

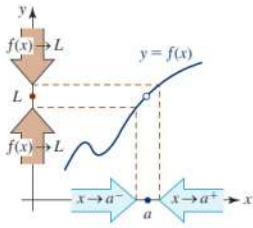
amr math
متقدم 12

النهايات والاتصال

إعداد / عمرو البيومي

0544560575

الوحدة الثانية



النهايات والاتصال

المماسات وطول المنحني

مفهوم النهاية

حساب النهايات

الدحيح اكايمي

طريقك للتفوق

الاتصال ونتائجه

النهايات التي تتضمن الانهية وخطوط التقارب

النهايات عند المالانهاية وخطوط التقارب

إذا كانت k عدد حقيق لا يساوي صفر فان : $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} k = k$

إذا كانت n عدد صحيح موجب فان : $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{k}{x^n} = 0$ حيث k عدد حقيقي لا يساوي صفر

إذا كانت n عدد صحيح موجب زوجي فان : $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} ax^n = \begin{cases} \infty, & a > 0 \\ -\infty, & a < 0 \end{cases}$

إذا كانت n عدد صحيح موجب فردي فان :

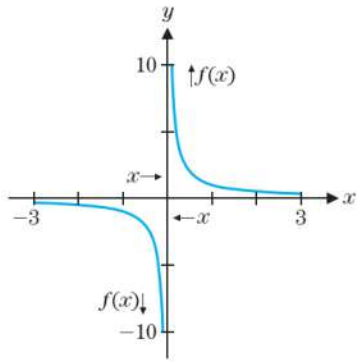
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} ax^n = \begin{cases} -\infty, & a > 0 \\ \infty, & a < 0 \end{cases} \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} ax^n = \begin{cases} \infty, & a > 0 \\ -\infty, & a < 0 \end{cases}$$

نهاية الدالة الكسرية

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^m}{bx^n} = \begin{cases} m < n & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^m}{bx^n} = 0 \\ m = n & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^m}{bx^n} = \frac{a}{b} \\ m > n & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^m}{bx^n} = \infty \end{cases}$$



نهاية الدالة الكسرية

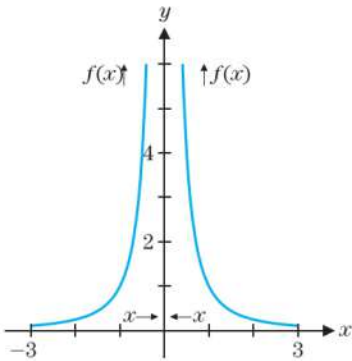


$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$$

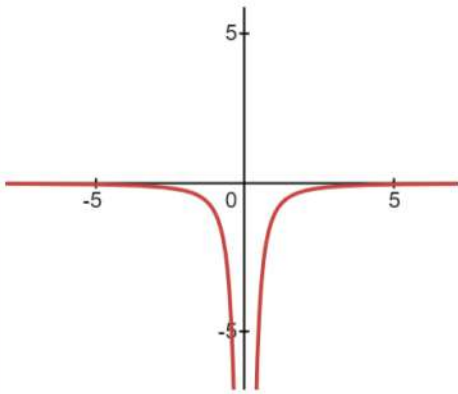
غير موجودة.



$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$



$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1}{x^2} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-1}{x^2} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{x^2} = -\infty$$

Calculate the following limits

احسب النهايات الاتية

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - 2x}{x^2 - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1 - 2x}{x^2 - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 4}{x^2 - 4x + 4}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1 - x}{(x + 1)^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2 - 4}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} (x^2 - 2x - 3)^{-2/3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cot x$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} x \sec^2 x$$

تذكير

$$1) (-\infty)^n = \infty \text{ عندما } n \text{ (زوجي)}, (-\infty)^n = -\infty \text{ عندما } n \text{ (فرد)}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a = a \quad a \in \mathbb{R}$$

$$3) \sqrt{x^2} = |x| = x \text{ عندما } x \rightarrow \infty \text{ and } \sqrt{x^2} = |x| = -x \text{ عندما } x \rightarrow -\infty$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sin x}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$$

