن V_1 هو نقطة على القطع الناقص، F_1 و F_2 هما البؤرتين، علمًا أن $F_1(3, 0)$ ، $F_2(-3, 0)$.

الحل: تقع البؤرتان على محور السينات فتكون المعادلة على الصورة: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ وتكون $c=3$

$$V_1F_1 + V_2F_2 = 10 \Rightarrow 2a = 10 \Rightarrow a = 5 \Rightarrow a^2 = 25$$

$$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow 9 = 25 - b^2 \Rightarrow b^2 = 16$$

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1 \text{ :معادلة القطع الناقص هي:}$$

(65)

إذا كانت: $9y^2 - 25x^2 = 225$ معادلة قطع زائد فأوجد :

- ١- رأسي القطع الزائد.
- ٢- البؤرتين.
- ٣- معادلتا دليلي القطع.
- ٤- طول كل من المحورين
- ٥- معادلة كلا من الخطين التقاربين ثم ارسم شكلا تخطيطيا للقطع.

الحل:

$$9y^2 - 25x^2 = 225 \xrightarrow{\div 225} \frac{9y^2}{225} - \frac{25x^2}{225} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{9} = 1$$

ومن معادلة القطع الزائد نجد أن :

$$a^2 = 25 \Rightarrow a = 5, \quad b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 25 + 9 = 34 \Rightarrow c = \sqrt{34}$$

والمحور القاطع ينطبق علي محور الصادات

(1) رأسا القطع الزائد هما : $A_1(0, -5), A_2(0, 5)$

(2) البؤرتين: $F_1(0, -\sqrt{34}), F_2(0, \sqrt{34})$

(3) معادلتا الدليلين:

$$y = \frac{a^2}{c} \quad , \quad y = -\frac{a^2}{c} \Rightarrow y = \frac{-25}{\sqrt{34}} \quad , \quad y = \frac{25}{\sqrt{34}}$$

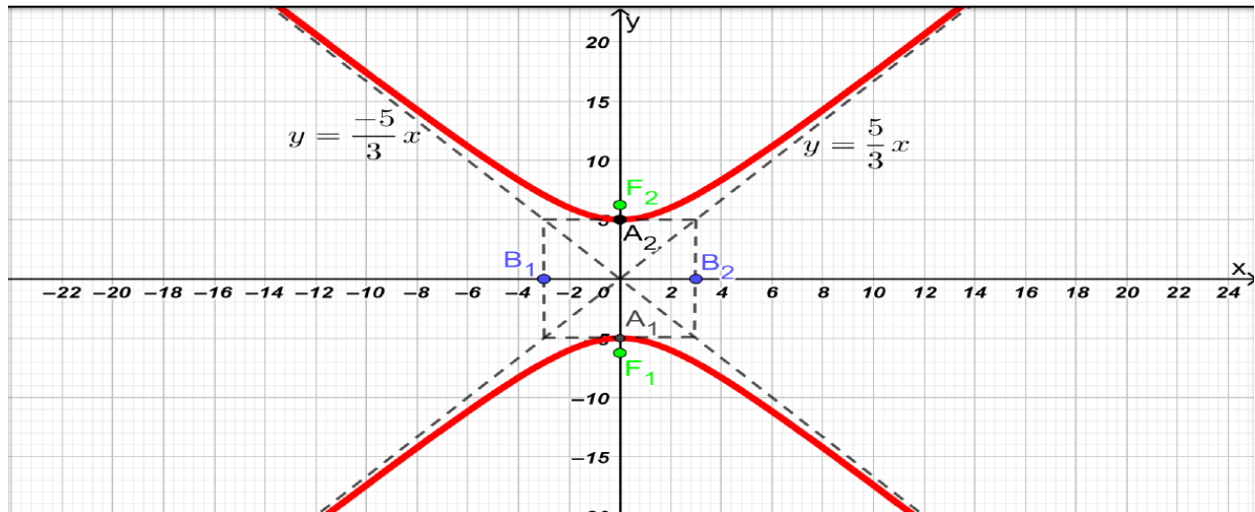
(4) طول المحور القاطع يساوي $2a$:

$$2a = 2 \times 5 = 10$$

طول المحور المرافق يساوي $2b$:

$$2b = 2 \times 3 = 6$$

(5) معادلتا كل من الخطين المقاربين :

$$y = \pm \frac{a}{b}x \Rightarrow y = \pm \frac{5}{3}x$$


(66)

أوجد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه $F_1(-4,0), F_2(4,0)$ ورأساه $A_1(-2,0), A_2(2,0)$
ثم أوجد معادلة كل من خطيه المقاربين وارسم شكلا تقريبا لهذا القطع.

