تجميع قوانين ونظريات رياضيات صف 10

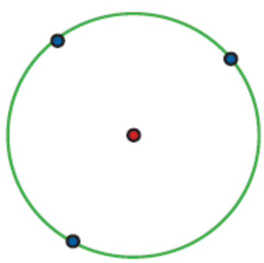
الفصل الثانى 2023

عمل / أ . أحمد نصار

الدائرة

نظرية (١)

كل ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة تمر بها دائرة واحدة.



المماس للدائرة هو مستقيم في المستوي يتقاطع مع الدائرة في نقطة واحدة.

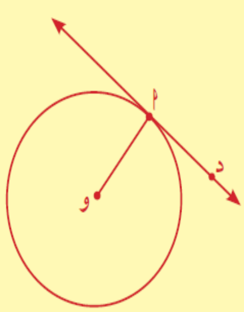
نقطة التقاطع تسمى نقطة التماس.

$\overleftrightarrow{\text{أد}}$ مماس.

$\overrightarrow{\text{أد}}$ شعاع مماس.

$\overline{\text{أد}}$ قطعة مماسية

$\overline{\text{أو}}$ نصف قطر التماس

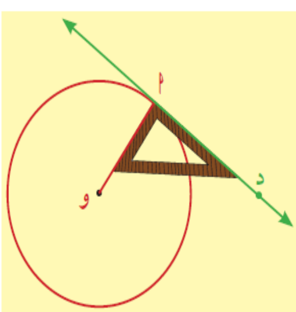


نظرية (٢)

المماس عمودي على نصف قطر التماس.

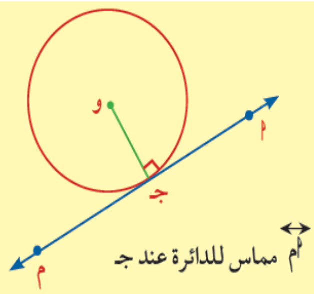
إذا كان مستقيم مماسًا لدائرة، فإنه يكون متعامدًا مع نصف القطر المار بنقطة التماس.

أي أن $\overline{\text{وأ}} \perp \overleftrightarrow{\text{أد}}$.



نظرية (٣)

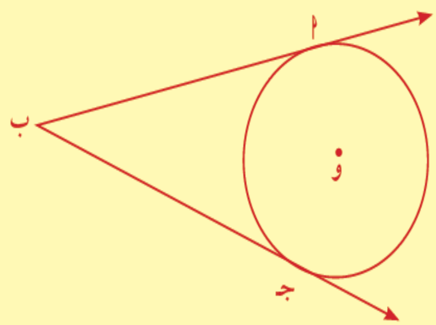
المستقيم العمودي على نصف قطر دائرة عند نهايته التي تنتمي إلى الدائرة يكون مماسًا لهذه الدائرة عند هذه النقطة.



نظرية (٤)

القطعتان المماستان لدائرة والمرسومتان من نقطة خارجها متطابقتان.

$\overline{\text{أب}} \cong \overline{\text{جب}}$



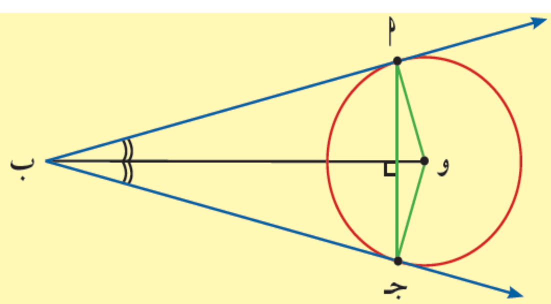
نتائج النظرية

Δ بأج متطابق الضلعين من النظرية السابقة.

١ $\overleftarrow{\text{بو}}$ منصف الزاوية أبَ̂ج

٢ $\overleftarrow{\text{وب}}$ منصف الزاوية أوَ̂ج

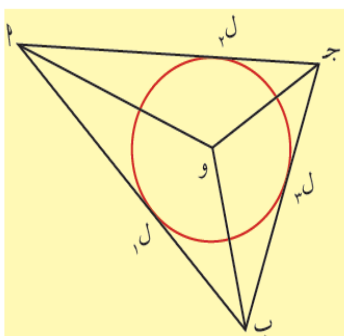
٣ $\overline{\text{وب}} \perp \overline{\text{أج}}$



الدائرة المحاطة بمثلث (الداخلة) (Inscribed Circle of a Triangle)

هي دائرة مماسة لأضلاع المثلث الثلاثة من الداخل.

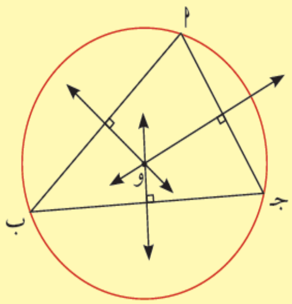
مركز هذه الدائرة هو نقطة تلاقي منصفات الزوايا الداخلية للمثلث Circum Center.



الدائرة المحيطة لمثلث (الخارجة) (Circumscribed Circle of a Triangle)

هي دائرة تمر برؤوس المثلث الثلاثة.

مركز هذه الدائرة هو نقطة تلاقي المحاور الثلاثة لأضلاع المثلث (نقطة تلاقي المنصفات العمودية لأضلاع المثلث).



الأوتار والأقواس

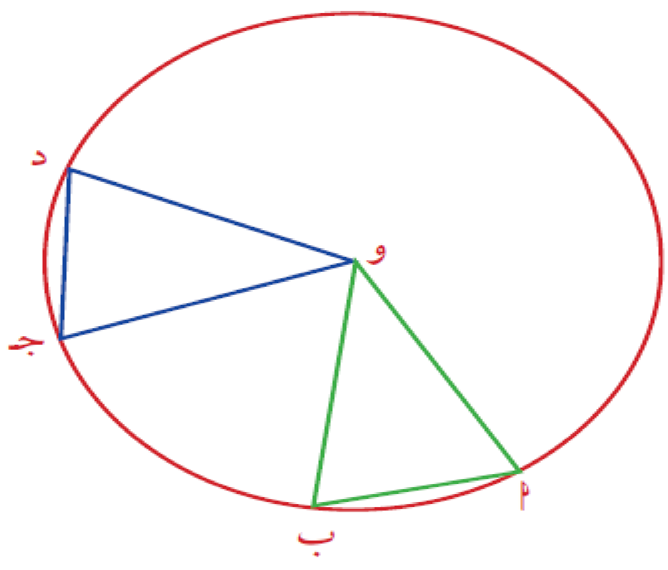
نظرية (١)

في دائرة أو في دوائر متطابقة:

١ للزوايا المركزية المتطابقة أوتار متطابقة.

٢ الأوتار المتطابقة تقابل أقواسًا متطابقة.

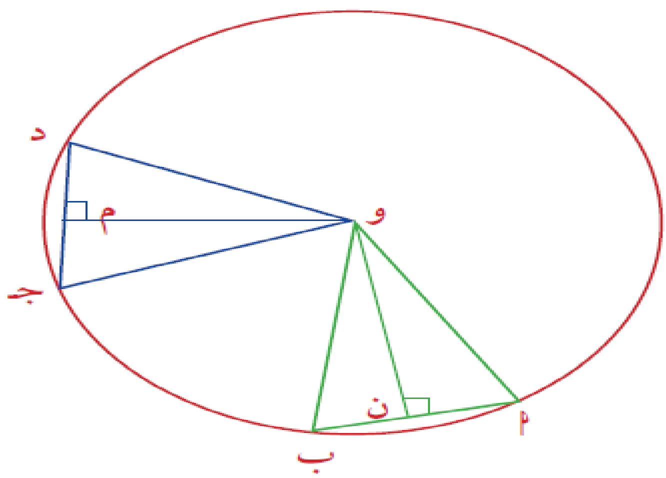
٣ للأقواس المتطابقة زوايا مركزية متطابقة.



نظرية (٢)

١ الأوتار المتطابقة في دائرة على أبعاد متساوية من مركز الدائرة.

