مذكرة

القصير الثاني

math

رياضيات

الصف العاشر

2023 - 2024

أ : سلامة علي الركاض

٧–٤ مصفوفات الوحدة والنظير الضربي

مصفوفة الوحدة

المصفوفة المربعة التي عناصر قطرها الرئيسي ١، وبقية العناصر صفر تسمى **مصفوفة الوحدة** للضرب. ويرمز إليها بِـ و.

$$\underline{و}_{٢\times٢} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}، \underline{و}_{٣\times٣} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{bmatrix}$$

بفرض أن $\underline{أ} = \begin{bmatrix} أ & جـ \\ ب & د \end{bmatrix}$، $\underline{و} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$

$$\underline{أ} \times \underline{و} = \begin{bmatrix} أ & ب \\ جـ & د \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} أ\times١ + ب\times٠ & أ\times٠ + ب\times١ \\ جـ\times١ + د\times٠ & جـ\times٠ + د\times١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} أ & ب \\ جـ & د \end{bmatrix} = \underline{أ}$$

كذلك $\underline{و} \times \underline{أ} = \begin{bmatrix} أ & ب \\ جـ & د \end{bmatrix} = \underline{أ}$

أي أن: $\underline{أ} \times \underline{و} = \underline{و} \times \underline{أ} = \underline{أ}$

$\underline{و} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ هي العنصر المحايد الضربي للمصفوفات المربعة من الرتبة الثانية.

وبصورة عامة $\underline{و}_{ن\times ن}$ هي العنصر المحايد الضربي للمصفوفات المربعة من الرتبة ن.

أ : سلامة علي الركاض

النظير الضربي

إذ كانت أ ، س مصفوفتين مربعتين من الرتبة نفسها بحيث يكون أ × س = و ، فإن س هي النظير الضربي للمصفوفة أ .
ويرمز إليها بـ $أ^{-١}$.

إذًا أ × $أ^{-١}$ = $أ^{-١}$ × أ = و

مثال 1

أثبت أن ب = $\begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ -١ & ٢ \end{bmatrix}$ هي النظير الضربي للمصفوفة أ = $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$.

حاول أن تحل 1

أ أثبت أن المصفوفة $\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٢,٥ & ١ \end{bmatrix}$ هي النظير الضربي لِـ $\begin{bmatrix} -٢ & ٢ \\ ٥ & -٤ \end{bmatrix}$

ب في المثال (١)، أثبت أن أ هي النظير الضربي لِـ ب.

كراسة التمارين

في التمرينين (١ – ٢)، بيّن أن كل مصفوفة هي نظير ضربي للمصفوفة الأخرى.

(١) $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٤ & ٣ \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} ٣ & ٢- \\ ٤- & ٣ \end{bmatrix}$

.....

.....

.....

.....

.....

(٢) $\begin{bmatrix} \frac{١}{٥} & \frac{١}{١٠}- \\ ٠ & \frac{١}{٤} \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} ٥ & ٢ \\ ٠ & ٤ \end{bmatrix}$

.....

.....

.....

.....

.....

محدد مصفوفة مربعة

ترتبط كل مصفوفة مربعة أ بعدد حقيقي يسمى **محدد أ** ويرمز إلى هذا العدد بالرمز $|\text{أ}|$ ويقرأ **محدد المصفوفة أ**.

سنقتصر في هذا الدرس على محدد المصفوفة المربعة من الرتبة الثانية.

محدد المصفوفة المربعة $\begin{bmatrix} \text{أ} & \text{جـ} \\ \text{ب} & \text{د} \end{bmatrix}$ هو أ د – ب جـ

نكتب $|\text{أ}| = \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{جـ} \\ \text{ب} & \text{د} \end{vmatrix}$ = أ د – ب جـ

تسمى المصفوفة التي محددها يساوي الصفر **بالمصفوفة المنفردة**

مثال 2

أوجد محدد كل من المصفوفات التالية: $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٤ & ٣- \\ ٥- & ٢ \end{bmatrix}$ $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٣- & ٢ \\ ٢- & ٣ \end{bmatrix}$ $\underline{جـ} = \begin{bmatrix} س & ٠ \\ س & ٠ \end{bmatrix}$

حاول أن تحل2

أوجد محدد كل من المصفوفات التالية:

أ $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٢ & ٤ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix}$ ب $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٧ & ٨ \\ ١٠ & ٢ \end{bmatrix}$ جـ $\underline{جـ} = \begin{bmatrix} ٣ & ك \\ ٣- & ٣ - ك \end{bmatrix}$

ملاحظة

ليس لكلّ المصفوفات المربّعة نظير ضربي (معكوسات). سوف يساعدك الاختبار التالي على استنتاج ما إذا كانت المصفوفة ٢ × ٢ لها نظير ضربي، وكيف يمكنك إيجاده إن وجد.

