



رَضِط هَنا لِحصول على المِلزمة بدون

البرهان

11

التفاضل والتكامل





ورقة عمل الثاني عشر العام

11-1 تقدير النهايات بيانياً

الذراع بدور فعلنا للحصول على اللزمة بدون

2- تقدير نهايات الدوال عند اللانهاية.

1- تقدير نهايات الدوال عند نقطة محددة.

في هذا الدرس سوف نتعلم:

يتمحور حساب التفاضل والتكامل حول مسألتين مهمتين:

• إيجاد المساحة الواقعة بين منحنى الدالة والمحور X.

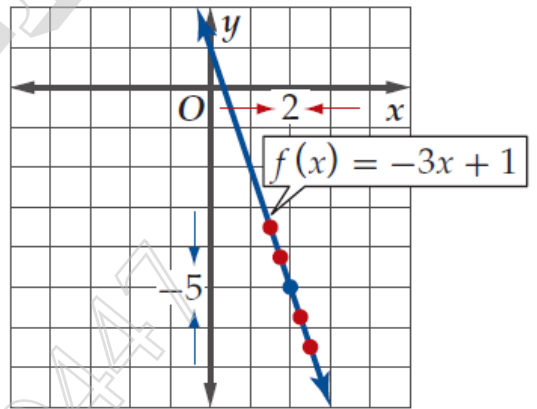
• إيجاد معادلة المماس بتمثيل بياني لدالة عند نقطة.

تقدير النهاية عندما النهاية $f(c)$

قدركل نهاية باستخدام التمثيل البياني أو المنحنى. وادعم تخمينك باستخدام جدول القيم.

$$\lim_{x \rightarrow 2} (-3x + 1)$$

التحليل البياني



بين القليل أنه كلما اقتربت x من 2 تقرب قيمة الدالة المقابلة من -5. لذلك يمكننا تقدير $\lim_{x \rightarrow 2} (-3x + 1) = -5$.
الاعم بالأرقام/في الجدول: تختار قيم ل x تقرب جداً من 2 من اليمين واليسار

	x تقرب من 2				x تقرب من 2		
x	1.9	1.99	1.999	2	2.001	2.01	2.1
$f(x)$	-4.7	-4.97	-4.997		-5.003	-5.03	-5.3

يتضح من الجدول أنه عندما تقرب قيمة x من 2 من اليسار واليمين تقرب $f(x)$ من -5 وهذا يدعم التحليل البياني.

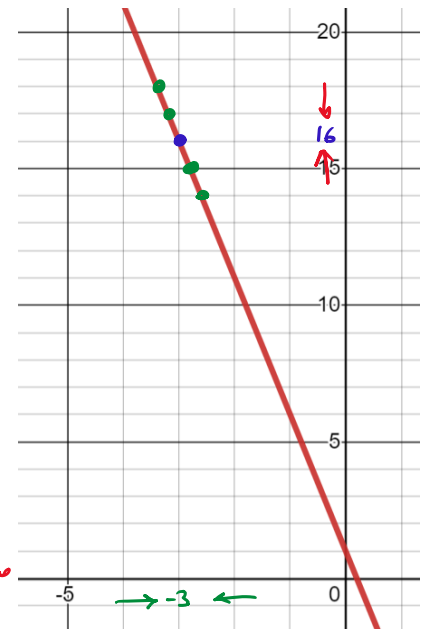
$$\lim_{x \rightarrow -3} (1 - 5x)$$

التحليل البياني

بين القليل أنه كلما اقتربت x من -3 تقرب الدالة المقابلة من 16. لذلك يمكننا تقدير $\lim_{x \rightarrow -3} (1 - 5x) = 16$.
الاعم بالأرقام/تختار قيم ل x تقرب جداً من -3 من اليسار واليمين

	x تقرب من -3				x تقرب من -3		
x	-3.1	-3.01	-3.001	-3	32.999	-2.99	-2.9
$f(x)$	16.5	16.05	16.005		15.995	15.95	15.5

من الجدول أنه عندما تقرب قيمة x من -3 من اليسار واليمين تقرب $f(x)$ من 16 وهذا يدعم التحليل البياني.





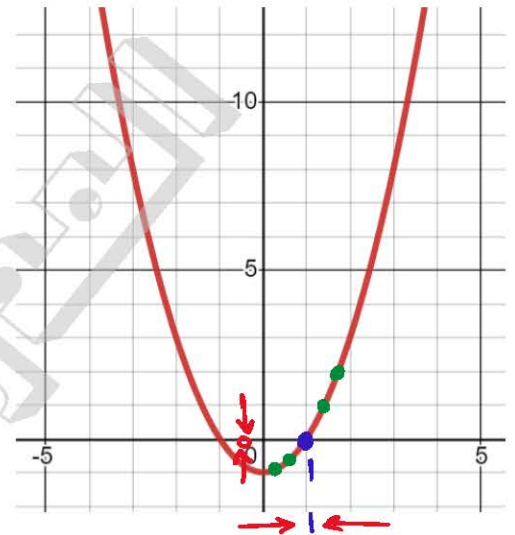
ضغط هنا للحصول على اللزمة بدون

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 1)$$

التحليل البياني /

بمس التمثيل أنه كلما اقتربت x من 1 تقرب الدالة المقابلة من 0 لذلك يمكننا تقدير $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 1) = 0$
الاعم بالارقام / نختار قيم ل x تقرب جداً من 1 من اليسار واليمين

	x تقرب من 1				x تقرب من 1		
x	0.9	0.99	0.999	1	1.001	1.01	1.1
$f(x)$	-0.19	-0.0199	-0.0019		0.002	0.020	0.21



من الجدول نرى عندما تقرب قيمة x من 1 من اليسار واليمين تقرب $f(x)$ من 0 وهذا يدعم التحليل البياني.

تقدير النهاية عندما النهاية (لا تساوي الصورة) $f(c) \neq$

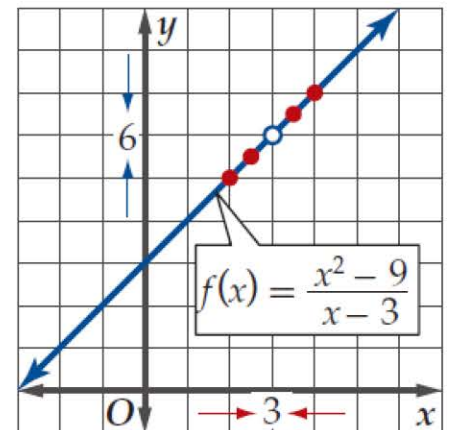
قدركل نهاية باستخدام التمثيل البياني أو المنحنى. وادعم تخمينك باستخدام جدول القيم.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{x^2 - 9}{x - 3} \right)$$

التحليل البياني /

بمس التمثيل أنه كلما اقتربت x من 3 تقرب الدالة المقابلة من 6 لذلك يمكننا تقدير هذه النهاية $= 6$
الاعم بالارقام / نختار قيم ل x تقرب جداً من 3 من اليسار واليمين

	x تقرب من 3				x تقرب من 3		
x	2.9	2.99	2.999	3	3.001	3.01	3.1
$f(x)$	5.9	5.99	5.999		6.001	6.01	6.1



من الجدول نرى أنه عندما تقرب x من 3 تقرب $f(x)$ من 6 وهذا يدعم التحليل العددي.



اضغط هنا للحصول على اللزمة بدون

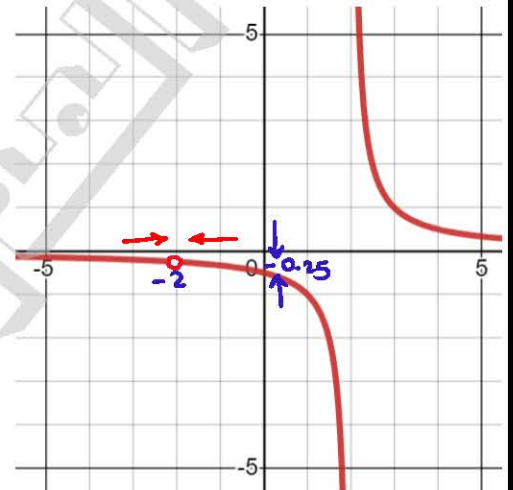
$$\lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{x+2}{x^2-4} \right)$$

التحليل البياضي

بين التحليل أنه كلما اقتربت x من -2 تقرب الدالة المقابلة من -0.25 لذلك يمكننا تقدير هذه النهاية $-0.25 =$
الدم بالرقام/تختار قيم x تقرب جداً من -2 من اليسار واليمين

	← x تقترب من				← x تقترب من		
x	-2.1	-2.01	-2.001	-2	-1.999	-1.99	-1.9
f(x)		-0.2494	-0.2499		-0.2501	-0.2506	

← -0.25 ←



من الجدول نرى أنه عندما تقرب x من -2 فإن $f(x)$ تقرب من -0.25 .
رضنا يدعم التحليل العددي.