Find the limit

اوجد النهاية

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3x - 2}{3x^2 + 4x - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - x + 1}{4x^2 - 3x - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 1}{4x^3 - 5x - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{\sqrt{4 + x^2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x}{\sqrt{x^2 + 3}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 6x}}{3x - 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x}{\sqrt{4 + x^2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{5 + x^2}}{3x + 1}$$



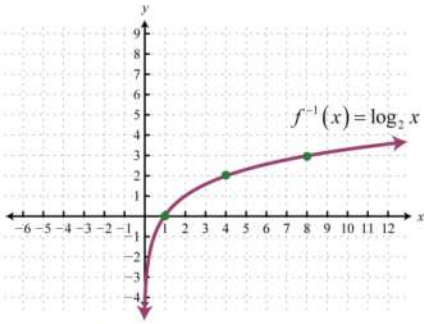
الضرب في المرافق

Find the limit

اوجد النهاية

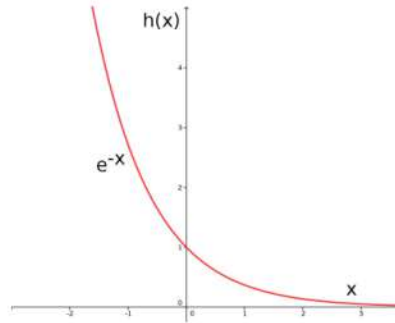
$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{4x^2 - 2x + 1} - 2x)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{5x^2 + 4x + 7} - \sqrt{5x^2 + x + 3})$$



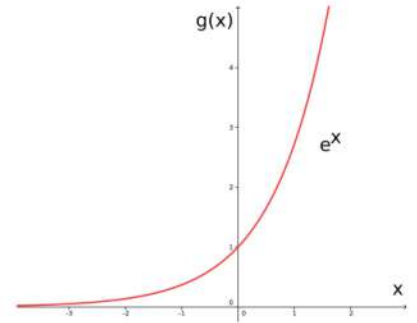
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$



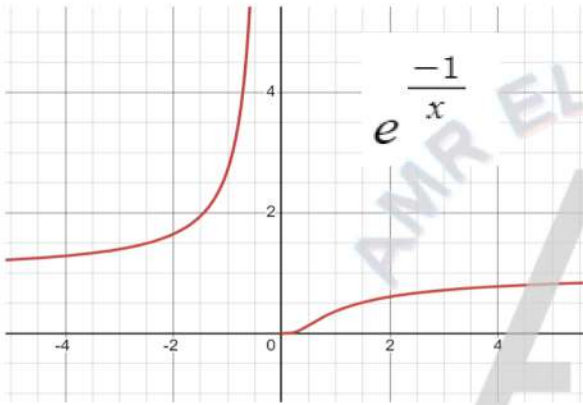
$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = \infty$$



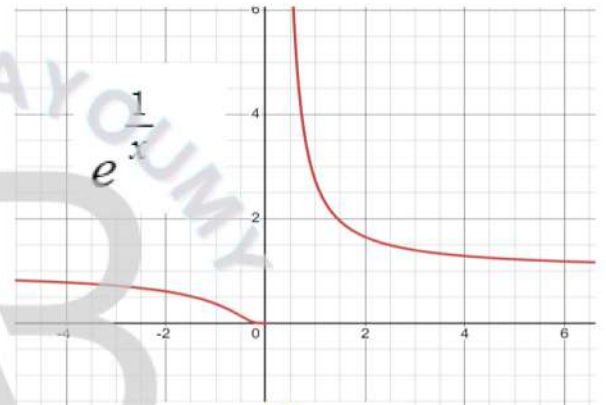
$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$



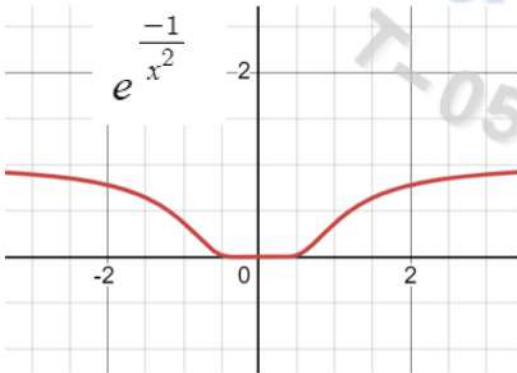
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{-\frac{1}{x}} = \infty$$