الحل:

تقع البؤرتان على محور السينات فتكون المعادلة على الصورة: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
احدي البؤرتين $F_2(4,0)$ ومنها تكون $C = 4$

احدي الرأسين $A_2(2,0)$ ومنها تكون $a = 2$

ولكن

$$C^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 4^2 = 2^2 + b^2$$

$$b^2 = 16 - 4 = 12 \Rightarrow b = 2\sqrt{3}$$

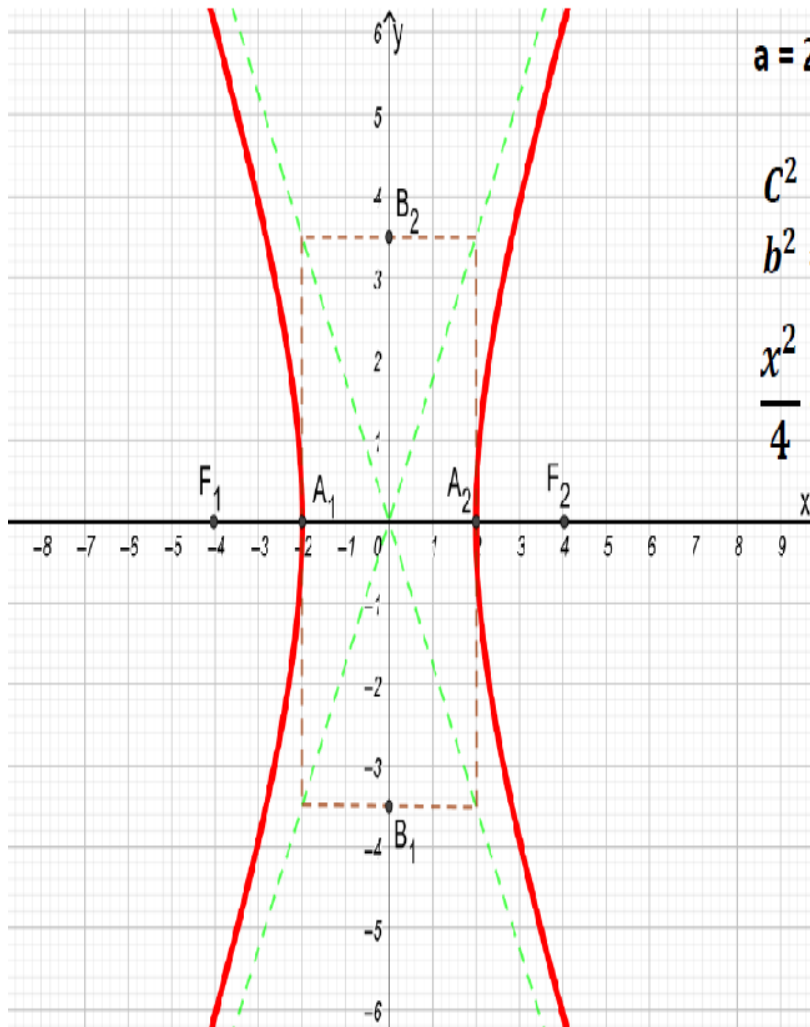
معادلة القطع الزائد هي: $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$

معادلة كل من الخطين المقاربين :

$$y = \pm \frac{b}{a}x$$

$$y = \pm \frac{\sqrt{12}}{2}x \Rightarrow y = \pm \frac{2\sqrt{3}}{2}$$

$$y = \pm \sqrt{3}$$



(67)

أوجد معادلة القطع الزائد الذي أحد رأسيه $(0, \frac{5}{4})$ ويمر بالنقطة $(-\sqrt{3}, -\frac{5}{2})$

