عمل المدرس / مصطفى أسامة علام
050-2509447

https://t.me/mathbook12GEN
قناة شرح فيديو رياضيات 12 عام

https://t.me/alllaaam82
قناة ملازم وامتحانات رياضيات

ورقة عمل الثاني عشر العام

6-3 حل الأنظمة الخطية باستخدام المعكوسات وقاعدة كرامر

في هذا الدرس سوف أتعلم: 1- حل أنظمة المعادلات باستخدام المصفوفات العكسية. 2- حل أنظمة المعادلات الخطية باستخدام قاعدة كرامر.

إذا تساوى عدد المعادلات مع المتغيرات في نظام المعادلات الخطية، فإن مصفوفة المعاملات الخاصة به تكون مربعة ويقال حينئذ إن النظام **نظام مربع**.
وإذا كانت مصفوفة المعاملات المربعة هذه لها معكوس، فحينها يكون للنظام حل وحيد.

المفهوم الأساسي الأنظمة الخطية المربعة التي لها معكوس

لنفرض أن A هو مصفوفة المعاملات لنظام n من المعادلات الخطية في n من المتغيرات تحددها المعادلة $AX = B$، حيث X هو مصفوفة المتغيرات و B هو مصفوفة الثوابت. إذا كانت A لها معكوس، يكون لنظام المعادلات حل وحيد تحدده المعادلة $X = A^{-1}B$

إيجاد حل نظام 2x2 باستخدام مصفوفة عكسية

استخدم المصفوفة العكسية لحل نظام المعادلات، إن أمكن.

Use an inverse matrix to solve the system of equations, if possible.

$2x - 3y = -1$
$-3x + 5y = 3$

$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$

$AX = B \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$

$A^{-1} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{vmatrix}}\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

للاشتراك في قناة فيديوهات هيكل الفصل الثاني
050-2509447

$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1(5) + 3(3) \\ -1(3) + 3(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ (x, y)

$(4, 3)$ حل النظام هو

$-3x + 9y = 36$
$7x - 8y = -19$

$A = \begin{bmatrix} -3 & 9 \\ 7 & -8 \end{bmatrix}$

$\det(A) = \begin{vmatrix} -3 & 9 \\ 7 & -8 \end{vmatrix} = -39$

$A^{-1} = \frac{1}{-39}\begin{bmatrix} -8 & -9 \\ -7 & -3 \end{bmatrix}$

$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{8}{39} & \frac{3}{13} \\ \frac{7}{39} & \frac{1}{13} \end{bmatrix}$

$AX = B$

$\Rightarrow X = A^{-1}B$

$= \begin{bmatrix} \frac{8}{39} & \frac{3}{13} \\ \frac{7}{39} & \frac{1}{13} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 36 \\ -19 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 36\left(\frac{8}{39}\right) + (-19)\left(\frac{3}{13}\right) \\ 36\left(\frac{7}{39}\right) + (-19)\left(\frac{1}{13}\right) \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ (x, y)

حل النظام هو $(3, 5)$

لحل نظام معادلات 3 × 3 باستخدام المصفوفة العكسية، استخدم الحاسبة.

إيجاد حل نظام 3x3 باستخدام مصفوفة عكسية

المعرفة المالية تستثمر بدرية AED 20,000 بشراء ثلاثة سندات ذات عوائد سنوية متوقعة نسبتها 10% و 8% و 6%. وتكون الاستثمارات ذات العائد المتوقع الأعلى أكثر خطورة غالبًا من الاستثمارات الأخرى. وترغب بدرية في تحقيق متوسط عائد سنوي يبلغ AED 1340. فإذا كانت تريد استثمار مبلغ في السند ذي العائد 6% يساوي ثلاثة أضعاف المبلغ المستثمر في السندين الأخريين مجتمعين، فكم يكون المبلغ اللازم استثماره في كل سند؟

① سند x 10٪
② سند y 8٪
③ سند z 6٪

$$x + y + z = 20000$$

$$0.10x + 0.08y + 0.06z = 1340$$

$$3x + 3y - z = 0 \quad \leftarrow \quad 3(x + y) = z$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0.10 & 0.08 & 0.06 \\ 3 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

بالآلة الحاسبة $A^{-1} = \begin{bmatrix} -3.25 & 50 & -0.25 \\ 3.5 & -50 & 0.5 \\ 0.75 & 0 & -0.25 \end{bmatrix}$

للاشتراك في قناة فيديوهات هيكل الفصل الثاني
050-2509447

$$AX = B$$

$$\Rightarrow X = A^{-1}B$$

$$= \begin{bmatrix} -3.25 & 50 & -0.25 \\ 3.5 & -50 & 0.5 \\ 0.75 & 0 & -0.25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20\,000 \\ 1340 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 20000(-3.25) + 1340(50) + 0(-0.25) \\ 20000(3.5) + 1340(-50) + 0(0.5) \\ 20000(0.75) + 1340(0) + 0(-0.25) \end{bmatrix}$$

استقرت بدرية:

$$= \begin{bmatrix} 2000 \to x \\ 3000 \to y \\ 15000 \to z \end{bmatrix} \Rightarrow$$

2000 درهم في السند ذو العائد 10٪
3000 درهم في السند ذو العائد 8٪
15000 درهم في السند ذو العائد 6٪

المفهوم الأساسي قاعدة كرامر

لنفرض أن A هو مصفوفة المعاملات في نظام n من المعادلات الخطية في n من المتغيرات، وتحددها المعادلة $AX = B$. فإذا كان $\det(A) \neq 0$، فإن الحل الوحيد للنظام تعبر عنه المعادلة

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}, x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}, x_3 = \frac{|A_3|}{|A|}, \ldots, x_n = \frac{|A_n|}{|A|},$$

حيث يتم الحصول على A_i باستبدال العمود i^{th} الخاص بـ A بعمود الحدود الثابتة B. وإذا كان المحدد $\det(A) = 0$، فإن $AX = B$ إما ليس لها حل أو لها عدد لا نهائي من الحلول.

استخدام قاعدة كرامر لحل نظام 2x2

استخدم قاعدة كرامر لإيجاد حل نظام المعادلات الخطية، إن وُجد حل وحيد.

Use Cramer's Rule to find the solution of the system of linear equations, if a unique solution exists.

$$3x_1 + 2x_2 = 6$$
$$-4x_1 - x_2 = -13$$

$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 6 \\ -13 \end{bmatrix}$

$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} = 5$

$x_1 = \dfrac{\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ -13 & -1 \end{vmatrix}}{5} = \dfrac{20}{5} = \boxed{4}$

للاشتراك في قناة فيديوهات هيكل الفصل الثاني
050-2509447

$x_2 = \dfrac{\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ -4 & -13 \end{vmatrix}}{5} = \dfrac{-15}{5} = \boxed{-3}$

حل النظام هو $(4, -3)$

$$-9x + 3y = 8$$
$$2x - y = -3$$

$A = \begin{bmatrix} -9 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} -9 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 3$

$x = \dfrac{\begin{vmatrix} 8 & 3 \\ -3 & -1 \end{vmatrix}}{3} = \dfrac{1}{3}$

$y = \dfrac{\begin{vmatrix} -9 & 8 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}}{3} = \dfrac{11}{3}$

حل النظام هو $\left(\frac{1}{3}, \frac{11}{3}\right)$

استخدام قاعدة كرامر لحل نظام 3x3

استخدم قاعدة كرامر لإيجاد حل نظام المعادلات الخطية، إن وُجد حل وحيد.

Use Cramer's Rule to find the solution of the system of linear equations, if a unique solution exists.

$$\begin{aligned} -x-2y &= -4z+12 \\ 3x-6y+z &= 15 \\ 2x+5y+1 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} -x-2y+4z &= 12 \\ 3x-6y+z &= 15 \\ 2x+5y+0z &= -1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 4 \\ 3 & -6 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 12 \\ 15 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \underbrace{(-1(-6)(0)+(-2)(1)(2)+4(3)(5))}_{56} - \underbrace{(2(-6)(4)+5(1)(-1)+0(3)(-2))}_{-53} = \boxed{109}$$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 12 & -2 & 4 \\ 15 & -6 & 1 \\ -1 & 5 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} 12 & -2 \\ 15 & -6 \\ -1 & 5 \end{matrix}$$

$$= \underbrace{(12(-6)(0)+(-2)(1)(-1)+4(15)(5))}_{302} - \underbrace{(-1(-6)(4)+5(1)(12)+0(15)(-2))}_{84} = \boxed{218}$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} -1 & 12 & 4 \\ 3 & 15 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} -1 & 12 \\ 3 & 15 \\ 2 & -1 \end{matrix}$$

$$= \underbrace{(-1(15)(0)+12(1)(2)+4(3)(-1))}_{12} - \underbrace{(2(15)(4)+(-1)(1)(-1)+0(3)(12))}_{121} = \boxed{-109}$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 12 \\ 3 & -6 & 15 \\ 2 & 5 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} -1 & -2 \\ 3 & -6 \\ 2 & 5 \end{matrix}$$

$$= \underbrace{(-1(-6)(-1)+(-2)(15)(2)+12(3)(5))}_{114} - \underbrace{(2(-6)(12)+5(15)(-1)+(-1)(3)(-2))}_{-213} = \boxed{327}$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{218}{109} = \boxed{2}$$

$$y = \frac{|A_y|}{A} = \frac{-109}{109} = \boxed{-1}$$

$$z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{327}{109} = \boxed{3}$$

حل النظام هو

$(2, -1, 3)$

050-2509447

$$\begin{aligned} 8x + 12y - 24z &= -40 \\ 3x - 8y + 12z &= 23 \\ 2x + 3y - 6z &= -10 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 8 & 12 & -24 \\ 3 & -8 & 12 \\ 2 & 3 & -6 \end{bmatrix} \begin{matrix} 8 & 12 \\ 3 & -8 \\ 2 & 3 \end{matrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -40 \\ 23 \\ -10 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \underbrace{8(-8)(-6) + 12(12)(2) + (-24)(3)(3)}_{456} - \underbrace{2(-8)(-24) + 3(12)(8) + (-6)(3)(12)}_{456} = 0$$

لذا $\det(A) = 0$ فإن النظام ليس له حل وحيد ولن نستطيع استخدام قاعدة كرامر.

للاشتراك في قناة فيديوهات هيكل الفصل الثاني
050-2509447

عمل المدرس / مصطفى أسامة علام
050-2509447

https://t.me/mathbook12GEN
قناة شرح فيديو رياضيات 12 عام

https://t.me/alllaaam82
قناة ملازم وامتحانات رياضيات

ورقة عمل الثاني عشر العام — 7-1 صيغتا نقطة المنتصف والمسافة بين نقطتين

في هذا الدرس سوف أتعلم: 1- إيجاد نقطة منتصف قطعة مستقيمة في المستوى الإحداثي. 2- إيجاد المسافة بين نقطتين في المستوى الإحداثي.

صيغة المسافة بين نقطتين $= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

إحداثيات نقطة المنتصف $= \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$

جد نقطة المنتصف للقطعة المستقيمة ذات النقطتين الطرفيتين عند الإحداثيات المعطاة.

$(-12, -2), (-10.5, -6)$

نقطة المنتصف $= \left(\frac{-12+(-10.5)}{2}, \frac{-2+(-6)}{2}\right)$

$= (-11.25, -4)$

$(-4, 7), (3, 9)$

نقطة المنتصف $= \left(\frac{-4+3}{2}, \frac{7+9}{2}\right)$

$= (-0.5, 8)$

جد المسافة بين كل زوج من النقاط المعطاة إحداثياتها.

$(0.25, 1.75), (3.5, 2.5)$

المسافة $= \sqrt{(3.5-0.25)^2 + (2.5-1.75)^2}$

$= 3.34$

$(3, -5), (13, -11)$

المسافة $= \sqrt{(13-3)^2 + (-11-(-5))^2}$

$= 2\sqrt{34} = 11.66$

للاشتراك في قناة تيليجرام هيكل الفصل الثاني
050-2509447

اختيار من متعدّد وُضعت شبكة أرقام فوق خريطة مركز تجاري. يقع كشك بيع الهواتف المحمولة في منتصف الطريق بين متجر المثلجات اللذيذة ومتجر رؤية للنظارات. إذا كان متجر المثلجات اللذيذة يقع عند النقطة (2, 4) ومتجر النظارات عند النقطة (78, 46) ، أوجد المسافة بين الكشك ومتجر النظارات.

A 43.4 وحدة B 47.2 وحدة C 62.4 وحدة D 94.3 وحدة



النظارات $(78, 46)$ — المثلجات $(2, 4)$

$AB = \sqrt{(78-2)^2 + (46-4)^2} = 86.83$

$AC = \frac{86.83}{2} = 43.4$

ورقة عمل الثاني عشر العام — 7-2 القطع المكافئ

في هذا الدرس سوف أتعلم: 1- كتابة معادلات القطوع المكافئة بالصيغة القياسية. 2- تمثيل القطوع المكافئة بيانيًا.