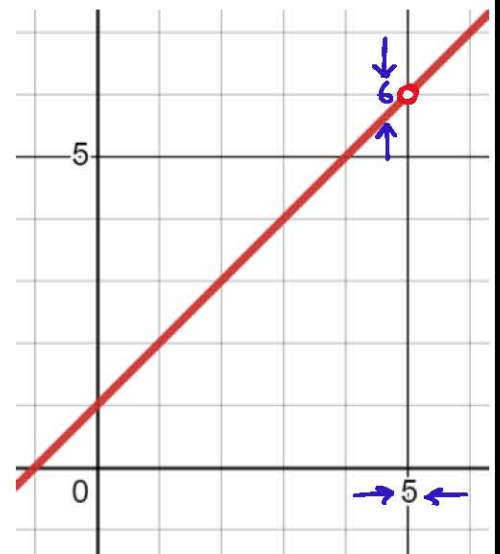
$$\lim_{x \rightarrow 5} \left(\frac{x^2 - 4x - 5}{x - 5} \right)$$

التحليل البياضي

بين التحليل أنه كلما اقتربت x من 5 تقرب الدالة المقابلة من 6 لذلك يمكننا تقدير هذه النهاية $6 =$
الدم بالرقام/تختار قيم x تقرب جداً من 5 من اليسار واليمين

	← x تقترب من				← x تقترب من		
x	4.9	4.99	4.999	5	5.001	5.01	5.1
f(x)		5.99	5.999		6.001	6.01	

← 6 ←



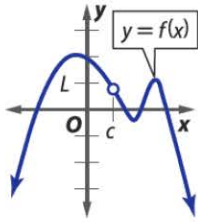
من الجدول نرى أنه عندما تقرب x من 5 فإن $f(x)$ تقرب من 6 .
رضنا يدعم التحليل العددي.



المفهوم الأساسي استقلالية النهاية عن قيمة الدالة عند نقطة ما

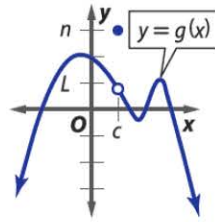
الشرح لا تعتمد نهاية الدالة $f(x)$ عندما يقترب x من c على قيمة الدالة عند النقطة c .

الرموز



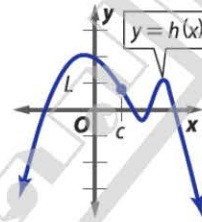
$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$$

$f(c)$ غير معرفة.



$$\lim_{x \rightarrow c} g(x) = L$$

$g(c) = n$



$$\lim_{x \rightarrow c} h(x) = L$$

$h(c) = L$

من المهم استيعاب أن النهاية عند عدد لا تعني قيمة الدالة عند ذلك العدد، وإنما قيمة الدالة عندما تقترب x من ذلك العدد.

يمكننا وصف سلوك التمثيل البياني من اليسار واليمين لـ x بشكل أكثر دقة بمفردة النهايات أحادية الطرف (من جهة واحدة).

المفهوم الأساسي وجود نهاية عند نقطة

لا تكون نهاية الدالة $f(x)$ عندما يقترب x من c موجودة إلا إذا كان هناك نهايتان أحاديتا الطرف ومتساويتين. بمعنى أنه إذا كان

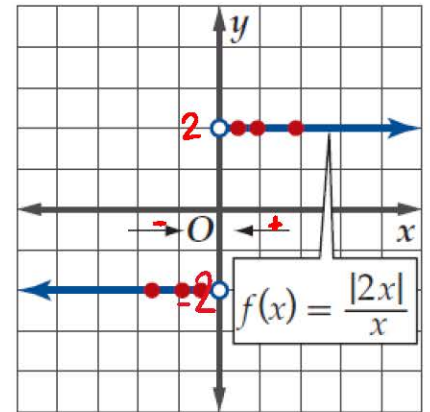
$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L \text{ فإن } \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = L$$

تقدير النهايات أحادية الطرف (من جهة واحدة) ونثنائية الطرف (من جهتين)

قدّر النهاية أحادية الطرف أوثنائية الطرف، إن وجدت.

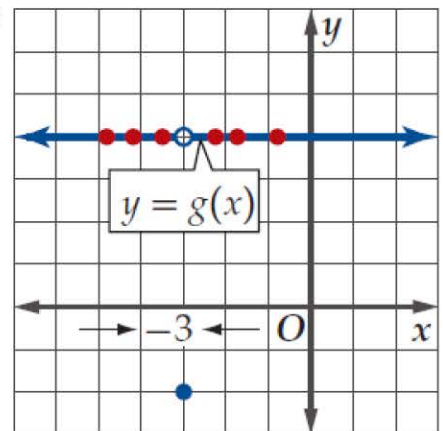
a. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|2x|}{x}, \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|2x|}{x}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|2x|}{x}$

التّمثيل البياني للدالة $f(x)$ بين أن $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|2x|}{x} = -2$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|2x|}{x} = 2$ بما أن النهايتين اليسرى واليمين ليست متساويتين فإن $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|2x|}{x}$ غير موجودة



b. $\lim_{x \rightarrow -3^-} g(x), \lim_{x \rightarrow -3^+} g(x), \lim_{x \rightarrow -3} g(x)$, where $g(x) = \begin{cases} 4 & \text{if } x \neq -3 \\ -2 & \text{if } x = -3 \end{cases}$

التّمثيل البياني للدالة $g(x)$ بين أن $\lim_{x \rightarrow -3^-} g(x) = 4$, $\lim_{x \rightarrow -3^+} g(x) = 4$ بما أن النهايتين اليسرى واليمين متساويتين فإن $\lim_{x \rightarrow -3} g(x)$ موجودة وساوي 4





ضغط هنا للحصول على اللزمة بدون

قدراً النهاية أحادية الطرف أو ثنائية الطرف، إن وجدت.

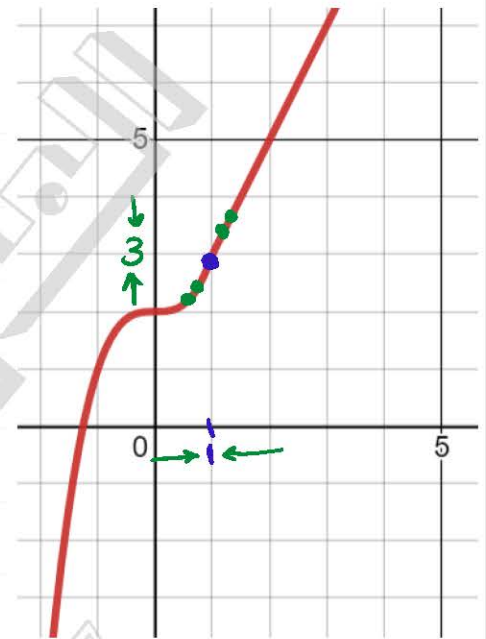
3A. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x), \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x), \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, where $f(x) = \begin{cases} x^3 + 2 & \text{if } x < 1 \\ 2x + 1 & \text{if } x \geq 1 \end{cases}$

الممثل البياني للدالة $f(x)$ يبين أن

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 3$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3$

بما أن النهايتين اليسرى واليمنى هما ويتبين
فإن

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ موجودة وسأوي 3



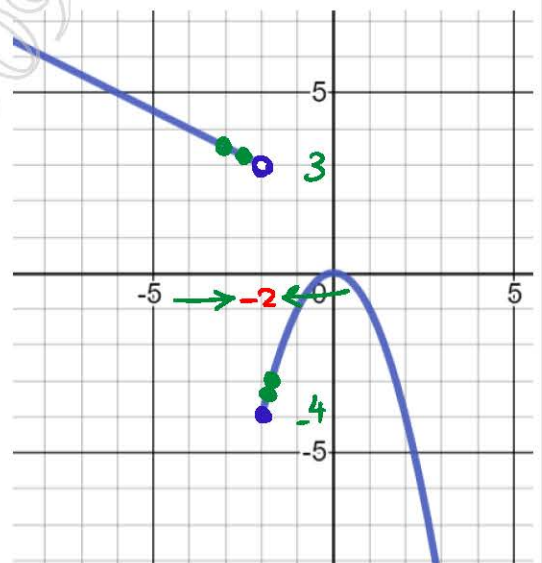
3B. $\lim_{x \rightarrow -2^-} g(x), \lim_{x \rightarrow -2^+} g(x), \lim_{x \rightarrow -2} g(x)$, where $g(x) = \begin{cases} -0.5x + 2 & \text{if } x < -2 \\ -x^2 & \text{if } x \geq -2 \end{cases}$

الممثل البياني للدالة $g(x)$ يبين أن

$\lim_{x \rightarrow -2^-} g(x) = 3$, $\lim_{x \rightarrow -2^+} g(x) = -4$

بما أن النهايتين اليسرى واليمنى غير متساويتين
فإن

$\lim_{x \rightarrow -2} g(x)$ غير موجودة





إن عدم قدرتنا على إيجاد قيمة نهاية للدالة f كعدد حقيقي عند الاقتراب من نقطة ثابتة ليس ناتجاً بالضرورة عن عدم تساوي النهايتين من اليسار واليمين؛ إذ من الممكن أن تزداد قيم $f(x)$ بشكل غير محدود عند اقتراب قيم x من C ، وفي هذه الحالة نشير إلى النهاية بالرمز ∞ ، أما إذا تناقصت قيم $f(x)$ بشكل غير محدود عند اقتراب قيم x من C ، فإننا نشير إلى النهاية بالرمز $-\infty$.