∴ رأس القطع $(0, \frac{5}{4})$ ∴ رأس القطع على محور الصادات

$$a = \frac{5}{4} \Rightarrow a^2 = \frac{25}{16}$$

ومعادلة القطع هي $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ وبالتعويض

$$\frac{16y^2}{25} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

للقطع $(-\sqrt{3}, -\frac{5}{2}) \in$

$$\therefore \frac{16 \times \frac{25}{4}}{25} - \frac{3}{b^2} = 1 \Rightarrow 4 - 1 = \frac{3}{b^2} \Rightarrow b^2 = 1$$

$$\therefore \text{معادلة القطع الزائد} \quad \frac{16y^2}{25} - \frac{x^2}{1} = 1$$

(68)

أوجد معادلة القطع الزائد الذي مركزه $(0, 0)$ وإحدى بؤرتيه $F(0, \sqrt{34})$ ومعادلة أحد خطيه المقارين هي: $y = \frac{3}{5}x$
الحل:

∴ إحدى البؤرتين $F(0, \sqrt{34})$

∴ المحور القاطع ينطبق على محور الصادات ومعادلته: $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

$$\therefore c^2 = a^2 + b^2$$

$$\therefore 34 = a^2 + b^2 \quad (1)$$

معادلة المقارب: $y = \frac{a}{b}x$ حيث من المعطى

$$\therefore \frac{3}{5} = \frac{a}{b}$$

$$\therefore a = \frac{3b}{5}$$

$$34 = \left(\frac{3b}{5}\right)^2 + b^2 \quad \text{بالتعويض في المعادلة (1):}$$

$$34 = \frac{9b^2}{25} + b^2$$

$$850 = 9b^2 + 25b^2$$

$$b^2 = \frac{850}{34}$$

$$b^2 = 25 \quad \Rightarrow \quad b = 5$$

$$a = \frac{3b}{5} \quad \text{لإيجاد قيمة } a \text{ نستخدم:}$$

$$a = \frac{3 \times 5}{5} = 3$$

$$\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{25} = 1 \quad \text{ومعادلة القطع الزائد هي:}$$

(69)

أوجد الاختلاف المركزي للقطع الذي معادلته

$$x^2 - 25y^2 = 1$$

الحل :

$$\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{\frac{1}{25}} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{بالمقارنة قطع زائد معادلته:}$$

$$a^2 = 1 \rightarrow a = 1$$

$$b^2 = \frac{1}{25} \rightarrow b = \frac{1}{5}$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c^2 = 1 + \frac{1}{25}$$

$$c^2 = \frac{26}{25}$$

$$c = \frac{\sqrt{26}}{5}$$

$$e = \frac{c}{a}$$

الاختلاف المركزي :

$$e = \frac{\frac{\sqrt{26}}{5}}{1}$$

$$e = \frac{\sqrt{26}}{5}$$

(70)

حدد نوع القطع في كل مما يلي ثم أوجد معادلته.

اختلافه المركزي ($e = 2$) ومعادلة أحد دليبيه: $x = 1$

$$\therefore e = 2, 2 > 1$$

∴ القطع هو قطع زائد

∴ معادلة أحد دليبيه $x = 1$ ∴ المحور القاطع (الأساسي) ينطبق على محور السينات ومركزه $(0, 0)$

معادلة الدليل هي:

$$x = \frac{a^2}{c}$$

$$1 = \frac{a^2}{c}$$

$$c = a^2 \quad (1)$$

$$\therefore e = \frac{c}{a}$$

$$\therefore 2 = \frac{c}{a}$$

$$c = 2a \quad (2)$$

بحل المعادلتين (1) , (2)

$$a^2 = 2a$$

$$a(a - 2) = 0$$

قيمة مقبولة $a = 2$ أو مرفوضة $a = 0$

$$\therefore e = a = 2$$

$$c = (2)^2 = 4$$

$$\therefore c^2 = a^2 + b^2$$

$$\therefore c^2 = a^2 + b^2$$

$$16 = 4 + b^2 \implies b^2 = 12$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