المسافة بين نقطتين $= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

إحداثيات نقطة المنتصف $= \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$

جد نقطة المنتصف للقطعة المستقيمة ذات النقطتين الطرفيتين عند الإحداثيات المعطاة.

$(-4, 7), (3, 9)$

نقطة المنتصف $= \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right) = \left(\frac{-4+3}{2}, \frac{7+9}{2}\right) = \left(\frac{-1}{2}, 8\right)$

جد المسافة بين كل زوج من النقاط المعطاة إحداثياتها.

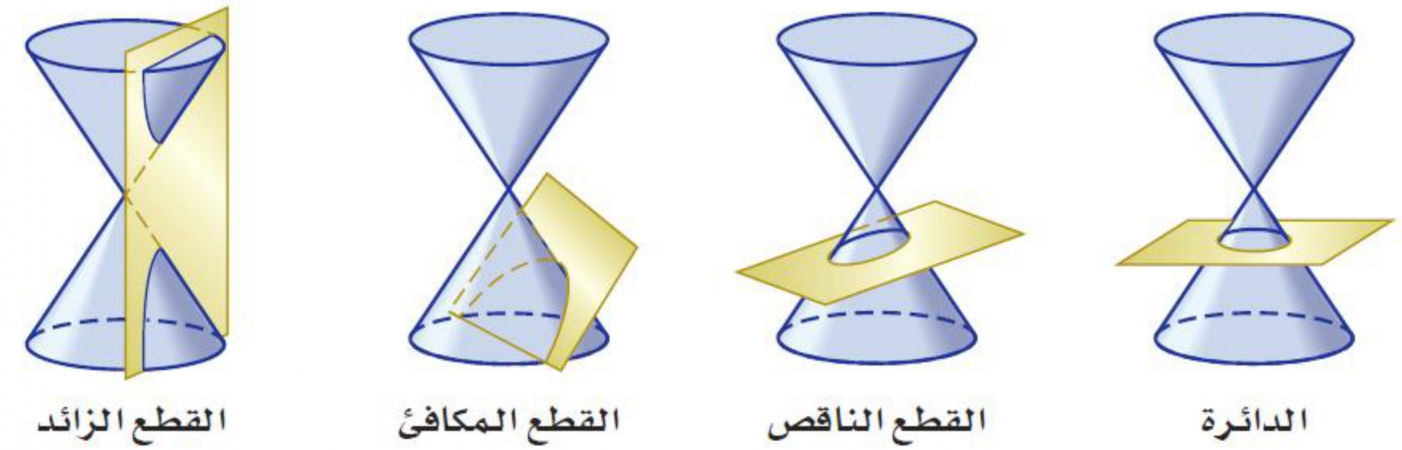
$(8, 1), (-2, 9)$

المسافة بين نقطتين $= \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$

$= \sqrt{(8-(-2))^2 + (1-9)^2} = \sqrt{100 + 64} = \sqrt{164} = 2\sqrt{41} = 12.81$

للاشتراك في قناة فيديوهات هيكل الفصل الثاني
050-2509447

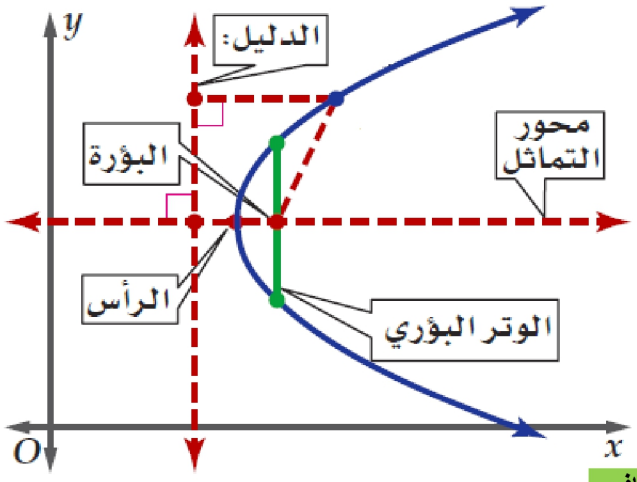
القطوع المخروطية هي الأشكال الناتجة عن تقاطع مستوى ما مع مخروطين دائريين قائمين متقابلين بالرأس، كليهما أو أحدهما. بحيث لا يمر المستوى بالرأس.



المحل الهندسي هو الشكل الهندسي الذي ينتج عن مجموعة النقاط التي تحقق خاصية هندسية معينة.

القطع المكافئ هو المحل الهندسي لمجموعة نقاط المستوى التي يكون بعد كل منها عن نقطة ثابتة تسمى **البؤرة** مساويًا دائمًا لبعدها عن مستقيم معلوم يسمى **الدليل**.

وتسمى القطعة المستقيمة المارة بالبؤرة والعمودية على محور التماثل **بالوتر البؤري**، ويقع طرفا الوتر البؤري على القطع المكافئ.



	القطع المكافئ الرأسي	القطع المكافئ الأفقي
المعادلة	$y = a(x-h)^2 + k$	$x = a(y-k)^2 + h$
الرأس	(h, k)	(h, k)

المسافة بين البؤرة والرأس = المسافة بين الدليل والرأس = $\left|\frac{1}{4a}\right|$

طول الوتر البؤري العمودي = $\left|\frac{1}{a}\right|$

تحليل معادلة القطع المكافئ

اكتب كل معادلة بالصيغة القياسية. حدد رأس القطع المكافئ ومحور تماثله واتجاه فتحته.

للاشتراك في قناة فيديوهات شرح الفصل الثاني
050-2509447

$y = 2x^2 - 24x + 40$

$\left(\frac{-12}{2}\right)^2 = 36$

$y = 2(x^2 - 12x + 36) + 40 - 2(36)$

$y = 2(x-6)^2 - 32$ ⇒ الصيغة القياسية

(6, -32) (6, -32) رأس القطع المكافئ

$x = 6$ محور التماثل

اتجاه فتحته لأعلى لأن معامل x^2 موجب.

$\left|\frac{1}{4a}\right| = \left|\frac{1}{4(2)}\right| = \frac{1}{8}$

⇒ البؤرة $= (6, -32 + \frac{1}{8}) = (6, -31.875)$

⇒ الدليل ⇒ $y = -32 - \frac{1}{8} = -32.125$

⇒ طول الوتر البؤري $= \left|\frac{1}{a}\right| = \left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$

$x + 3y^2 + 12y = 18$

$\left(\frac{4}{2}\right)^2 = 4$

$x = -3y^2 - 12y + 18$

$= -3(y^2 + 4y + 4) + 18 + 3(4)$

$= -3(y+2)^2 + 30$ ⇒ الصيغة القياسية

(30, -2)

رأس القطع المكافئ (30, -2)

محور التماثل $y = -2$

اتجاه فتحته لليسار لأن معامل y^2 سالب.

$\left|\frac{1}{4a}\right| = \left|\frac{1}{4(-3)}\right| = \frac{1}{12}$

⇒ البؤرة $= (30 - \frac{1}{12}, -2) = (29.916, -2)$

⇒ الدليل ⇒ $x = 30 + \frac{1}{12} = 30.083$

⇒ طول الوتر البؤري $= \left|\frac{1}{a}\right| = \left|\frac{1}{-3}\right| = \frac{1}{3}$

تمثيل القطع المكافئ بيانيًا

مثّل كل معادلة بيانيًا.

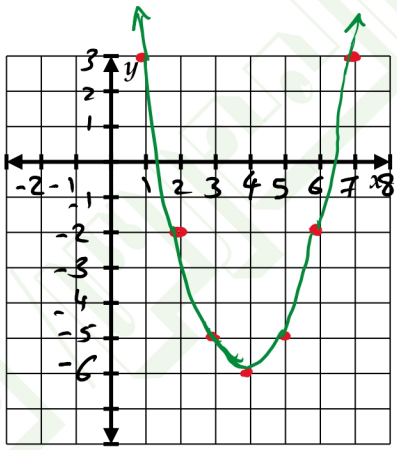
$$y = (x-4)^2 - 6$$

نقطة رأس $(4, -6)$

الفتحة لأعلى ، معادلة محور التماثل $x = 4$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y	10	3	-2	-5	-6	-5	-2	3	10

الرأس



للاشتراك في قناة فيديوهات هيكل الفصل الثاني
050-2509447

$$x = 3y^2 - 6y + 9$$

$$x = 3(y^2 - 2y + 1) + 9 - 3(1) \qquad \left(\frac{-2}{2}\right)^2 = 1$$

$$= 3(y-1)^2 + 6 \Rightarrow \text{الصيغة القياسية}$$

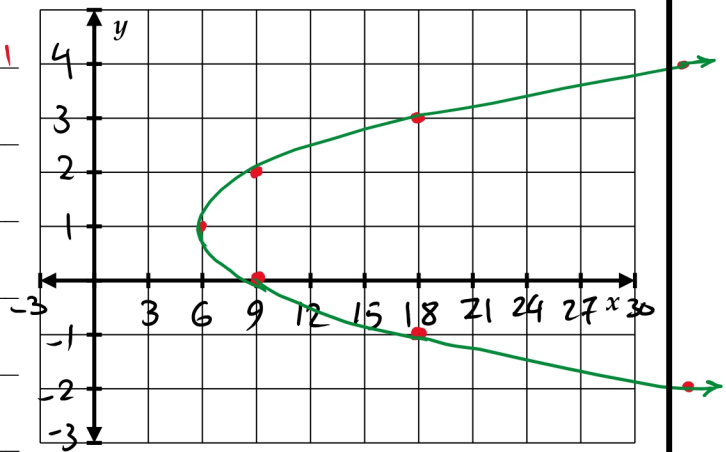
نقطة الرأس $(6, 1)$

الفتحة لليمين

معادلة محور التماثل $y = 1$

y	-2	-1	0	1	2	3	4
x	33	18	9	6	9	18	33

الرأس



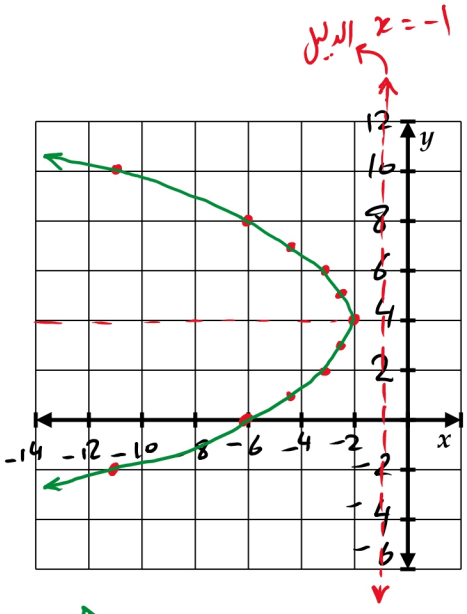
عمل المدرس / مصطفى أسامة علام
050-2509447

https://t.me/mathbook12GEN
قناة شرح فيديو رياضيات 12 عام
https://t.me/alllaaam82
قناة ملازم وامتحانات رياضيات

كتابة معادلة القطع المكافئ

اكتب معادلة لكل قطعٍ مكافئٍ موضح أدناه. ثم مثّل المعادلة بيانيًا.