قدّر كل نهاية، إن وجدت.

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{(x-4)^2}$$

القليل البياضي / بين القليل البياضي للدالة $f(x)$ أم

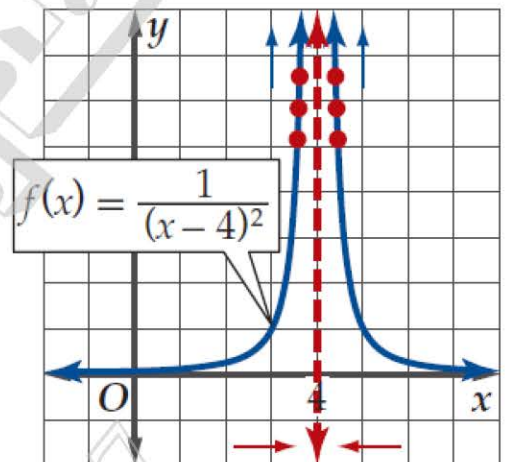
$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \infty$$

وبها أن كلا من النهايتين اليسرى واليمين ∞

لذا فإن $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ لا تساوي عدد حقيقي، إلا أنه بسبب كون

$$\lim_{x \rightarrow 4} g(x) = \infty \quad \text{فإننا نقول أن}$$

التقدير العددي /



x تقترب من 4

x تقترب من 4

x	3.9	3.99	3.999	4	4.001	4.01	4.1
$f(x)$	100	10,000	1,000,000		1,000,000	10,000	100

بين الجدول أنه كلما اقتربت قيم x من 4 من اليمين واليسار فإن قيم $f(x)$ تزداد بشكل غير محدود وذلك يدعم القليل البياضي.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$$

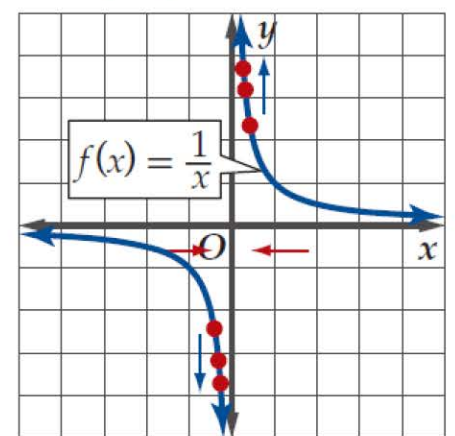
القليل البياضي / بين القليل البياضي للدالة $f(x)$ أم

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \infty$$

وبها أن كلا من النهايتين اليسرى واليمين غير متساويتين.

فإن $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ غير موجود.

التقدير العددي /



x تقترب من 0

x تقترب من 0

x	-0.1	-0.01	-0.001	0	0.001	0.01	0.1
$f(x)$	-10	-100	-1000		1000	100	10

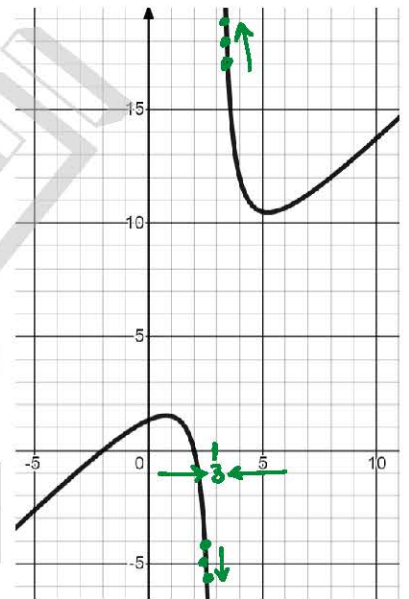
بين الجدول أنه كلما اقتربت قيم x من 0 من اليمين واليسار فإن قيم $f(x)$ إما أن تزداد أو تنقص بشكل غير محدود وذلك يدعم القليل البياضي.



قدّر كل نهاية، إن وجدت.

دعنا نلاحظ هنا $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4}{x - 3}$

القياس البيني / بين القياس البيني للدالة $f(x)$ أنه
 $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty$ ، $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \infty$
 وبما أن كلا من النهايتين اليسرى واليمين غير متكافئتين.
 فإنه $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ غير موجود.



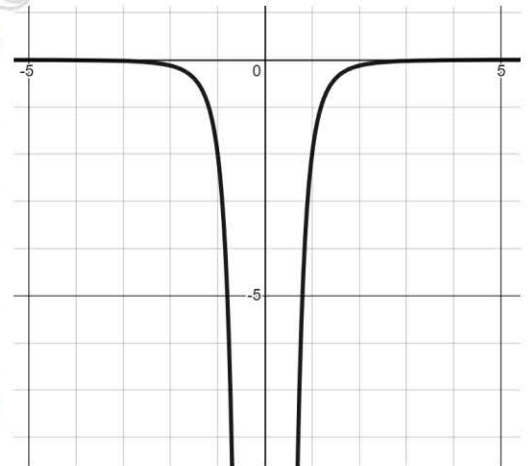
التقدير العددي

x تقترب من				x تقترب من		
x	2.9	2.99	2.999	3	3.001	3.01
f(x)		-494.01	-4994.001	////	5006.001	506.01

بين الجدول أنه كلما اقتربت قيم x من 3 من اليمين واليسار فإنه قيم $f(x)$ إما أن تزداد
 أو تنقص بشكل غير محدود وذلك يدعم القياس البيني.

$\lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{2}{x^4}\right)$

القياس البيني / بين القياس البيني للدالة $f(x)$ أنه
 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$ ، $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$
 وبما أن كلا من النهايتين اليسرى واليمين $= -\infty$
 لذا فإنه $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ لا تساوي عدد حقيقي، إلا أنه يجب أن يكون
 كلتا النهايتين $= -\infty$ فإنا نقول أنه $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$



التقدير العددي

x تقترب من 0				x تقترب من 0		
x	-0.1	-0.01	-0.001	0	0.001	0.01
f(x)		-2×10^8	-2×10^{12}	0	-2×10^{12}	-2×10^8

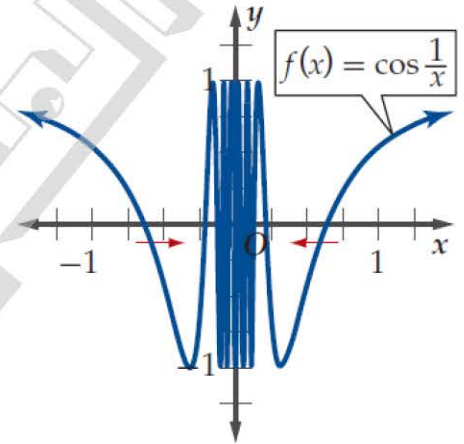
بين الجدول أنه كلما اقتربت قيم x من 0 من اليمين واليسار فإنه قيم $f(x)$
 تنقص بشكل غير محدود وذلك يدعم القياس البيني.



لا تكون النهاية موجودة أيضاً عندما تنذبذب قيم $f(x)$ بين قيمتين مختلفتين باقتراب قيم x من العدد c . اضغط هنا للحصول على اللزمة بدون قيد-إن أمكن- كل نهاية مما يأتي باستعمال التمثيل البياني للدالة.

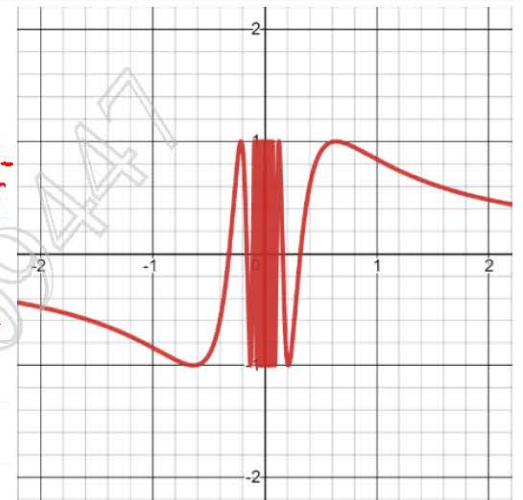
$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x}$$

يبين التمثيل البياني للدالة $f(x)$ انه كلما اقتربت x من 0 تنذبذب قيم الدالة بين -1 و 1 ، وهذا يعني انه هناك قيم x قريبة جداً من 0 وقيم الدالة عندها = 1 وفي نفس الوقت هناك قيم أخرى لـ x قريبة جداً من 0 وقيم الدالة عندها = -1 .
إذاً $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ غير موجودة .