خاصية

بفرض أن: $\underline{أ} = \begin{bmatrix} أ & ب \\ جـ & د \end{bmatrix}$ إذا كان أ د − ب جـ ≠ ٠ ، فإن $\underline{أ}$ لها نظير ضربي $\underline{أ}^{-١}$ حيث:

$$\underline{أ}^{-١} = \frac{١}{|\underline{أ}|} \begin{bmatrix} د & -ب \\ -جـ & أ \end{bmatrix}$$

$$\underline{أ}^{-١} = \frac{١}{أ د - ب جـ} \begin{bmatrix} د & -ب \\ -جـ & أ \end{bmatrix}$$

معلومة رياضية:
المصفوفة التي محددها الصفر ليس لها نظير ضربي وتسمى **مصفوفة منفردة**.

مثال 3 إذا كانت المصفوفة $\underline{أ} = \begin{bmatrix} س & ٤ \\ ١٢ & ٦ \end{bmatrix}$ منفردة أوجد قيمة س.

.....

.....

.....

حاول أن تحل 3 إذا كانت المصفوفة $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٥ & ١٠ \\ -٤ & ٢س \end{bmatrix}$ منفردة، أوجد قيمة س.

.....

.....

.....

مثال 4 هل للمصفوفة: $\underline{أ} = \begin{bmatrix} -١ & ٠ \\ ٨ & -٢ \end{bmatrix}$ نظير (معكوس) ضربي؟ في حالة الإيجاب أوجده.

.....

.....

.....

.....

حاول أن تحل 4

هل ب = $\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٤ & ٣ \end{bmatrix}$ لها نظير ضربي؟ فسّر إجابتك.

.....

.....

.....

هل ب = $\begin{bmatrix} ٨ & ٦ \\ ٤- & ٣- \end{bmatrix}$ لها نظير ضربي؟ فسّر إجابتك.

.....

.....

.....

مثال5

حدّد أي مصفوفة مما يلي لها نظير (معكوس) ضربي، ثم أوجده.

أ م = $\begin{bmatrix} ٢ & ٢- \\ ٤- & ٥ \end{bmatrix}$

ب ن = $\begin{bmatrix} ٩ & ٣ \\ ٦ & ٢ \end{bmatrix}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

حاول أن تحل 5

حدّد أي مصفوفة من المصفوفات التالية لها نظير ضربي (معكوس)، ثم أوجده.

أ $\begin{bmatrix} ٤ & ٢ \\ ٣ & ١ \end{bmatrix}$

ب $\begin{bmatrix} ٢,٣ & ٠,٥ \\ ٧,٢ & ٣ \end{bmatrix}$

كراسة التمارين

في التمارين (٣–٥)، أوجد محدّد كل مصفوفة.

(٣) $\begin{bmatrix} ٢ & ٦ \\ ٢- & ٦- \end{bmatrix}$

(٤) $\begin{bmatrix} \frac{٢}{٣} & \frac{١}{٢} \\ \frac{١}{٤} & \frac{٣}{٥} \end{bmatrix}$

(٥) $\begin{bmatrix} ٢ & ٥ \\ ٣ & ١ \end{bmatrix}$

أ : سلامة علي الركاض

في التمارين (٦–٩)، أوجد النظير الضربي لكل مصفوفة إن وجد، وإذا لم يوجد فاكتب «لا يوجد نظير ضربي» مع ذكر السبب.

(٦) $\begin{bmatrix} ٢ & ١- \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$

(٧) $\begin{bmatrix} ٤ & ٨ \\ ٣- & ٢- \end{bmatrix}$

في التمارين (١٠–١٢)، حلّ كل معادلة في س. وإذا كان من غير الممكن حلها، فاكتب السبب.