٢ الأوتار التي على أبعاد متساوية من مركز دائرة تكون متطابقة.



نظرية (٣)

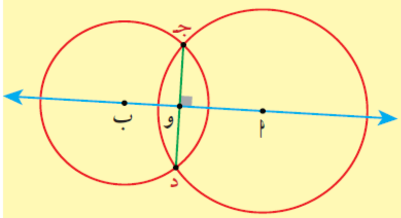
١ القطر العمودي على وتر في دائرة ينصفه وينصف كلًّا من قوسيه.

٢ القطر الذي ينصف وترًا (ليس قطرًا) في دائرة يكون عموديًّا على هذا الوتر.

٣ العمود المنصف لوتر في دائرة يمر بمركز الدائرة.

نتيجة

خط المركزين لدائرتين متقاطعتين يكون عموديًّا على الوتر المشترك بينهما وينصفه.



١ – الزاوية المركزية والزاوية المحيطية Central Angle and Inscribed Angle

تعريف:

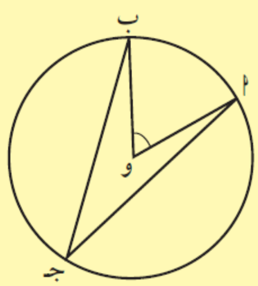
1. الزاوية التي رأسها مركز الدائرة وضلعاها يقطعان الدائرة تسمى **بالزاوية المركزية**.
2. الزاوية التي رأسها إحدى نقاط الدائرة وضلعاها يقطعان الدائرة تسمى **بالزاوية المحيطية**.

نظرية (١)

قياس الزاوية المركزية يساوي قياس القوس المحصور بين ضلعيها على الدائرة.

نظرية (٢)

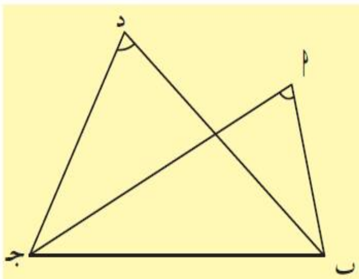
في الدائرة قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس القوس المحصور بين ضلعيها.



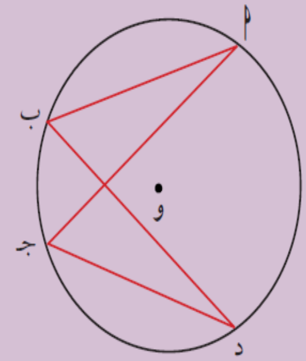
$\text{ن}(\widehat{\text{أجـب}}) = \frac{1}{2}\,\text{ن}(\widehat{\text{أوب}}) = \frac{1}{2}\,\text{ن}(\overset{\frown}{\text{أب}})$

قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس الزاوية المركزية المشتركة معها في القوس نفسه.

نتائج

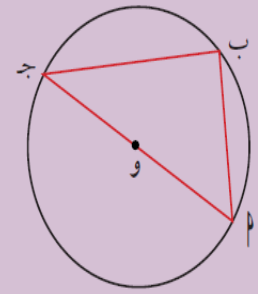


1. كل زاويتين محيطيتين في دائرة تحصران القوس نفسه متطابقتان.
2. كل زاوية محيطية في دائرة تحصر نصف دائرة تكون زاوية قائمة.
3. كل شكل رباعي دائري (محاط بدائرة)، تكون زواياه المتقابلة متكاملة.
4. في الشكل إذا تطابقت الزاويتان $\hat{\text{أ}}$، $\hat{\text{د}}$ المرسومات على القاعدة $\overline{\text{ب جـ}}$ وفي جهة واحدة منها. كان الشكل أ ب جـ د رباعيًا دائريًا.



أ̂ب د ، أ̂ج د تحصران أ⌒د

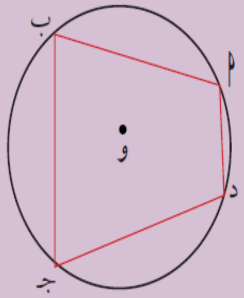
∴ ق(أ̂ب د) = ق(أ̂ج د)



أ̂ب ج تحصر أ⌒ج (نصف دائرة)

∴ ق(أ̂ب ج) = ٩٠°

(أ̂ب ج) زاوية محيطية مرسومة على قطر الدائرة وهي زاوية قائمة



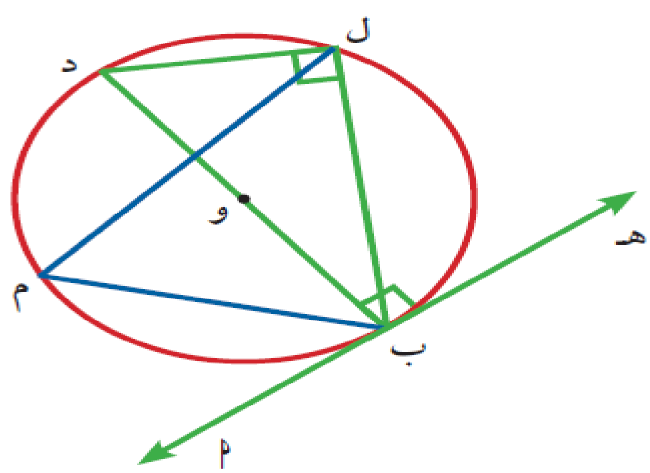
ق(أ̂) + ق(ج̂) = ١٨٠°

ق(ب̂) + ق(د̂) = ١٨٠°

نظرية (٣)

(١) قياس الزاوية المماسية يساوي قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها في القوس نفسه.

(٢) قياس الزاوية المماسية يساوي نصف قياس القوس المحصور بين المماس والوتر.



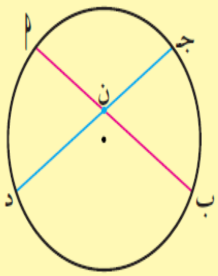
١ - تقاطع الأوتار داخل الدائرة

Intersecting Chords Inside the Circle

نظرية (١)

إذا تقاطع وتران داخل دائرة، فإن ناتج ضرب طولي جزءي أحد الوترين يساوي ناتج ضرب طولي جزءي الوتر الآخر.

ن أ × ن ب = ن جـ × ن د



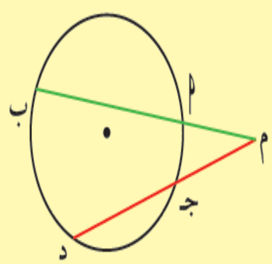
٢ - تقاطع الأوتار خارج الدائرة

Intersecting Chords Outside the Circle

نتيجة (١)

إذا رسم قاطعان من نقطة خارج دائرة، فإن ناتج ضرب طول أحد القاطعين في طول جزئه الخارجي يساوي ناتج ضرب طول القاطع الآخر في طول جزئه الخارجي.

م أ × م ب = م جـ × م د.



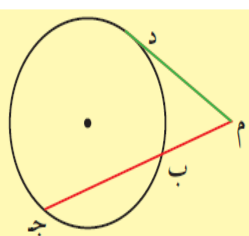
٣ - تقاطع مماس وقاطع الدائرة من نقطة خارج دائرة

Intersection Between Tangent and Secant from any Point Outside of a Circle

نتيجة (٢)

إذا رسم من نقطة خارج دائرة قاطع ومماس، فإن ناتج ضرب طول القاطع في طول جزئه الخارجي يساوي مربع طول القطعة المماسية.

(م د)^{٢} = م ب × م جـ .



المصفوفات

تعريف

المصفوفة هي تنظيم من الأعداد المرتبة في صفوف وأعمدة.

الأعداد المكونة للمصفوفة تسمى عناصر Elements.

رتبة المصفوفة Dimension of a Matrix

نرمز إلى المصفوفة بأحد حروف الهجاء ونضع تحته خطًّا، نكتب $\underline{أ}$ ونقرأ **المصفوفة أ**.