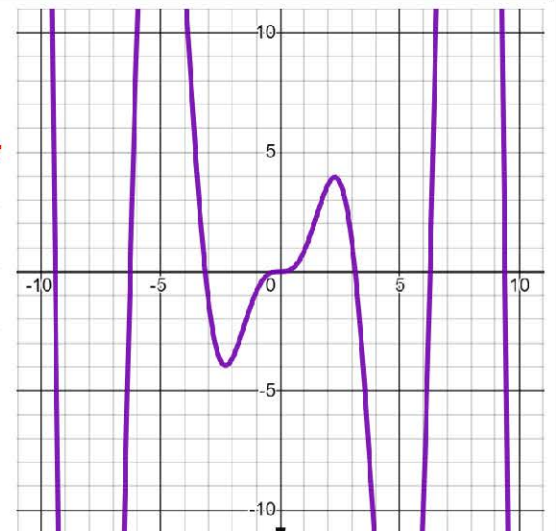
$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$$

يبين التمثيل البياني للدالة $f(x)$ انه كلما اقتربت x من 0 تنذبذب قيم الدالة بين -1 و 1 ، وهذا يعني انه هناك قيم x قريبة جداً من 0 وقيم الدالة عندها = 1 وفي نفس الوقت هناك قيم أخرى لـ x قريبة جداً من 0 وقيم الدالة عندها = -1 .
إذاً $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ غير موجودة .



$$\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 \sin x)$$

يبين التمثيل البياني للدالة $f(x)$ انه كلما اقتربت x من 0 من اليمين أو من اليسار ، تقترب قيمة الدالة من 0 ولذلك فإنه $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ موجودة وتساوي 0





أسباب عدم وجود نهاية عند نقطة

ملخص المفهوم

تكون $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ غير موجودة في الحالات الآتية:

- عندما تقترب قيم $f(x)$ من قيمتين مختلفتين عند اقتراب قيم x من العدد c من اليسار ومن اليمين.
- عندما تزداد قيم $f(x)$ بشكل غير محدود عند اقتراب قيم x من العدد c من اليسار وتتناقص قيمها بشكل غير محدود عند اقتراب x من العدد c من اليمين، أو العكس.
- عندما تتذبذب قيم $f(x)$ بين قيمتين مختلفتين عند اقتراب قيم x من العدد c .

النهايات عند المالانهاية

مفهوم أساسي

- إذا اقتربت قيم $f(x)$ من عدد وحيد L_1 عند ازدياد قيم x بشكل غير محدود، فإن:
 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L_1$ ، وتقرأ « نهاية $f(x)$ عندما تقترب قيم x من موجب مالانهاية هي L_1 »
- إذا اقتربت قيم $f(x)$ من عدد وحيد L_2 عند نقصان قيم x بشكل غير محدود، فإن:
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L_2$ ، وتقرأ « نهاية $f(x)$ عندما تقترب قيم x من سالب مالانهاية هي L_2 »

درست سابقاً أنه إذا اقتربت قيم الدالة من ∞ أو $-\infty$ عند اقتراب قيم x من عدد ثابت c ، فإن ذلك يعني وجود خط تقارب رأسي للدالة، كما درست أن خط التقارب الأفقي يحدث عندما تقترب قيم الدالة من عدد حقيقي كلما اقتربت قيم x من ∞ أو $-\infty$ ، بمعنى:

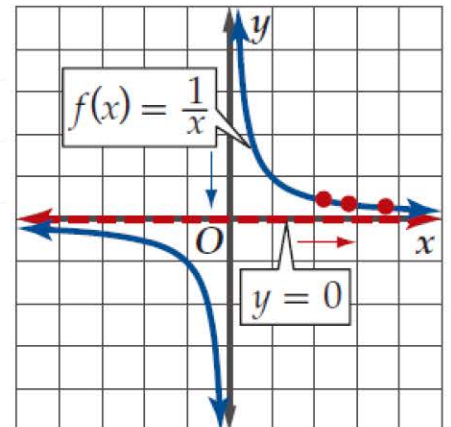
- المستقيم $x = c$ هو خط تقارب رأسي للدالة f ، إذا كانت $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \pm\infty$ أو $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \pm\infty$ أو كليهما.
- المستقيم $y = c$ هو خط تقارب أفقي للدالة f ، إذا كانت $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = c$ أو $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = c$

تقدير النهايات عند اللانهاية

قدّر إن أمكن - كل نهاية مما يأتي باستعمال التمثيل البياني للدالة.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}$$

التحليل يائياً / بين التمثيل البياني للدالة $f(x)$ أنه كلما زادت قيم x اقتربت قيم الدالة من 0،
 التقدير العددي



→ x تقترب من ∞

x	10	100	1000	10000	100000
$f(x)$	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001

بين الجدول أنه كلما زادت قيم x فإن قيم الدالة $f(x)$ تقترب من العدد 0.

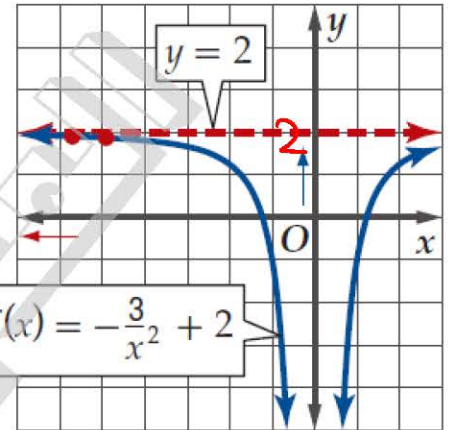


اضغط هنا للحصول على اللزمة بدون

قدّر إن أمكن - كل نهاية مما يأتي باستعمال التمثيل البياني للدالة.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{3}{x^2} + 2 \right)$$

التحليل بيانياً / مع الرسم نرى أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$
كلما نقصت قيمة x تقترب قيم الدالة من 2.
التعزيز العددي /



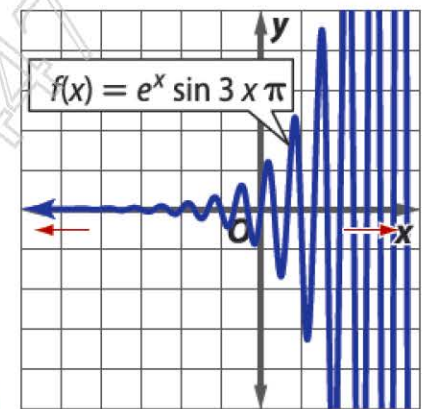
x تقترب من $-\infty$

x	-100000	-10000	-1000	-100	-10
f(x)		1.99999997	1.999997	1.9997	1.97

بين الجدول أنه كلما نقصت قيم x تقترب قيم الدالة $f(x)$ من 2

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \sin 3\pi x \quad \text{and} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} e^x \sin 3\pi x$$

التحليل بيانياً / مع الرسم نرى أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$
كلما نقصت قيمة x تقترب الدالة من 0.
 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ غير موجودة ← كلما زادت قيمة x
تتذبذب الدالة ما بين $-\infty$ و ∞
التعزيز العددي /



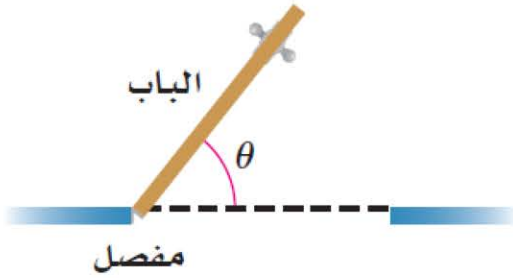
x تقترب من $-\infty$ x تقترب من ∞

x	-100	-50	-10	0	10	50	100
f(x)	3×10^{-44}	-2.0×10^{-22}	-0.00005	0	21966	4.8×10^{21}	-2.0×10^{43}

من الجدول نرى أنه كلما قلت قيم x فإن قيم $f(x)$ تقترب من 0
في حين تتذبذب قيم $f(x)$ متباعدة كلما زادت قيم x .



يمكنك استعمال التمثيل البياني أو جدول قيم لتقدير النهايات عند المالا نهاية في كثير من المواقف الحياتية. **نصائح على المذاكرة بدون**



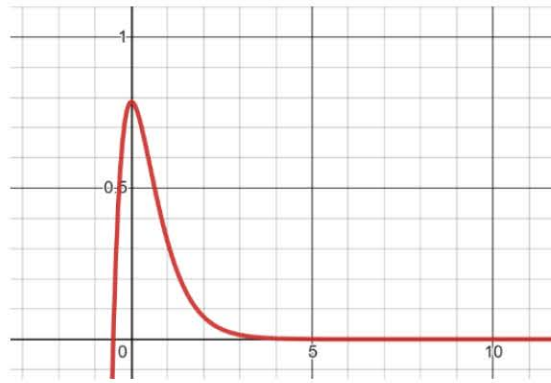
هيدروليكي: تستعمل نوابض لإغلاق الأبواب الثقيلة، وآلية هيدروليكية للتحكم في سرعة حركتها، إذا فُتح باب بزاوية $\frac{\pi}{4}$ ثم تُرك لتغلقه النوابض، فإن الدالة $\theta(t) = \frac{\pi}{4} (1 + 2t)e^{-2t}$ تمثل زاوية فتحته θ بعد t ثانية. قدر $\lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t)$ وفسر معناها إذا كانت موجودة.