(١٠) $\begin{bmatrix} ١٢ & ٧ \\ ٥ & ٣ \end{bmatrix} \times \underline{س} = \begin{bmatrix} ٢ & ١- \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix}$

(١٢) $\underline{\text{س}} \times \begin{bmatrix} ٥ & ٢ \\ ٧ & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣١ & ١٦ \\ ٢٧ & ١٢ \end{bmatrix}$

(١٨) أوجد المصفوفة $\underline{\text{س}}$: $\begin{bmatrix} ٤ & ٧ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix} \underline{\text{س}} + \begin{bmatrix} ٢ & ٧ \\ -٣ & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٦ & ٢ \\ -٢ & ٣ \end{bmatrix}$

٧–٥

حل نظام من معادلتين خطيتين

الحل باستخدام المعكوس الضربي للمصفوفة المربعة

مثال1 حلّ النظام: $\begin{cases} \text{س} + \text{ص} = ٣ \\ \text{س} - \text{ص} = ٧ \end{cases}$ باستخدام النظير الضربي للمصفوفة.

حاول أن تحل 1 حلّ النظام: $\begin{cases} ٥\text{س} + ٣\text{ص} = ٧ \\ ٣\text{س} + ٢\text{ص} = ٥ \end{cases}$ باستخدام النظير الضربي للمصفوفة.

استخدام قاعدة كرامر (المحددات) لحل معادلتين

مثال1

استخدم قاعدة كرامر لحلّ النظام: $\begin{cases} ٤س - ٥ص + ٧ = ٠ \\ ٣ص - ٦س + ٣ = ٠ \end{cases}$

حاول أن تحل 1

استخدم قاعدة كرامر لحلّ النظام: $\begin{cases} ٣س + ٢ص = -٦ \\ -٤س - ٣ص - ٧ = ٠ \end{cases}$

العلاقات بين الدوال المثلثية 1

تسمى جاθ، جتاθ، ظاθ النسب المثلثية للزاوية التي قياسها θ وتدعى **النسب المثلثية الأساسية**

علمًا بأن $-١ \leq$ جتاθ ≤ ١

$-١ \leq$ جاθ ≤ ١

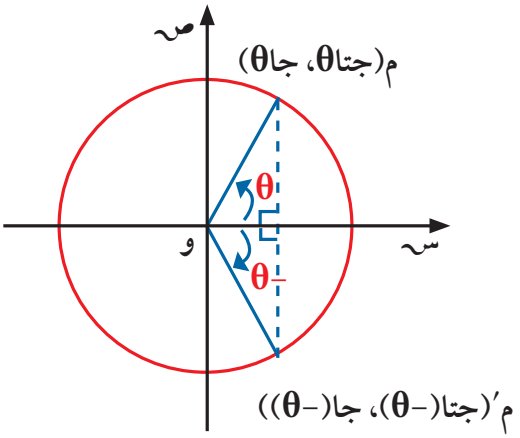
ظاθ $\in$ ح

النسب المثلثية للزاويتين θ، −θ.

النقطة المثلثية م′ هي انعكاس للنقطة المثلثية م في محور السينات حيث م(س، ص) $\xrightarrow{ع_{س}}$ م′(س، −ص)

ويكون جتا(−θ) = جتاθ

جا(−θ) = −جاθ



تذكر

$ع_{س}$ تعني انعكاس في محور السينات.

قانون

جتا(−θ) = جتاθ

جا(−θ) = −جاθ

وبالتالي ظا(−θ) = −ظاθ بشرط أن يكون ظاθ معرّف.

مثال 1

إذا كان جتا $\frac{٣\pi}{٨} = \frac{\sqrt{٢ - \sqrt{٢}}}{٢}$ ، فأوجد جتا $\left(-\frac{٣\pi}{٨}\right)$.

.....

إذا كان جا ٣٦° ≃ ٠,٥٨٧٨ ، فأوجد جا(−٣٦°).

.....

إذا كان ظا ٤٥° = ١ ، فأوجد ظا(−٤٥°).

.....

حاول أن تحل 1

أكمل إذا كان:

أ) جا م = ٠,٣ فإن جا(– م) = ...

ب) جتا ل = ٠,٣٨ فإن جتا(– ل) = ...

جـ) ظا س = ٣,١٤ فإن ظا(– س) = ...

د) جتا(– ص) = $\frac{١}{٤}$ فإن جتا ص = ...