عدد الصفوف (م) وعدد الأعمدة (ن) يحددان **رتبة المصفوفة** وتكتب م × ن.

$$\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٤ & ٣ & ٢ \\ ٠ & ٧ & ٦ \end{bmatrix}$$

المصفوفة $\underline{أ}$ هي من **الرتبة ٢ × ٣**.

ملاحظة: لكتابة رتبة المصفوفة نكتب أولًا عدد الصفوف يليه عدد الأعمدة.

ترميز عناصر المصفوفة

يحدد أي عنصر في المصفوفة بدلالة رقمي الصف والعمود الواقع فيهما، فمثلًا، في المصفوفة $\underline{أ}$ العنصر الذي في الصف الأول والعمود الثالث نرمز إليه بالرمز $أ_{٣١}$ (الصف أولًا والعمود ثانيًا).

$$\underline{أ} = \begin{bmatrix} أ_{٣١} & أ_{٢١} & أ_{١١} \\ أ_{٣٢} & أ_{٢٢} & أ_{١٢} \\ أ_{٣٣} & أ_{٢٣} & أ_{١٣} \end{bmatrix}$$

العنصر في الصف الأول والعمود الثالث: $أ_{٣١}$

- **المصفوفة المربعة:** هي مصفوفة فيها عدد الصفوف يساوي عدد الأعمدة.

وفي ما عدا ذلك، تسمى المصفوفة: مصفوفة مستطيلة Rectangular Matrix.

- **المصفوفة الأفقية:** هي مصفوفة مكونة من صف واحد Horizontal Matrix.
- **المصفوفة العمودية:** هي مصفوفة مكونة من عمود واحد Vertical Matrix.

معلومة رياضية:

المصفوفة التي جميع عناصرها أصفار تسمى مصفوفة صفرية
Zero Matrix
ويرمز إليها بالرمز $\dot{\text{ـــ}}_{م \times ن}$

شرط تساوى المصفوفات:

المصفوفات المتساوية: Equal Matrices

تكون **مصفوفتان متساويتين** إذا كانت لهما الرتبة (الأبعاد) نفسها، وكانت عناصرهما المتناظرة متساوية والعكس صحيح.

المصفوفة التي عدد صفوفها (جـ)، وعدد أعمدتها (د) هي من الرتبة جـ × د.

شرط جمع وطرح المصفوفات:

جمع وطرح المصفوفات Adding and Subtracting Matrices

لجمع مصفوفتين أ، ب يجب أن تكونا من **الرتبة نفسها**.

نجمع كل عنصرين لهما الموقع نفسه في أ، ب. مصفوفة الجمع لها رتبة كل من المصفوفتين أ، ب.

جـ = أ + ب

أ من الرتبة م × ن ، ب من الرتبة م × ن

∴ جـ من الرتبة م × ن.

جـ$_{وس}$ = أ$_{وس}$ + ب$_{وس}$.

معلومة رياضية :

المصفوفة − أ هي النظير الجمعي للمصفوفة أ .

خواص جمع المصفوفات

إذا كان أ ، ب ، جـ مصفوفات من الرتبة م × ن فإن:

- أ + ب هي من الرتبة م × ن — خاصية الإقفال (الانغلاق)
- أ + ب = ب + أ — خاصية الإبدال Commutative
- (أ + ب) + جـ = أ + (ب + جـ) — خاصية التجميع Associative
- و$_{م×ن}$ + أ = أ + و$_{م×ن}$ = أ — المصفوفة الصفرية هي العنصر المحايد الجمعي من الرتبة م × ن
- أ + (−أ) = و$_{م×ن}$ — خاصية المعكوس الجمعي (النظير الجمعي).

طرح المصفوفات

يمكن طرح المصفوفات باستخدام خاصية مصفوفة المعكوس الجمعي.

إذا كان للمصفوفتين أ ، ب الرتبة نفسها، فإن أ − ب = أ + (−ب).

ملاحظة: إذا كان أ ≠ ب ولهما الرتبة نفسها فإن: أ − ب ≠ ب − أ وبالتالي، عملية طرح المصفوفات ليست إبدالية.

شرط ضرب المصفوفات:

ضرب المصفوفات :

المصفوفة أ هي مصفوفة من الرتبة م × ن والمصفوفة ب هي مصفوفة من الرتبة ن × ر، عندئذٍ مصفوفة الضرب أ × ب هي مصفوفة من الرتبة م × ر.

مصفوفة أ

$$\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٤ & ٣ \\ ٦ & ٥ \end{bmatrix}$$

٣ × ٢

٣ صفوف

مصفوفة ب

$$\begin{bmatrix} ١٠ & ٩ & ٨ & ٧ \\ ١٤ & ١٣ & ١٢ & ١١ \end{bmatrix}$$

٢ × ٤

٤ أعمدة

عمودان

صفان

متساويان

أبعاد مصفوفة الضرب ٣ × ٤

تكون مصفوفة الضرب معرّفة إذا كان عدد الأعمدة في المصفوفة الأولى مساويًا لعدد الصفوف في المصفوفة الثانية.

$$\underline{\text{أ}}_{\text{م}\times\text{ن}} \times \underline{\text{ب}}_{\text{ن}\times\text{ر}} = \underline{\text{جـ}}_{\text{م}\times\text{ر}}$$

ضرب المصفوفة فى رقم :

الضرب القياسي Scalar Multiplication

الضرب القياسي هو عملية ضرب مصفوفة $\underline{أ}$ في عدد حقيقي ك : ك $\neq$ ٠.

الناتج هو المصفوفة ك $\underline{أ}$.

نحصل على المصفوفة ك $\underline{أ}$ بضرب كل عنصر من $\underline{أ}$ في ك.

إذا كان ك = ٠، يكون الناتج مصفوفة صفرية.

مربع المصفوفة Square Matrix

إذا كانت $\underline{أ}$ مصفوفة مربعة، فإن المصفوفة $\underline{أ} \times \underline{أ}$ يرمز إليها بالرمز $\underline{أ}^{٢}$.

وتقرأ مربع المصفوفة $\underline{أ}$. وبالمثل $\underline{أ}^{٣} = \underline{أ} \times \underline{أ} \times \underline{أ}$، $\underline{أ}^{٤} = \underline{أ}^{٣} \times \underline{أ}$، ....

مصفوفة الوحدة Identity Matrix

المصفوفة المربعة التي عناصر قطرها الرئيسي ١، وبقية العناصر صفر تسمى **مصفوفة الوحدة** للضرب. ويرمز إليها بـ $\underline{و}$.

$$\underline{و}_{٢\times٢} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}، \quad \underline{و}_{٣\times٣} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{bmatrix}$$

أي أن: $\underline{أ} \times \underline{و} = \underline{و} \times \underline{أ} = \underline{أ}$

$\underline{و} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ هي العنصر المحايد الضربي للمصفوفات المربعة من الرتبة الثانية.

النظير الضربي Multiplicative Inverse

إذ كانت أ، س مصفوفتين مربعتين من الرتبة نفسها بحيث يكون أ × س = و ، فإن س هي النظير الضربي للمصفوفة أ.

ويرمز إليها بِـ $أ^{-1}$.

إذًا $أ \times أ^{-1} = أ^{-1} \times أ = و$

معلومة رياضية :
النظير الضربي للمصفوفة أ يسمى أيضًا المصفوفة المعكوسة $أ^{-1}$.

محدد مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية Determinant of a 2 × 2 Matrix

ترتبط كل مصفوفة مربعة أ بعدد حقيقي يسمى **محددأ** ويرمز إلى هذا العدد بالرمز | أ | ويقرأ **محدد المصفوفة** أ.

سنقتصر في هذا الدرس على محدد المصفوفة المربعة من الرتبة الثانية.

محدد المصفوفة المربعة $\begin{bmatrix} أ & جـ \\ ب & د \end{bmatrix}$ هو أ د − ب جـ

نكتب $|أ| = \begin{vmatrix} أ & جـ \\ ب & د \end{vmatrix} = أ د − ب جـ$

تسمى المصفوفة التى محددها يساوي الصفر **بالمصفوفة المنفردة**

حل نظام من معادلتين خطيتين

يمكن للمعادلة المصفوفية أن تمثّل أي نظام معادلات.