الرأس $(-2, 4)$، الدليل $x = -1$



المسافة بين الدليل والرأس $= \frac{1}{4a} \Rightarrow 1 = \left|\frac{1}{4a}\right| \Rightarrow |a| = \frac{1}{4}$

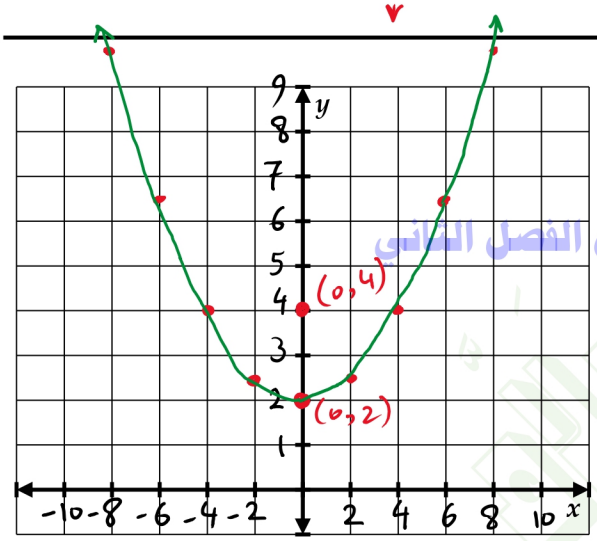
بما أن الدليل على يمين الرأس $\Leftarrow a = -\frac{1}{4}$

الفتحة لليسار

المعادلة $\Rightarrow x = -\frac{1}{4}(y-4)^2 - 2$

y	1	2	3	4	5	6	7	8	10
x	-4.25	-3	-2.25	-2	-2.25	-3	-4.25	-6	-11

الرأس $(0, 2)$، البؤرة $(0, 4)$



الاستراك في قناة فيديوهات هيكل الفصل الثاني
050-2509447

المسافة بين البؤرة والرأس $= \left|\frac{1}{4a}\right|$

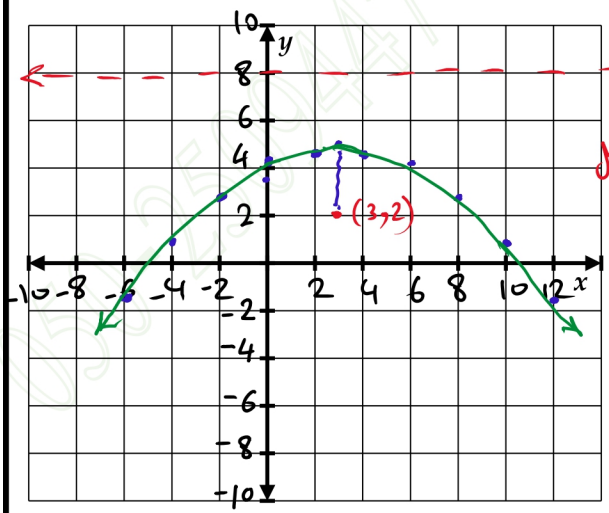
$2 = \left|\frac{1}{4a}\right| \Rightarrow |a| = \frac{1}{8}$

بما أن البؤرة فوق الرأس $\Leftarrow$ الفتحة لأعلى $\Leftarrow a = \frac{1}{8}$

المعادلة $\Rightarrow y = \frac{1}{8}x^2 + 2$ $\Rightarrow$ الصيغة القياسية

x	-4	-3	-2	-1	0 (الرأس)	1	2	3	4	6	8
y	4	3.125	2.5	2.125	2	2.125	2.5	3.125	4	6.5	10

البؤرة $(3, 2)$، الدليل $y = 8$



الرأس يقع منتصف البؤرة والدليل $\Rightarrow (3, 5)$

المسافة بين البؤرة والرأس $= \left|\frac{1}{4a}\right| \Rightarrow 3 = \left|\frac{1}{4a}\right|$

$\Rightarrow |a| = \frac{1}{4(3)} = \frac{1}{12} \Rightarrow a = -\frac{1}{12}$

لأن الدليل أعلى من الرأس $\Leftarrow$ الفتحة لأسفل.

المعادلة $\Rightarrow y = -\frac{1}{12}(x-3)^2 + 5$

x	-2	0	2	3	4	6	8	10	12
y	2.9	4.25	4.9	5	4.9	4.25	2.9	0.9	-1.75

علم الفلك خذ بعين الاعتبار المرآة الزئبقية التي لها شكل قطع مكافئ. البؤرة ترتفع **6 ft** فوق الرأس والوتر البؤري العمودي بطول **24 ft**.

a. افترض بأن البؤرة تقع عند نقطة الأصل. اكتب معادلة القطع المكافئ الذي يشكله الميكروفون ذو شكل القطع المكافئ.

b. مثّل المعادلة بيانيًا.



(a)

المسافة بين البؤرة والرأس $= \left|\frac{1}{4a}\right|$

$6 = \left|\frac{1}{4a}\right| \Rightarrow |a| = \frac{1}{24}$

$a = \frac{1}{24}$ لأن البؤرة فوق الرأس ← الفتحة لأعلى

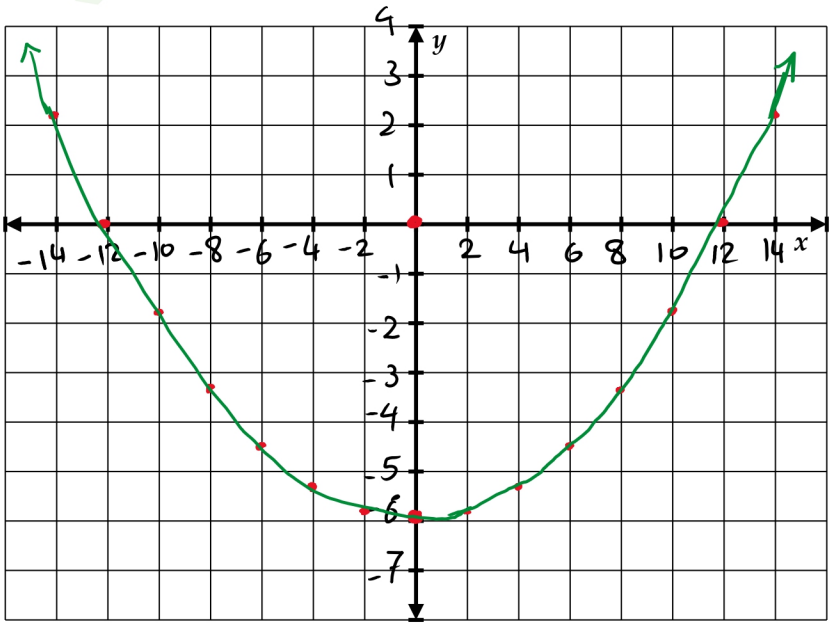
البؤرة $(0,0)$ ← الرأس $(0,-6)$ لأنه تحت البؤرة بـ 6

المعادلة $\Rightarrow y = \frac{1}{24}x^2 - 6$

للاشتراك في قناة فيديوهات هيكل الفصل الثاني
050-2509447

x	-10	-8	-6	-4	-2	0	2	4	6	8	10	12	14
y	-1.9	-3.3	-4.5	-5.3	-5.8	-6	-5.8	-5.3	-4.5	-3.3	-1.8	0	2.2

(b)



مع تحياتي / مصطفى علام
مدرس الرياضيات

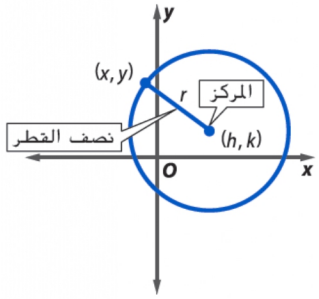
عمل المدرس / مصطفى أسامة علام
050-2509447

https://t.me/mathbook12GEN
قناة شرح فيديو رياضيات 12 عام

https://t.me/alllaaam82
قناة ملازم وامتحانات رياضيات

ورقة عمل الثاني عشر العام — 7-2 الدوائر

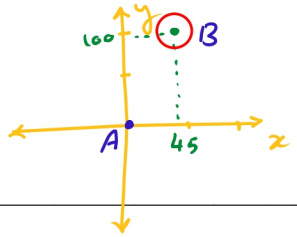
في هذا الدرس سوف أتعلم: 1- كتابة معادلة الدائرة. 2- تمثيل الدائرة بيانيًا.



الدائرة هي مجموعة جميع النقاط في مستوى والتي تقع على مسافة واحدة من نقطة معطاة في ذلك المستوى، يطلق عليها المركز.

معادلة الدائرة	$x^2+y^2=r^2$	$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$
الرأس	$(0,0)$	(h,k)

من الحياة اليومية: كتابة معادلة إذا علم نصف القطر



التوصيل الأجهزة + المزيد من عروض التوصيل المجاني في نطاق 35 كيلومتراً من المتجر. يقع متجر أبو ظبي على مسافة 100 km شمال مكتب الشركة و 45 km شرقًا. اكتب معادلة تمثل حدود التوصيل من متجر أبو ظبي إذا كان مصدر النظام الإحداثي هو مكتب الشركة.

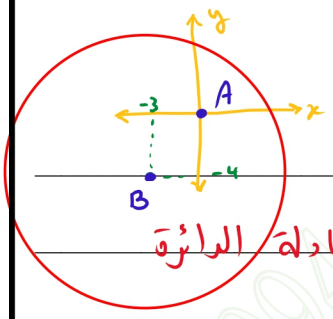
المركز $(45,100)$ ، نصف القطر (r) 35

قانون معادلة الدائرة $\Rightarrow$ $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

$(x-45)^2+(y-100)^2=35^2$

$(x-45)^2+(y-100)^2=1225$

للاشتراك في قناة فيديوهات هيكل الفصل الثاني
050250944



واي فاي مدى أحد هواتف واي فاي 30 km في أي اتجاه. إذا كان الهاتف يقع على مسافة 4 km جنوب المقر الرئيسي و 3 km غربًا. فاكتب معادلة تمثل المساحة التي يمكن تشغيل الهاتف في مداها عبر نظام واي فاي.

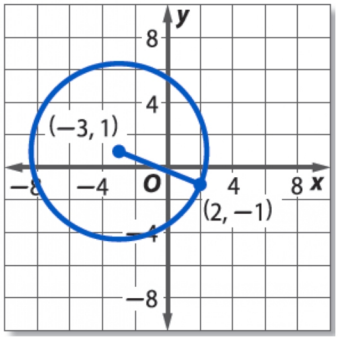
المركز $(-3,-4)$ ، $r=30$

قانون معادلة الدائرة $\Rightarrow$ $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

$(x+3)^2+(y+4)^2=30^2$

$(x+3)^2+(y+4)^2=900$

كتابة معادلة من تمثيل بياني



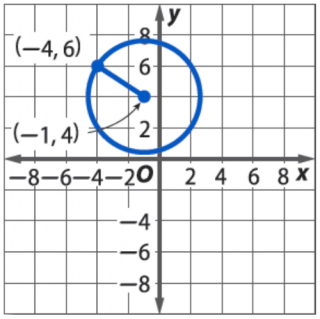
اكتب معادلة للتمثيل البياني.

المركز $(-3,1)$ ، $r=\sqrt{(-3-2)^2+(1-(-1))^2}=\sqrt{29}$

المعادلة $\Rightarrow$ $(x+3)^2+(y-1)^2=(\sqrt{29})^2$

$\Rightarrow (x+3)^2+(y-1)^2=29$

اكتب معادلة للتمثيل البياني.



المركز $(-1,4)$

$r^2 = (-4-(-1))^2 + (6-4)^2 = 13$

$\Rightarrow (x-(-1))^2 + (y-4)^2 = 13$

$(x+1)^2 + (y-4)^2 = 13$

كتابة معادلة إذا كان طرفي القطر معلومًا

اكتب معادلة لكل دائرة إذا علمتَ النقطتين الطرفيتين للقطر.

$(1, 5)$ و $(3, -3)$.

المركز هو نقطة منتصف $\overline{AB}$

المركز $= \left(\frac{1+3}{2}, \frac{5+(-3)}{2}\right) = (2, 1)$

$r = AM = \sqrt{(1-2)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{17}$

المعادلة $\Rightarrow (x-2)^2 + (y-1)^2 = (\sqrt{17})^2$

$\Rightarrow (x-2)^2 + (y-1)^2 = 17$

$(7, 6)$ و $(-1, -8)$.

المركز هو نقطة منتصف $\overline{AB}$

المركز $\left(\frac{-1+7}{2}, \frac{-8+6}{2}\right) = (3, -1)$

$r = AM = \sqrt{(-1-3)^2 + (-8-(-1))^2} = \sqrt{65}$

المعادلة $\Rightarrow (x-3)^2 + (y-(-1))^2 = (\sqrt{65})^2$

$\Rightarrow (x-3)^2 + (y+1)^2 = 65$

للمزيد في قناة فيديوهات لجميع الفصل الثاني
050-2509447

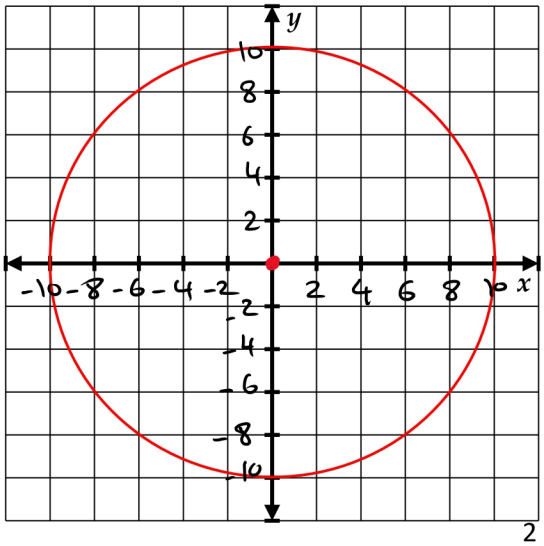
التمثيل البياني لمعادلة في الصيغة القياسية أو ليست في الصيغة القياسية

أوجد مركز كل دائرة ونصف قطرها. ثم مثّل الدائرة بيانيًا.