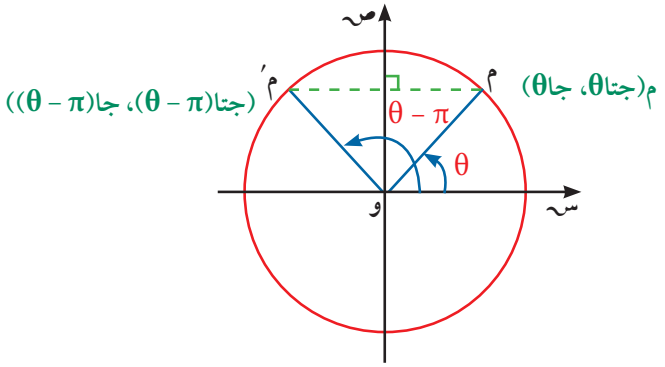
النسب المثلثية للزاويتين θ ، (π – θ).

النقطة المثلثية م′ هي انعكاس للنقطة المثلثية م في محور الصادات.

حيث م(س، ص) $\xrightarrow{\text{ع}_{\text{ص}}}$ م′(–س، ص)

فيكون: جتا(π – θ) = –جتاθ

جا(π – θ) = جاθ



قانون

جتا(π – θ) = –جتاθ

جا(π – θ) = جاθ

وبالتالي ظا(π – θ) = –ظاθ شرط أن يكون ظاθ معرّفًا.

مثال 1

بدون استخدام الآلة الحاسبة

إذا كان:

أ) جتا ٦٠° = $\frac{١}{٢}$ ، أوجد جتا ١٢٠°.

ب) جا $\frac{\pi}{٤}$ = $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ ، أوجد جا $\frac{٣\pi}{٤}$.

جـ) ظاθ = $\frac{٣}{٥}$ ، أوجد ظا(π – θ).

حاول أن تحل 2

بدون استخدام الآلة الحاسبة. إذا كان:

أ جا ٣٠° = $\frac{١}{٢}$ ، فأوجد جا ١٥٠°.

ب جتاس = $\frac{٤}{٥}$ ، فأوجد جتا(π − س).

جـ ظا $\frac{\pi}{١٢}$ = ٢ − $\sqrt{٣}$، فأوجد ظا $\frac{١١\pi}{١٢}$.

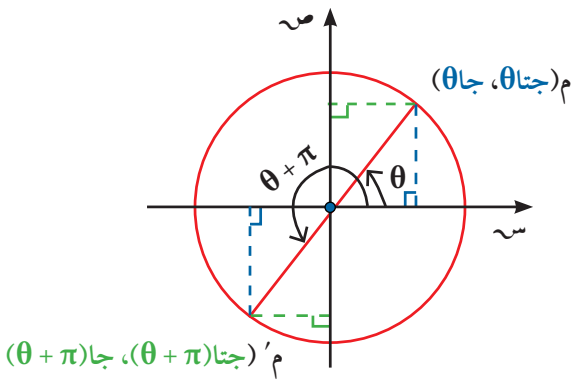
النسب المثلثية للزاويتين θ، (θ + π).

النقطة م′ هي انعكاس للنقطة م في نقطة الأصل.

حيث م(س، ص) $\xrightarrow[\text{نقطة الأصل}]{\text{انعكاس في}}$ م′(−س، −ص)

فيكون: جتا(π + θ) = −جتاθ

جا(π + θ) = −جاθ



قانون

جتا(π + θ) = −جتاθ

جا(π + θ) = −جاθ

وبالتالي ظا(π + θ) = ظاθ شرط أن يكون ظاθ معرّفًا.

مثال 3

بدون استخدام الآلة الحاسبة، إذا كان:

أ جا ٣٠° = $\frac{١}{٢}$ ، فأوجد جا ٢١٠°.

ب ظا $\frac{\pi}{٨}$ = −١ + $\sqrt{٢}$ ، فأوجد ظا $\frac{٩\pi}{٨}$.

.....

.....

.....

.....

حاول أن تحل 3

بدون استخدام الآلة الحاسبة، إذا كان جتا ٤٠° ≃ ٠,٧٦٦ . فأوجد جتا ٢٢٠°.

.....

.....

مثال 4

بدون استخدام الآلة الحاسبة، أوجد:

أ جا ١٥٠°. ب جتا ٢٤٠°. جـ ظا $\frac{٢\pi}{٣}$.

.....

.....

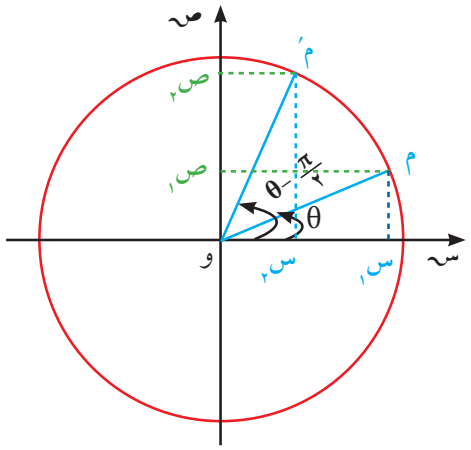
.....