نظام معادلات	المعادلة المصفوفية
$\begin{cases} س + ٢ص = ٥ \\ ٣س + ٥ص = ١٤ \end{cases}$	$\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٥ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ \\ ١٤ \end{bmatrix}$

مصفوفة المعاملات $\underline{أ}$		مصفوفة المتغيرات $\underline{ع}$		مصفوفة الثوابت $\underline{ب}$
$\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٥ \end{bmatrix}$	$\times$	$\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix}$	$=$	$\begin{bmatrix} ٥ \\ ١٤ \end{bmatrix}$

حل النظام: Solving a System

تستطيع إيجاد النظير الضربي لمصفوفة المعاملات، ثم الحصول سريعًا على حل النظام من المعادلات الخطية.

١ - الحل باستخدام المعكوس الضربي للمصفوفة المربعة: Solving by Using Inverse Matrix

- تقترن كل مصفوفة مربعة $\underline{أ}$ بعدد حقيقي يسمى «محدد» ويرمز إليه بالرمز $|\underline{أ}|$ ويقرأ محدد المصفوفة $\underline{أ}$. وإذا كانت $\underline{أ} = \begin{bmatrix} أ & ب \\ جـ & د \end{bmatrix}$

فإن $|\underline{أ}| = \begin{vmatrix} أ & ب \\ جـ & د \end{vmatrix} = أد - ب جـ$

$$\underline{أ}^{-1} = \frac{١}{أد - ب جـ} \begin{bmatrix} د & -ب \\ -جـ & أ \end{bmatrix}$$ حيث $أد - ب جـ \neq ٠$

٢ – استخدام قاعدة كرامر (المحددات) لحل معادلتين خطيتين:

Using Crammer's Rule to Solve Two Linear Equations

لحل نظام معادلتين خطيتين:

أ س + ب ص = ل

جـ س + د ص = م

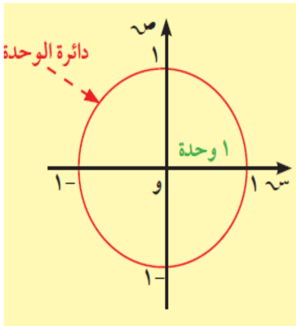
نكتب: $\Delta = \begin{vmatrix} أ & ب \\ جـ & د \end{vmatrix}$ وهو محدد مصفوفة المعاملات

$\Delta_{س} = \begin{vmatrix} ل & ب \\ م & د \end{vmatrix}$ وهو محدد مصفوفة المعاملات بعد استبدال العمود الزائد بعمود معاملات س

$\Delta_{ص} = \begin{vmatrix} أ & ل \\ جـ & م \end{vmatrix}$ وهو محدد مصفوفة المعاملات بعد استبدال العمود الزائد بعمود معاملات ص

فإن س = $\frac{\Delta_{س}}{\Delta}$ ، ص = $\frac{\Delta_{ص}}{\Delta}$ (بشرط أن $\Delta \neq ٠$)

دائره الوحدة والمستوى الأحداثى

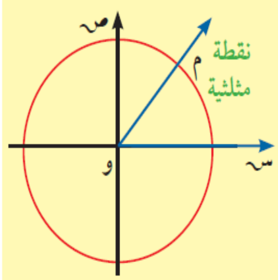


دائرة الوحدة Unit Circle

هي دائرة مركزها نقطة الأصل و، وطول نصف قطرها واحد وحدة.

النقطة المثلثية The Triangular Point

هي نقطة تقاطع الضلع النهائي لزاوية موجهة في الوضع القياسي مع دائرة الوحدة.



معلومة مفيدة:

عادة ما يستخدم الحرف اليوناني θ (يلفظ ثيتا) للتعبير عن قياس زاوية.

النسب المثلثيه للزاوية:

في الشكل المقابل المثلث المظلل قائم الزاوية.

تعرف من دراستك السابقة: أن جتا θ = $\frac{\text{الضلع المجاور}}{\text{الوتر}}$

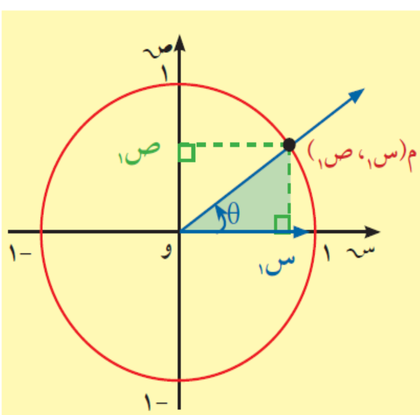
∵ طول الوتر = نق = ١

∴ جتا θ = $\frac{\text{الضلع المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{\text{س}_1}{1} = \text{س}_1$ أي أن جتا θ = س_1

كذلك جا θ = $\frac{\text{الضلع المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{\text{ص}_1}{1} = \text{ص}_1$ أي أن جا θ = ص_1

وبالتالي تكون النسب المثلثية للزاوية θ هي:

جتا θ = س_1	جا θ = ص_1
ظا θ = $\frac{\text{ص}_1}{\text{س}_1}$ ، $\text{س}_1 \neq 0$	ظتا θ = $\frac{\text{س}_1}{\text{ص}_1}$ ، $\text{ص}_1 \neq 0$
قا θ = $\frac{1}{\text{س}_1}$ ، $\text{س}_1 \neq 0$	قتا θ = $\frac{1}{\text{ص}_1}$ ، $\text{ص}_1 \neq 0$



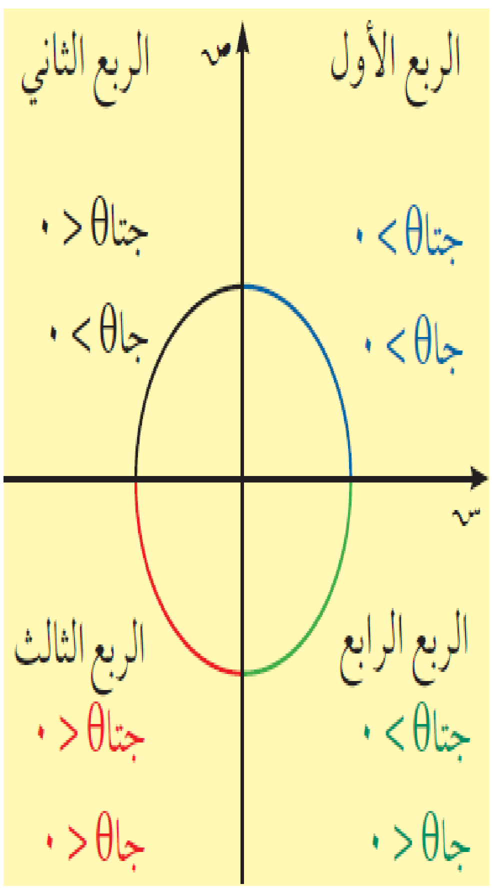
معلومة مفيدة:

عندما نقول الزاوية θ أو α أو ... نقصد الزاوية التي قياسها θ أو α أو ...

معلومة رياضية :

– الاتجاه الموجب هو الاتجاه المعاكس لدوران عقارب الساعة.

– النقطة المثلثية (س، ص) يمكن التعبير عنها بـ (جتاθ، جاθ).



من الشكل: يمكن ملاحظة ما يلي:

إذا كانت θ في الربع الأول فإن: جاθ > ٠، جتاθ > ٠

إذا كانت θ في الربع الثاني فإن: جاθ > ٠، جتاθ < ٠

إذا كانت θ في الربع الثالث فإن: جاθ < ٠، جتاθ < ٠

إذا كانت θ في الربع الرابع فإن: جاθ < ٠، جتاθ > ٠

زاوية الإسناد Reference Angle

تحتاج أحيانًا إلى معرفة قيم النسب المثلثية لزاوية θ ضلعها النهائي موجود في الربع الثاني أو الربع الثالث أو الربع الرابع.
يمكن إسناد هذه الزاوية إلى زاوية حادة α، محددة بمحور السينات والضلع النهائي للزاوية θ.