نلاحظ من الرسم أنه كلما زادت قيم t غاب رقم $\theta(t)$ تقرب من العدد 0.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t) = 0$$

التفسير النتيجة/

كلما زادت قيم t أي مع مرور زمن أطول قيم $\theta(t)$ تقرب من العدد 0، يعني أن الزاوية تصبح صغرى أي يقرب الباب من وضع الإغلاق التام.



دواء: يُعطى تركيز دواء في دم مريض بوحدة ملجرام لكل ملتر

بالعلاقة $C(t) = te^{-0.18t}$ ، حيث t الزمن بالساعات بعد حقن المريض. قدر $\lim_{t \rightarrow \infty} C(t)$ ، وفسر معناها إذا كانت موجودة.

من الرسم نلاحظ أنه كلما زادت الوقت t اقترب $C(t)$ من الصفر.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} C(t) = 0$$

التفسير/

أي مع مرور الوقت يقرب تركيز الدواء في دم المريض إلى الصفر.





رَضِطْ هَنا لِتَصُولَ عَلى اللِزْمَةِ بِدَوْنِ

11-2 إيجاد قيمة النهايات جبريًا

ورقة عمل الثاني عشر العام

في هذا الدرس سوف أتعلم:

1- إيجاد قيمة نهايات الدوال النسبية وكثيرة الحدود عند نقطة محددة.

2- إيجاد قيمة نهايات الدوال النسبية وكثيرة الحدود عند اللانهاية.

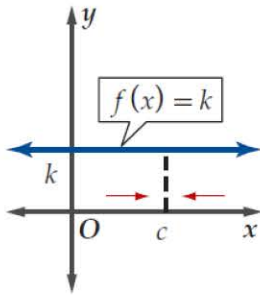
نهايات الدوال

مفهوم أساسي

نهايات الدوال الثابتة

التعبير اللفظي: نهاية الدالة الثابتة عند أي نقطة c هي القيمة الثابتة للدالة.

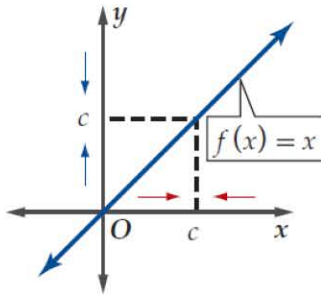
الرموز: $\lim_{x \rightarrow c} k = k$



نهايات الدالة المحايدة

التعبير اللفظي: نهاية الدالة المحايدة عند النقطة c هي c .

الرموز: $\lim_{x \rightarrow c} x = c$



خصائص النهايات

مفهوم أساسي

إذا كان c, k عددين حقيقيين، n عددًا صحيحًا موجبًا، وكانت النهايتان $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow c} g(x)$ موجودتين، فإن كلاً من الخصائص الآتية صحيحة:

خاصية المجموع: $\lim_{x \rightarrow c} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow c} f(x) + \lim_{x \rightarrow c} g(x)$

خاصية الفرق: $\lim_{x \rightarrow c} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow c} f(x) - \lim_{x \rightarrow c} g(x)$

خاصية الضرب في ثابت: $\lim_{x \rightarrow c} [k f(x)] = k \lim_{x \rightarrow c} f(x)$

خاصية الضرب: $\lim_{x \rightarrow c} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow c} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow c} g(x)$

خاصية القسمة: $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}{\lim_{x \rightarrow c} g(x)}$ حيث $\lim_{x \rightarrow c} g(x) \neq 0$

خاصية القوة: $\lim_{x \rightarrow c} [f(x)]^n = [\lim_{x \rightarrow c} f(x)]^n$

خاصية الجذر النوني: $\lim_{x \rightarrow c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}$ إذا كان $\lim_{x \rightarrow c} f(x) > 0$ ، حيث n عدد زوجي.

وإذا كان n عددًا فرديًا، فإن $\lim_{x \rightarrow c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}$



استخدم خواص النهايات لإيجاد قيمة كل من النهايات التالية.

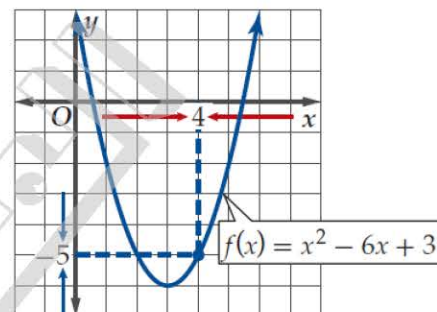
اضغط هنا للحصول على التلمذة بدون

$$\lim_{x \rightarrow 4} (x^2 - 6x + 3)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} x^2 - \lim_{x \rightarrow 4} 6x + \lim_{x \rightarrow 4} 3$$

$$= (\lim_{x \rightarrow 4} x)^2 - 6(4) + 3$$

$$= (4)^2 - 24 + 3 = \boxed{-5}$$



$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{4x^3 + 1}{x - 5}$$

$$= \frac{\lim_{x \rightarrow -2} 4x^3 + \lim_{x \rightarrow -2} 1}{\lim_{x \rightarrow -2} x - \lim_{x \rightarrow -2} 5}$$

$$= \frac{4(\lim_{x \rightarrow -2} x)^3 + 1}{-2 - 5}$$

$$= \frac{4(-2)^3 + 1}{-7}$$

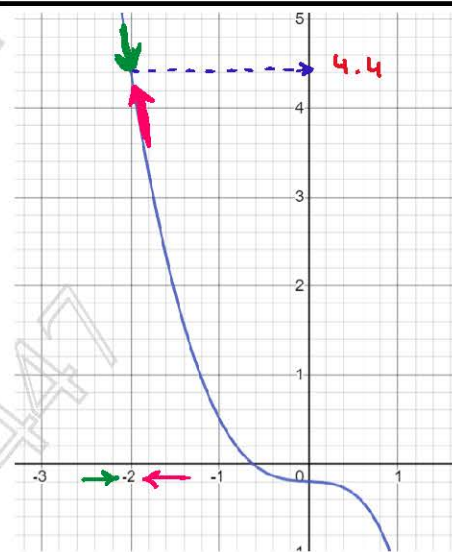
$$= \boxed{\frac{31}{7}} \approx 4.43$$

x تقترب من -2

x تقترب من -2

x	-2.1	-2.01	-2.001	-2	-1.999	-1.99	-1.9
$f(x)$	5.08	4.49	4.43		4.42	4.37	3.83

4.43



$$\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{8 - x}$$

$$= \sqrt{\lim_{x \rightarrow 3} (8 - x)} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 3} 8 - \lim_{x \rightarrow 3} x} = \sqrt{8 - 3} = \boxed{\sqrt{5}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (-x^3 + 4) = \lim_{x \rightarrow 2} (-x^3) + \lim_{x \rightarrow 2} 4 = -(\lim_{x \rightarrow 2} x)^3 + 4 = -2^3 + 4 = \boxed{-4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 3}{2x^2 - x - 15}$$

$$= \frac{\lim_{x \rightarrow 2} x - \lim_{x \rightarrow 2} 3}{\lim_{x \rightarrow 2} 2x^2 - \lim_{x \rightarrow 2} x - \lim_{x \rightarrow 2} 15}$$

$$= \frac{2 - 3}{2(\lim_{x \rightarrow 2} x)^2 - 2 - 15}$$

$$= \frac{-1}{2(2)^2 - 17}$$

$$= \frac{-1}{-9} = \boxed{\frac{1}{9}}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{x + 3}$$

$$= \sqrt{\lim_{x \rightarrow -1} (x + 3)} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow -1} x + \lim_{x \rightarrow -1} 3} = \sqrt{-1 + 3} = \boxed{\sqrt{2}}$$



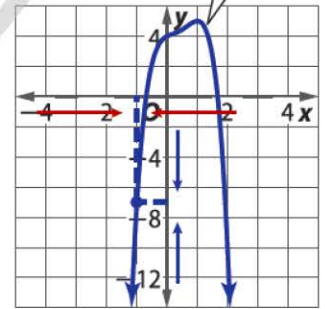
يمكن حساب نهايات دوال كثيرات الحدود والدوال النسبية من خلال التعويض المباشر، شريطة ألا يساوي مقام الدالة النسبية صفرًا عند النقطة التي نحسب عندها النهاية.