.....

حاول أن تحل 4

إذا كان جا ٥٦° ≃ ٠,٨٢٩ . بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد جا ٢٣٦°.

.....



النسب المثلثية للزاويتين θ، $\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right)$

Δوس١ م ≅ Δ وص٢ م′ لماذا؟

استخدم تطابق الأضلاع المتناظرة لإثبات:

جتا$\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right)$ = جاθ

جا$\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right)$ = جتاθ

استنتاج: لأي زاويتين متتامتين، فإن جيب إحداهما يساوي جيب تمام الأخرى.

قانون

جا$\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right)$ = جتاθ

جتا$\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right)$ = جاθ

ظا$\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right)$ = ظتاθ شرط أن يكون ظتاθ معرّفًا.

الدوال المثلثية (الدائرية) على ح

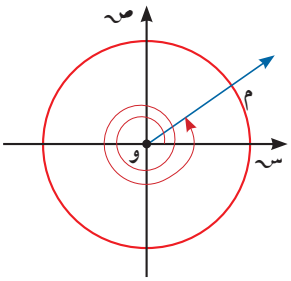
إذا كان ك عددًا صحيحًا فإن:

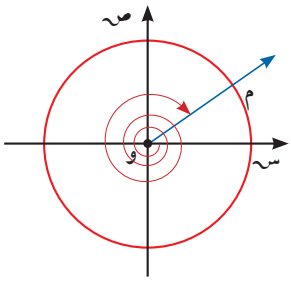
جا$(\theta + ٢ك\pi)$ = جاθ

جتا$(\theta + ٢ك\pi)$ = جتاθ

ظا$(\theta + ك\pi)$ = ظاθ حيث ظاθ معرّف

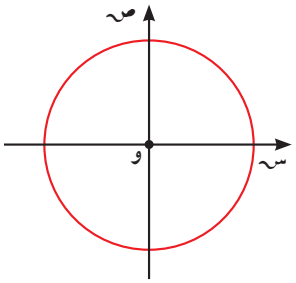
يبين الشكلان أدناه أن القوانين السابقة هي صحيحة أيضًا لأي زاوية قياسها θ:



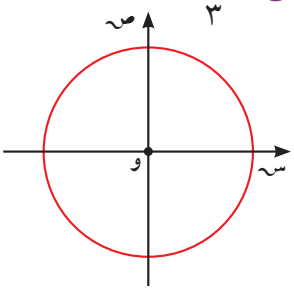


تدريب ارسم وحدد الربع الذي تقع فيه الزاوية التي قياسها:

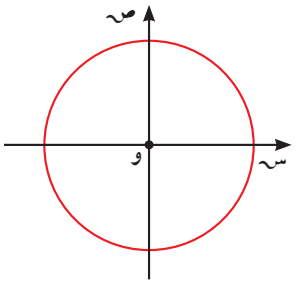
أ $٤٧٥°$



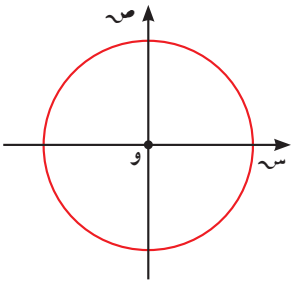
ب $\frac{١٧\pi}{٣}$



جـ $\frac{-١٦\pi}{٣}$



د $-٨٩٠°$



من العرض السابق يمكننا إعادة تعريف الدوال الدائرية باعتبار المجال هو ح فيكون:

تعريف

إذا كانت (س، ص) هي النقطة المثلثية لزاوية موجهة في الوضع القياسي قياسها θ فإن:

١ جا θ = ص ∀ θ ∈ ح

٢ جتا θ = س ∀ θ ∈ ح

٣ ظا θ = $\frac{ص}{س}$ ، س ≠ ٠ حيث θ ∈ ح

٤ قا θ = $\frac{١}{س}$ ، س ≠ ٠ حيث θ ∈ ح

٥ قتا θ = $\frac{١}{ص}$ ، ص ≠ ٠ حيث θ ∈ ح

٦ ظتا θ = $\frac{س}{ص}$ ، ص ≠ ٠ حيث θ ∈ ح

مثال 5

بسط التعبير التالي لأبسط صورة:

جا س + جا(٩٠° + س) + جا(١٨٠° + س) + جا(٩٠° − س).