معلومة

الرمز α يُقرأ ألفا.

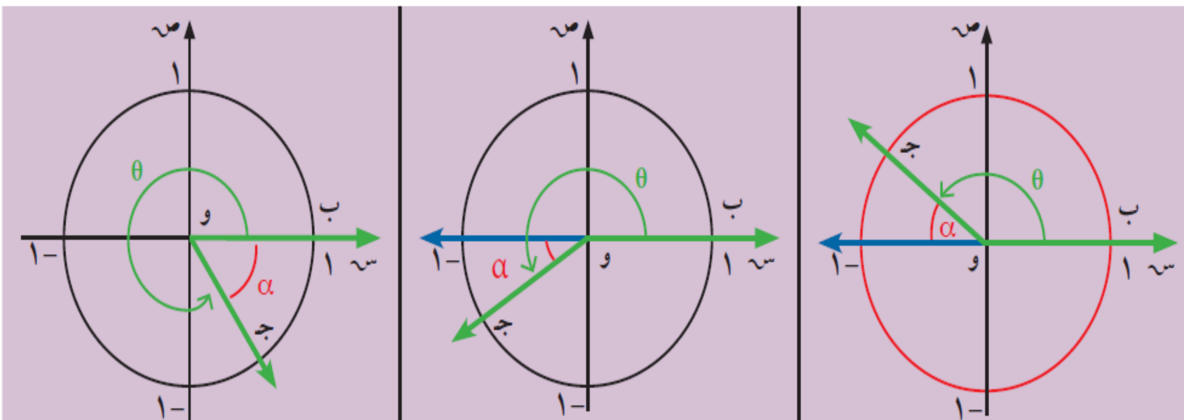
تعريف زاوية الإسناد:

زاوية الإسناد للزاوية الموجهة ($\overleftarrow{وب}$، $\overleftarrow{وج}$) التي في وضع قياسي هي الزاوية **الحادة** α التي يصنعها الضلع النهائي للزاوية الموجهة مع محور السينات.
فإذا كان α زاوية الإسناد فإن: $٠^\circ < \alpha < ٩٠^\circ$

تذكر

الزاوية الموجهة ب وَ ج يمكن أن نرمز لها بالرمز ($\overleftarrow{وب}$، $\overleftarrow{وج}$) حيث $\overleftarrow{وب}$ الضلع الابتدائي، $\overleftarrow{وج}$ الضلع النهائي.

الأشكال التالية توضح الحالات المختلفة لإيجاد زاوية الإسناد:



عندما θ تقع في الربع الثاني

$\alpha^\circ = ١٨٠^\circ - \theta^\circ$

$\alpha^{د} = \pi - \theta^{د}$

عندما θ تقع في الربع الثالث

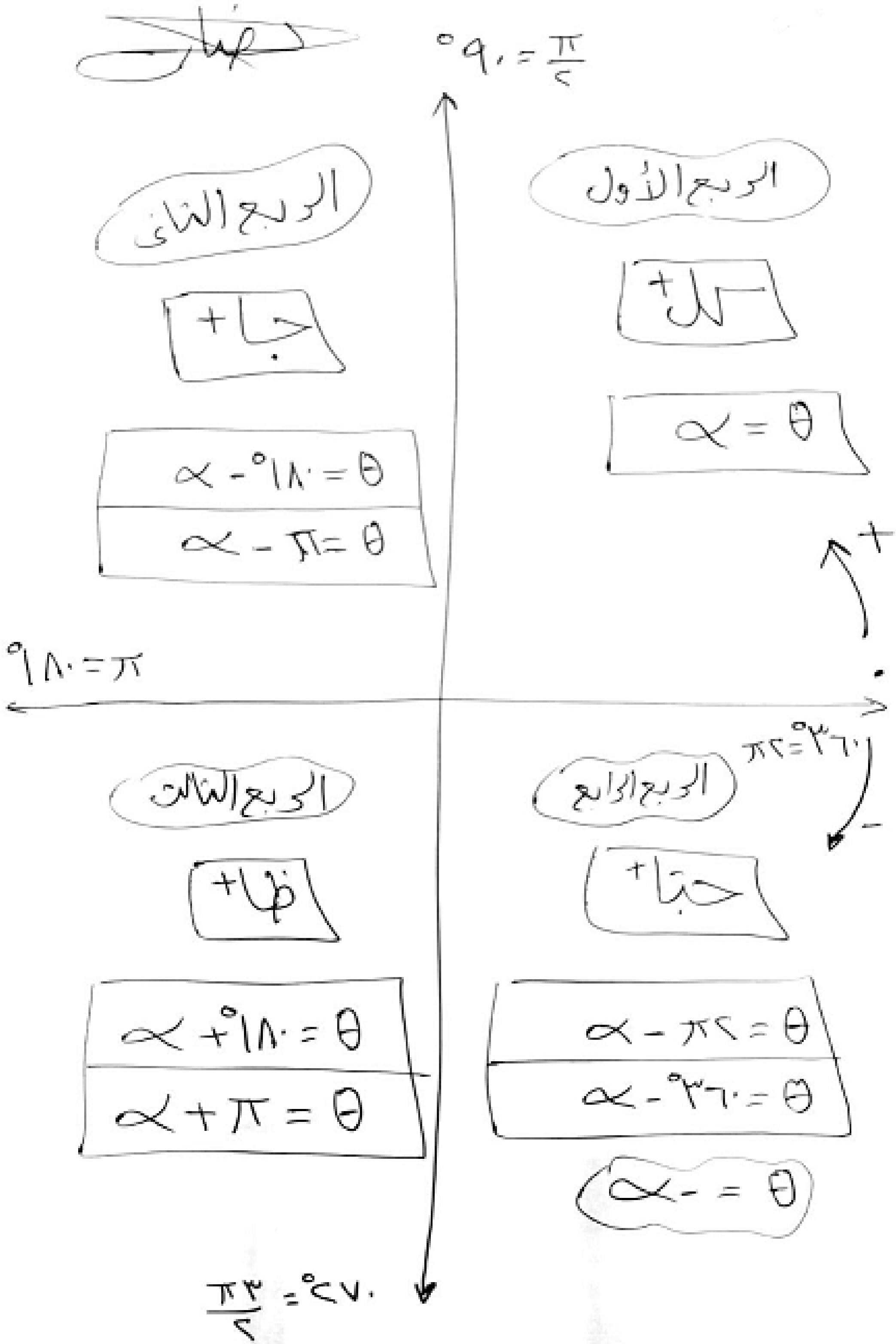
$\alpha^\circ = \theta^\circ - ١٨٠^\circ$

$\alpha^{د} = \theta^{د} - \pi$

عندما θ تقع في الربع الرابع

$\alpha^\circ = ٣٦٠^\circ - \theta^\circ$

$\alpha^{د} = ٢\pi - \theta^{د}$



نصار
$٩٠° = \frac{\pi}{٢}$
الربع الأول
كل +
$\theta = \alpha$
الربع الثانى
جا +
$\theta = ١٨٠° - \alpha$
$\theta = \pi - \alpha$
$١٨٠° = \pi$
+
-
$٣٦٠° = ٢\pi$
الربع الثالث
ظا +
$\theta = ١٨٠° + \alpha$
$\theta = \pi + \alpha$
الربع الرابع
جتا +
$\theta = ٢\pi - \alpha$
$\theta = ٣٦٠° - \alpha$
$\theta = -\alpha$
$٢٧٠° = \frac{٣\pi}{٢}$

العلاقات بين الدوال المثلثية

قانون:

جتا$(-\theta)$ = جتاθ

جا$(-\theta)$ = $-$جاθ

وبالتالي ظا$(-\theta)$ = $-$ظاθ بشرط أن يكون ظاθ معرّف.