∴ معادلة القطع هي:

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$$

(71)

أوجد طول المحور الأكبر للقطع الناقص الذي اختلافه المركزي $(e = \frac{\sqrt{5}}{3})$ وطول محوره الأصغر 4 وحدات.
الحل:

$$\therefore e = \frac{c}{a}$$

$$\therefore \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$c = \frac{a\sqrt{5}}{3}$$

أي:

$$2b = 4$$

طول المحور الأصغر 4 أي

$$b = 2$$

في القطع الناقص:

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$\frac{5a^2}{9} = a^2 - 4$$

$$a^2 = 4 + \frac{5a^2}{9}$$

$$9a^2 = 36 + 5a^2$$

$$4a^2 = 36$$

$$a^2 = 9$$

$$a = 3$$

$$2a = 2(3) = 6$$

طول المحور الأكبر = 6 وحدات.

(72)

عند رمي حجر نرد مرة واحدة ، إذا كان المتغير العشوائي X يعبر عن :
 ((مربع العدد الظاهر مطروحاً منه 1 عندما يكون العدد الظاهر أصغر من 4 ، و-2 لغير ذلك))
 فأوجد :

- (1) فضاء العينة (S) وعدد عناصر $n(s)$
- (2) مدى المتغير العشوائي X
- (3) احتمال وقوع كل عنصر من عناصر مدى المتغير العشوائي X
- (4) دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X

الحل :

- (1) فضاء العينة : $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
 ، عدد عناصر فضاء العينة (S) : $n(s) = 6$

عناصر مدى المتغير العشوائي	عناصر فضاء العينة
0	1
3	2
8	3
-2	4
-2	5
-2	6

(2)

مدى المتغير العشوائي: $X = \{-2, 0, 3, 8\}$

(3)

$$P(X = -2) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} , P(X = 0) = \frac{1}{6}$$

$$P(X = 3) = \frac{1}{6} , P(X = 8) = \frac{1}{6}$$

(4) دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X :

x	-2	0	3	8
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

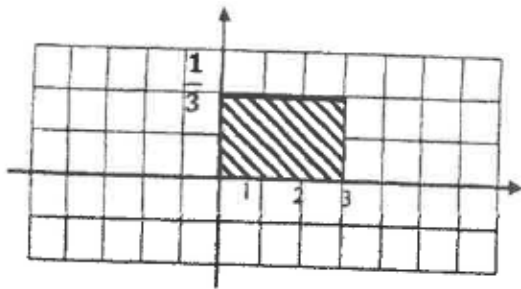
(73)

لتكن الدالة f :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & : 0 \leq x \leq 3 \\ 0 & : \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

- (a) اثبت أن f هي دالة كثافة احتمال
 (b) اثبت أن f تتبع التوزيع الاحتمالي المنتظم
 (c) أوجد التوقع والتباين للدالة f

الحل :

نرسم بيان الدالة f :

- (1) المساحة تحت المنحنى من الشكل هي
 مساحة المنطقة المستطيلة = الطول $\times$ العرض
 $= 3 \times \frac{1}{3} = 1$

∴ الدالة f هي دالة كثافة احتمال

- (2) لإثبات أن الدالة تتبع التوزيع الاحتمالي المنتظم يجب أن تكون الدالة على الصورة :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & : a \leq x \leq b \\ 0 & : \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

$$\therefore a = 0, b = 3 \rightarrow b - a = 3$$

$$\therefore \frac{1}{b-a} = \frac{1}{3} \rightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & : 0 \leq x \leq 3 \\ 0 & : \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

∴ الدالة f هي دالة تتبع التوزيع الاحتمالي المنتظم

$$(3) \text{ التوقع : } \mu = \frac{a+b}{2} = \frac{0+3}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(3-0)^2}{12} = \frac{3}{4} \text{ : التباين}$$

(74)

إذا كان X متغيرًا عشوائيًا متصلًا ودالة كثافة الاحتمال له هي :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{9}x & : 0 \leq x \leq 3 \\ 0 & : \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