.....

.....

.....

.....

حاول أن تحل 5

بسّط كلًّا من التعبيرات التالية لأبسط صورة:

أ جتا(θ + ٩π)

ب جتا$\left(\theta - \frac{\pi}{٢} -\right)$

كراسة التمارين

(١) اكتب النسب المثلثية التالية بدلالة إحدى النسب المثلثية الأساسية للزاوية θ.

(أ) جا(π + θ) _____

(ب) جتا(π − θ) _____

(جـ) جا$\left(\frac{\pi}{٢} + \theta\right)$ _____

(د) جتا$\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right)$ _____

(٢) اكتب النسب المثلثية بدلالة إحدى النسب المثلثية الأساسية للزاوية س.

(أ) ظا(١٨٠° − س) _____

(ب) جتا(١٨٠° + س) _____

(جـ) جا(− س) _____

(٤) أوجد قيمة النسب المثلثية التالية بدون استخدام الآلة الحاسبة.

(أ) جا١٥٠° _____

(ب) ظا(−٢٢٥°) _____

(جـ) جتا(−١٣٥°) _____

(٥) أوجد قيمة النسب المثلثية التالية بدون استخدام الآلة الحاسبة.

(أ) جتا $\frac{٧\pi}{٦}$ _____

(ب) جا$\left(-\frac{٢\pi}{٣}\right)$ _____

(جـ) ظا $\frac{١١\pi}{٦}$ _____

بنود موضوعية

في التمارين (٧–١٠)، ظلل (أ) إذا كانت العبارة صحيحة أو (ب) إذا كانت خاطئة .

(٧) إذا كانت جاθ = ٠,٢ فإن جا(π + θ) = ٠,٢ (أ) (ب)

(٨) إذا كانت جتاθ = $\frac{٢}{٣}$ فإن قاθ = $\frac{٣}{٢}$ (أ) (ب)

(٩) إذا كانت ظاθ = ٣ فإن ظتا(π + θ) = ٣ (أ) (ب)

(١٠) إذا كانت جاθ = $\frac{١}{٥}$ فإن قتا(π + θ) = –٥ (أ) (ب)

(١١) بسّط التعبيرات التالية لأبسط صورة:

(أ) جتا(π – θ) – جتا(– θ) + جا(π + θ) + جتا$\left(\theta - \frac{\pi}{٢}\right)$.

(ب) جا(π + θ) – جتا$\left(\frac{\pi}{٢} + \theta\right)$ + جتا(π – θ) + جا$\left(\frac{\pi}{٢} + \theta\right)$.

حل معادلات مثلثية

حل المعادلة: جتا س = جتاθ

هو س = θ + ٢ك π أو س = −θ + ٢ك π (ك ∈ ص)

لاحظ أن جيب تمام الزاوية يكون موجبًا عندما تقع الزاوية في الربع الأول أو الرابع.

مثال 6

حل كلًّا من المعادلتين:

أ جتا س = $\frac{١}{٢}$

.....

.....

.....

.....

.....

ب ٢جتا س − $\sqrt{٣}$ = ٠

.....

.....

.....

.....

.....

حاول ان تحل 6

حل المعادلة : $\sqrt{٢}$ جتا س = ١ .

حل المعادلة جا س = جاθ

هو س = θ + ٢ك π أو س = (π − θ) + ٢ك π ، (ك ∈ ص)

لاحظ أن جيب الزاوية يكون موجبًا عندما تقع الزاوية في الربع الأول أو الثاني.

مثال 7

حل كلًّا من المعادلتين:

أ جا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

ب ٢جا س = $\sqrt{٢}$

.....

.....

.....

.....

.....

حاول ان تحل 7

حل المعادلة: ٢جا س − ١ = ٠.

.....

.....

.....

.....

.....

حل المعادلة ظا س = ظاθ هو س = θ + ك π، (ك ∈ ص)

لاحظ أن ظل الزاوية يكون موجبًا عندما تقع الزاوية في الربع الأول أو الثالث.

مثال 8 حل المعادلة: ظا س = $\sqrt{٣}$.

حاول ان تحل 8 حل المعادلة: $\sqrt{٣}$ ظا س = ١ .