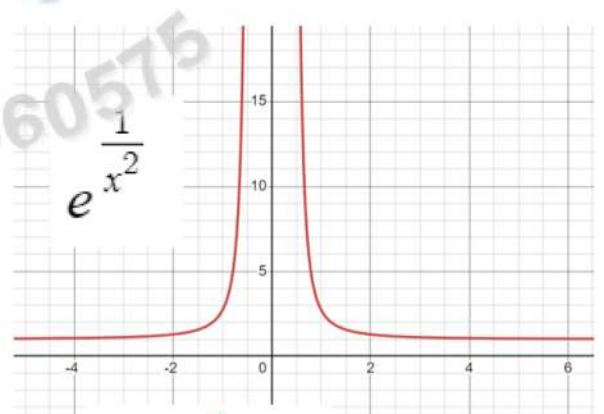
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$$



$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$$



$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x^2}} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x^2}} = \infty$$

Arccsin x

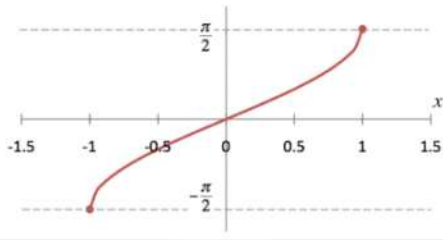


Figure 1

Arccos x

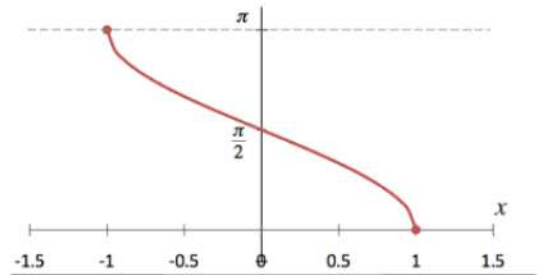
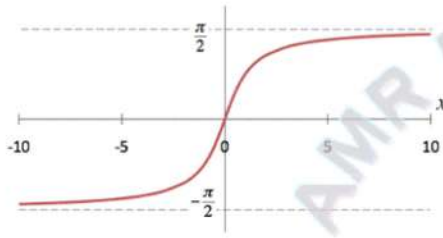


Figure 2

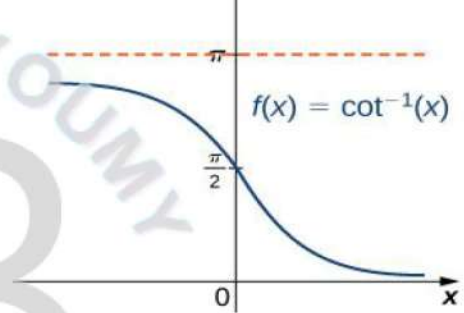
Arctan x



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \cot^{-1} 0 = \pi$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \cot^{-1} x = 0$$

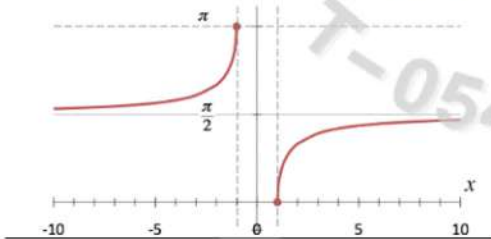
y



$$\lim_{x \rightarrow \infty} \tan^{-1} x = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \tan^{-1} x = -\frac{\pi}{2}$$

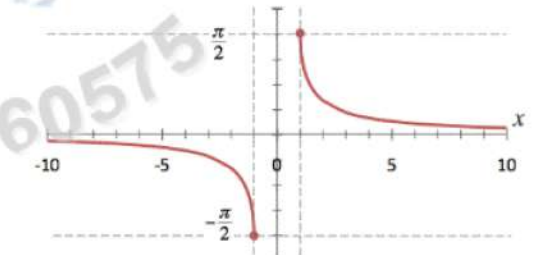
Arcsec x



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sec^{-1} x = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sec^{-1} x = \frac{\pi}{2}$$