استخدم التعويض المباشر، إن أمكن، لإيجاد قيمة كل نهاية. وإن كان ذلك غير ممكن، فاشرح السبب.

$$\lim_{x \rightarrow -1} (-3x^4 + 5x^3 - 2x^2 + x + 4)$$

$$\begin{aligned} &= -3(-1)^4 + 5(-1)^3 - 2(-1)^2 + (-1) + 4 \\ &= -3 - 5 - 2 - 1 + 4 \\ &= \boxed{-10} \end{aligned}$$

$$f(x) = -3x^4 + 5x^3 - 2x^2 + x + 4$$



$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^3 - 6}{x - x^2}$$

$$= \frac{2(3)^3 - 6}{3 - 3^2} = \frac{54 - 6}{-6} = \boxed{-8}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

$$= \frac{1^2 - 1}{1 - 1} = \frac{0}{0}$$

لذا المقام = 0 لا يمكن حساب النهاية بالتعويض المباشر

$$\lim_{x \rightarrow 4} (x^3 - 3x^2 - 5x + 7)$$

$$\begin{aligned} &= (4)^3 - 3(4)^2 - 5(4) + 7 \\ &= \boxed{3} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -5} \frac{x + 1}{x^2 + 3}$$

$$= \frac{(-5) + 1}{(-5)^2 + 3} = \frac{-4}{28} = \boxed{-\frac{1}{7}}$$

$$\lim_{x \rightarrow -8} \sqrt{x + 6}$$

$$= \sqrt{-8 + 6} = \sqrt{-2}$$

غير ممكن! لأن $\sqrt{-2}$ ليس عدد حقيقي.



استخدام التحليل إلى العوامل لحساب النهايات

إذا قمت بحساب نهاية دالة نسبية، ووصلت إلى الصيغة غير المعينة $\frac{0}{0}$ ، فبسط العبارة جبريًا من خلال تحليل كل من البسط والمقام واختصار العوامل المشتركة. (مثل هذه النهايات قد تكون موجودة ولها قيمة حقيقية، أو غير موجودة).

احسب كل نهاية مما يأتي:

$$\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 - x - 20}{x + 4}$$

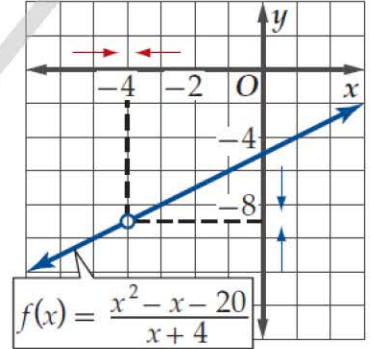
التعويض المباشر = $\frac{0}{0}$ كمية غير معينة

$$\lim_{x \rightarrow -4} \frac{(x+4)(x-5)}{x+4}$$

$$= -4 - 5$$

$$= \boxed{-9}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -4} (x - 5)$$



$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{x^3 - 3x^2 - 7x + 21}$$

التعويض المباشر = $\frac{0}{0}$ كمية غير معينة

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{x^2(x - 3) - 7(x - 3)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{(x - 3)(x^2 - 7)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x^2 - 7}$$

$$= \frac{1}{3^2 - 7} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 - 3x^2 - 4x + 12}{x + 2}$$

التعويض المباشر = $\frac{0}{0}$ كمية غير معينة

$$= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2(x - 3) - 4(x - 3)}{x + 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x - 3)(x^2 - 4)}{x + 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x - 3)(x - 2)(x + 2)}{x + 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} (x - 3)(x - 2)$$

$$= (-2 - 3)(-2 - 2) = \boxed{20}$$

$$\lim_{x \rightarrow 6} \frac{x^2 - 7x + 6}{3x^2 - 11x - 42}$$

التعويض المباشر = $\frac{0}{0}$ كمية غير معينة

$$= \lim_{x \rightarrow 6} \frac{(x - 1)(x - 6)}{(3x + 7)(x - 6)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 6} \frac{x - 1}{3x + 7}$$

$$= \frac{6 - 1}{3(6) + 7}$$

$$= \frac{5}{25} = \boxed{\frac{1}{5}}$$



استخدام إنطاق البسط أو المقام لحساب النهايات

هناك طريقة أخرى لإيجاد نهايات ناتج التعويض فيها صيغة غير معينة، وهي إنطاق البسط أو المقام أولاً، ثم اختصار العوامل المشتركة.

احسب كل نهاية مما يأتي:

التعويض المباشر = $\frac{0}{0}$ كمية غير معينة

$$\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9} \quad \leftarrow (\sqrt{x} + 3)$$

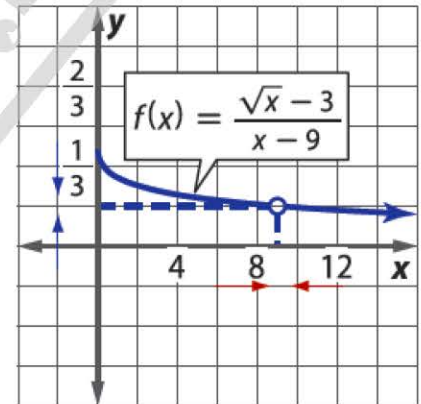
$$= \lim_{x \rightarrow 9} \frac{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 3)}{(x - 9)(\sqrt{x} + 3)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\cancel{x} - 9}{(\cancel{x} - 9)(\sqrt{x} + 3)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 9} \frac{1}{\sqrt{x} + 3}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{9} + 3}$$

$$= \boxed{\frac{1}{6}}$$



التعويض المباشر = $\frac{0}{0}$ كمية غير معينة

$$\lim_{x \rightarrow 25} \frac{x - 25}{\sqrt{x} - 5} \quad \leftarrow (\sqrt{x} + 5)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 25} \frac{(x - 25)(\sqrt{x} + 5)}{(\sqrt{x} - 5)(\sqrt{x} + 5)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 25} \frac{(\cancel{x} - 25)(\sqrt{x} + 5)}{\cancel{x} - 25}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 25} (\sqrt{x} + 5)$$

$$= \sqrt{25} + 5$$

$$= \boxed{10}$$

التعويض المباشر = $\frac{0}{0}$ كمية غير معينة

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt{x + 4}}{x} \quad \leftarrow (2 + \sqrt{x + 4})$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2 - \sqrt{x + 4})(2 + \sqrt{x + 4})}{x(2 + \sqrt{x + 4})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 - (x + 4)}{x(2 + \sqrt{x + 4})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{x(2 + \sqrt{x + 4})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{2 + \sqrt{x + 4}}$$

$$= \frac{-1}{2 + \sqrt{0 + 4}} = \boxed{-\frac{1}{4}}$$



مفهوم أساسي

نهايات دوال القوى عند المالانهاية

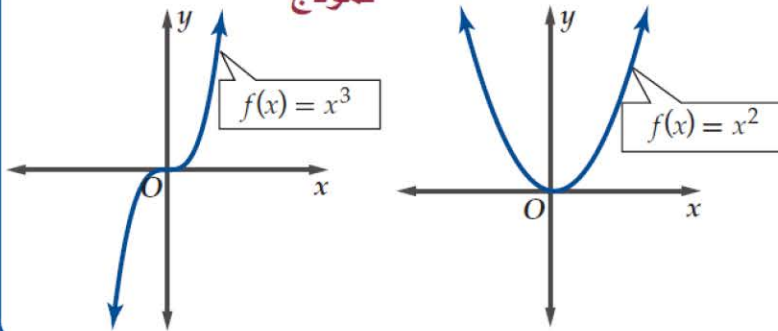
لأي عدد صحيح موجب n ،

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^n = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \infty \quad \text{، إذا كان } n \text{ عددًا زوجيًا.}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty \quad \text{، إذا كان } n \text{ عددًا فرديًا.}$$

نموذج



إن سلوك طرفي التمثيل البياني لدالة كثيرة الحدود هو ذاته سلوك طرفي التمثيل البياني لدالة القوة الناتجة عن الحد الرئيس في كثيرة الحدود، وهو الحد ذو القوة الكبرى.

مفهوم أساسي

نهايات دوال كثيرات الحدود عند المالانهاية

إذا كانت $p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ دالة كثيرة حدود، فإن

$$\lim_{x \rightarrow \infty} p(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} a_n x^n, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} a_n x^n$$

تذكر أن كون نهاية الدالة ∞ أو $-\infty$ لا يعني أنها موجودة، ولكنه وصف لسلوك منحناها؛ فإما أن يكون متزايدًا بلا حدود أو متناقصًا بلا حدود.