$x^2 + y^2 = 100$

المركز $= (0, 0)$

$r = \sqrt{100} = 10$



أوجد مركز كل دائرة ونصف قطرها. ثم مثّل الدائرة بيانيًا.

$x^2 + y^2 - 8x + 12y - 12 = 0$

نكتب المعادلة في الصيغة القياسية (بإكمال المربع)

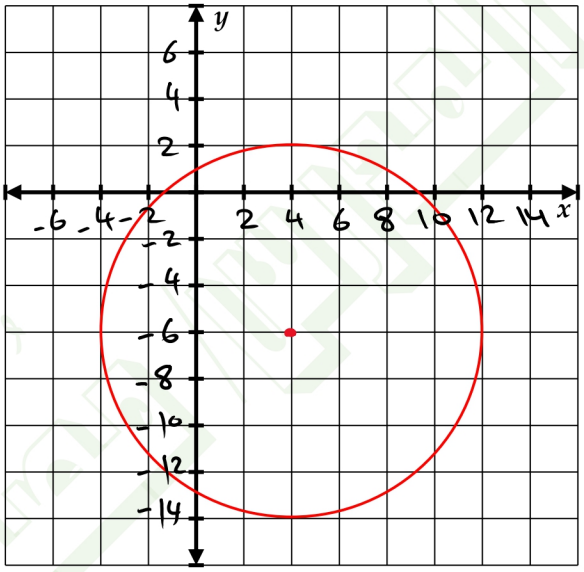
$x^2 - 8x + (\frac{8}{2})^2 + y^2 + 12y + (\frac{12}{2})^2 = 12 + (\frac{8}{2})^2 + (\frac{12}{2})^2$

$(x^2 - 8x + 16) + (y^2 + 12y + 36) = 12 + 16 + 36$

$(x-4)^2 + (y+6)^2 = 64$

$\Rightarrow$ المركز $= (4, -6)$

$r = \sqrt{64} = 8$



$x^2 + y^2 + 4x - 10y - 7 = 0$

للاشتراك في قناة فيديوهات هيكل الفصل الثاني
050-2509447

نكتب المعادلة في الصيغة القياسية (بإكمال المربع)

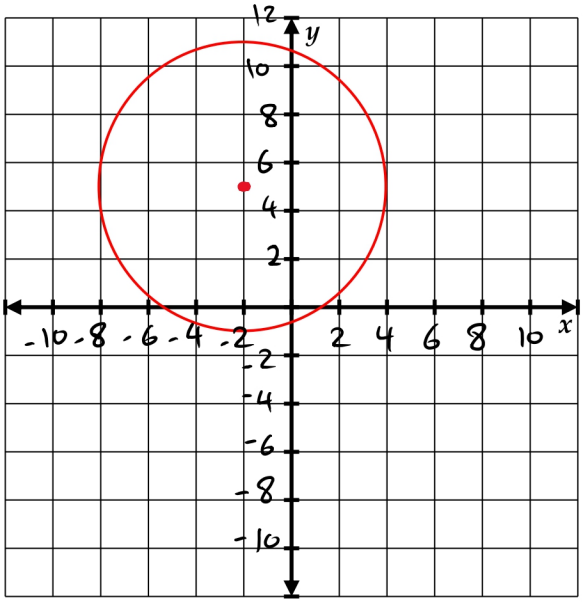
$x^2 + 4x + (\frac{4}{2})^2 + y^2 - 10y + (\frac{10}{2})^2 = 7 + (\frac{4}{2})^2 + (\frac{10}{2})^2$

$(x^2 + 4x + 4) + (y^2 - 10y + 25) = 7 + 4 + 25$

$(x+2)^2 + (y-5)^2 = 36$

المركز $= (-2, 5)$

$r = \sqrt{36} = 6$



مع تمنياتي / مصطفى علام
مدرس الرياضيات

ورقة عمل الثاني عشر العام **8-1 مقدمة في المتجهات**

في هذا الدرس سوف أتعلم: 1- تمثيل المتجهات واستخدامها هندسيًّا. 2- حل مسائل المتجهات وتحليل المتجهات إلى مركباتها المتعامدة.

الكميات الفيزيائية

كمية غير متجهة (قياسية أو عددية)

هي كمية لها قيمة عددية واحدة، ويدل هذا العدد على مقدار الكمية أو قياسها مثل الكتلة.

كمية متجهة

هي كمية لها مقدار واتجاه؛ فمثلًا سرعة الكرة المتجهة نحو المرمى جنوبًا تمثل كلًّا من: مقدار سرعة الكرة، واتجاه حركتها.

تحديد الكميات المتجهة

حدّد الكميات المتجهة، والكميات غير المتجهة في كلٍّ مما يأتي:

a. يسير قارب بسرعة 15 km/h.

كمية غير متجهة ؛ الكمية : 15 ، الاتجاه : غير موجود .

للاشتراك في قناة فيديوهات هيكل الفصل الثاني
050-2509447

b. متجول يسير 25 خطوة باتجاه الغرب.

كمية متجهة ؛ الكمية : 25 ، الاتجاه : الغرب .

c. وزن شخص على ميزان حمّام.

كمية متجهة ؛ الكمية : الوزن ، الاتجاه : لأسفل بفعل الجاذبية الأرضية .

d. تسير السيارة بسرعة 60 km/h بزاوية 15° في اتجاه الجنوب الشرقي.

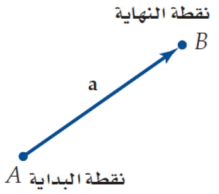
كمية متجهة ؛ الكمية : 60 ، الاتجاه : 15 اتجاه الجنوب الشرقي .

e. يهبط قافز بالمظلات لأسفل مباشرة بسرعة 20.2 km/h .

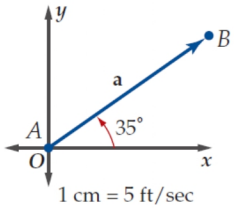
كمية متجهة ؛ الكمية : 20.2 ، الاتجاه : أسفل .

f. يسحب طفل زلاجة بقوة مقدارها 40 N.

كمية غير متجهة ؛ الكمية 40 ، الاتجاه : لا يوجد .



يمكن تمثيل الكمية المتجِهة بسهم يُظهر كلًا من المقدار والاتجاه ويسمى هذا التمثيل **متجهًا**. ويمثِّل الشكل المجاور المتجه الذي له **نقطة البداية** A، و**نقطة النهاية** B. ويرمز لهذا المتجه بالرمز $\overrightarrow{AB}$ أو $\vec{a}$ أو $\boldsymbol{a}$.



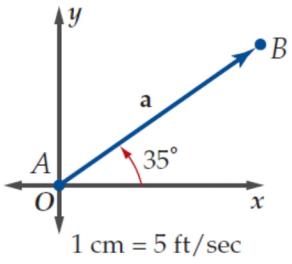
أما **طول المتجه** فهو مقدار المتجه ويمثله طول القطعة المستقيمة، ويتناسب مع مقدار الكمية المتجِهة، ففي الشكل المجاور، إذا كان مقياس الرسم هو 1 cm = 5 ft/s ، فإن طول المتجه a ، ويرمز له بالرمز |a| ، يساوي 5 x 2.6 أو 13 ft/s .

يكون المتجه في **الوضع القياسي**. إذا كانت نقطة بداية المتجه هي نقطة الأصل.

طرق التعبير عن اتجاه المتجه في الوضع القياسي

الاتجاه الأفقي

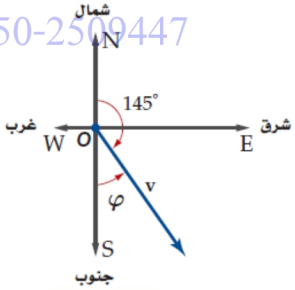
الزاوية التي يصنعها المتجه مع الجزء الموجب لمحور x عكس عقارب الساعة



35°

الاتجاه الربعي φ

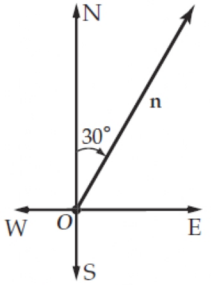
φ تقرا فاي، وهي زاوية قياسها بين 0° و 90° شرق أو غرب الخط الرأسي (شمال أو جنوب)



S 35° E

الاتجاه الحقيقي

تقاس زاوية الاتجاه الحقيقي بدءًا من الشمال فقط ومع عقارب الساعة. وتكتب الزاوية بثلاثة أرقام.

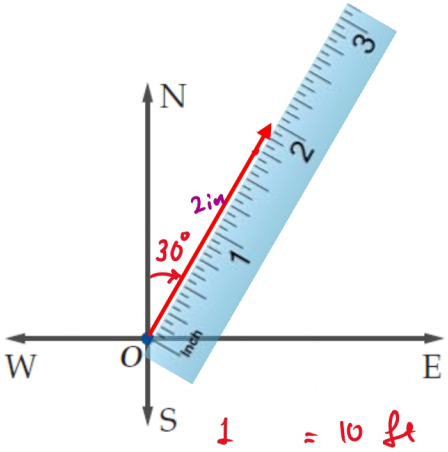


030°

للاشتراك في قناة تدريباتي شامل الفصل الثاني
050-2509447

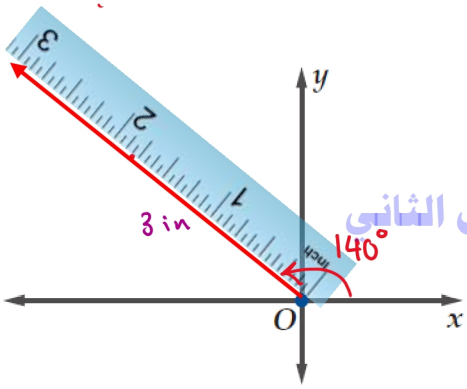
استخدم مسطرةً أو منقلةً؛ لرسم متجه لكلٍّ من الكميات الآتية، واكتب مقياس الرسم في كل حالة:

(a $a = 20\ ft/s$ باتجاه $030°$.



* مقياس الرسم: 2 in = 20 ft
1 in = 10 ft
* الزاوية 30° باتجاه تقارب الساعة من الشمال
* الطول في الرسم: 2 in

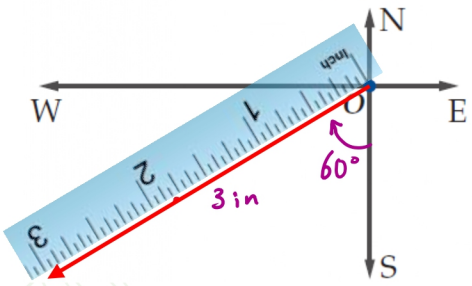
(b $v = 75\ N$ ، بزاوية قياسها $140°$ مع الاتجاه الأفقي.



* الزاوية 140° عكس تقارب الساعة من الجزء الموجب لمحور x
* الطول 3 in
3 in = 75 N
* مقياس الرسم
1 in = 25 N

للاشتراك في قناة فيديوهات هيكل الفصل الثاني
050-2509447

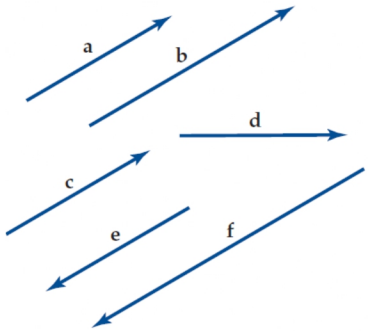
(c $z = 30\ mi/h$ ، باتجاه $S\ 60°\ W$.



* الزاوية 60° غرب الجنوب
* الطول في الرسم 3 in
* مقياس الرسم: 3 in = 30 mi
1 in = 10 mi

تنبيه! يمكن أن يمثل طول المتجه مسافة، أو سرعة، أو قوة. وإذا مثل المتجه سرعة، فإن طوله لا يمثل المسافة المقطوعة.

عند إجرائك العمليات على المتجهات، فإنك تحتاج إلى الأنواع الشائعة الآتية من المتجهات:



- **المتجهات المتوازية** لها الاتجاه نفسه، أو اتجاهان متعاكسان، وليس بالضرورة أن يكون لها الطول نفسه. فمثلًا في الشكل المجاور $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b} \parallel \mathbf{c} \parallel \mathbf{e} \parallel \mathbf{f}$.
- **المتجهات المتساوية** لها الاتجاه نفسه، والطول نفسه. ففي الشكل المجاور $\mathbf{a}, \mathbf{c}$ ؛ لهما الطول والاتجاه نفساهما، لذا هما متساويان، ويعبَّر عنه بالرموز: $\mathbf{a} = \mathbf{c}$.
لاحظ أن $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$ ؛ لأن $|\mathbf{a}| \neq |\mathbf{b}|$ و $\mathbf{a} \neq \mathbf{d}$ ؛ لأن لهما اتجاهين مختلفين.
- **معكوس المتجه** هو متجه له طول المتجه $\mathbf{a}$ ، ولكنه في اتجاه معاكس له، ويكتب على الصورة $-\mathbf{a}$، ففي الشكل المجاور $\mathbf{e} = -\mathbf{a}$.