Arccsc x



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \csc^{-1} x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \csc^{-1} x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{x^2 + 1}{x - 3} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-2/x^3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x \sin x)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-\left(\frac{x+1}{x^2+2}\right)} =$$



$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} e^{-\tan x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \tan^{-1}(\ln x)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sec^{-1} \frac{x^2 + 1}{x + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sin(\tan^{-1} x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin(e^{-1/x^2})$$



$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos x}{x}$$

$$\begin{aligned} -1 &\leq \cos x \leq 1 \\ -\frac{1}{x} &\leq \frac{\cos x}{x} \leq \frac{1}{x} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \frac{1}{x}}{x - \frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \tan^{-1} x$$



خطوط التقارب الرأسية والافقية والمائلة

المجال (domain) = مجموعة الاعداد الحقيقية ما عدا اصفار المقام ،
 $\text{domain} = \mathbb{R} - \{\text{اصفر المقام}\}$

كيفية تعيين الخطوط التقاربية للدالة النسبية

إذا كانت لدينا الدالة النسبية $f(x) = \frac{ax^n}{bx^m}$

أولاً : الخطوط التقاربية الرأسية = وهي تمثل اصفار المقام أي عندما المقام = 0
 (كيفية ايجاده : نحلل الدالة النسبية فإذا كان المقام ليس له عامل مشترك مع البسط فهو يمثل معادلة الخط التقارب الرأسي وتكون الدالة عندها غير معرفة دائماً)

ثانياً : الخطوط التقاربية الافقية للدالة النسبية = بمقارنة درجتي البسط والمقام

درجة البسط < درجة المقام
 $m < n$
 لا يوجد خطوط تقاربية افقية

درجة البسط = درجة المقام
 $y = \frac{a}{b}$ يوجد خط تقاربي افقي هو
 أي $y = \frac{\text{معامل أكبر أس في البسط}}{\text{أكبر أس في المقام}}$

درجة البسط > درجة المقام
 $m > n$
 يوجد خطوط تقاربية افقية
 $y = 0$

يوجد خطوط تقارب مائلة عن طريق
 قسمة البسط علي المقام وهي عامل
 خطي أي معادله من الدرجة الاولى

خط التقارب الرأسي:

يحدث خط التقارب الرأسي عندما تقترب الدالة من $\pm\infty$ عند اقتراب x من قيمة معينة c من جهة اليمين أو اليسار. يُكتب هذا رياضياً كالتالي:

- $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \pm\infty$

- $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \pm\infty$

إذا تحقق الشرطان معاً، فإن $c = x$ يكون خط تقارب رأسي.

يحدث خط التقارب الأفقي إذا كانت نهاية الدالة عند x عندما تقترب من ∞ أو $-\infty$ تتجه نحو قيمة محددة $L = y$.

- $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$ يمكن أن يكون هناك خط تقارب أفقي عند $a = y$ إذا كانت:

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$

حدد خطوط التقارب الرأسية والافقية

Determine all horizontal and vertical asymptotes

$$f(x) = \frac{x}{4 - x^2}$$

$$f(x) = \frac{x^2}{4 - x^2}$$

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{4 + x^2}}$$

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}$$



$$f(x) = \ln(1 - \cos x)$$

$$f(x) = \frac{3x^2 + 1}{x^2 - 2x - 3}$$

$$f(x) = \frac{1 - x}{x^2 + x - 2}$$

$$f(x) = 4 \tan^{-1} x - 1$$



حدد خطوط التقارب الرأسية والمائلة

*Determine all **slant**
and **vertical asymptotes***

$$y = \frac{x^3}{x^2 + x - 4}$$

$$y = \frac{x^2 + 1}{x - 2}$$

$$y = \frac{x^3}{4 - x^2}$$

$$y = \frac{x^4}{x^3 + 2}$$



لنفترض أن قطر بؤبؤ العينين لأحد الحيوانات موضَّح في $f(x)$ mm ، حيثما يكون x هو كثافة الضوء على بؤبؤ العينين. إذا كانت $f(x) = \frac{160x^{0.4} + 90}{4x^{-0.4} + 15}$ ، فأوجد قطر بؤبؤ العينين مع (a) الحد الأدنى من الضوء و (b) الحد الأقصى من الضوء.