نهايات الدوال كثيرة الحدود عند المالانهاية

احسب كل نهاية مما يأتي:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 2x^2 + 5x - 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = (-\infty)^3 = \boxed{-\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (4 + 3x - x^2) = \lim_{x \rightarrow \infty} (-x^2) = -(\infty)^2 = \boxed{-\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (5x^4 - 3x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 5x^4 = 5(-\infty)^4 = 5(\infty) = \boxed{\infty}$$



$$\lim_{x \rightarrow \infty} 4x^2$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} (-x^3) = -(\infty)^3 = \boxed{-\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (4x^6 + 3x^5 - x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} (4x^6) = 4(-\infty)^6 = 4(\infty) = \boxed{\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x - 6x^2 + 4x^5)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} (4x^5) = 4(-\infty)^5 = 4(-\infty) = \boxed{-\infty}$$

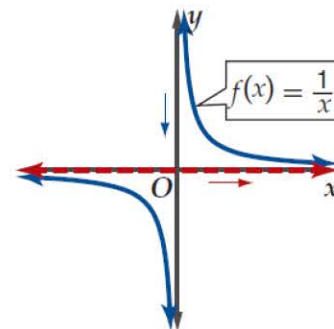
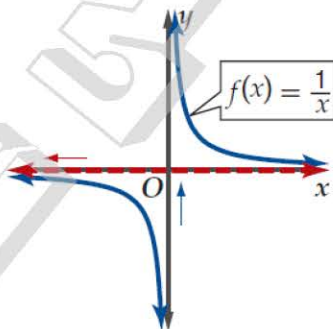
ولحساب نهاية دالة نسبية عند المالا نهائية نحتاج إلى خصائص أخرى للنهايات.

نهايات دالة المقلوب عند المالا نهائية

مفهوم أساسي

إن نهاية دالة المقلوب عند موجب أو سالب مالا نهائية هي صفر.

$$\text{مثال: } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$$



$$\text{نتيجة: لأي عدد صحيح موجب } n, \text{ فإن } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

ويمكننا استعمال هذه الخاصية لحساب نهايات الدوال النسبية عند المالا نهائية ، وذلك بقسمة كل حد في بسط ومقام الدالة النسبية على أعلى قوة لمتغير الدالة.

طريقة أبسط ← نكتب الحدود الرئيسة فقط للبسط والمقام ثم نبسط قبل التكوّن



احسب كل نهاية مما يأتي إن أمكن: **نكتب المحدد الرئيسة فقط للبسط والمقام ثم نبسط قبل التعويض** نحذف هنا لنصل على اللزجة بدون

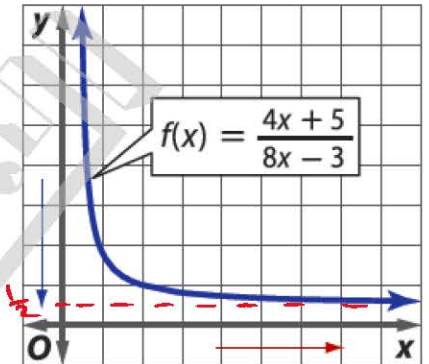
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x + 5}{8x - 3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x}{8x}$$

$$= \frac{4}{8}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{8}$$

$$= \boxed{\frac{1}{2}}$$



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x^2 - x}{3x^3 + 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x^2}{3x^3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x} = \frac{2}{-\infty} = \boxed{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^4}{9x^3 + 2x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^4}{9x^3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{9} x = \frac{5}{9} (\infty) = \boxed{\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5}{x - 10}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5}{x} = \frac{5}{-\infty} = \boxed{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x^2 + 7}{5x + 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x^2}{5x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(-\frac{3}{5} x \right) = -\frac{3}{5} (\infty) = \boxed{-\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 - 3x^2 + 1}{2x^3 + 4x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3}{2x^3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7}{2} = \frac{7}{2} = \boxed{3.5}$$



نهايات المتتاليات

ضغط هنا للحصول على اللزمة بدون

اكتب الحدود الخمسة الأولى لكل متتالية. ثم جد نهاية المتتالية، إن وجدت.

$$a_n = \frac{3n+1}{n+5}$$

$$a_1 = \frac{3(1)+1}{(1)+5} = \frac{2}{3} \quad 0.67$$

$$a_2 = \frac{3(2)+1}{(2)+5} = 1 \quad 1$$

$$a_3 = \frac{3(3)+1}{(3)+5} = \frac{5}{4} \quad 1.25$$

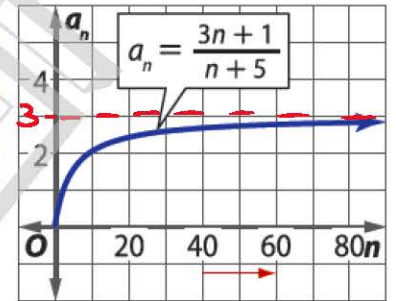
$$a_4 = \frac{3(4)+1}{(4)+5} = \frac{13}{9} \quad 1.44$$

$$a_5 = \frac{3(5)+1}{(5)+5} = \frac{8}{5} \quad 1.6$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{n+5}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} 3 = \boxed{3}$$



$$b_n = \frac{5}{n^4} \left[\frac{n^2(n+1)^2}{4} \right]$$

$$b_1 = 5$$

$$b_2 = 2.81$$

$$b_3 = 2.22$$

$$b_4 = 1.95$$

$$b_5 = 1.8$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n^4} \left[\frac{n^2(n+1)^2}{4} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^4}{4n^4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{4} = \frac{5}{4} = \boxed{1.25}$$

$$a_n = \frac{4}{n^2+1}$$

$$a_1 = 2$$

$$a_2 = 0.8$$

$$a_3 = 0.4$$

$$a_4 = 0.24$$

$$a_5 = 0.15$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{n^2+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{n^2} = \frac{4}{(\infty)^2} = \frac{4}{\infty} = \boxed{0}$$

$$b_n = \frac{2n^3}{3n+8}$$

$$b_1 = 0.182$$

$$b_2 = 1.143$$

$$b_3 = 3.176$$

$$b_4 = 6.4$$

$$b_5 = 10.870$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3}{3n+8} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3}{3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{3} n^2 = \frac{2}{3} (\infty)^2 = \infty$$

ليس للمتتالية نهاية.

$$c_n = \frac{9}{n^3} \left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right]$$

$$c_1 = 9$$

$$c_2 = 5.625$$

$$c_3 = 4.667$$

$$c_4 = 4.219$$

$$c_5 = 3.96$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9}{n^3} \left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{18n^3}{6n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} 3 = \boxed{3}$$



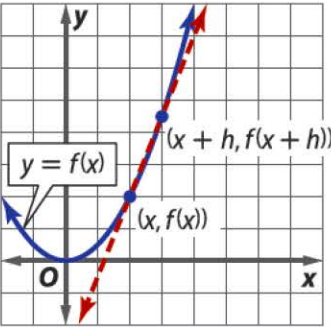
اضغط هنا للشرح

11-3 المماسات والسرعة المتجهة

ورقة عمل الثاني عشر العام

- 1- إيجاد معدلات التغير اللحظي عن طريق حساب قيم ميل المماس.
- 2- إيجاد السرعة المتجهة المتوسطة واللحظية.

في هذا الدرس سوف نتعلم:



$$m = \frac{f(x+h)-f(x)}{(x+h)-x} \text{ or } \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

وتسمى هذه الصيغة قسمة الفرق.

فكلما اقتربت النقطة $(x+h, f(x+h))$ من النقطة $(x, f(x))$ أي كلما اقتربت قيمة h من الصفر، فإن القاطع يقترب من مماس المنحنى عند النقطة $(x, f(x))$ ؛ لذا يمكننا حساب ميل المماس وهو معدل التغير اللحظي للدالة عند تلك النقطة على أنه نهاية ميل القاطع عندما $h \rightarrow 0$.

معدل التغير اللحظي

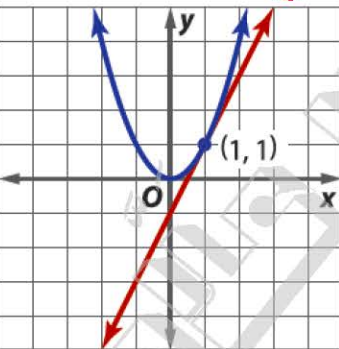
مفهوم أساسي

معدل التغير اللحظي للدالة f عند النقطة $(x, f(x))$ هو ميل المماس m عند النقطة $(x, f(x))$ ، ويُعطى بالصيغة $m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ ، بشرط أن تكون النهاية موجودة.