عند جمع متجهين أو أكثر يكون الناتج متجهًا، ويسمى المحصّلة أو الناتج. ويكون لمتجه المحصّلة التأثير نفسه الناتج عن تأثير المتجهين الأصليين عند تطبيقهما واحدًا تلو الآخر. ويمكن إيجاد المحصّلة هندسيًّا باستعمال قاعدة المثلث، أو قاعدة متوازي الأضلاع.

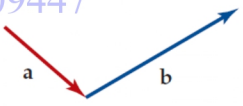
مفهوم أساسي — إيجاد المحصلة

قاعدة المثلث (الطرف إلى الذيل)

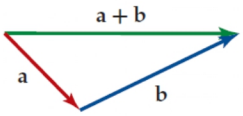
لإيجاد محصّلة المتجهين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ ، اتّبع الخطوتين الآتيتين:



الخطوة 1 أجرِ انسحابًا للمتجه $\mathbf{b}$ ، بحيث تلتقي نقطة بدايته مع نقطة نهاية المتجه $\mathbf{a}$.



الخطوة 2 محصلة المتجهين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ هي المتجه المرسوم من نقطة بداية $\mathbf{a}$ إلى نقطة نهاية $\mathbf{b}$.

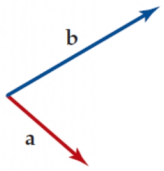


قاعدة متوازي الأضلاع (الذيل إلى الذيل)

لإيجاد محصّلة المتجهين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ ، اتّبع الخطوات الآتية :

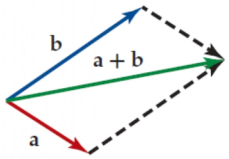


الخطوة 1 أجرِ انسحابًا للمتجه $\mathbf{b}$ ، بحيث تلتقي نقطة بدايته مع نقطة بداية المتجه $\mathbf{a}$.



الخطوة 2 أكمل رسم متوازي الأضلاع الذي ضلعاه $\mathbf{a}, \mathbf{b}$.

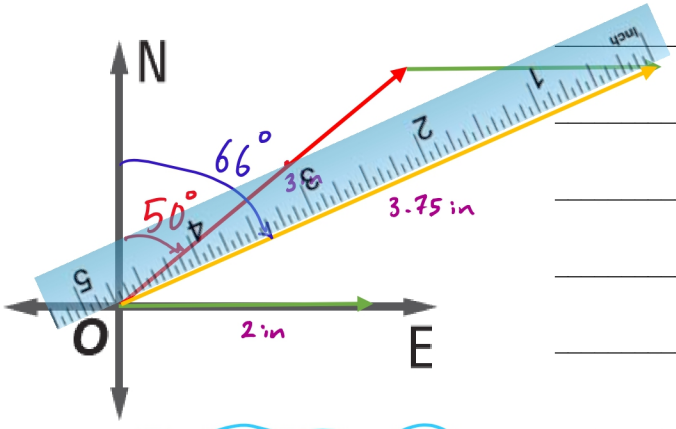
الخطوة 3 محصلة المتجهين هي المتجه الذي يُمثّله قطر متوازي الأضلاع .



للاشتراك في قناة فيديوهات شرح الفصل الثاني
050-2509447

إيجاد محصلة (ناتج) متجهين

رياضة المشي: قطع عبد اللّه في سباق للمشي، مسافة 120 m باتجاه N 50° E ، ثم مسافة 80 m في اتجاه الشرق. كم يبعُد عبد الله عن نقطة البداية، وما هي زاوية الاتجاه الربعي؟



المتجه الأول: * زاوية 50 شرق الشمال .
* الطول 3 in
* قياس الرسم: 3 in = 120 m
1 in = 40 m

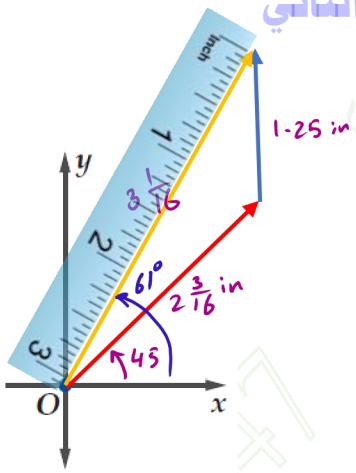
المتجه الثاني: * اتجاه الشرق .
* الطول 1 in = 40 m
$x = 80$ m
$\rightarrow x = \frac{80}{40} =$ 2 in

المحصلة باستخدام قاعدة المثلث $4.75 \times 40 = 190$ m في اتجاه N 66° E

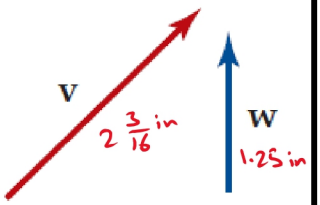
ملاحظة ← الرسم بالمسطرة والمنقلة .

أوجد محصلة كل زوج من المتجهات الآتية مستعملًا قاعدة المثلث، أو متوازي الأضلاع. ثمّ حدّد اتجاهها بالنسبة للأفقي.

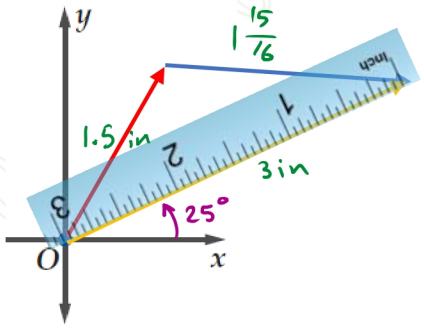
للاشتراك في قناة فيديوهات هيكل الفصل الثاني
050-2509447



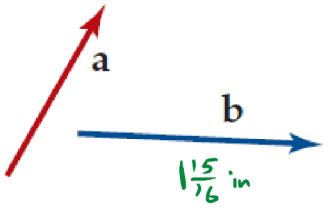
المحصلة: $3\frac{1}{16}$ in
الاتجاه: 61°



ملاحظة ← الرسم بالمسطرة والمنقلة .



المحصلة: 3 in
الاتجاه: 25°



ملاحظة ← الرسم بالمسطرة والمنقلة .

عند جمع متجهين متعاكسين لهما الطول نفسه، فإن المحصلة هي المتجه الصفري. ويرمز له بالرمز $\vec{0}$ أو 0، وليس له اتجاه.

مفهوم أساسي

ضرب المتجه في عدد حقيقي

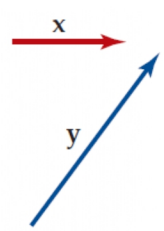
إذا ضُرب المتجه $\mathbf{v}$ في عدد حقيقي k ينتج المتجه $k\mathbf{v}$ الذي يوازي المتجه $\mathbf{v}$، ويكون طول المتجه $k\mathbf{v}$ هو $|k|\,|\mathbf{v}|$. ويتحدّد اتجاهه بإشارة k.

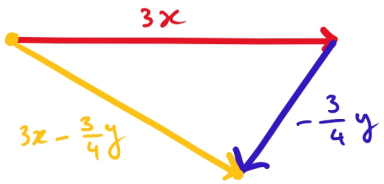
- إذا كانت $k > 0$، فإن اتجاه $k\mathbf{v}$ هو اتجاه $\mathbf{v}$ نفسه.
- إذا كانت $k < 0$، فإن اتجاه $k\mathbf{v}$ هو عكس اتجاه $\mathbf{v}$.

العمليات على المتجهات

ارسم المتجه الذي يُمثّل كلًّا مما يأتي :

$3x - \frac{3}{4}y$

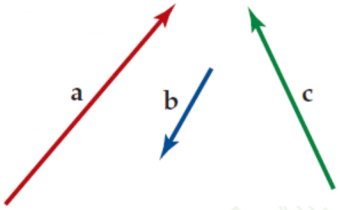


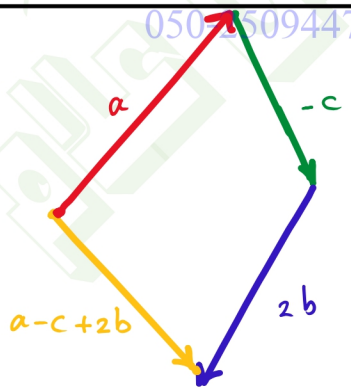


* نرسم متجه في نفس اتجاه x وطوله 3 أضعاف |x|
* نرسم متجه عكس اتجاه y وطوله = $\frac{3}{4}|y|$
* نضع ذيل المتجهين عند رأس المتجه الآخر
* ثم نرسم متجه المحصلة بقاعدة المثلث.

للاشتراك في قناة فيديوهات هيكل الفصل الثاني
0502509447

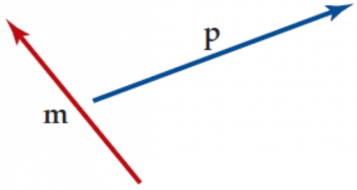
$a - c + 2b$

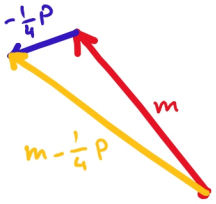




* نرسم نفس المتجه a
* نرسم عكس المتجه c
* نرسم متجه في نفس اتجاه b وطوله نفس b مرتين.
* ثم نضع ذيل المتجه على رأس الآخر
* ثم نصل المحصلة.

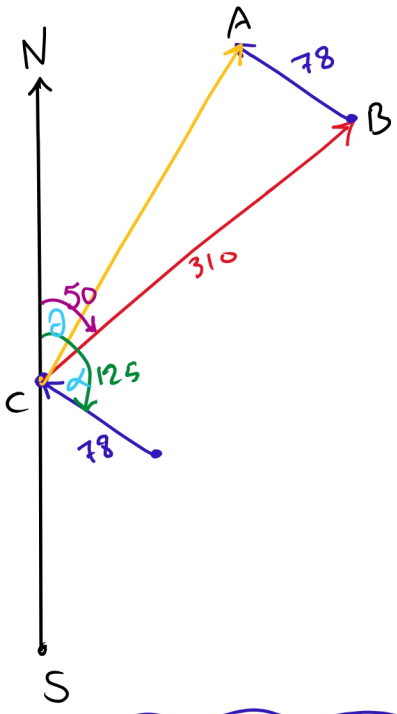
$m - \frac{1}{4}p$





* نرسم نفس m
* نرسم متجه عكس اتجاه p وطوله $\frac{1}{4}|p|$
* نسحب أحدهما لينطبق ذيله على رأس الآخر
* نصل المحصلة.

الطيران تطير طائرة بسرعة جوية 310 km/h باتجاه 050°. إذا كانت الرياح تهب بسرعة 78-km/h من اتجاه حقيقي 125°، فحدد سرعة الطائرة واتجاهها بالنسبة إلى الأرض.



$m\angle B = m\angle \alpha = 125 - 50 = 75°$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$

$\Rightarrow b = \sqrt{310^2 + 78^2 - 2(310)(78)\cos 75} = 299.45$

$\frac{\sin C}{78} = \frac{\sin 75}{299.445}$

$\Rightarrow C = \sin^{-1}\frac{78\sin 75}{299.445} = 14.57°$

$\theta = 50 - 14.57 = 35.43°$

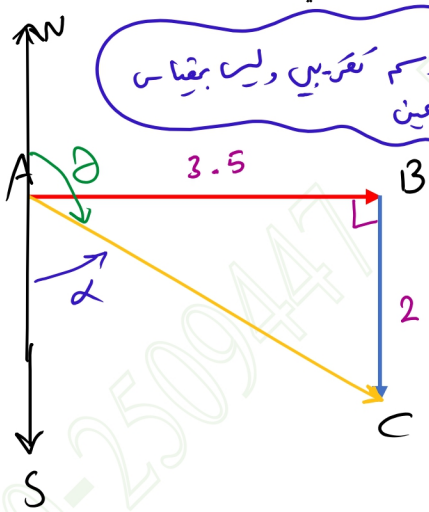
سرعة الطائرة بالنسبة للأرض هي 299.45 km/h

في اتجاه 035° تقريبًا.

ملاحظة: الرسم تقريبي وليس بمقياس معين

للاشتراك في قناة فيديوهات هيكل الفصل الثاني
050-2509447

السباحة يسبح إبراهيم في اتجاه الشرق بسرعة 3.5 ft/s عبر نهر متجهًا مباشرة نحو الضفة المقابلة. وفي الوقت ذاته، يحمله تيار النهر باتجاه الجنوب بمعدل 2 ft/s . جد سرعة إبراهيم واتجاهه بالنسبة للشاطئ.



