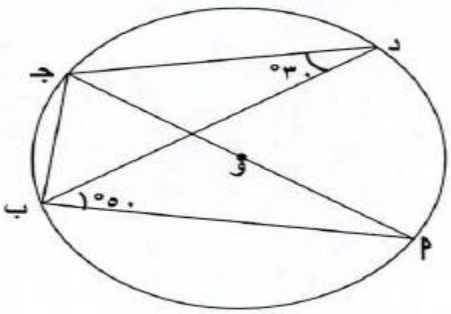
نماذج أجابة توقعات نصار فاينال عاشر

عمل / أ . أحمد نصار

((مذكره مجانية ... المرجع: الكتاب المدرسى وكراسة التمارين وزارة التربية والتعليم الكويتية))

(1)

في الشكل المقابل دائرة مركزها و ، أجـ قطر فيها ، إذا كان ق (جـ د̂ ب) = ٣٠°
ق (أ ب̂ د) = ٥٠° . فأوجد كلا من :



١) ق (جـ أ̂ ب)

٢) ق (أ ب̂ جـ)

٣) ق (أ⌒د)

الحل :

ق (جـ أ̂ ب) = ق (جـ د̂ ب) = ٣٠°

(زاويتان محيطيتان مشتركتان في نفس القوس)

ق (أ ب̂ جـ) = ٩٠°

(زاوية محيطية مرسومه على قطر الدائرة)

ق (أ⌒د) = ٢ × ق (أ ب̂ د)

= ٢ × ٥٠°

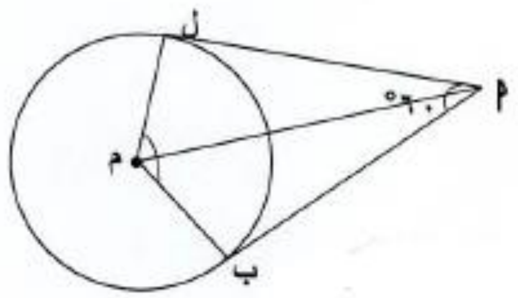
= ١٠٠°

(قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس القوس المحصور بين ضلعيها)

(2)

في الشكل المقابل : دائرة مركزها م ، $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أل}}$ مماسان للدائرة من النقطة أ ،

ق (ل أ̂ ب)= ٦٠° ، أوجد :



١) ق (ل م̂ ب)

٢) ق (ل أ̂ م)

الحل :

∵ $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ مماس ، $\overline{\text{مب}}$ نصف قطر التماس

∴ $\overline{\text{أب}} \perp \overline{\text{مب}}$

∴ ق(أ ب̂ م) = ٩٠°

∵ $\overleftrightarrow{\text{أل}}$ مماس ، $\overline{\text{مل}}$ نصف قطر التماس

∴ $\overline{\text{أل}} \perp \overline{\text{مل}}$

∴ ق(أ ل̂ م) = ٩٠°

∵ ل أ ب م شكل رباعي

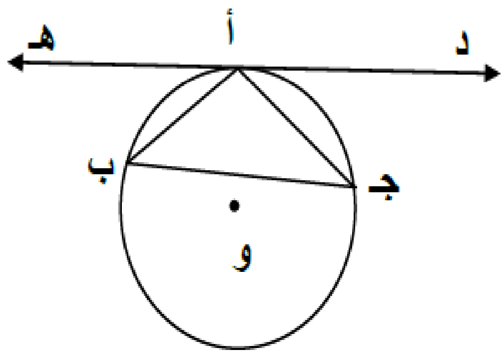
∵ مجموع قياسات الشكل الرباعي = ٣٦٠°

∴ ق (ل م̂ ب) = ٣٦٠° - (٦٠° + ٩٠° + ٩٠°)
= ١٢٠°

∵ $\overrightarrow{\text{أم}}$ منصف (ل أ̂ ب) (نتيجة)

∴ (ل أ̂ م) = ٣٠°

(3)



في الشكل المقابل إذا كان لدينا:

د هـ مماس للدائرة عند النقطة أ

المثلث أ ب جـ متطابق الضلعين (أ ب = أ جـ)

اثبت أن : د هـ // ب جـ

الإجابة

المثلث أ ب جـ متطابق الضلعين حيث أ ب = أ جـ

∴ ق (أ ب جـ) = ق (أ جـ ب)   (١)

∵ ق (هـ أ ب) = ق (أ جـ ب)   (٢)   مماسيه ومحيطية مشتركة معها في نفس القوس

من ١ ، ٢ نجد أن

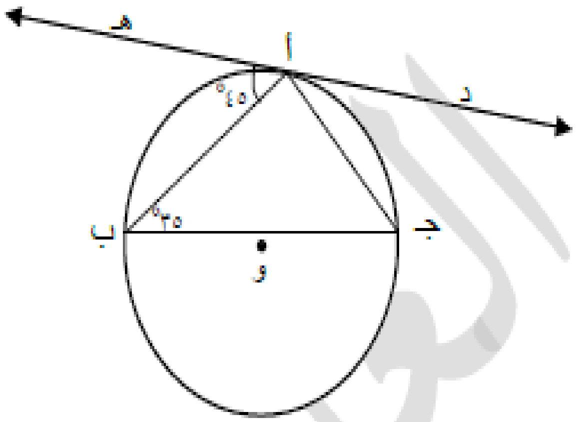
ق (هـ أ ب) = ق (أ ب جـ)   وهما في وضع تبادل

∴ د هـ // ب جـ

(4)

في الشكل المقابل $\overleftrightarrow{\text{حـ هـ}}$ مماساً للدائرة عند م، ق(م بَ حـ) = ٣٥°، ق(هـ مَ ب) = ٤٥°

أوجد مع ذكر السبب:



١- ق(حـ مَ ب)

٢- ق($\overset{\frown}{\text{م ب}}$)

٣- ق($\overset{\frown}{\text{م حـ ب}}$)

الحل:

ق(م حَـ ب) = ق(هـ مَ ب) = ٤٥° (نظرية)

∵ مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠°

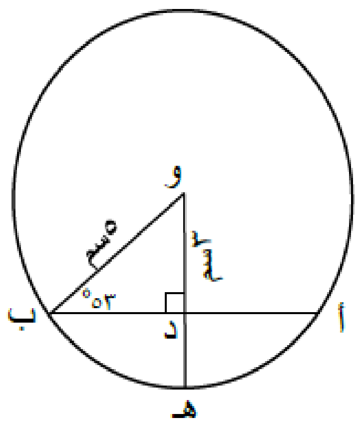
∴ ق(حـ مَ ب) = ١٨٠° – (٤٥° + ٣٥°) = ١٠٠°

ق($\overset{\frown}{\text{م ب}}$) = ٢ × ق(م حَـ ب) (نظرية)

= ٢ × ٤٥° = ٩٠°

ق($\overset{\frown}{\text{م حـ ب}}$) = ٣٦٠° – ٩٠° = ٢٧٠° (قياس قوس الدائرة ٣٦٠°)

(5)



في الشكل المقابل حيث ق(ٱ بٓ و) = ٥٣° أوجد:

١- ٱ ب

٢- ق(ب⌒هـ)

الحل:

و د ⊥ ٱ ب

∴ ق(و دٓ ب) = ٩٠° (نظرية)

(د ب)^2 = (و ب)^2 – (و د)^2

د ب = $\sqrt{(٥)^2 - (٣)^2}$

د ب = ٤ سم

∵ و د ⊥ ٱ ب وينصف (نظرية)

∴ ٱ ب = ٤ + ٤ = ٨ سم

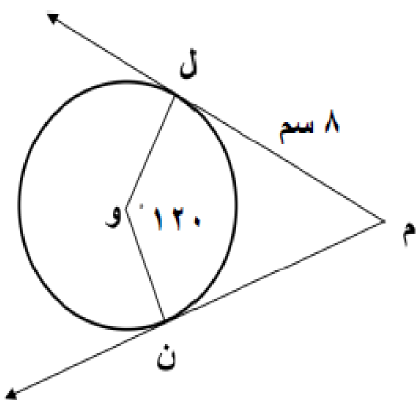
∵ مجموع قياس زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠°

ق(د وٓ ب) = ١٨٠° – (٩٠° + ٥٣°)

= ١٨٠° – ١٤٣° = ٣٧°

ق(ب⌒هـ) = ق(د وٓ ب) = ٣٧° (نظرية)

(6)



في الشكل المقابل $\overleftarrow{\text{م ل}}$ ، $\overleftarrow{\text{م ن}}$ مماسان للدائرة التي مركزها و

ق(ل وَ ن) ١٢٠° ، م ل = ٨ سم .

أوجد مع ذكر السبب:

١- ق(ل مَ ن) .

٢- م ن .

الإجابة

١) $\overleftarrow{\text{م ل}}$ مماس ، $\overline{\text{و ل}}$ نصف قطر التماس

ق(م لَ و) = ٩٠°

$\overleftarrow{\text{م ن}}$ مماس ، $\overline{\text{و ن}}$ نصف قطر التماس

ق(م نَ و) = ٩٠°

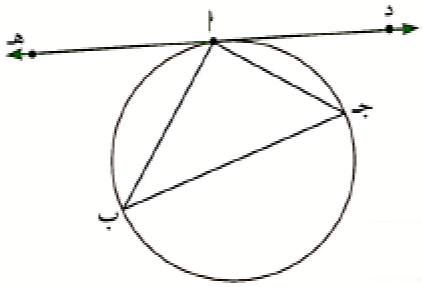
ل م ن و شكل رباعي

ق(ل مَ ن) = ٣٦٠° – (٩٠° + ٩٠° + ١٢٠°) = ٦٠°

٢) م ن = م ل (القطعتان المماستان لدائرة والمرسومتان من نقطة خارجها متطابقتان)

= ٨ سم

(7)



(أ) في الشكل المقابل. $\overleftrightarrow{\text{د هـ}}$ مماس للدائرة عند أ ،

ق(د $\hat{\text{أ}}$ جـ) = ٤٠° ، ق(هـ $\hat{\text{أ}}$ ب) = ٥٠°

(١) أوجد قياسات زوايا المثلث أ ب جـ .

(٢) أثبت أن $\overline{\text{جـ ب}}$ قطر في الدائرة .

الإجابة

(١) $\overleftrightarrow{\text{د هـ}}$ مماس للدائرة عند أ

ق($\hat{\text{جـ}}$) = ق(هـ $\hat{\text{أ}}$ ب) = ٥٠°

ق($\hat{\text{ب}}$) = ق(د $\hat{\text{أ}}$ جـ) = ٤٠°

أ ب جـ مثلث مجموع قياسات زواياه = ١٨٠°

ق(ب $\hat{\text{أ}}$ جـ) = ١٨٠° – (٤٠° + ٥٠°) = ٩٠°

(٢) ق(ب $\hat{\text{أ}}$ جـ) = ٩٠°

ب $\hat{\text{أ}}$ جـ زاوية محيطية

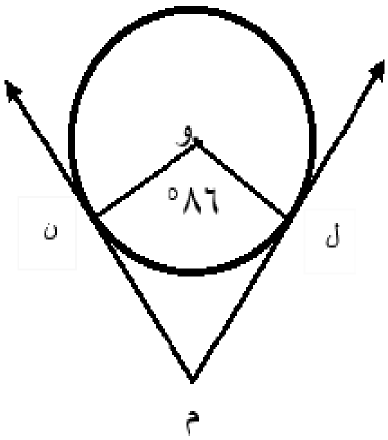
ب $\hat{\text{أ}}$ جـ تحصر نصف الدائرة

$\overline{\text{جـ ب}}$ قطر في الدائرة

(8)

في الشكل المقابل إذا كان م ل , م ن مماسان للدائرة التى مركزها و

ل م = ٤ سم , ول = ٣ سم .



أوجد :

١) ق (م ل^ و)

٢) ق (ل م^ ن)

٣) محيط الشكل م ل و ن

الحل:

١) ∵ م ل مماس للدائرة عند النقطة ل , ول نصف قطر التماس

∴ ق(م ل^ و) = ٩٠° (نظرية)

∵ م ن مماس للدائرة عند النقطة ن , ون نصف قطر التماس

∴ ق (م ن^ و) = ٩٠° (نظرية)

٢) ∵ الشكل ل م ن و شكل رباعي

∴ ق(ل م^ ن) = ٣٦٠° - (٩٠° + ٩٠° + ٨٦°)

∴ ق(ل م^ ن) = ٩٤°

٣) محيط الشكل م ل و ن = مجموع أطوال الاضلاع

∵ م ل ، م ن قطعتان مماستان للدائرة المرسومة من نقطة خارج الدائرة (م)

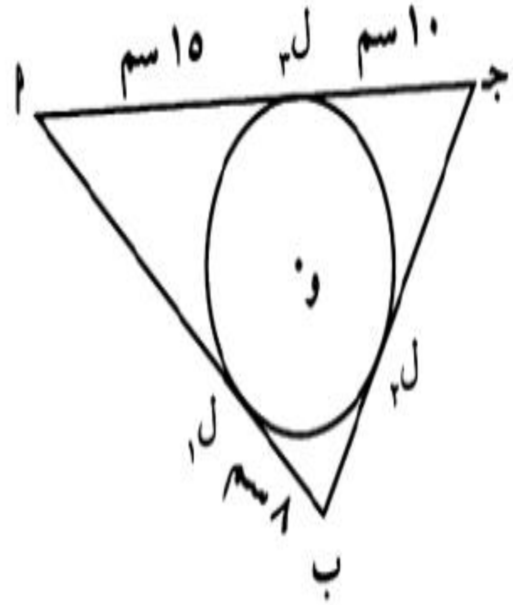
∵ م ل = م ن (نظرية)

∴ م ل = م ن = ٤ سم

و ل = و ن = ٣ سم (أنصاف أقطار في الدائرة)

∴ محيط الشكل = ٣ سم + ٣سم + ٤سم +٤ سم= ١٤ سم

(9)



في الشكل المقابل أوجد محيط المثلث أ ب جـ

أ ل$_{1}$ = أ ل$_{3}$ = ١٥ سم (نظرية)

ب ل$_{1}$ = ب ل$_{2}$ = ٨ سم (نظرية)

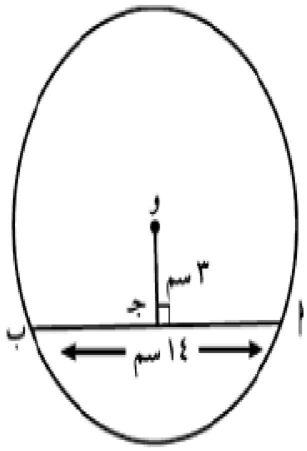
جـ ل$_{2}$ = جـ ل$_{3}$ = ١٠ سم (نظرية)

محيط المثلث أ ب جـ = أ ل$_{1}$ + ل$_{1}$ ب + ب ل$_{2}$ + ل$_{2}$ جـ + جـ ل$_{3}$ + ل$_{3}$ أ

١٥ + ٨ + ٨ + ١٠ + ١٠ + ١٥ = ٦٥ سم

(10)

في الشكل المقابل، أوجد طول نصف قطر الدائرة التي مركزها و.