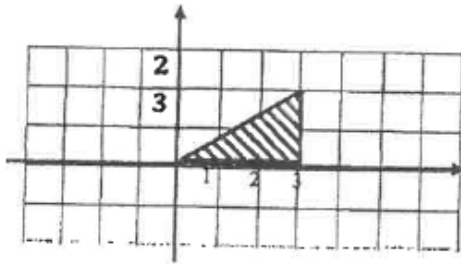
أوجد :

1) $p(0 < X \leq 3)$

2) $p(X \geq 2)$

3) $P(X = 1)$

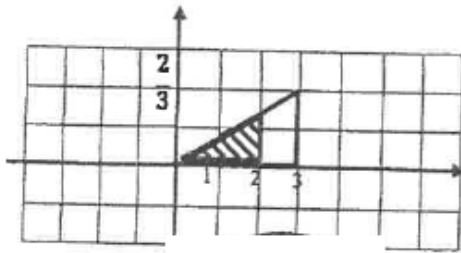
الحل :

نرسم بيان الدالة f :

(1) مساحة المنطقة المظللة :

$$p(0 < X \leq 3) = \frac{1}{2} \times 3 \times \frac{2}{3}$$

$$= 1$$



(2) مساحة المنطقة غير المظللة من المثلث :

$$p(X \geq 2) = 1 - p(X < 2)$$

$$= 1 - \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{4}{9}$$

$$= \frac{5}{9}$$

$$p(X = 2) = 0$$

(3)

(75)

يبين الجدول التالي دالة التوزيع الإحتمالي f للمتغير العشوائي المتقطع X

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	0.2	0.1	0.3	0.1	0.3

أوجد :

(1) التوقع μ (2) التباين σ^2 (3) الإنحراف المعياري σ

الحل

(1) التوقع (μ) :

$$\mu = \sum x_i f(x_i)$$

$$\begin{aligned}\mu &= (1)(0.2) + (2)(0.1) + (3)(0.3) + (4)(0.1) + (5)(0.3) \\ &= 0.2 + 0.2 + 0.9 + 0.4 + 1.5 \\ &= 3.2\end{aligned}$$

(2) التباين (σ^2) :

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \sum (x_i)^2 f(x_i) - \mu^2 \\ &= (1)^2(0.2) + (2)^2(0.1) + (3)^2(0.3) + (4)^2(0.1) + (5)^2(0.3) \\ &\quad - (3.2)^2 \\ &= 12.4 - 10.24 \\ &= 2.16\end{aligned}$$

(3) الإنحراف المعياري (σ) :

$$\begin{aligned}\sigma &= \sqrt{\sigma^2} \\ &= \sqrt{2.16} \approx 1.47\end{aligned}$$

(76)

عند إلقاء قطعة نقود ثلاث مرات متتالية، إذا كان المتغير العشوائي X يعبر عن «عدد الكتابات».

فأوجد ما يلي:

- a فضاء العينة (S) وعدد عناصره $n(S)$.
- b مدى المتغير العشوائي X .
- c احتمال كل عنصر من عناصر مدى المتغير العشوائي X .
- d دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X .

الحل:

a فضاء العينة:

$$S = \{(H, H, H), (H, H, T), (H, T, H), (T, H, H), (H, T, T), (T, H, T), (T, T, H), (T, T, T)\}$$

$$n(S) = 8$$

b

عناصر فضاء العينة S	عدد الكتابات في كل عنصر
(H, H, H)	0
(H, H, T)	1
(H, T, H)	1
(T, H, H)	1
(H, T, T)	2
(T, H, T)	2
(T, T, H)	2
(T, T, T)	3

∴ مدى المتغير العشوائي: $X = \{0, 1, 2, 3\}$

c

$$P(X = 0) = \frac{1}{8}$$

$$P(X = 1) = \frac{3}{8}$$

$$P(X = 2) = \frac{3}{8}$$

$$P(X = 3) = \frac{1}{8}$$

d دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X :

x	0	1	2	3
$f(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

(77)

الجدول التالي يبين دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي المتقطع X .

x	3	4	5
$f(x)$	0.5	0.3	0.2

إذا كانت F دالة التوزيع التراكمي للمتغير العشوائي X .