ملاحظة: الرسم تقريبي وليس بمقياس معين

باستخدام فيثاغورس

$b = \sqrt{3.5^2 + 2^2} = 4.03$

$\tan A = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}}$

$\tan A = \frac{2}{3.5}$

$A = \tan^{-1}\frac{2}{3.5} = 29.74°$

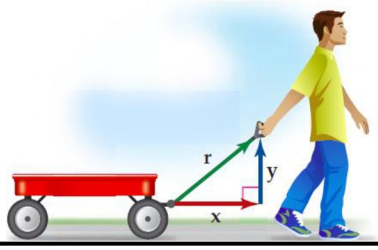
$\theta = 90 + 29.74 = 119.74°$

$\alpha = 90 - 29.74 = 60.26°$

السرعة ⇐ 4.03 ft/s

الاتجاه S 60.26 E

السرعة ⇐ 4.03 ft/s والاتجاه الحقيقي 120° تقريبًا



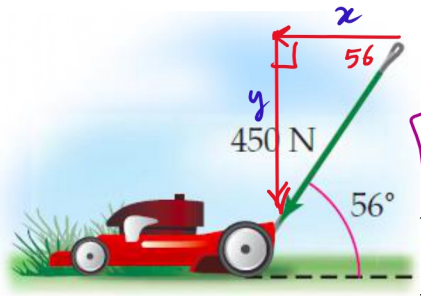
تطبيقات المتجهات: يُسمى المتجهان اللّذان ناتج جمعهما المتجه r، **مركبتي** r. ومع أن مركبتي المتجه يمكن أن تكونا في أي اتجاه، إلا أنه من المفيد غالبًا تحليل المتجه إلى **مركبتين متعامدتين**، واحدة أفقية، والأخرى رأسية. ففي الشكل المجاور، يمكن اعتبار القوة r المبذولة لسحب العربة بصفتها مجموع مركبتين هما أفقية x تحرك العربة إلى الأمام، ورأسية y تسحب العربة إلى أعلى.

تحليل القوة إلى مركبتين متعامدتين

قص العشب: يدفع علي عربة قصِّ العشب بقوة مقدارها 450 N ، وبزاويةٍ قياسها 56° مع الأفقي (سطح الأرض).

a) ارسم شكلًا يوضِّح تحليل القوة التي يبذلها علي إلى مركبتين متعامدتين.

b) أوجد مقدار كلٍّ من المركبتين؛ الأفقية والرأسية للقوة.

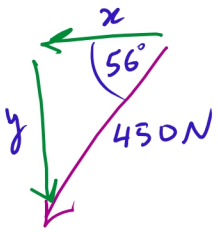


b

المركبة الأفقية $|x| = 450 \cos 56 = 251.64$ N

المركبة الرأسية $|y| = 450 \sin 56 = 373.07$ N

a



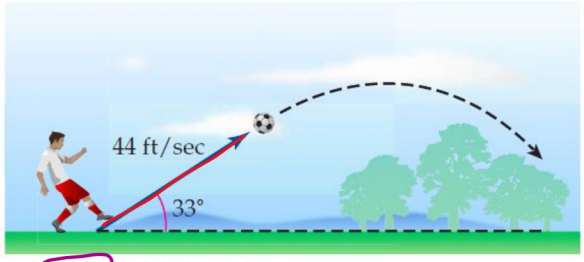
* مقدار المركبة الأفقية 252 N تقريبًا.
* مقدار المركبة الرأسية 373 N تقريبًا.

للاشتراك في قناة فيديوهات هيكل الفصل الثاني
050-2509447

كرة قدم: يركل لاعبٌ كرةَ قدمٍ من سطح الأرض بسرعةٍ مقدارها 44 ft/s ، وبزاويةٍ قياسها 33° مع سطح الأرض كما في الشكل أدناه.

A) ارسم شكلًا يوضِّح تحليل هذه السرعة إلى مركبتين متعامدتين.

B) أوجد مقدار كلٍّ من المركبتين الأفقية والرأسية للسرعة .

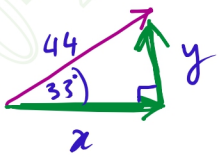


B

المركبة الأفقية $|x| = 44 \cos 33 = 36.9$ ft/sec

المركبة الرأسية $|y| = 44 \sin 33 = 23.96$ ft/sec

A



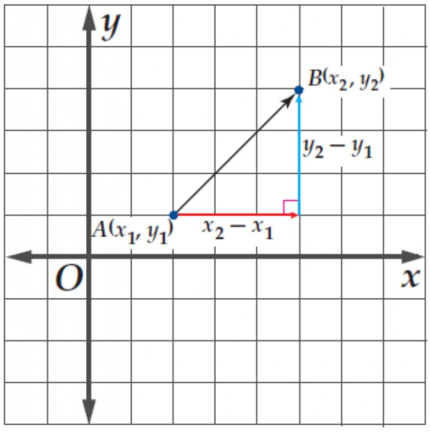
مقدار المركبة الأفقية 36.9 ft/sec تقريبًا.

مقدار المركبة الرأسية 23.96 ft/sec تقريبًا.

ورقة عمل الثاني عشر العام — 8-2 المتجهات في المستوى الإحداثي

في هذا الدرس سوف أتعلم: 1- تمثيل وإجراء العمليات على المتجهات في المستوى الإحداثي. 2- كتابة المتجه باستخدام متجهي الوحدة.

مفهوم أساسي — الصورة المرَكَّبة للمتجه



الصورة المرَكَّبة لـ $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته $A(x_1, y_1)$ ، ونقطة نهايته $B(x_2, y_2)$ هي :

$$\langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle$$

التعبير عن المتجه بالصورة (المركبة)

أوجد الصورة (المركبة) لـ $\overrightarrow{AB}$ المعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كلٍ ممَّا يأتي:

$A(-2,-7), B(6,1)$

$\overrightarrow{AB} = \langle 6-(-2), 1-(-7) \rangle$

$= \langle 8, 8 \rangle$

$A(0,8), B(-9,-3)$

$\overrightarrow{AB} = \langle -9-0, -3-8 \rangle$

$= \langle -9, -11 \rangle$

$A(-4,2), B(3,-5)$

$\overrightarrow{AB} = \langle x_2-x_1, y_2-y_1 \rangle$

$= \langle 3-(-4), -5-2 \rangle$

$= \langle 7, -7 \rangle$

للاشتراك في قناة فيديوهات هيكل الفصل الثاني
050-2509447

إذا كان $\mathbf{v}$ متجهًا، نقطة بدايته (x_1, y_1) ، ونقطة نهايته (x_2, y_2) ، فإن طول $\mathbf{v}$ يُعطى بالصيغة:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

وإذا كانت $\langle a, b \rangle$ هي الصورة الإحداثية للمتجه $\mathbf{v}$ فإن : $|\mathbf{v}| = \sqrt{a^2 + b^2}$

إيجاد طول (مقدار) متجه

أوجد طول $\overrightarrow{AB}$ المعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كلٍ مما يأتي:

$A(-2,-7), B(6,1)$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$

$= \sqrt{(6-(-2))^2 + (1-(-7))^2}$

$= 8\sqrt{2} = 11.31$

$A(0,8), B(-9,-3)$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$

$= \sqrt{(-9-0)^2 + (-3-8)^2}$

$= \sqrt{202} = 14.21$

$A(-4,2), B(3,-5)$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$

$= \sqrt{(3-(-4))^2 + (-5-2)^2}$

$= 7\sqrt{2} = 9.9$

مفهوم أساسي — العمليات على المتجهات

إذا كان $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2 \rangle$ متجهين، و k عددًا حقيقيًّا، فإن:

جمع متجهين: $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2 \rangle$

طرح متجهين: $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2 \rangle$

ضرب متجهٍ في عددٍ حقيقيٍّ: $k\,\mathbf{a} = \langle ka_1, ka_2 \rangle$

العمليات على المتجهات

جد كلًّا مما يأتي للمتجهات $w = \langle -4, 1 \rangle$, $z = \langle -3, 0 \rangle$, $y = \langle 2, 5 \rangle$:

$w + y$

$= \langle -4, 1 \rangle + \langle 2, 5 \rangle$

$= \langle -4+2 \ , \ 1+5 \rangle$

$= \langle -2 \ , \ 6 \rangle$

$z - 2y$

$= \langle -3, 0 \rangle - 2\langle 2, 5 \rangle$

$= \langle -3, 0 \rangle - \langle 4, 10 \rangle$

$= \langle -3-4 \ , \ 0-10 \rangle = \langle -7, -10 \rangle$

$2w + 4y - z$

$= 2\langle -4, 1 \rangle + 4\langle 2, 5 \rangle - \langle -3, 0 \rangle$

$= \langle -8, 2 \rangle + \langle 8, 20 \rangle - \langle -3, 0 \rangle$

$= \langle -8+8-(-3) \ , \ 2+20-0 \rangle = \langle 3, 22 \rangle$

متجهات الوحدة: يُسمّى المتجه الذي طوله 1 **متجه الوحدة**، ويرمز له بالرمز $\mathbf{u}$ ، ولإيجاد متجه الوحدة $\mathbf{u}$ الذي له نفس اتجاه المتجه $\mathbf{v}$ ، اقسم المتجه $\mathbf{v}$ على طوله $|\mathbf{v}|$.

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{1}{|\mathbf{v}|}\,\mathbf{v}$$

للاشتراك في قناة فيديوهات هيكل الفصل الثاني

العمليات على المتجهات

أوجد متجه الوحدة الذي له نفس اتجاه المتجه المُعطى في كلٍّ ممَّا يأتي:

$\mathbf{v} = \langle -2, 3 \rangle$

$|v| = \sqrt{(-2)^2 + (3)^2} = \sqrt{13}$

$u = \frac{v}{|v|}$

$= \frac{\langle -2, 3 \rangle}{\sqrt{13}}$

$= \left\langle \frac{-2}{\sqrt{13}} \ , \ \frac{3}{\sqrt{13}} \right\rangle$

$= \left\langle \frac{-2\sqrt{13}}{13} \ , \ \frac{3\sqrt{13}}{13} \right\rangle$

$\mathbf{x} = \langle -4, -8 \rangle$

$|x| = \sqrt{(-4)^2 + (-8)^2} = 4\sqrt{5}$

$u = \frac{x}{|x|}$

$= \frac{\langle -4, -8 \rangle}{4\sqrt{5}}$

$= \left\langle \frac{-4}{4\sqrt{5}} \ , \ \frac{-8}{4\sqrt{5}} \right\rangle$

$= \left\langle \frac{-\sqrt{5}}{5} \ , \ \frac{-2\sqrt{5}}{5} \right\rangle$

$\mathbf{w} = \langle 6, -2 \rangle$

$|w| = \sqrt{6^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{10}$

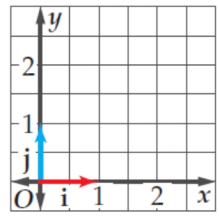
$u = \frac{w}{|w|}$

$= \frac{\langle 6, -2 \rangle}{2\sqrt{10}}$

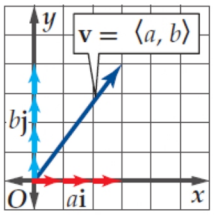
$= \left\langle \frac{6}{2\sqrt{10}} \ , \ -\frac{2}{2\sqrt{10}} \right\rangle$

$= \left\langle \frac{3\sqrt{10}}{10} \ , \ -\frac{\sqrt{10}}{10} \right\rangle$

يُرمز لمتجهي الوحدة بالاتجاه الموجب لمحور x، والاتجاه الموجب لمحور y بالرمزين $\mathbf{i} = \langle 1, 0 \rangle$ ، $\mathbf{j} = \langle 0, 1 \rangle$ على الترتيب كما في الشكل 1.2.3 . كما يُسمَّى المتجهان $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ **متجهَي الوحدة القياسيين**.