نصل و أ

و جـ $\perp$ أ ب

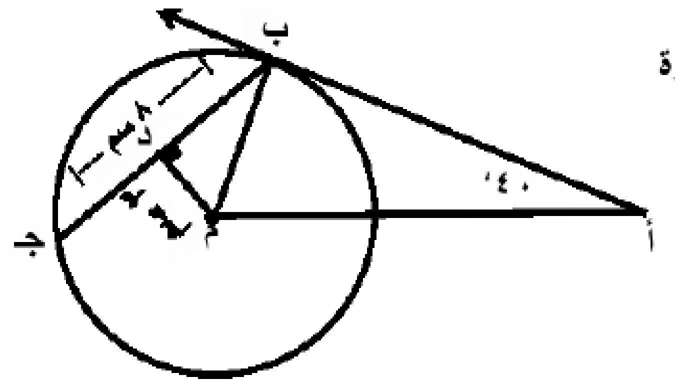
أ جـ = ب جـ = ١٤÷٢ = ٧ سم

في Δ أ جـ و قائم الزاوية في جـ

أ و = $\sqrt{(\text{أ جـ})^2 + (\text{و جـ})^2}$

أ و = $\sqrt{(٧)^2 + (٣)^2}$ = $\sqrt{٥٨}$ = ٧,٦ سم

(11)



في الشكل المقابل: م مركز الدائرة

$\overleftarrow{\text{أب}}$ مماس للدائرة عند النقطة ب

ق(ب $\hat{\text{أ}}$ م)=٤٠ ، $\overline{\text{م د}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$

ب جـ = ٨ سم ، م د = ٣ سم

أوجد بالبرهان : أ) ق (أ $\hat{\text{ب}}$ م) ب) ق(ب $\hat{\text{م}}$ أ) ج) طول $\overline{\text{ب م}}$

الحل:

∵ $\overleftarrow{\text{أب}}$ مماس ، $\overline{\text{ب م}}$ نصف قطر التماس

∴ ق (أ $\hat{\text{ب}}$ م) = ٩٠° (نظرية)

∴ ق (ب $\hat{\text{م}}$ أ)= ١٨٠° – (٩٠° + ٤٠°) = ٥٠°

∵ $\overline{\text{م د}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$ ∴ د منتصف $\overline{\text{جـ ب}}$ (نظرية)

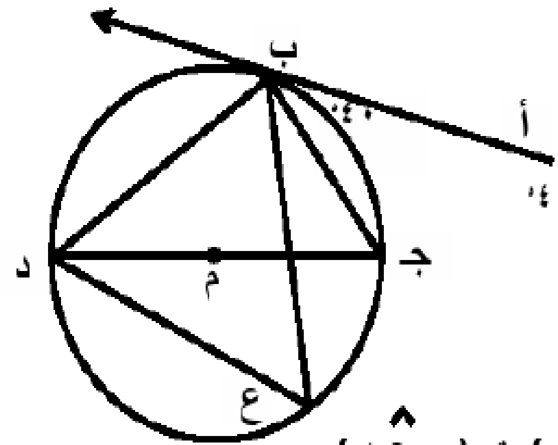
∴ ب د = د جـ = $\frac{٨}{٢}$ = ٤سم

△ م د ب قائم الزاوية في $\hat{\text{د}}$ ∴ (ب م)٢ = (م د)٢ + (ب د)٢

(ب م)٢ = ٣٢ + ٤٢ = ٢٥

∴ ب م = $\sqrt{٢٥}$ = ٥ سم

(12)



في الشكل المقابل : م مركز الدائرة

$\overline{\text{أ ب}}$ مماس للدائرة عند النقطة ب ، ق(أ ب جـ) =٤٠°

أوجد بالبرهان :

أ) ق (جـ ب̂ د)   ب) ق (ب جـ̂ د)   ج) ق (ب ع̂ د)

الحل:

∵ $\overline{\text{جـ د}}$ قطر   ∴ ق (جـ ب̂ د)=٩٠° (محيطية تحصر نصف دائرة)

∵ $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ مماس   ∴ ق (أ ب̂ جـ) = ق (ب د̂ جـ) = ٤٠°

(مماسيه ومحيطية تحصران نفس القوس $\frown$ب جـ)   نظرية

∴ ق (ب جـ̂ د)= ١٨٠° – (٩٠° + ٤٠°) = ٥٠°

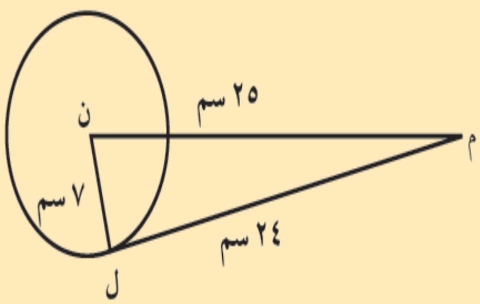
ق (ب ع̂ د) = ق (ب د̂ جـ) = ٥٠°

(محيطيتان تحصران نفس القوس $\frown$ب د)

(13)

في الشكل المقابل، ن ل = ٧ سم ، ل م = ٢٤ سم ، ن م = ٢٥ سم.

أثبت أن $\overleftrightarrow{\text{م ل}}$ مماس للدائرة التي مركزها ن.



الحل:

المعطيات: ن ل = ٧ سم ، ن م = ٢٥ سم ، م ل = ٢٤ سم

المطلوب: إثبات أن $\overleftrightarrow{\text{م ل}}$ مماسًا للدائرة التي مركزها ن

البرهان: باستخدام عكس نظرية فيثاغورث

(ن ل)^{٢} + (ل م)^{٢} $\stackrel{?}{=}$ (ن م)^{٢}

(٧)^{٢} + (٢٤)^{٢} $\stackrel{?}{=}$ (٢٥)^{٢} بالتعويض

٦٢٥ = ٦٢٥ بالتبسيط

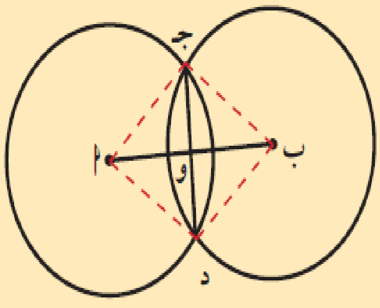
نستنتج أن المثلث م ل ن قائم في ل.