قانون:

جتا$(\pi - \theta)$ = $-$جتاθ

جا$(\pi - \theta)$ = جاθ

وبالتالي ظا$(\pi - \theta)$ = $-$ظاθ شرط أن يكون ظاθ معرّفًا.

معلومة مفيدة:

إذا كانت الزاوية α هي زاوية الإسناد للزاوية θ فإن:

جاα = |جاθ|

جتاα = |جتاθ|

ظاα = |ظاθ|

فمثلًا: الزاوية ٦٠° زاوية إسناد للزاوية ١٢٠°.

جتا٦٠° = |جتا ١٢٠°|

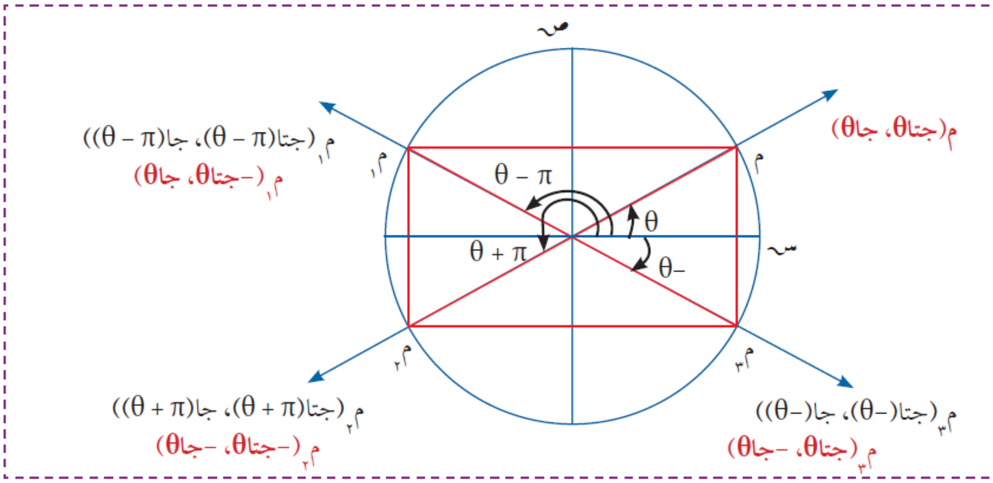
قانون:

جتا$(\pi + \theta)$ = $-$جتاθ

جا$(\pi + \theta)$ = $-$جاθ

وبالتالي ظا$(\pi + \theta)$ = ظاθ شرط أن يكون ظاθ معرّفًا.

الخلاصة:



قانون:

جا$\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right)$ = جتاθ

جتا$\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right)$ = جاθ

ظا$\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right)$ = ظتاθ شرط أن يكون ظتاθ معرّفًا.

قانون:

جا$\left(\frac{\pi}{٢} + \theta\right)$ = جتاθ

جتا$\left(\frac{\pi}{٢} + \theta\right)$ = −جاθ

ظا$\left(\frac{\pi}{٢} + \theta\right)$ = −ظتاθ شرط أن يكون ظتاθ معرّفًا.

إذا كان ك عددًا صحيحًا فإن:

جا(θ + ٢ك π) = جاθ

جتا(θ + ٢ك π) = جتاθ

ظا(θ + ك π) = ظاθ حيث ظاθ معرّف

تعريف:

إذا كانت (س، ص) هي النقطة المثلثية لزاوية موجهة في الوضع القياسي قياسها θ فإن:

١ جاθ = ص $\forall\ \theta \in ح$

٢ جتاθ = س $\forall\ \theta \in ح$

٣ ظاθ = $\frac{ص}{س}$، س $\neq$ ٠ حيث $\theta \in ح$

٤ قاθ = $\frac{١}{س}$، س $\neq$ ٠ حيث $\theta \in ح$

٥ قتاθ = $\frac{١}{ص}$، ص $\neq$ ٠ حيث $\theta \in ح$

٦ ظتاθ = $\frac{س}{ص}$، ص $\neq$ ٠ حيث $\theta \in ح$

حل معادلات مثلثية

حل المعادلة: جتا س = جتاθ

هو س = θ + ٢ك π أو س = $-\theta$ + ٢ك π (ك $\in$ صـ)

لاحظ أن جيب تمام الزاوية يكون موجبًا عندما تقع الزاوية في الربع الأول أو الرابع.

حل المعادلة جا س = جاθ

هو س = θ + ٢ك π أو س = $(\pi - \theta)$ + ٢ك π ، (ك $\in$ صـ)

لاحظ أن جيب الزاوية يكون موجبًا عندما تقع الزاوية في الربع الأول أو الثاني.

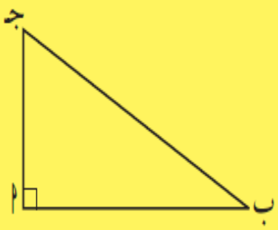
حل المعادلة ظا س = ظاθ هو س = θ + ك π، (ك $\in$ صـ)

لاحظ أن ظل الزاوية يكون موجبًا عندما تقع الزاوية في الربع الأول أو الثالث.

المتطابقات المثلثية

ظا θ = $\frac{\text{جا}\,\theta}{\text{جتا}\,\theta}$ ، ظتا θ = $\frac{\text{جتا}\,\theta}{\text{جا}\,\theta}$ ، ظتا θ = $\frac{1}{\text{ظا}\,\theta}$ حيث المقام ≠ ٠

قا θ = $\frac{1}{\text{جتا}\,\theta}$ ، قتا θ = $\frac{1}{\text{جا}\,\theta}$



جا٢ θ + جتا٢ θ = ١ تسمى متطابقة فيثاغورث

١ + ظا٢ θ = قا٢ θ

١ + ظتا٢ θ = قتا٢ θ

المستوى الأحداثى

المسافه بين نقطتين:

قانون:

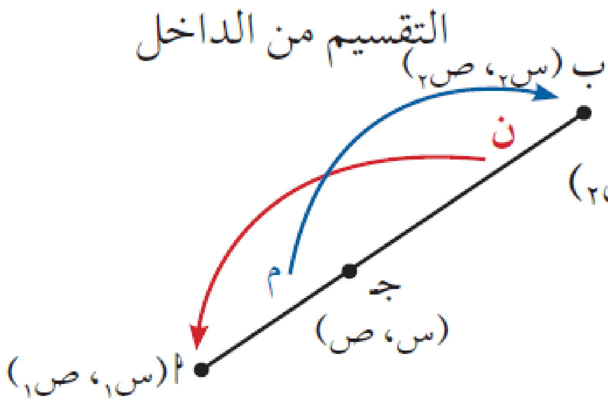
المسافة بين أي نقطتين أ (س١، ص١)، ب (س٢، ص٢) تساوي $\sqrt{(\text{س}_2 - \text{س}_1)^2 + (\text{ص}_2 - \text{ص}_1)^2}$

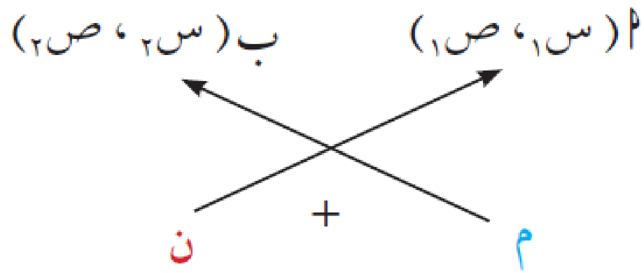
نقطة المنتصف:

قانون:

إذا كانت أ(س١، ص١)، ب(س٢، ص٢)، فإن إحداثيات نقطة المنتصف هي م(س، ص) حيث س = $\frac{\text{س}_1 + \text{س}_2}{2}$ ، ص = $\frac{\text{ص}_1 + \text{ص}_2}{2}$.