الشكل 1.2.3



الشكل 1.2.4

ويمكن استعمال هذين المتجهين للتعبير عن أي متجه $\mathbf{v} = \langle a, b \rangle$ على الصورة $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ كما في الشكل 1.2.4 تسمى الصورة $a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ **توافقًا خطيًّا** للمتجهين $\mathbf{i}, \mathbf{j}$. ويُقصد بها كتابة المتجه بدلالة متجهَي الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}$

كتابة متجهٍ على صورة توافق خطي لمتجهَي الوحدة

اكتب المتجه $\overrightarrow{DE}$ المُعطى نقطتا بدايته ونهايته على صورة توافقٍ خطيٍّ لمتجهَي الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ في كلٍّ ممَّا يأتي :

$D(-6, 0), E(2, 5)$

الصورة المركبة

$\overrightarrow{DE} = \langle 2-(-6), 5-0 \rangle$

$= \langle 8, 5 \rangle$

صورة التوفيق الخطي

$\overrightarrow{DE} = 8\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$

$D(-3, -8), E(-7, 1)$

الصورة المركبة

$\overrightarrow{DE} = \langle -7-(-3), 1-(-8) \rangle$

$= \langle -4, 9 \rangle$

صورة التوفيق الخطي

$\overrightarrow{DE} = -4\mathbf{i} + 9\mathbf{j}$

$D(-2, 3), E(4, 5)$

الصورة المركبة

$\overrightarrow{DE} = \langle 4-(-2), 5-3 \rangle$

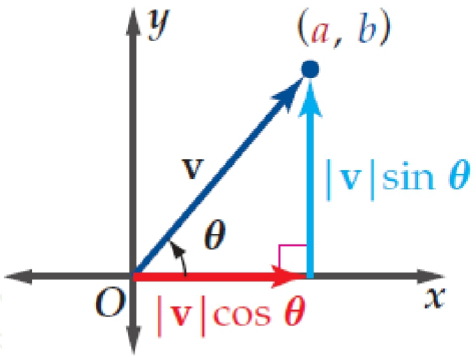
$= \langle 6, 2 \rangle$

صورة التوفيق الخطي

$\overrightarrow{DE} = 6\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$

للاستزادة شاهد قناة فيديوهات كل الحل الثاني
050250944

يمكن كتابة المتجه $\mathbf{v} = \langle a, b \rangle$ ، باستخدام زاوية الاتجاه التي يصنعها $\mathbf{v}$ مع الاتجاه الموجب لمحور x. فمن الشكل يمكن كتابة $\mathbf{v}$ على الصور:



المركبة

الصورة الإحداثية $\mathbf{v} = \langle a, b \rangle$

عوّض $= \langle |\mathbf{v}| \cos\theta, |\mathbf{v}| \sin\theta \rangle$

توافق خطي من $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ $= |\mathbf{v}| (\cos\theta)\mathbf{i} + |\mathbf{v}| (\sin\theta)\mathbf{j}$

إيجاد الصورة (المركبة) لمتجه بمعلومية طوله وزاوية اتجاهه مع الأفقي

أوجد الصورة المركبة للمتجه v المُعطى طوله وزاوية اتجاهه مع الأفقي في كلٍّ ممَّا يأتي:

$|\mathbf{v}| = 24, \theta = 210°$

$\mathbf{v} = 24\cos 210\,\mathbf{i} + 24\sin 210\,\mathbf{j}$

$= -12\sqrt{3}\,\mathbf{i} - 12\,\mathbf{j}$

$\mathbf{v} = \langle -12\sqrt{3}, -12 \rangle$

$|\mathbf{v}| = 8, \theta = 45°$

$\mathbf{v} = 8\cos 45\,\mathbf{i} + 8\sin 45$

$= 4\sqrt{2}\,\mathbf{i} + 4\sqrt{2}\,\mathbf{j}$

$\mathbf{v} = \langle 4\sqrt{2}, 4\sqrt{2} \rangle$

$= \langle 5.7, 5.7 \rangle$

طوله 10 ، وزاوية اتجاهه 120° مع الأفقي.

$\mathbf{v} = 10\cos 120\,\mathbf{i} + 10\sin 120\,\mathbf{j}$

$= -5\,\mathbf{i} + 5\sqrt{3}\,\mathbf{j}$

الصورة المركبة $\mathbf{v} = \langle -5, 5\sqrt{3} \rangle$

يمكن إيجاد زاوية اتجاه المتجه $\mathbf{v} = \langle a, b \rangle$ مع الاتجاه الأفقي بحل المعادلة المثلثية: $\tan\theta = \frac{|\mathbf{v}|\sin\theta}{|\mathbf{v}|\cos\theta} = \frac{b}{a}$

زوايا الاتجاه للمتجهات

أوجد زاوية اتجاه كلٍّ من المتجهات الآتية مع الاتجاه الموجب لمحور x.

② ع/ $-6\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$

$\tan\theta = \left|\frac{2}{-6}\right| = \frac{2}{6}$

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{2}{6}\right) = 18.4°$

في الربع الثاني

$\theta = 180 - 18.4$

$= 161.6°$

③ ع/ $\langle -3, -8 \rangle$

$\tan\theta = \left|\frac{-8}{-3}\right| = \frac{8}{3}$

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{8}{3}\right) = 69.4°$

الربع الثالث.

$\theta = 180 + 69.4$

$= 249.4°$

④ ع/ $\mathbf{r} = \langle 4, -5 \rangle$

$\tan\theta = \left|\frac{b}{a}\right| = \frac{5}{4}$

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{5}{4}\right) = 51.3°$

في الربع الرابع

$\theta = 360 - 51.3$

$= 308.7°$

① ع/ $\mathbf{p} = 3\mathbf{i} + 7\mathbf{j}$

$\tan\theta = \left|\frac{b}{a}\right|$

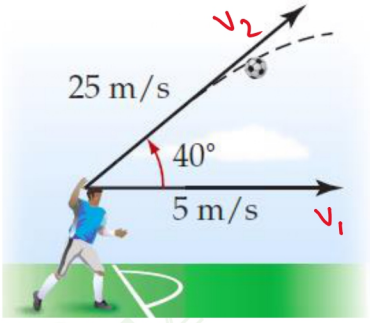
$\tan\theta = \frac{7}{3}$

$\theta = \tan^{-1}\frac{7}{3}$

$\theta = 66.8°$

للاشتراك في تنزيد دروس كل الصف الثاني 050-2509447

تطبيق العمليات على المتجهات



كرة قدم: يركض حارس مرمى في لعبة كرة القدم للأمام بسرعة 5 m/s ، ليرمي الكرة بسرعة 25 m/s ، بزاوية 40° مع الأفقي. أوجد محصلة السرعة، واتجاه حركة الكرة.

الركض للأمام $\mathbf{v}_1 = \langle 5, 0 \rangle$

في الكرة $\mathbf{v}_2 = \langle 25\cos 40, 25\sin 40 \rangle = \langle 19.2, 16.1 \rangle$

صيغة المحصلة $\mathbf{r} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$

$= \langle 5, 0 \rangle + \langle 19.2, 16.1 \rangle$

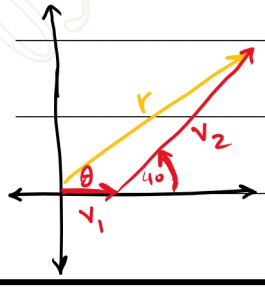
$= \langle 24.2, 16.1 \rangle$

مقدار السرعة $|\mathbf{r}| = \sqrt{24.2^2 + 16.1^2} =$

$= 29.1$ m/s

الاتجاه $\theta = \tan^{-1}\frac{16.1}{19.2} = 33.6°$

$\Leftarrow$ السرعة 29.1 m/s في اتجاه 33.6° مع الحركة الأفقية.



عمل المدرس / مصطفى أسامة عَلَّام
050-2509447

https://t.me/mathbook12GEN
قناة شرح فيديو رياضيات 12 عام

https://t.me/alllaaam82
قناة ملازم وامتحانات رياضيات

ورقة عمل الثاني عشر العام

8-3 الضرب النقطي ومساقط المتجهات

في هذا الدرس سوف أتعلم: 1- إيجاد ناتج الضرب النقطي لمتجهين. واستخدامه لإيجاد الزاوية بينهما. 2- إيجاد مسقط متجه على آخر.

يعرَّف **الضرب النقطي** للمتجهين $a=\langle a_1,a_2\rangle , b=\langle b_1,b_2\rangle$ كالآتي : $a \cdot b = a_1b_1 + a_2b_2$

الضرب النقطي لـ a و b، ويرمز إليه $a \cdot b$ ويمكن قراءته على النحو a نقطة b.

يكون المتجهان غير الصفريين a , b **متعامدين**، إذا وفقط إذا كان $a \cdot b = 0$

استخدام الضرب النقطي في التحقق من تعامد متجهين

جد حاصل الضرب النقطي للمتجهين u , v ، ثم تحقق مما إذا كانا متعامدين.

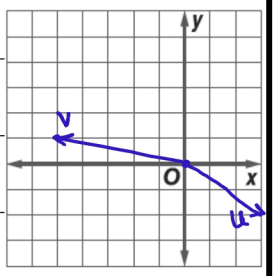
$\mathbf{u}=\langle 3,-2\rangle , \mathbf{v}=\langle -5,1\rangle$

$u \cdot v = 3(-5) + (-2)(1)$

$u \cdot v = -17$

المتجهين غير متعامدين

لأن $u \cdot v \neq 0$



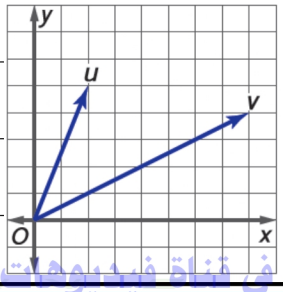
$\mathbf{u}=\langle 2,5\rangle , \mathbf{v}=\langle 8,4\rangle$

$u \cdot v = 2(8) + 5(4)$

$u \cdot v = 36$

المتجهين غير متعامدين

لأن $u \cdot v \neq 0$



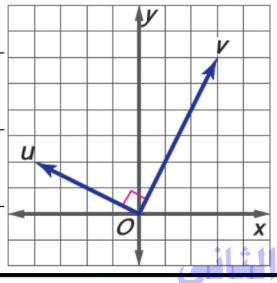
$\mathbf{u}=\langle 3,6\rangle , \mathbf{v}=\langle -4,2\rangle$

$u \cdot v = 3(-4) + 6(2)$

$u \cdot v = 0$

المتجهين متعامدين

لأن $u \cdot v = 0$



للاشتراك في قناة فيديوهات هيكل الفصل الثاني

خصائص الضرب النقطي

050-2509447

إذا كانت $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ متجهات، وكان k عددًا حقيقيًّا، فإن الخصائص الآتية صحيحة:

الخاصية الإبدالية	$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$
خاصية التوزيع	$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$
خاصية الضرب في كمية عددية	$k(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = k\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot k\mathbf{v}$
خاصية الضرب النقطي للمتجهات الصفرية	$0 \cdot \mathbf{u} = 0$
العلاقة بين ناتج الضرب النقطي ومقدار المتجه	$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \lvert\mathbf{u}\rvert^2$

استخدام الضرب النقطي لإيجاد طول (مقدار) متجه

استخدم الضرب النقطي؛ لإيجاد مقدار المتجه المذكور:

$\mathbf{c}=\langle -1,-7\rangle$

$|c|^2 = c \cdot c$

$|c| = \sqrt{c \cdot c}$

$= \sqrt{\langle -1,-7\rangle \cdot \langle -1,-7\rangle}$

$= \sqrt{(-1)^2 + (-7)^2}$

$= 5\sqrt{2} = 7.07$

$\mathbf{b}=\langle 12,16\rangle$

$|b|^2 = b \cdot b$

$|b| = \sqrt{b \cdot b}$

$= \sqrt{\langle 12,16\rangle \cdot \langle 12,16\rangle}$

$= \sqrt{12^2 + 16^2}$

$= 20$

$\mathbf{a}=\langle -5,12\rangle$

$|a|^2 = a \cdot a$

$|a| = \sqrt{a \cdot a}$

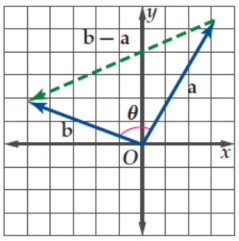
$= \sqrt{\langle -5,12\rangle \cdot \langle -5,12\rangle}$

$= \sqrt{(-5)^2 + (12)^2}$

$= 13$

مفهوم أساسي

الزاوية بين متجهين



إذا كانت θ هي الزاوية بين متجهين غير صفريين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ ، فإن:

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|}$$

$a\cdot b = |a||b|\cos\theta$

$\frac{a\cdot b}{|a||b|} = \cos\theta$

إيجاد قياس الزاوية بين متجهين

$\cos\theta = \frac{u\cdot v}{|u||v|}$

أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي:

$\mathbf{u} = \langle -5, -2\rangle, \mathbf{v} = \langle 4, 4\rangle$

$|u| = \sqrt{(-5)^2 + (-2)^2} = \sqrt{29}$

$|v| = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$

$\cos\theta = \frac{(-5)(4)+(-2)(4)}{\sqrt{29}\cdot 4\sqrt{2}} = \frac{-7}{\sqrt{58}}$

$\Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{-7}{\sqrt{58}}\right)$

$= 156.8°$

$\mathbf{u} = \langle 3, 1\rangle, \mathbf{v} = \langle 3, -3\rangle$

$|u| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$

$|v| = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{2}$

$\cos\theta = \frac{3(3)+1(-3)}{\sqrt{10}\cdot 3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

$\Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$

$= 63.4°$

$\mathbf{u} = \langle 6, 2\rangle, \mathbf{v} = \langle -4, 3\rangle$

$|u| = \sqrt{6^2 + 2^2} = 2\sqrt{10}$

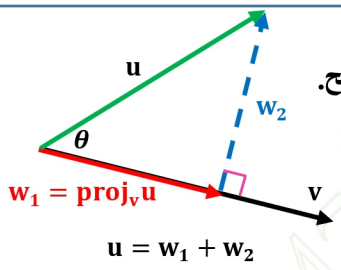
$|v| = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = 5$

$\cos\theta = \frac{6(-4)+2(3)}{2\sqrt{10}\cdot 5} = \frac{-9\sqrt{10}}{50}$

$\Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{-9\sqrt{10}}{50}\right)$

$= 124.7°$

للاشتراك في قناة فيديوهات هيكل الفصل الثاني
050-2509447



إذا كان $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ متجهان غير صفريان، وكان $\mathbf{w_1}$ و $\mathbf{w_2}$ مركَّبا المتجه $\mathbf{u}$ بحيث $\mathbf{w_1}$ توازي $\mathbf{v}$ كما هو موضح.