∴ $\overline{\text{م ل}} \perp \overline{\text{ن ل}}$

∴ م ل مماس للدائرة في النقطة ل. نظرية

(14)

يمثل الشكل المقابل دائرتين متطابقتين. جـ د وتر مشترك. إذا كان أ ب = ٢٤ سم، نق = ١٣ سم. فما طول جـ د؟



الحل:

المعطيات: دائرتان متطابقتان مركزاهما أ ، ب.

جـ د وتر مشترك.

أب = ٢٤، طول نصف قطر كل من الدائرتين = ١٣ سم.

المطلوب: إيجاد طول جـ د

العمل: نرسم أجـ، أد، ب جـ ، ب د.

البرهان:

في الشكل أدب جـ فيه أ د = د ب = ب جـ = جـ أ = نق = ١٣ سم

∴ أ د ب جـ معين.

والقطران أب، جـ د متعامدان وينصف كل منهما الآخر.

في Δ أوجـ ، ق(أ و̂ جـ) = ٩٠° ∴ Δ أوجـ قائم الزاوية و.

(وجـ)^{2} = (أجـ)^{2} − (وأ)^{2} نظرية فيثاغورث

(وجـ)^{2} = (١٣)^{2} − $\left(\frac{٢٤}{٢}\right)^{2}$ = ٢٥

وجـ = ٥

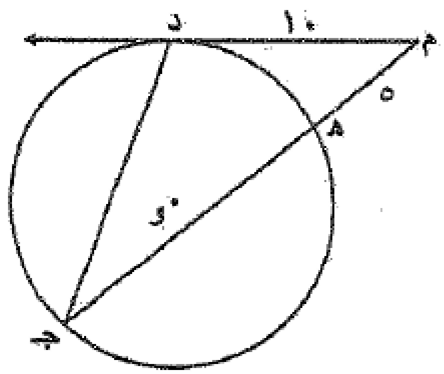
جـ د = ٢ × جـ و (و منتصف جـ د)

= ٢ × ٥ = ١٠ سم.

طول جـ د يساوي ١٠ سم.

(15)

في الشكل المقابل : $\overline{\text{م د}}$ قطعة مماسية حيث م د = ١٠ ، م هـ = ٥



أوجد بذكر السبب :

طول كلا من : $\overline{\text{م جـ}}$ ، $\overline{\text{هـ جـ}}$

الحل:

(م د)^2 = م هـ × م جـ

(١٠)^2 = ٥ × م جـ

١٠٠ = ٥ × م جـ

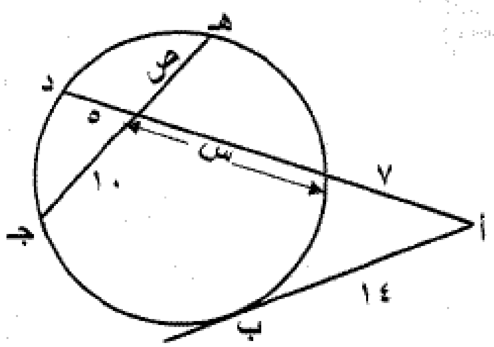
م جـ = ١٠٠ ÷ ٥ = ٢٠

هـ جـ = م جـ - م هـ

= ٢٠ ـ ٥ = ١٥

(16)

من الشكل المقابل : أوجد قيمة كل من س ، ص



الإجابة

٧ × (س + ١٢) = $(١٤)^{٢}$

٧ × (س + ١٢) = ١٩٦

س + ١٢ = $\frac{١٩٦}{٧}$

س + ١٢ = ٢٨

س = ٢٨ – ١٢ = ١٦

١٠ × ص = ١٦ × ٥

ص = $\frac{١٦ \times ٥}{١٠}$

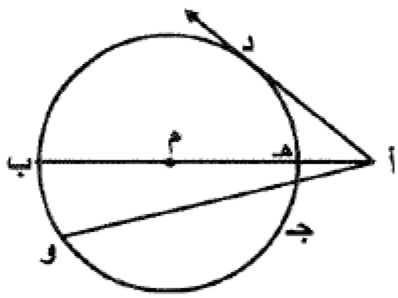
ص = ٨

(17)

في الشكل المقابل : دائرة مركزها م ، $\overleftarrow{أ د}$ مماس للدائرة عند النقطة د ، أ جـ = ٣سم ،

أ هـ = ٢سم ، جـ و = ٩سم

أوجد كلاً من : أ د ، هـ م



الإجابة

(أ د)^2 = أ جـ × أ و

(أ د)^2 = ٣ × ١٢

(أ د)^2 = ٣٦

أ د = ٦ سم

أ هـ × أ ب = أ جـ × أ و

٢ × أ ب = ٣ × ١٢

أ ب = ١٨ سم

هـ ب = أ ب – أ هـ = ١٨ – ٢

هـ ب = ١٦ سم

هـ م = $\frac{1}{2}$ هـ ب = ٨ سم

(18)

حل المعادلة: $٤\underline{س} + ٢\begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ -٢ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٠ & ٠ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$

الحل:

$$٤\underline{س} + ٢\begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ -٢ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٠ & ٠ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$$

$$٤\underline{س} + \begin{bmatrix} ٢ \times ٣ & ٢ \times ٤ \\ ٢ \times (-٢) & ٢ \times ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٠ & ٠ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$$

$$٤\underline{س} + \begin{bmatrix} ٦ & ٨ \\ -٤ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٠ & ٠ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$$

$$٤\underline{س} = \begin{bmatrix} ١٠ & ٠ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٦ & ٨ \\ -٤ & ٢ \end{bmatrix}$$

$$٤\underline{س} = \begin{bmatrix} ٤ & -٨ \\ ٨ & ٠ \end{bmatrix}$$

$$\underline{س} = \frac{١}{٤}\begin{bmatrix} ٤ & -٨ \\ ٨ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & -٢ \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix}$$

(19)

بدون استخدام الآلة الحاسبة، إذا كان ظاθ = $٢\sqrt{٢}$ جتاθ > ٠

فأوجد جتا θ ، جاθ ، قتاθ

الحل:

باستخدام متطابقة فيثاغورث:

قا^{٢} θ = ١ + ظا^{٢}θ

= ١ + $(٢\sqrt{٢})^{٢}$

= ١ + ٤×٢

= ١ + ٨

= ٩

قا θ = ٣ أو قا θ = -٣

∵ جتا θ > ٠

∴ قا θ = -٣

∴ جتا θ = $\frac{١}{\text{قا}\theta}$

جتا θ = $\frac{-١}{٣}$

ظا θ = $\frac{\text{جا}\theta}{\text{جتا}\theta}$

جاθ = ظاθ × جتاθ

جاθ = $٢\sqrt{٢} \times \frac{-١}{٣}$ = $\frac{-٢\sqrt{٢}}{٣}$

قتاθ = $\frac{١}{\text{جا}\theta}$ = $\frac{٣}{-٢\sqrt{٢}}$

(20)

بدون استخدام الآلة الحاسبة، إذا كان جا$\theta = \frac{٣}{٥}$ ، $٠ < \theta < \frac{\pi}{٢}$