لنفترض أنّ حجم بؤبؤ عين حيوان محدد يُعطى بالعلاقة $f(x)$ (mm) ، حيثما يكون x هو كثافة الضوء على بؤبؤ العين. إذا كان $f(x) = \frac{80x^{-0.3} + 60}{2x^{-0.3} + 5}$ ، فأوجد حجم بؤبؤ العين عندما لا يوجد ضوء وحجمه مع وجود كمية لانهائية من الضوء.

أوجد دالة تربيعية $q(x)$ بحيث يكون $f(x) = \frac{x^2 - 4}{q(x)}$ له خط
تقارب أفقي واحد $y = -\frac{1}{2}$ وخط تقارب رأسي واحد بالضبط
عند $x = 3$.

أوجد دالة تربيعية $q(x)$ بحيث يكون $f(x) = \frac{x^2 - 4}{q(x)}$ له خط
تقارب أفقي واحد $y = 2$ واثنان من خطوط التقارب الرأسية
عند $x = \pm 3$.

الدحيح اكايمي

طريقك للتفوق

T-0544560575

أوجد دالة $g(x)$ بحيث يكون $f(x) = \frac{x^3 - 3}{g(x)}$ ليس له خط تقارب رأسي وله خط تقارب مائل $y = x$.

أوجد دالة $g(x)$ بحيث يكون $f(x) = \frac{x-4}{g(x)}$ له اثنان من خطوط التقارب الأفقية $y = \pm 1$ وليس له خطوط تقارب رأسية.

طريقك للتفوق

T-0544560575

مسائل من الامتحانات الوزارية

2019-2020:

1. Find:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sec^{-1} \left(\frac{x^2+1}{x+1} \right)$$

- a) ∞
- b) 0
- c) π
- d) $\frac{\pi}{2}$

2017-2018:

3. Find:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sin (\tan^{-1} x)$$

- a) 0
- b) ∞
- c) 1
- d) $-\infty$

2018-2019:

2. Find:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \cot^{-1}(x)$$

- a) 0
- b) ∞
- c) 1
- d) $\frac{\pi}{2}$

2017-2018:

4. Find:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2-6}{3x^3+2x+1}$$

- a) 0
- b) 0
- c) 2
- d) 3

2017-2018:

حدد خطوط التقارب الرأسية والافقية

5. Determine the asymptotes of the function:

$$y = \frac{x^2+1}{x-2}$$

a) $y = -2$

b) $y = 2$

c) $y = x + 2$

d) $y = x - 2$

2024-2023:

1. Find:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{4x^2 - 2x + 1} - 2x)$$

a) 0

b) 1

c) $\frac{1}{2}$

d) 4

2024-2023:

Determine all vertical and oblique asymptotes for the function:

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$$

حدد خطوط التقارب الرأسية والمائلة

a) $y = x + 1$

b) $y = x - 1$

c) $y = x + 2$

d) $y = x - 2$

2023-2022:

3. Find the value of:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2 + 1}{x - 1} \right)$$

a) 0

b) $\frac{1}{2}$

c) 1

d) 4

Determine all vertical and horizontal asymptotes for the function:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^2 + 1}$$

حدد خطوط التقارب الرأسية والافقية

a) $y = -1$

b) $y = 1$

c) $y = 0$

d) $y = -\frac{1}{2}$

2022-2021:

5. Determine all vertical and oblique asymptotes for the function:

$$f(x) = \frac{x^3 - 4}{x^2 - x}$$

حدد خطوط التقارب الرأسية والمائلة

a) $x = 4, y = -x$

b) $x = 2, y = 4x$

c) $x = 2, y = x - 2$

d) $x = 2, y = x + 2$

2021-2020:

6. Find the value of:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^4 + mx^2 - 2x^3 - 4}{2x^4 + 2x^3 - 3x} \right)$$

a) -2

b) 4

c) 3

d) $\frac{1}{2}$

مع أطيب التمنيات
للجميع بالتفوق
والنجاح