كراسة التمارين

(١٢) حلّ المعادلات التالية:

(أ) جتا س = + $\frac{١}{٢}$

(ب) ظتا س = $\sqrt{٣}$

.....

.....

.....

.....

(جـ) ٢ جا س = +$\sqrt{٢}$

.....

.....

.....

(٢) ظلل (أ) إذا كانت العبارة صحيحة أو (ب) إذا كانت خاطئة.

إذا كان جا س = $\sqrt{٣}$	فإن مجموعة الحل = ∅	(أ) (ب)
إذا كان جتا س = $\frac{١}{٢}$	فإن س = $\frac{\pi}{٣}$	(أ) (ب)
إذا كانت س = $\frac{\pi}{٦}$	فإن جا س = $\frac{١}{٢}$	(أ) (ب)
مجموعة حل قا س = ٠,٣ هي ∅		(أ) (ب)
ظا (١٥π) = صفر		(أ) (ب)

في التمارين (٣-٥)، اختر الإجابة الصحيحة:

(٣) النسبة المثلثية في ما يلي التي قيمتها $\frac{١}{٢}$ هي:

(أ) جا(-٣٣٠°) (ب) جتا(-٢٤٠°) (جـ) ظتا(-١٥٠٠°) (د) ظا٧٦٥°

(٤) النسبة المثلثية في ما يلي التي قيمتها $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$:

(أ) جتا $\frac{٣١\pi}{٦}$ (ب) جا$\left(-\frac{٣٥\pi}{٣}\right)$ (جـ) ظا $\frac{١٧\pi}{٦}$ (د) قا $\frac{١٣\pi}{٣}$

(٥) إن قيمة المقدار قا(٢π − θ) − قتا$\left(\theta + \frac{\pi}{٢}\right)$ + جتا$\left(\theta + \frac{\pi}{٢}\right)$ + جاθ هي:

(أ) −١ (ب) صفر (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) ١

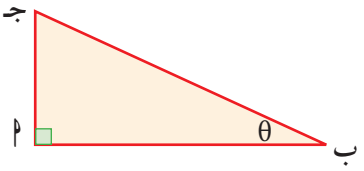
العلاقات بين الدوال المثلثية 2

تدريب

أكمل:

جاθ = $\frac{\dots}{\text{الوتر}}$ ، جتاθ = $\frac{\dots}{\text{الوتر}}$

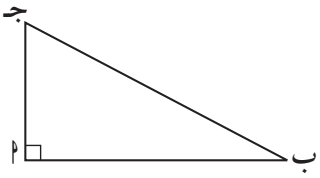
ظاθ = $\frac{\text{جاθ}}{\dots} = \frac{\frac{\dots}{\text{الوتر}}}{\frac{\dots}{\text{الوتر}}} = \frac{\dots}{\dots}$



المتطابقات المثلثية الأساسية

ظاθ = $\frac{\text{جاθ}}{\text{جتاθ}}$ ، ظتاθ = $\frac{\text{جتاθ}}{\text{جاθ}}$ ، ظتاθ = $\frac{١}{\text{ظاθ}}$ حيث المقام ≠ ٠

قاθ = $\frac{١}{\text{جتاθ}}$ ، قتاθ = $\frac{١}{\text{جاθ}}$



متطابقات فيثاغورث

جا^{٢} θ + جتا^{٢} θ = ١ تسمى متطابقة فيثاغورث

١ + ظا^{٢} θ = قا^{٢} θ

١ + ظتا^{٢} θ = قتا^{٢} θ

مثال 1

بدون استخدام الآلة الحاسبة، إذا كان جتاθ = ٠,٤ ، ٠ < θ < $\frac{\pi}{٢}$. فأوجد جاθ، ظاθ.

أ أوجد جاθ.

ب استنتج ظاθ.

حاول أن تحل 1

بدون استخدام الآلة الحاسبة، إذا كان جاθ = $\frac{٣}{٥}$ ، ٠ < θ < $\frac{\pi}{٢}$ فأوجد جتاθ، ظاθ.

مثال 2

بدون استخدام الآلة الحاسبة،

إذا كان ظاθ = ٢$\sqrt{٢}$، جتاθ < ٠ فأوجد جاθ، جتاθ.

حاول أن تحل 2

بدون استخدام الآلة الحاسبة، إذا كان ظاθ = $\frac{٣}{٤}$ ، جا θ < ٠ فأوجد جاθ، جتاθ.