فأوجد كلا من : جتاθ ، ظاθ ، قاθ ، ظتاθ ، قتاθ

باستخدام متطابقة فيثاغورث:

جا$^٢ \theta$ + جتا$^٢ \theta = ١$

$(\frac{٣}{٥})^٢$ + جتا$^٢ \theta = ١$

جتا$^٢ \theta = ١ - (\frac{٣}{٥})^٢$

جتا$^٢ \theta = ١ - \frac{٩}{٢٥}$

جتا$^٢ \theta = \frac{١٦}{٢٥}$

جتا$\theta = \frac{٤}{٥}$ أو جتا$\theta = -\frac{٤}{٥}$ مرفوض لأن $٠ < \theta < \frac{\pi}{٢}$

ظا$\theta = \frac{\text{جا}\theta}{\text{جتا}\theta} = \frac{\frac{٣}{٥}}{\frac{٤}{٥}} = \frac{٣}{٤}$

قا$\theta = \frac{١}{\text{جتا}\theta} = \frac{٥}{٤}$

ظتا$\theta = \frac{١}{\text{ظا}\theta} = \frac{٤}{٣}$

قتا$\theta = \frac{١}{\text{جا}\theta} = \frac{٥}{٣}$

(21)

اثبت صحة المتطابقة : $\dfrac{(\text{قا}\,\theta + ١)(\text{قا}\,\theta - ١)}{\text{جا}^٢\,\theta} = \text{قا}^٢\,\theta$

الإجابة

$$\frac{(\text{قا}\,\theta + ١)(\text{قا}\,\theta - ١)}{\text{جا}^٢\,\theta} = \frac{\text{قا}^٢\,\theta - ١}{\text{جا}^٢\,\theta}$$

$$= \frac{\text{ظا}^٢\,\theta}{\text{جا}^٢\,\theta}$$

$$= \frac{\text{جا}^٢\,\theta}{\text{جتا}^٢\,\theta} \times \frac{١}{\text{جا}^٢\,\theta}$$

$$= \frac{١}{\text{جتا}^٢\,\theta}$$

(22)

حل المعادلة : ٢ جتا س − ١ = ٠

الإجابة

٢ جتا س = ١

جتا س = $\frac{١}{٢}$

جتا س = جتا $\frac{\pi}{٣}$

∵ جتا س > ٠

∴ س تقع في الربع الاول أو تقع في الربع الرابع

∴ س = $\frac{\pi}{٣}$ + ٢ ك π أو س = $\frac{-\pi}{٣}$ + ٢ ك π : (ك ∈ ص)

(23)

حل المعادلة : ٢ جاس – ١ = ٠

الإجابة

٢ جا س = ١

جا س = $\frac{١}{٢}$

جا س = جا $\frac{\pi}{٦}$

∵ جا س > ٠

∴ س تقع في الربع الأول أو الربع الثاني

س = $\frac{\pi}{٦}$ + ٢ ك π أو س = $(\pi - \frac{\pi}{٦})$ + ٢ ك π

س = $\frac{\pi}{٦}$ + ٢ ك π أو س = $\frac{٥\pi}{٦}$ + ٢ ك π (ك ∈ ص)

(24)

بدون استخدام الآلة الحاسبة :

إذا كان جا $\theta = \frac{٣}{٧}$ ، جتا $\theta <$ ٠ فأوجد جتا θ ، ظا θ ، ظتا θ

الإجابة

باستخدام متطابقة فيثاغورث :

جا$^{٢}\theta$ + جتا$^{٢}\theta$ = ١

$\left(\frac{٣}{٧}\right)^{٢}$ + جتا$^{٢}\theta$ = ١

جتا$^{٢}\theta$ = ١ − $\left(\frac{٣}{٧}\right)^{٢} = \frac{٤٠}{٤٩}$

جتا $\theta = \frac{٢\sqrt{١٠}}{٧} \approx$ ٠٫٩٠٤ (مرفوض لأن جتا $\theta <$ ٠)

أو جتا $\theta = -\frac{٢\sqrt{١٠}}{٧} \approx -$٠٫٩٠٤

ظا $\theta = \frac{\text{جا } \theta}{\text{جتا } \theta} = \frac{\frac{٣}{٧}}{-\frac{٢\sqrt{١٠}}{٧}} = -\frac{٣}{٢\sqrt{١٠}}$

ظتا $\theta = \frac{١}{\text{ظا } \theta} = -\frac{٢\sqrt{١٠}}{٣}$

(25)

(أ)

ظا $\theta = \frac{\sqrt{٣}}{٣}$ ، ظا $\theta =$ ظا $\frac{\pi}{٦}$

$\theta = \frac{\pi}{٦} +$ ك π، حيث (ك $\in$ ص)

(ب)

بسّط التعبيرات التالية لأبسط صورة:

جتا$(\pi - \theta)$ − جتا$(-\theta)$ + جا$(\pi + \theta)$ + جتا$\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right)$.

= − جتا θ − جتا θ − جا θ + جا θ = −٢ جتا θ

جا$(\pi + \theta)$ − جتا$\left(\theta + \frac{\pi}{٢}\right)$ + جتا$(\pi - \theta)$ + جا$\left(\theta + \frac{\pi}{٢}\right)$.

= − جا θ + جا θ − جتا θ + جتا θ = صفر

---

(26)

جا س + جا(٩٠° + س) + جا(١٨٠° + س) + جا(٩٠° − س).

الحل:

جا س + جا(٩٠° + س) + جا(١٨٠° + س) + جا(٩٠° − س)

= جا س + جتا س − جا س + جتا س

= ٢ جتا س

$\text{جتا}(\theta + 9\pi) = \text{جتا}(\theta + \pi + 8\pi)$

$= \text{جتا}(\theta + \pi)$

$= -\text{جتا}\,\theta$

$\text{جتا}(-\frac{\pi}{2} - \theta) = \text{جتا}(\frac{\pi}{2} + \theta) = -\text{جا}\,\theta$

(27)

(أ)

أثبت صحة المنطابقة: (قا² θ + قتا² θ) − (ظا² θ + ظتا² θ) = ٢.

الحل: (قا² θ + قتا² θ) − (ظا² θ + ظتا² θ)

= ١ + ~~ظا² θ~~ + ١ + ~~ظتا² θ~~ − ~~ظا² θ~~ − ~~ظتا² θ~~

= ٢

(ب)

أوجد قيمة كلًّا مما يلي:

(جا θ + جتا θ)² − ٢ جا θ جتا θ = جا² θ + جتا² θ + ٢ جا θ جتا θ − ٢ جا θ جتا θ = ١

(ظا² θ + ١) جتا² θ = قا² θ جتا² θ = (قا θ جتا θ)² = ١² = ١

(28)

اذا كانت $\underline{أ} = \begin{bmatrix} س & ٤ \\ ١٢ & ٦ \end{bmatrix}$ منفردة أوجد قيمة س.