فإن المتجه $\mathbf{w_1}$ يسمَّى **مسقط المتجه** $\mathbf{u}$ على $\mathbf{v}$. ويرمز إليه بالرمز $\mathbf{proj_v u}$ و $\mathbf{proj_v u} = \left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\right)\mathbf{v}$

العمليات على المتجهات

جد مسقط المتجه $\mathbf{u} = \langle 3, 2\rangle$ على $\mathbf{v} = \langle 5, -5\rangle$. ثم اكتب $\mathbf{u}$ على هيئة مجموع متجهين متعامدين، أحدهما مسقط المتجه $\mathbf{u}$ على $\mathbf{v}$.

$w_1 = proj_v u$

$= \left(\frac{u\cdot v}{|v|^2}\right)v$

$= \left(\frac{5(3)+(-5)(2)}{5^2+(-5)^2}\right)\langle 5, -5\rangle$

$= \frac{1}{10}\langle 5, -5\rangle$

$= \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$

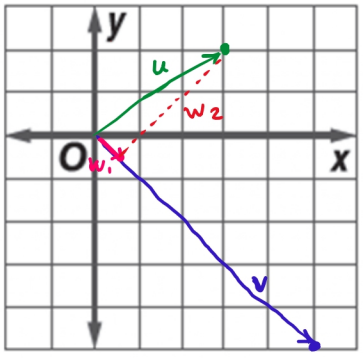
$u = w_1 + w_2$

$w_2 = u - w_1$

$= \langle 3, 2\rangle - \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$

$= \langle \frac{5}{2}, \frac{5}{2}\rangle$

$\Rightarrow u = \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle + \langle \frac{5}{2}, \frac{5}{2}\rangle$



جـد مسقط المتجه $\mathbf{u} = \langle 1, 2 \rangle$ على $\mathbf{v} = \langle 8, 5 \rangle$. ثم اكتب $\mathbf{u}$ على هيئة مجموع متجهين متعامدين، أحدهما مسقط المتجه $\mathbf{u}$ على $\mathbf{v}$.

$$w_1 = \text{proj}_v u = \left(\frac{u \cdot v}{|v|^2}\right) v$$

$$= \left(\frac{8(1) + 5(2)}{8^2 + 5^2}\right) \langle 8, 5 \rangle$$

$$= \frac{18}{89} \langle 8, 5 \rangle$$

$$= \left\langle \frac{144}{89}, \frac{90}{89} \right\rangle$$

$$u = w_1 + w_2$$

$$w_2 = u - w_1$$

$$= \langle 1, 2 \rangle - \left\langle \frac{144}{89}, \frac{90}{89} \right\rangle$$

$$= \left\langle \frac{-55}{89}, \frac{88}{89} \right\rangle$$

$$\Rightarrow u = \left\langle \frac{144}{89}, \frac{90}{89} \right\rangle + \left\langle \frac{-55}{89}, \frac{88}{89} \right\rangle$$

المسقط في عكس اتجاه v

جـد مسقط المتجه $\mathbf{u} = \langle 4, -3 \rangle$ على المتجه $\mathbf{v} = \langle 2, 6 \rangle$. ثم اكتب $\mathbf{u}$ على هيئة مجموع متجهين متعامدين، أحدهما مسقط المتجه $\mathbf{u}$ على المتجه $\mathbf{v}$.

$$\text{proj}_v u = \left(\frac{u \cdot v}{|v|^2}\right) \cdot v$$

$$= \left(\frac{4(2) + 6(-3)}{2^2 + 6^2}\right) \cdot \langle 2, 6 \rangle$$

$$= -\frac{1}{4} \langle 2, 6 \rangle$$

$$w_1 = \left\langle -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2} \right\rangle$$

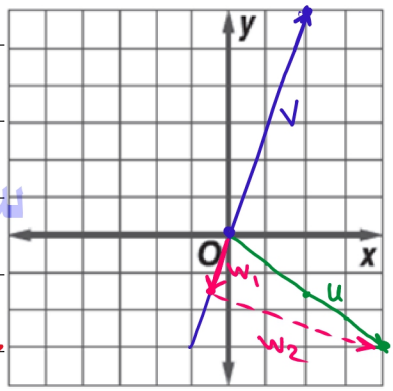
$$u = w_1 + w_2$$

$$w_2 = u - w_1$$

$$= \langle 4, -3 \rangle - \left\langle -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2} \right\rangle$$

$$= \left\langle \frac{9}{2}, -\frac{3}{2} \right\rangle$$

$$\Rightarrow u = \left\langle -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2} \right\rangle + \left\langle \frac{9}{2}, -\frac{3}{2} \right\rangle$$



للاشتراك في قناة فيديوهات هيكل الفصل الثاني
050-2509447

جـد مسقط المتجه $\mathbf{u} = \langle -3, 4 \rangle$ على $\mathbf{v} = \langle 6, 1 \rangle$. ثم اكتب $\mathbf{u}$ على هيئة مجموع متجهين متعامدين، أحدهما مسقط المتجه $\mathbf{u}$ على $\mathbf{v}$.

$$\text{proj}_v u = \left(\frac{u \cdot v}{|v|^2}\right) \cdot v$$

$$= \left(\frac{-3(6) + 4(1)}{6^2 + 1^2}\right) \cdot \langle 6, 1 \rangle$$

$$= -\frac{14}{37} \langle 6, 1 \rangle$$

$$w_1 = \left\langle -\frac{84}{37}, -\frac{14}{37} \right\rangle$$

$$u = w_1 + w_2$$

$$w_2 = u - w_1$$

$$= \langle -3, 4 \rangle - \left\langle -\frac{84}{37}, -\frac{14}{37} \right\rangle$$

$$= \left\langle -\frac{27}{37}, \frac{162}{37} \right\rangle$$

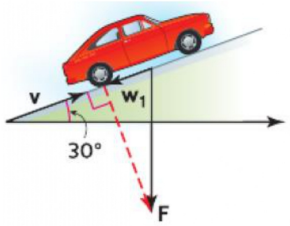
$$\Rightarrow u = \left\langle -\frac{84}{37}, -\frac{14}{37} \right\rangle + \left\langle -\frac{27}{37}, \frac{162}{37} \right\rangle$$



الشكل 8.3.7

إذا كان المتجه **u** يمثل قوة، فإن $\text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$ يمثل تأثير تلك القوة في اتجاه **v**. على سبيل المثال، إذا قمت بدفع صندوق لأعلى التل (في اتجاه **v**) بالقوة **u** (الشكل 8.3.7)، القوة المؤثرة هي دفع المركبة في اتجاه $\mathbf{v}$, $\text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$.

استخدام مسقط متجه لإيجاد قوة



السيارات تقف سيارة بقوة 13000 N على تل مائل بزاوية 30° كما هو موضح. إذا تم تجاهل قوة الاحتكاك، فما القوة اللازمة لمنع تدحرج السيارة لأسفل التل؟

* قوة 13000 N (وزن) لأسفل جهة الجاذبية

$F = \langle 0, -13000 \rangle$

توجد متجه الوحدة v في اتجاه التل

$V = \langle 1\cos 30, 1\sin 30 \rangle$

$= \langle \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \rangle$

نوجد مسقط F على v لما يسوي w_1

$w_1 = P$

$w_1 = \text{proj}_{\mathbf{v}} F = \left(\frac{V \cdot F}{|V|^2}\right) V$

$= \left(\frac{0\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 13000\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}\right) V$

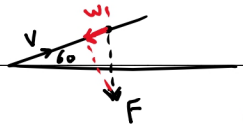
$w_1 = \frac{-6500}{1} V = -6500V$

القوة اللازمة لمنع التدحرج على قوة w_1 هي $-(-6500N)$

أي 6500N في اتجاه التل.

للاستزادة في قناة فيديوهات ليمس العلمي الشامل
050-2509447

التزلج تجلس خديجة على زلاجة على جانب تل مائل بزاوية 60° ما القوة اللازمة لمنع انزلاق الزلاجة لأسفل التل إذا علمت أن وزن خديجة والزلاجة 550 N ؟



* لأسفل (الجاذبية) $F = \langle 0, -550 \rangle$

* نوجد متجه الوحدة v في اتجاه التل

$V = \langle 1\cos 60, 1\sin 60 \rangle$

متجه وحدة $V = \langle \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \rangle \Rightarrow |V| = 1$

نوجد مسقط F على v لما يسوي w_1

$w_1 = \text{proj}_{\mathbf{v}} F = \left(\frac{F \cdot V}{|V|^2}\right) V$

$= \left(\frac{0\left(\frac{1}{2}\right) + (-550)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{1}\right) V$

$= -476.31\ V$

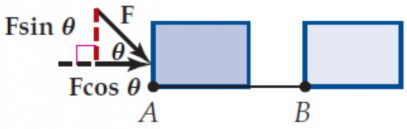
القوة اللازمة لمنع انزلاق الزلاجة لأسفل التل هي $-476.31N$

يعني 476.31 N في اتجاه التل.

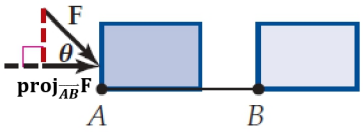
125 ← 550 N

?? ← 476.31 N

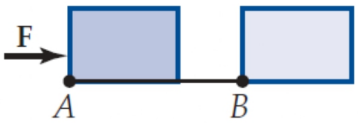
من التطبيقات الأخرى لمسقط المتجه حساب **الشغل** المبذول W بواسطة قوة ثابتة F تؤثر على جسم لتحريكه من النقطة A إلى النقطة B.



$$W = F \cdot \overrightarrow{AB}$$



$$W = |\text{proj}_{\overrightarrow{AB}}F||\overrightarrow{AB}|$$
$$W = |F|(cos\theta)\,|\overrightarrow{AB}|$$

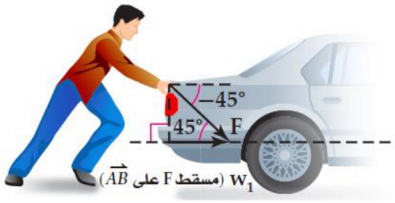


$$W = |F|\,|\overrightarrow{AB}|$$

وحدات الشغل يتم قياس الشغل بالقدم–رطل في النظام العرفي للقياس وبالنيوتن–متر (N·m) أو الجول (J) في النظام المتري.

حساب الشغل

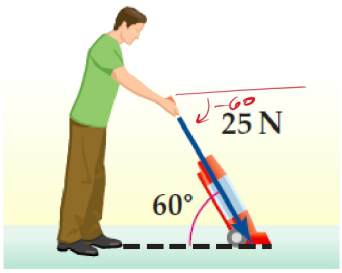
سيارة: يدفع شخص سيارةً بقوةٍ ثابتةٍ مقدارها 120 N بزاوية 45° كما في الشكل المجاور، أوجد الشغل المبذول بالجول لتحريك السيارة 10 m (بإهمال قوة الاحتكاك).



$W = |F| \cos\theta\, |\overrightarrow{AB}|$ جول

$W = 120 \cos(45)\,(10) = 848.53$ N.m (J)

تنظيف: يدفع إبراهيم مكنسةً كهربائيةً بقوة مقدارها 25 N، إذا كان قياس الزاوية بين ذراع المكنسة وسطح الأرض 60°، فأوجد الشغل بالجول الذي بذله إبراهيم عند تحريك المكنسة مسافة 6 m؟



050-2509447

$W = |F|(\cos\theta)\,|\overrightarrow{AB}|$

$= 25 \cos(-60)\,(6)$

$= 75$ J

الشغل المبذول = 75 جول