فأوجد: $F(2)$, $F(3)$, $F(4)$, $F(4.5)$, $F(5)$, $F(7)$

الحل:

$$F(2) = P(X \leq 2) = 0$$

$$\begin{aligned} F(3) &= P(X \leq 3) = P(X < 3) + P(X = 3) \\ &= 0 + 0.5 \\ &= 0.5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(4) &= P(X \leq 4) \\ &= P(X < 4) + P(X = 4) \\ &= P(3) + P(4) \\ &= 0.5 + 0.3 \\ &= 0.8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(4.5) &= P(X \leq 4.5) \\ &= P(X < 4.5) + P(X = 4.5) \\ &= P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 4.5) \\ &= 0.5 + 0.3 + 0 \\ &= 0.8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(5) &= P(X \leq 5) \\ &= P(X < 5) + P(X = 5) \\ &= P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) \\ &= 0.5 + 0.3 + 0.2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(7) &= P(X \leq 7) \\ &= P(X < 7) + P(X = 7) \\ &= P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 7) \\ &= 0.5 + 0.3 + 0.2 + 0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

(78)

الجدول التالي يبين بعض قيم دالة التوزيع التراكمي F للمتغير العشوائي المتقطع X .

x	1	2	3	5
$F(x)$	0.15	0.2	0.6	1

أوجد:

- a $P(1 < X \leq 3)$
- b $P(2 < X \leq 5)$
- c $P(X > 2)$

الحل:

- a
$$\begin{aligned} P(1 < X \leq 3) &= F(3) - F(1) \\ &= 0.6 - 0.15 \\ &= 0.45 \end{aligned}$$
- b
$$\begin{aligned} P(2 < X \leq 5) &= F(5) - F(2) \\ &= 1 - 0.2 \\ &= 0.8 \end{aligned}$$
- c
$$\begin{aligned} P(X > 2) &= 1 - P(X \leq 2) \\ &= 1 - F(2) \\ &= 1 - 0.2 \\ &= 0.8 \end{aligned}$$

(79)إذا كان z هو التوزيع الطبيعي المعياري للمتغير العشوائي X فأوجد:

a $P(z \leq -0.12)$

b $P(-3.2 \leq z \leq -0.1)$

c $P(-5.26 \leq z \leq 0.69)$

(a) $P(z \leq -0.12) = 0.45224$

(b) $P(-3.2 \leq z \leq -0.1)$

$$= P(z \leq -0.1) - P(z \leq -3.2)$$

$$= 0.46017 - 0.00069$$

$$= 0.45948$$

(c) $P(-5.26 \leq z \leq 0.69)$

$$= P(z \leq 0.69) - P(z \leq -5.26)$$

$$= 0.75490 - 0$$

$$= 0.7549$$

(80)**حالة خاصة :**

يمثل المتغير X درجات الطلاب في مادة الرياضيات. إذا كان توزيع هذه الدرجات يتبع التوزيع الطبيعي الذي وسطه $\mu = 40$ وانحرافه المعياري $\sigma = 8$ فأوجد:

(a) $P(30 < X < 65)$

(b) $P(X \geq 45)$

$$(a) \quad x_1 = 30 \quad \therefore \quad z_1 = \frac{x_1 - \mu}{\sigma} = \frac{30 - 40}{8} = -\frac{5}{4} = -1.25$$

$$x_2 = 65 \quad \therefore \quad z_2 = \frac{x_2 - \mu}{\sigma} = \frac{65 - 40}{8} = \frac{25}{8} = 3.125$$

$$\begin{aligned} P(30 < X < 65) &= P(-1.25 < z < 3.125) = P(z < 3.125) - P(z < -1.25) \\ &= \frac{0.99910 + 0.99913}{2} - 0.10565 = 0.893465 \end{aligned}$$

$$(b) \quad X = 45 \quad \therefore \quad z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{45 - 40}{8} = \frac{5}{8} = 0.625$$

$$\begin{aligned} P(X \geq 45) &= 1 - P(X < 45) = 1 - P(z < 0.625) = 1 - \frac{0.73237 + 0.73565}{2} \\ &= 1 - 0.73401 = 0.26599 \end{aligned}$$