الحل:

$\because$ $\underline{أ}$ منفردة

$\therefore$ $|\underline{أ}|$ = صفر

$\begin{vmatrix} س & ٤ \\ ١٢ & ٦ \end{vmatrix} = ٠$

$\therefore$ ٦س – ٤٨ = ٠

٦س = ٤٨

س = ٨

(29)

حل النظام $\left\{\begin{array}{l}\text{٥ س} + \text{٣ ص} = ٧\\ \text{٣ س} + \text{٢ ص} = ٥\end{array}\right.$ باستخدام النظير الضربي للمصفوفة

الإجابة

المعادلة المصفوفية للنظام هي :

$$\begin{bmatrix} ٥ & ٣ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٧ \\ ٥ \end{bmatrix}$$

حيث $\text{أ} = \begin{bmatrix} ٥ & ٣ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix}$ ، $\text{ع} = \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{bmatrix} ٧ \\ ٥ \end{bmatrix}$

$$|\text{أ}| = \begin{vmatrix} ٥ & ٣ \\ ٣ & ٢ \end{vmatrix} = ٥ \times ٢ - ٣ \times ٣ = ١ \neq ٠$$

$$\text{أ}^{-١} = \frac{١}{١} \times \begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ -٣ & ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ -٣ & ٥ \end{bmatrix}$$

وبضرب المعادلة المصفوفية للنظام (١) من جهة اليمين في $\text{أ}^{-١}$

$$\begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ -٣ & ٥ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٧ \\ ٥ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -١ \\ ٤ \end{bmatrix}$$

س = ـ ١ ، ص = ٤

(30)

أوجد $\underline{س}$ بحيث : $\begin{bmatrix} ٥ & -٣ \\ ٤ & -٢ \end{bmatrix} \times \underline{س} = \begin{bmatrix} ٥ \\ ١٠ \end{bmatrix}$

الإجابة

نوجد النظير الضربي للمصفوفة : $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٥ & -٣ \\ ٤ & -٢ \end{bmatrix}$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} ٥ & -٣ \\ ٤ & -٢ \end{vmatrix} = ٥ \times (-٢) - (-٣) \times ٤ = ٢ \neq ٠$$

$$\underline{أ}^{-١} = \frac{١}{٢} \times \begin{bmatrix} -٢ & ٣ \\ -٤ & ٥ \end{bmatrix}$$

$$\underline{س} = \frac{١}{٢} \times \begin{bmatrix} -٢ & ٣ \\ -٤ & ٥ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٥ \\ ١٠ \end{bmatrix}$$

$$\underline{س} = \frac{١}{٢} \times \begin{bmatrix} -٢ \times ٥ + ٣ \times ١٠ \\ -٤ \times ٥ + ٥ \times ١٠ \end{bmatrix} = \frac{١}{٢} \times \begin{bmatrix} ٢٠ \\ ٣٠ \end{bmatrix}$$

$$\underline{س} = \begin{bmatrix} ١٠ \\ ١٥ \end{bmatrix}$$

(31)

استخدم قاعدة كرامر لحلّ النظام:

$$\begin{cases} \text{٤س} - \text{٥ص} + \text{٧} = \text{٠} \\ \text{٣ص} - \text{٦س} + \text{٣} = \text{٠} \end{cases}$$

الحل:

نكتب أولًا النظام بالطريقة القياسية:

$$\begin{cases} \text{٤س} - \text{٥ص} = -\text{٧} \\ -\text{٦س} + \text{٣ص} = -\text{٣} \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \text{٤} & -\text{٥} \\ -\text{٦} & \text{٣} \end{vmatrix} = -\text{١٨}$$

$$\Delta_{\text{س}} = \begin{vmatrix} -\text{٧} & -\text{٥} \\ -\text{٣} & \text{٣} \end{vmatrix} = -\text{٣٦}$$

$$\Delta_{\text{ص}} = \begin{vmatrix} \text{٤} & -\text{٧} \\ -\text{٦} & -\text{٣} \end{vmatrix} = -\text{٥٤}$$

$$\text{س} = \frac{\Delta_{\text{س}}}{\Delta} = \frac{-\text{٣٦}}{-\text{١٨}} = \text{٢}$$

$$\text{ص} = \frac{\Delta_{\text{ص}}}{\Delta} = \frac{-\text{٥٤}}{-\text{١٨}} = \text{٣}$$

(32)

أثبت أن $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٢ & ٣- \\ ١- & ٢ \end{bmatrix}$ هي النظير الضربي للمصفوفة $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$.

الحل:

$$\underline{أ} \times \underline{ب} = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٢ & ٣- \\ ١- & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ \times ٢ + ٣ \times (١-) & ٢ \times (٣-) + ٣ \times ٢ \\ ١ \times ٢ + ٢ \times (١-) & ١ \times (٣-) + ٢ \times ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$$

$\underline{أ} \times \underline{ب} = \underline{و}$ $\therefore$ $\underline{ب}$ هي النظير الضربي لِـ $\underline{أ}$.

يمكن القول أن المصفوفة $\underline{أ}$ هي النظير الضربي للمصفوفة $\underline{ب}$.

(33)

الحل:

نقطة التقسيم ن (س ، ص)

$$س = \frac{م\,س_٢ + ن\,س_١}{م + ن}$$

$$= \frac{(٢ \times -٧) + (٨ \times ١)}{١ + ٢}$$

$$= \frac{-١٤ + ٨}{٣} = \frac{-٦}{٣} = -٢$$

$$ص = \frac{م\,ص_٢ + ن\,ص_١}{م + ن}$$

$$= \frac{(١ \times -٥) + (٢ \times ٥)}{١ + ٢}$$

$$= \frac{-٥ + ١٠}{٣} = \frac{٥}{٣}$$

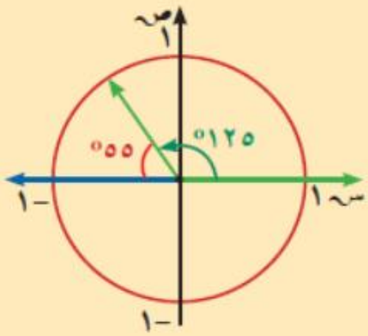
نقطة التقسيم ن هي $(-٢ ، \frac{٥}{٣})$

(34)

ارسم كلًّا من الزوايا الموجهة في وضع قياسي، ثم عيّن زاوية الإسناد وأوجد قياسها لكل مما يلي:

أ) ١٢٥° ب) ٢١٥° ج) $\frac{١١\pi}{٦}$

الحل:

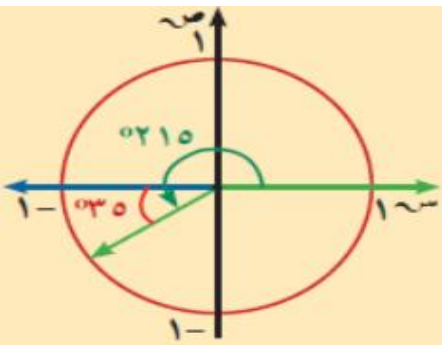


أ) $\theta = ١٢٥^\circ$ تقع في الربع الثاني

$\therefore$ قياس زاوية الإسناد $\alpha^\circ = ١٨٠^\circ - \theta^\circ$

$= ١٨٠^\circ - ١٢٥^\circ$

$= ٥٥^\circ$

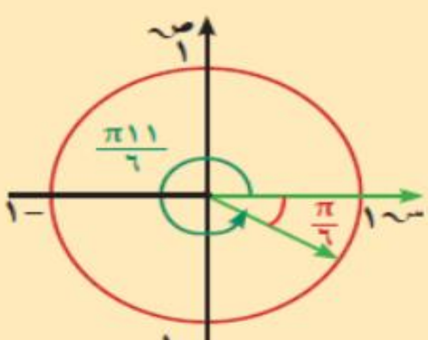


ب) $\theta = ٢١٥^\circ$ تقع في الربع الثالث

$\therefore$ قياس زاوية الإسناد $\alpha = \theta - ١٨٠^\circ$

$= ٢١٥^\circ - ١٨٠^\circ$

$= ٣٥^\circ$



ج) $\theta = \frac{١١\pi}{٦}$ تقع في الربع الرابع

$\therefore$ قياس زاوية الإسناد $\alpha = ٢\pi - \theta$

$= ٢\pi - \frac{١١\pi}{٦}$

$= \frac{\pi}{٦}$

(3)

لتكن أ(٢، -٣)، ب (-٤، ٧). أوجد إحداثيات النقطة جـ على $\overline{\text{أب}}$ بحيث: ٧جـ ب = ٢جـ أ.

الحل:

ب(-٤، ٧)   أ(٢، -٣)

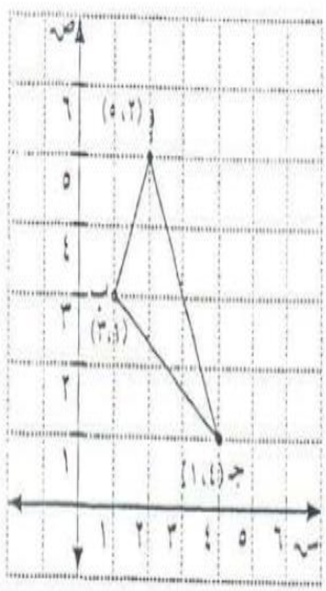
جـ أ : جـ ب = ٧ : ٢

٢   ٧

س = $\frac{7\times -4 + 2\times 2}{7+2} = \frac{-8}{3}$ ، ص = $\frac{7\times 7 + 2\times -3}{7+2} = \frac{43}{9}$

نقطة التقسيم جـ ($\frac{-8}{3}$ ، $\frac{43}{9}$)

(36)



أ ب جـ مثلث فيه أ(٢، ٥)، ب(١، ٣)، جـ(٤، ١).

(أ) أوجد إحداثيي النقطة ن التي تقسم $\overline{أب}$ من الداخل من جهة أ بنسبة ١ : ٣.

أ(٢، ٥) ب(١، ٣)

١ + ٣

$س = \frac{١ \times ١ + ٣ \times ٢}{٣ + ١} = ١,٧٥$

$ص = \frac{١ \times ٣ + ٣ \times ٥}{٣ + ١} = ٤,٥$

(ب) أوجد إحداثيي النقطة ك التي تقسم ب جـ من الداخل من جهة ب بنسبة ١ : ٢.

ب(١، ٣) جـ(٤، ١)

١ + ٢

$س = \frac{١ \times ٤ + ٢ \times ١}{٢ + ١} = ٢$

$ص = \frac{١ \times ١ + ٢ \times ٣}{٢ + ١} = \frac{٧}{٣}$

<u>نحصل على الناتج التالى:</u>

(أ) ن $\left(\frac{٧}{٤} ، \frac{٩}{٢}\right)$

(ب) ك $\left(٢ ، \frac{٧}{٣}\right)$

(37)

أوجد بعد النقطة د (٢ ، ١) عن المستقيم ل : ٣ س + ٤ ص + ٥ = ٠

الحل :

أ = ٣ ، ب = ٤ ، جـ = ٥

$س_١$ = ٢ ، $ص_١$ = ١

$$البعد ف = \frac{|أ\,س_١ + ب\,ص_١ + جـ|}{\sqrt{أ^٢ + ب^٢}}$$

$$البعد ف = \frac{|٣(٢) + ٤(١) + ٥|}{\sqrt{٩ + ١٦}}$$

$$البعد\ ف = \frac{١٥}{٥} = ٣$$

أي أن البعد بين النقطة د و المستقيم يساوي ٣ وحدات طول

(38)

نأخذ في المستوى الإحداثي النقاط: أ(١، -١) ، ب(٢، ٢) ، جـ(-١، -٧). أثبت أن النقاط أ، ب، جـ على استقامة واحدة.

الحل:

$$م_١ = ميل \overleftrightarrow{أب} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٢ - (-١)}{٢ - ١} = ٣$$

$$م_٢ = ميل \overleftrightarrow{أجـ} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{-٧ - (-١)}{-١ - ١} = \frac{-٦}{-٢} = ٣$$

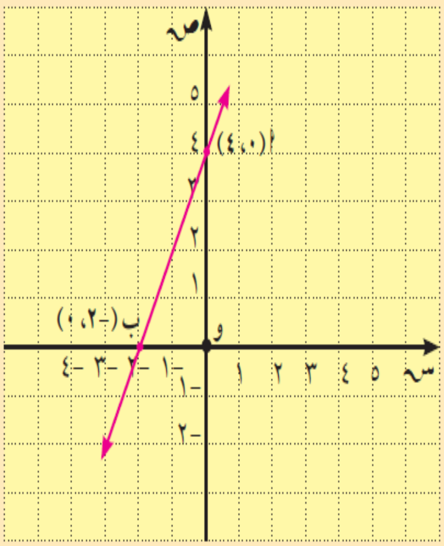
أي أن $م_١ = م_٢ = ٣$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{أب} // \overleftrightarrow{أجـ}$ ولكنهما يشتركان في النقطة أ.

$\therefore$ تكون النقاط أ، ب، جـ على استقامة واحدة.

(39)

أوجد ميل $\overleftrightarrow{أب}$ حيث أ(٠،٤)، ب(−٢، ٠) وقارنه بظل الزاوية $\hat{ب}$ في المثلث قائم الزاوية ب و أ.



الحل:

$$\text{الميل} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$$

$$= \frac{٤ - ٠}{٠ - (-٢)} \quad \text{عوّض}$$

$$= \frac{٤}{٢} \quad \text{بسّط}$$

$$= ٢$$

في المثلث أوب: أو = ٤ ، وب = ٢

$$\text{ظاب} = \frac{أو}{ب و} = \frac{٤}{٢} = ٢$$

∴ ظاب = ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = ٢

(40)

إذا كان المستقيم ل: ص = ٢س + ١ ، فأوجد:

أ معادلة المستقيم هـ الموازي للمستقيم ل والذي يمر بالنقطة (٢، −٣).

ب معادلة المستقيم ف العمودي على المستقيم ل والذي يمر بالنقطة (٤، −٣).

الحل:

أ ∵ المستقيمان ل، هـ متوازيان ، ميل المستقيم هـ = ميل المستقيم ل

∴ ميل المستقيم هـ = ٢

وبالتالي، معادلة المستقيم هـ تكتب على الشكل:

ص − ص$_١$ = م(س − س$_١$)

ص − (−٣) = ٢ (س − ٢) بالتعويض في المعادلة

ص = −٣ + ٢س − ٤ بالتبسيط

ص = ٢س − ٧ وبالتالي معادلة هـ : ص − ٢س + ٧ = ٠

أو ٢س − ص − ٧ = ٠ وهي الصورة العامة لمعادلة المستقيم.