نقطة التقسيم من الداخل:

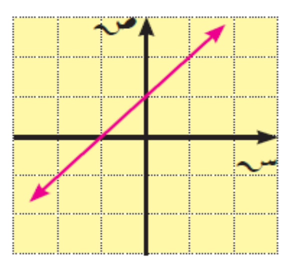




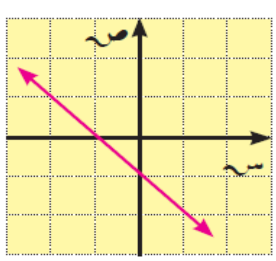
$$\text{جـ}\left(\frac{\text{م}\,س_٢ + \text{ن}\,س_١}{\text{م} + \text{ن}} \text{ ، } \frac{\text{م}\,ص_٢ + \text{ن}\,ص_١}{\text{م} + \text{ن}}\right)$$

ميل الخط المستقيم:

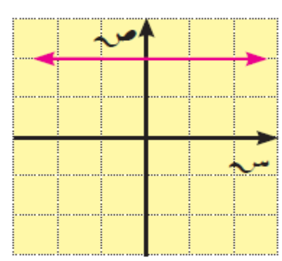
$$\text{الميل} = \frac{\text{التغيير الرأسي}}{\text{التغيير الأفقي}} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} \text{ ، } س_٢ - س_١ \neq ٠$$



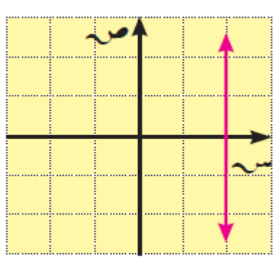
ميل المستقيم موجب



ميل المستقيم سالب



ميل المستقيم الأفقي
يساوي صفرًا



المستقيم الرأسي
ليس له ميل

تذكر أن العلاقة بين ظل الزاوية θ التي يصنعها مستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات وميل هذا المستقيم م

هي: م = ظا θ.

معادلة الخط المستقيم

- الميل (م).
- نقطة من نقاط المستقيم ولتكن (س$_1$، ص$_1$).

تكون معادلة المستقيم: ص − ص$_1$ = م(س − س$_1$).

معادلة المستقيم الرأسي هي س = أ (وهذا المستقيم ليس له ميل)

تذكر:
معادلة محور السينات هي: ص = ٠
معادلة محور الصادات هي: س = ٠
وبالتالي إحداثيات نقاط محور السينات (س، ٠) وإحداثيات نقاط محور الصادات (٠، ص).

معلومة مفيدة:
الصورة العامة لمعادلة المستقيم هي:
أس + ب ص + جـ = ٠
حيث أ، ب لا يساويان الصفر معًا.

شرط التعامد وشرط التوازى:

المستقيمان ل، هـ متوازيان ، ميل المستقيم هـ = ميل المستقيم ل

تذكر :

إذا كان ميل المستقيم هو $\frac{أ}{ب}$

فإن ميل المستقيم المتعامد معه

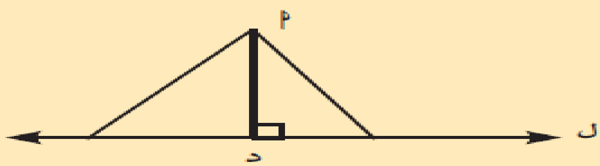
هو $\frac{-ب}{أ}$ حيث أ ، ب $\neq$ ٠

البعد بين نقطة ومستقيم:

إذا كانت معادلة المستقيم على الصورة ل: أس + ب ص + جـ = ٠، فإن البعد ف بين النقطة د (س١، ص١) والمستقيم ل تعطى بالصيغة: $ف = \frac{|أس_١ + ب ص_١ + جـ|}{\sqrt{أ^٢ + ب^٢}}$.

إذا كانت النقطة د تنتمي إلى المستقيم ل فالبعد بينهما يساوي صفرًا.

بعد نقطة عن مستقيم هو طول القطعة العمودية المرسومة من النقطة على الخط المستقيم.

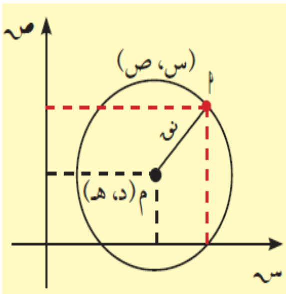


أ د هي أقصر مسافة بين النقطة أ والمستقيم ل.

معادلة الدائرة

الصورة القياسية لمعادلة الدائرة:

لأي دائرة مركزها م(د، هـ) وطول نصف قطرها نق



$نق^2 = (س - د)^2 + (ص - هـ)^2$

إذا كان نق طول نصف قطر الدائرة التي مركزها نقطة الأصل، فإن معادلتها على الصورة: $س^2 + ص^2 = نق^2$

الصورة العامه لمعادلة دائره

$س^2 + ص^2 + ل\,س + ك\,ص + ب = 0$ ، حيث ل، ك، ب ثوابت

وتسمى الصورة العامة لمعادلة الدائرة التي مركزها $\left(\frac{-ل}{2}، \frac{-ك}{2}\right)$

طول نصف قطرها $نق = \frac{1}{2}\sqrt{ل^2 + ك^2 - 4ب}$. حيث $ل^2 + ك^2 - 4ب > 0$

ملاحظة

عندما يكون لدينا معادلة على الصورة العامة التالية: $س^2 + ص^2 + ل\,س + ك\,ص + ب = 0$

يمكننا معرفة ما تمثله بيانيًّا هذه المعادلة بمجرد مقارنة

$ل^2 + ك^2 - 4ب$ مع الصفر.

1. عندما $ل^2 + ك^2 - 4ب < 0$ فإن المعادلة لا تمثل معادلة دائرة.
2. عندما $ل^2 + ك^2 - 4ب = 0$ فإن المعادلة تمثل نقطة.
3. عندما $ل^2 + ك^2 - 4ب > 0$ فإن المعادلة تمثل دائرة.

الأحصاء

المتوسط الحسابي هو ناتج قسمة مجموع قيم البيانات على عدد هذه القيم: $\overline{س}$

التباين والانحراف المعياري Variance and Standard Deviation

إذا كانت $س_1$، $س_2$، $س_3$، ...، $س_ن$ مجموعة من القيم عددها ن حيث متوسطها الحسابي $\overline{س}$ فإن:

$$\text{التباين} = ع^2 = \frac{\sum_{ر=1}^{ن} (س_ر - \overline{س})^2}{ن}$$

ومنه الانحراف المعياري $= ع = \sqrt{ع^2}$

الانحراف المعياري يبيّن تشتت البيانات عن المتوسط الحسابي لهذه البيانات

نكون الجدول التالي:

القيمة $س_ر$	الانحراف عن المتوسط الحسابي $س_ر - \overline{س}$	مربع الانحراف عن المتوسط الحسابي $(س_ر - \overline{س})^2$

معلومة رياضية:

- $(س_ر - \overline{س})$ هي انحراف $س_ر$ عن المتوسط الحسابي.
- المتوسط الحسابي:
هو ناتج قسمة مجموع قيم البيانات على عدد هذه القيم.

إذا كانت $س_١$، $س_٢$، $س_٣$، ...، $س_ن$ هي قيم بيانات؛ $ت_١$، $ت_٢$، $ت_٣$، .... ، $ت_ن$ هي تكرار هذه القيم على الترتيب فيكون التباين لهذه القيم هو:

$$ع^٢ = \frac{ت_١(س_١ - \overline{س})^٢ + ت_٢(س_٢ - \overline{س})^٢ + ... + ت_ن(س_ن - \overline{س})^٢}{ت_١ + ت_٢ + ... + ت_ن}$$

$$= \frac{\sum_{ر=١}^{ن} ت_ر (س_ر - \overline{س})^٢}{\sum_{ر=١}^{ن} ت_ر}$$

$$\text{والانحراف المعياري} = ع = \sqrt{\frac{\sum_{ر=١}^{ن} ت_ر (س_ر - \overline{س})^٢}{\sum_{ر=١}^{ن} ت_ر}}$$

لحساب التباين لقيم بيانات في جدول تكراري ذو فئات نعتبر $س_ر$ هي مركز الفئة.