مثال 3

بدون استخدام الآلة الحاسبة،

إذا كان ظاθ = $\frac{١٢}{٥}$ ، جاθ > ٠ فأوجد جاθ، جتاθ.

حاول أن تحل 3

بدون استخدام الآلة الحاسبة، إذا كان ظاθ = $\frac{٢٤}{٧}$ ، جتاθ > ٠ فأوجد جاθ، جتاθ.

مثال 4 بدون استخدام الآلة الحاسبة، إذا كان جاθ = $\frac{٣}{٧}$ ، جتاθ < ٠ فأوجد جتاθ، ظتاθ، ظاθ.

حاول أن تحل 4 بدون استخدام الآلة الحاسبة، إذا كان ظتاθ = $\frac{٥}{٨}$، جتاθ > ٠ فأوجد جاθ، جتاθ.

إذا كان ظتاθ = $\frac{٥}{٨}$، جتاθ > ٠ فأوجد جاθ.

مثال 5 أثبت صحة المتطابقة التالية: جا^{٣}س + جاس × جتا^{٢}س = جاس.

حاول أن تحل 5 أثبت صحة المتطابقة: جتا^{٤}س + جا^{٢}س × جتا^{٢}س = جتا^{٢}س.

مثال 6 أثبت صحة المتطابقة التالية:

$\frac{(\text{قا}\theta + ١)(\text{قا}\theta - ١)}{\text{جا}^{٢}\theta} = \text{قا}^{٢}\theta$. حيث المقام $\neq ٠$

حاول أن تحل 6 أثبت صحة المتطابقة: (قا^{٢} θ + قتا^{٢} θ) − (ظا^{٢} θ + ظتا^{٢} θ) = ٢.

كراسة التمارين

(١) إذا كانت جاθ = $\frac{١}{٥}$ ، ٠ < θ < $\frac{\pi}{٢}$.

فأوجد قيمة النسب المثلثية الأخرى للزاوية θ.

(٢) إذا كانت ظاθ = $\sqrt{٨}$ ، جتاθ < ٠

أوجد جاθ، جتاθ.

(٣) إذا كانت جتاθ = $\frac{١}{٣}$ ، جاθ < ٠

أوجد جاθ، ظتاθ.

في التمارين (٤–٧)، أوجد قيمة كلّ مما يلي:

(٤) (جاθ + جتاθ)^{٢} – ٢جاθ جتاθ.

(٥) (ظا^{٢} θ + ١)جتا^{٢} θ.

بنود موضوعية

في التمارين (١-٦)، ظلل (أ) إذا كانت العبارة صحيحة أو (ب) إذا كانت خاطئة.

(١) قتاθ × جتاθ − ظتاθ = ٠ (أ) (ب)

(٢) ظتا^{٢} (−θ) − قتا^{٢} θ = −١ (أ) (ب)

(٣) (قاθ + ظاθ)(قاθ − ظاθ) = ١ (أ) (ب)

(٤) جاθ قتاθ − جتا^{٢} θ − جا^{٢} θ = ٠ (أ) (ب)

(٥) $\frac{\text{جا}^{٢}\ \theta}{١ - \text{جتا}\theta}$ − جتاθ = −١ (أ) (ب)

(٦) ظاθ + ظتاθ − قاθ قتاθ = ٠ (أ) (ب)

في التمرينين (٧-٨)، اختر الإجابة الصحيحة:

(٧) إذا كانت جتاθ = −$\frac{٥}{٧}$ ، θ تقع في الربع الثالث. فإن جا θ =

(أ) $\frac{-٧}{٢\sqrt{٦}}$ (ب) $\frac{٢\sqrt{٦}}{٧}$

(جـ) $\frac{-٢\sqrt{٦}}{٧}$ (د) $\frac{٧}{٢\sqrt{٦}}$

(٨) إذا كانت قاθ = $\frac{٣}{٢}$ ، θ تقع في الربع الرابع. فإن ظا θ =

(أ) $\frac{\sqrt{٥}}{٢}$ (ب) $\frac{٢}{\sqrt{٥}}$

(جـ) $\frac{-٢}{\sqrt{٥}}$ (د) $\frac{-\sqrt{٥}}{٢}$

في التمرينين (٩-١٠)، أثبت صحة المتطابقات التالية:

(٩) جاθ (ظتاθ + ظاθ) = قاθ

(١٠) $\frac{\text{جا}\theta}{\text{جا}\theta - \text{جتا}\theta} = \frac{١}{١ - \text{ظتا}\theta}$.