ب ∵ ل ، ف مستقيمان متعامدان ∴ ميل المستقيم ل × ميل المستقيم ف = −١

٢ × ميل المستقيم ف = −١

ميل المستقيم ف = $\frac{-١}{٢}$

وبالتالي معادلة المستقيم ف:

ص − ص$_١$ = م (س − س$_١$)

ص − (−٣) = $\frac{-١}{٢}$ (س − ٤) بالتعويض

ص + ٣ = $\frac{-١}{٢}$ س + ٢ بالتبسيط

ص = $\frac{-١}{٢}$ س − ١

∴ معادلة المستقيم ف: ص = $\frac{-١}{٢}$ س − ١

(41)

(أ)

أوجد المسافة بين ك (١، −٥) ، ل(٣، −٢).

الحل: المسافة = $\sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$

$= \sqrt{(٣ - ١)^٢ + (-٢ - (-٥))^٢}$

$= \sqrt{(٢)^٢ + (٣)^٢}$

$= \sqrt{١٣} = ٣,٦$ وحدة طول

المسافة بين ك، ل تساوي حوالى ٣,٦ وحدات طول.

(ب)

في الشكل المقابل أوجد نقطة منتصف $\overline{جـ د}$ حيث جـ (−١، ٥)، د (٣، ٠).

الحل: $\left(\frac{س_١ + س_٢}{٢} ، \frac{ص_١ + ص_٢}{٢}\right) = \left(\frac{-١ + ٣}{٢} ، \frac{٥ + ٠}{٢}\right)$

$= \left(\frac{٢}{٢} ، \frac{٥}{٢}\right)$

$= (١ ، ٢,٥)$

نقطة منتصف $\overline{جـ د}$ هي (١ ، ٢,٥).

(42)

اكتب معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطتين أ(١، ٣)، ب(−٢، ٠).

الحل:

نوجد الميل

$$م = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٣ - ٠}{١ - (-٢)}$$

$$م = \frac{٣}{٣} = ١$$

المعادلة: $ص - ص_١ = م(س - س_١)$

$ص - ٣ = ١\ (س - ١)$ بالتعويض في المعادلة

$ص = ٣ + س - ١$ بالتبسيط

$ص = س + ٢$

وبالتالي معادلة المستقيم هي: $ص - س - ٢ = ٠$ أو $س - ص + ٢ = ٠$ وهي الصورة العامة لمعادلة المستقيم.

معلومة مفيدة:

الصورة العامة لمعادلة المستقيم هي:

$أس + ب ص + جـ = ٠$

حيث أ، ب لا يساويان الصفر معًا.

(43)

أوجد معادلة دائرة قطرها $\overline{أب}$ حيث أ(٤ ، -٢) ، ب(٢ ، ٤)

الحل :

مركز الدائرة = $\left(\frac{٤+٢}{٢} \text{ ، } \frac{-٢+٤}{٢} \right)$

= (٣ ، ١)

نق = $\frac{١}{٢} \sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$

= $\frac{١}{٢} \sqrt{(٢ - ٤)^٢ + (٤ + ٢)^٢}$

= $\frac{١}{٢} \sqrt{٤٠}$

= $\sqrt{١٠}$

∴ معادلة الدائرة هي :

$(س - س_١)^٢ + (ص - ص_١)^٢ = نق^٢$

$(س - ٣)^٢ + (ص - ١)^٢ = ١٠$

(44)

أوجد معادلة مماس دائرة معادلتها:

(س − ١)^{٢} + (ص − ٢)^{٢} = ٥ عند نقطة التماس أ(٣، ١).

الحل:

النقطة أ (٣، ١) تنتمي إلى الدائرة .

إحداثيات مركز الدائرة و(١ ، ٢).

$$\text{ميل } \overline{\text{وأ}} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{١ - ٢}{٣ - ١} = -\frac{١}{٢}$$

∵ نصف قطر التماس $\overline{\text{وأ}}$ عمودي على مماس الدائرة

∴ ميل$_{\text{المماس}}$ × ميل $\overline{\text{وأ}}$ = −١

$$م_{\text{المماس}} \times \left(-\frac{١}{٢}\right) = -١$$

$$م_{\text{المماس}} = ٢$$

معادلة المماس و $\overline{\text{أ}}$ الذي ميله ٢ ويمر بالنقطة (٣، ١) هي:

ص − ص$_١$ = م (س − س$_١$)

ص − ١ = ٢ (س − ٣)

ص − ١ = ٢س − ٦

∴ معادلة المماس ص = ٢س − ٥

(45)

هل كل معادلة مما يلي تمثل معادلة دائرة؟ فسّر.

أ) $س^٢ + ص^٢ - ٣س + ٥ص - \frac{١٥}{٤} = ٠$

ب) $س^٢ + ص^٢ + ٤س - ٧ص + ٢٠ = ٠$

الحل:

أ) المعادلة: $س^٢ + ص^٢ - ٣س + ٥ص - \frac{١٥}{٤} = ٠$

معامل $س^٢$ = معامل $ص^٢ = ١$

ل = −٣، ك = ٥، ب = $\frac{-١٥}{٤}$

$ل^٢ + ك^٢ - ٤ب = ٩ + ٢٥ - ٤\left(\frac{-١٥}{٤}\right) = ٩ + ٢٥ + ١٥ = ٤٩ > ٠$

$٤٩ > ٠$ ∴ المعادلة تمثل معادلة دائرة.

ب) المعادلة: $س^٢ + ص^٢ + ٤س - ٧ص + ٢٠ = ٠$

معامل $س^٢$ = معامل $ص^٢ = ١$

ل = ٤، ك = −٧، ب = ٢٠

$ل^٢ + ك^٢ - ٤ب = ١٦ + ٤٩ - ٤ \times ٢٠ = -١٥ < ٠$

∴ المعادلة لا تمثل معادلة دائرة.

(46)

عيّن مركز وطول نصف قطر الدائرة الممثلة بالمعادلة: $٣س^٢ + ٣ص^٢ - ٦س + ٩ص - ١٢ = ٠$

الحل:

$س^٢ + ص^٢ - ٢س + ٣ص - ٤ = ٠$ بالقسمة على ٣

وهي معادلة دائرة على الصورة العامة

$\therefore$ ل = −٢، ك = ٣، ب = −٤

المركز = $\left(\frac{-ل}{٢}، \frac{-ك}{٢}\right) = \left(١، -\frac{٣}{٢}\right)$

$نق = \frac{١}{٢}\sqrt{ل^٢ + ك^٢ - ٤ب}$

$نق = \frac{١}{٢}\sqrt{٤ + ٩ - ٤ \times (-٤)}$

$نق = \frac{١}{٢}\sqrt{٢٩}$

الدائرة مركزها $\left(١، -\frac{٣}{٢}\right)$ وطول نصف قطرها $نق = \frac{١}{٢}\sqrt{٢٩}$ وحدة طول.