المتوسط الحسابي: $\frac{\sum س_ر ت_ر}{\sum ت_ر}$

<u>نكون الجدول التالى:</u>

الفئة	مركز الفئة $س_ر$	التكرار $ت_ر$	$س_ر ت_ر$	$(س_ر - \overline{س})$	$(س_ر - \overline{س})^٢$	$(س_ر - \overline{س})^٢ \times ت_ر$

مبدأ العد Counting Principle

إذا كان لدينا عملية مركبة ع تتكون من عدة عمليات متتالية عددها ن وهي :

$ع_١، ع_٢، ع_٣، \dots ع_ن$ وإذا كانت:

$ع_١$ يمكن أن تحدث بـ $ر_١$ طريقة،

$ع_٢$ يمكن أن تحدث بـ $ر_٢$ طريقة،

⋮

$ع_ن$ يمكن أن تحدث بـ $ر_ن$ طريقة،

فإن عدد الطرق التي يمكن أن يحدث بها الإجراء ط هي:

$ر_١ \times ر_٢ \times \dots \times ر_ن$.

إن مفتاح حل مسائل مبدأ العد هو أن نحدد المراحل $ع_١، ع_٢، \dots ، ع_ن$. وبمجرد تعريفها، يتم تحديد عدد مرات حدوث كل منها، ومن ثمّ ضرب هذه الأعداد للحصول على عدد الطرق الممكنة لحل المسألة.

تذكر :

مضروب ن أو

ن! هو: $ن \times (ن - ١) \times \dots \times ٣ \times ٢ \times ١$

فمثلًا: $٥! = ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١$

$٠! = ١$ تُقرأ مضروب صفر = ١

الترتيب مهمًّا ومعتمدًا. مثل هذا الترتيب يسمى **بالتباديل**

قانون

$$ل^{ن}_{ر} = \frac{ن!}{(ن - ر)!}$$ حيث ر، ن $\in$ ص$_+$ ، ر $\leq$ ن، $ل^{ن}_{ن} = ١$

قانون التباديل Law of Permutations

عدد تباديل ن من العناصر **المختلفة** مأخوذة منها ر في كل مرة هو:

$^{ن}ل_{ر} = ن(ن-١)(ن-٢)\ldots(ن-ر+١)$، ر، ن $\in$ ص$_+$، ر $\leq$ ن

عندما ر = ٠ يعرّف $^{ن}ل_{ر} = ١$

لاحظ: $^{ن}ل_{ر} = ن \times (ن-١) \times (ن-٢) \times \ldots \times (ن-ر+١)$

$$= ن\overbrace{(ن-١)\times(ن-٢)\times\ldots\times(ن-ر+١)}^{\text{ر عامل}} \times \frac{(ن-ر)\times\ldots\times٣\times٢\times١}{(ن-ر)\times\ldots\times٣\times٢\times١}$$

$$= \frac{ن!}{(ن-ر)!}$$

مساعدة:

يمكن استخدام الآلة الحاسبة لإيجاد عدد التباديل، اضغط على nPr.

التوافيق Combinations

عندما تريد إيجاد عدد المجموعات الجزئية والمكون كل منها من ر عنصر، والتي يمكن اختيارها من مجموعة مكونة من ن عنصر (ر $\leq$ ن) **دون الاعتماد على الترتيب** فنحن نحسب التوافيق.

تعريف: قانون التوافيق

إذا كان ن، ر عددان صحيحان موجبان حيث ن $\leq$ ر، فإن:

عدد التوافيق المكونة كل منها من ر من الأشياء والمختارة من بين ن من الأشياء هو:

$$\binom{ن}{ر} = \frac{ن!}{(ن-ر)!\,ر!}$$

ملاحظة:

يستخدم الرمز $^{ن}ق_{ر}$ للتعبير عن عدد التوافيق.

$$\text{عدد التوافيق} = \frac{{}^{ن}ل_{ر}}{ر!} = \frac{ن!}{(ن - ر)!\, ر!}$$

ملاحظات:

(١) عندما ر = ٠ يُعرَّف $\binom{ن}{٠} = ١$

(٢) $\binom{ن}{ن} = ١$

تستخدم الخطوات التالية

لإيجاد التوافيق بواسطة الآلة الحاسبة:

ن **nCr** ر **=**

....

الأحتمال

في كل تجربة عشوائية، نهتم أولًا بمعرفة مجموعة النواتج الممكنة والتي تسمى **فضاء العينة (ف)**.

إذا كانت جميع نواتج التجربة لها فرصة الظهور نفسها فإن احتمال الحدث أ هو:

$$\text{ل(الحدث أ)} = \frac{\text{عدد نواتج الحدث أ}}{\text{عدد النواتج في فضاء العينة}}$$

أي أن: $\text{ل(أ)} = \frac{\text{ن (أ)}}{\text{ن (ف)}}$

احتمال وقوع حدث ما ، هو عدد ينتمي إلى الفترة [٠، ١].

خواص الاحتمال لحدث ما

ليكن ﺃ حدث في فضاء عينة ف منته وغير خالٍ فإن:

١ ٠ ≤ ل(ﺃ) ≤ ١

٢ إذا كان ﺃ = { } إذًا ل(ﺃ) = ٠ ويسمى ﺃ **حدثًا مستحيلًا**.

٣ إذا كان ﺃ = ف إذًا ل(ﺃ) = ١ ويسمى ﺃ **حدثًا مؤكدًا**.

٤ مجموع احتمالات جميع النواتج في فضاء العينة يساوي ١ .

- تقاطع حدثين ﺃ ، ب هو الحدث الذي يتألف من النواتج الموجودة في ﺃ وفي ب في آن معًا ويرمز إليه بـ ﺃ $\cap$ ب.
- اتحاد حدثين ﺃ ، ب هو الحدث الذي يتألف من النواتج الموجودة في ﺃ أو في ب ويرمز إليه بـ ﺃ $\cup$ ب.
- الحدثان ﺃ ، ب هما متنافيان إذا لم يكن لديهما ناتج مشترك أي ﺃ $\cap$ ب = $\varnothing$.
- متمم حدث ﺃ يرمز إليه بـ $\overline{ﺃ}$ وهو الحدث الذي يتألف من كل النواتج الموجودة في فضاء العينة وغير موجودة في ﺃ.
- الأحداث المستقلة: يكون حدثان مستقلان إذا كان حدوث أحدهما ليس له تأثير على احتمال حدوث الآخر .
- قاعدة الضرب للأحداث المستقلة:

إذا كان ﺃ ، ب حدثان مستقلان فإن احتمال وقوع الحدثين معًا هو : ل(ﺃ $\cap$ ب) = ل(ﺃ) × ل(ب)

قاعدة الاحتمال لاتحاد حدثين:

ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∩ ب)

ومنها ل(أ ∩ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∪ ب)

قاعدة الاحتمال لمتمم الحدثأ:

ل($\overline{\text{أ}}$) = ١ − ل(أ)

قاعدة الاحتمال لحدثين متنافيين:

إذا كان أ، ب حدثين متنافيين من فضاء العينة ف فإن ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب).

قاعدة الضرب للأحداث المستقلة Multiplication principle of Independent Events

إذا كان أ، ب حدثان مستقلان فإن احتمال وقوع الحدثين معًا هو:

ل(أ ∩ ب) = ل(أ) × ل(ب)

− **الحدث التابع**: يكون الحدث تابعًا عندما يتأثر ظهور هذا الحدث بحدث سابق.

− الاحتمال المشروط:

ليكن لدينا حدثين أ ، ب ونفترض أن ل(أ) ≠ ٠.

احتمال وقوع الحدث ب بشرط وقوع الحدث أ يسمى الاحتمال المشروط ويكتب ل(ب|أ) ويقرأ «احتمال الحدث ب بشرط أ».

− قاعدة الاحتمال المشروط:

إذا كان وقوع الحدث ب مشروطًا بوقوع الحدث أ (ل(أ) ≠ ٠)

ل(ب|أ) = $\dfrac{\text{ل(أ ∩ ب)}}{\text{ل(أ)}}$ ، ل(أ ∩ ب) = ل(أ) × ل(ب|أ) .