ميل المماس للمنحنى عند نقطة عالية

أوجد ميل مماس كل منحنى مما يأتي عند النقطة المعطاة:

$$y = x^2; (1, 1)$$

معادلة
(ميل المماس)

$$\begin{aligned} m &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2}{h} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x + h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) \\ &= 2x + 0 = 2x \end{aligned}$$

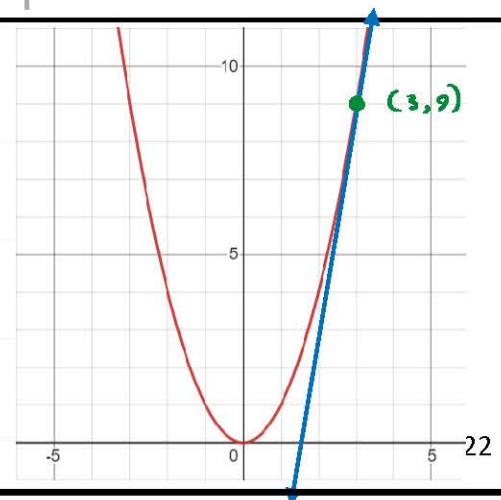
ميل المماس عند النقطة (1, 1) يعني $x=1$
 $\Rightarrow m = 2(1) = \boxed{2}$

$$y = x^2; (3, 9)$$

من السؤال السابق $m = 2x$ (معادلة ميل المماس) $\rightarrow$

عند النقطة (3, 9) يعني $x = 3$

$$\Rightarrow m = 2(3) = \boxed{6}$$





نضبط هنا $y = x^2 + 4$; $(-2, 8)$ لنصل إلى القيمة المطلوبة

$$f(x) = x^2 + 4$$

$$f(x+h) = (x+h)^2 + 4$$

$$= x^2 + 2xh + h^2 + 4$$

$$\begin{aligned} m &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 + 4 - (x^2 + 4)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{x^2} + 2xh + \cancel{h^2} + \cancel{4} - \cancel{x^2} - \cancel{4}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x + h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2x + 0 = 2x \end{aligned}$$

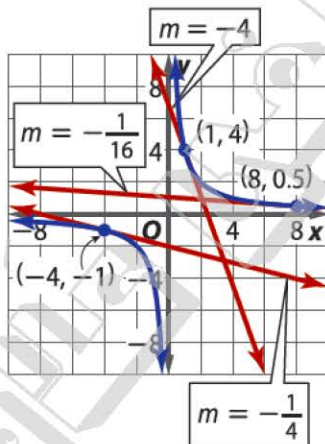
ميل المماس عند النقطة $x = -2$ يعطينا $(-2, 8)$

$$\Rightarrow m = 2(-2) = \boxed{-4}$$

معادلة ميل المماس للمنحنى عند أي نقطة عليه

أوجد معادلة ميل منحنى كل دالة مما يأتي عند أي نقطة عليه:

$$y = \frac{4}{x}$$



$$f(x) = \frac{4}{x} \quad , \quad f(x+h) = \frac{4}{x+h}$$

$$m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{4}{x+h} - \frac{4}{x}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{4x - 4(x+h)}{x(x+h)}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{4x} - \cancel{4x} - 4h}{x(x+h)h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-4h}{x(x+h)h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-4}{x(x+h)}$$

$$= \frac{-4}{x(x+0)}$$

$$= \boxed{\frac{-4}{x^2}}$$



أوجد معادلة ميل منحنى كل دالة مما يأتي عند أي نقطة عليه:

الوصول على اللزمة بدون ضغط هنا
 $y = x^2 - 4x + 2$

$$f(x) = x^2 - 4x + 2, \quad f(x+h) = (x+h)^2 - 4(x+h) + 2$$

$$m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - 4x - 4h + 2 - (x^2 - 4x + 2)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - 4x - 4h + 2 - x^2 + 4x - 2}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{x^2} + 2xh + \cancel{h^2} - \cancel{4x} - 4h + \cancel{2} - \cancel{x^2} + \cancel{4x} - \cancel{2}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2 - 4h}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{h}(2x + h - 4)}{\cancel{h}}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h - 4)$$

$$= 2x + 0 - 4 = \boxed{2x - 4}$$

$$y = x^3$$

$$f(x) = x^3, \quad f(x+h) = (x+h)^3$$

$$= (x+h)(x^2 + 2xh + h^2)$$

$$= x^3 + 2x^2h + xh^2 + x^2h + 2xh^2 + h^3$$

$$m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{x^3} + 2x^2h + xh^2 + \cancel{x^2}h + 2xh^2 + h^3 - \cancel{x^3}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{h}(2x^2 + xh + x^2 + 2xh + h^2)}{\cancel{h}}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} (2x^2 + xh + x^2 + 2xh + h^2)$$

$$= 2x^2 + \cancel{x(0)} + x^2 + 2\cancel{x(0)}h + \cancel{0^2}$$

$$= 2x^2 + x^2$$

$$= \boxed{3x^2}$$



تعلمت في الفصل الدراسي الأول طريقة حساب السرعة المتوسطة لجسم يقطع مسافة $f(t)$ في زمن مقداره t ، من خلال قسمة المسافة المقطوعة على الزمن الذي استغرقه الجسم لقطع تلك المسافة. والسرعة المتجهة هي سرعة لها اتجاه. ويمكنك إيجاد السرعة المتوسطة المتجهة بالطريقة نفسها التي أوجدت بها السرعة المتوسطة مع توضيح اتجاهها باستعمال الإشارة في الناتج، فالإشارة الموجبة للناتج تعني اتجاه الأمام أو الأعلى، أما الإشارة السالبة فتعني اتجاه الخلف أو الأسفل.

السرعة المتوسطة المتجهة

مفهوم أساسي

إذا أعطي موقع جسم متحرك بوصفه دالة في الزمن $f(t)$ ، فإن السرعة المتوسطة المتجهة للجسم v_{avg} في الفترة الزمنية من a إلى b تعطى بالصيغة

$$v_{avg} = \frac{\text{التغير في المسافة}}{\text{التغير في الزمن}} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

السرعة المتوسطة المتجهة

جري: تمثل المعادلة $f(t) = -1.3t^2 + 12t$ المسافة بالكيلومترات، والتي قطعها عداء بعد t ساعة باتجاه خط النهاية. ما سرعته المتوسطة المتجهة بين الساعتين الثانية والثالثة من زمن السباق؟

متوسط السرعة

$$v_{avg} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$f(3) = -1.3(3)^2 + 12(3) = 24.3$$

$$f(2) = -1.3(2)^2 + 12(2) = 18.8$$

$$v_{avg} = \frac{f(3) - f(2)}{3 - 2}$$

$$= \frac{24.3 - 18.8}{1} = 5.5 \Rightarrow 5.5 \text{ km/h في الساعة الثالثة للأمام}$$

بالون: تمثل المعادلة $h(t) = 2 + 20t - 5t^2$ الارتفاع بالأمتار بعد t ثانية لبالون يصعد رأسياً. ما السرعة المتوسطة المتجهة للبالون بين $t = 1$ s و $t = 2$ s؟

$$v_{avg} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$f(2) = 2 + 20(2) - 5(2)^2 = 22$$

$$f(1) = 2 + 20(1) - 5(1)^2 = 17$$

$$= \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1}$$

$$= \frac{22 - 17}{1}$$

$$= 5$$

كان متوسط السرعة للبالون ما بين الثانية الأولى والثانية 5 m/s لأعلى.



السرعة المتجهة التي تم حسابها في المثالين السابقين هي السرعة المتوسطة المتجهة خلال فترة زمنية، وليست السرعة المتجهة اللحظية. والتي تساوي سرعة الجسم المتجهة عند لحظة زمنية محددة.

مفهوم أساسي

السرعة المتجهة اللحظية

إذا أُعطي موقع جسم متحرك بوصفه دالة في الزمن $f(t)$ ، فإن السرعة المتجهة اللحظية $v(t)$ لذلك الجسم عند الزمن t تعطى بالصيغة

$$v(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

بشرط أن تكون هذه النهاية موجودة.

السرعة المتجهة اللحظية عند لحظة زمنية معينة

سقطت كرة من قمة بناية ارتفاعها 600 m ، وتمثل الدالة $f(t) = 600 - 5t^2$ ارتفاع الكرة عن سطح الأرض بالأمتار بعد t ثانية من سقوطها. أوجد السرعة المتجهة اللحظية $v(t)$ للكرة بعد 5 s .

$$v(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \quad \text{(السرعة اللحظية)}$$

$$v(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(5+h) - f(5)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{475 - 50h - 5h^2 - 475}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-50h - 5h^2}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-50h(1 + 0.1h)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} -50(1 + 0.1h)$$

$$= -50 - 5 = -55$$

$$f(5+h) = 600 - 5(5+h)^2$$

$$= 600 - 5(25 + 10h + h^2)$$

$$= 600 - 125 - 50h - 5h^2$$

$$= 475 - 50h - 5h^2$$

$$f(5) = 600 - 5(5)^2$$

$$= 600 - 125 = 475$$

تبلغ السرعة اللحظية عند 5 ثواني 50 مترًا في الثانية (إشارة السالب تعني أن ارتفاع الكرة يقل)

سقطت علبة مادة التنظيف من يد عامل في أثناء قيامه بتنظيف نافذة بناية على ارتفاع 420 m عن سطح الأرض، وتمثل الدالة $d(t) = 420 - 5t^2$ ارتفاع العلبة بالأمتار بعد t ثانية من سقوطها. أوجد السرعة المتجهة اللحظية للعلبة $v(t)$ للكرة بعد 7 s .

$$v(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{d(t+h) - d(t)}{h} \quad \text{(السرعة اللحظية)}$$

$$v(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{d(7+h) - d(7)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{175 - 70h - 5h^2 - 175}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-70h - 5h^2}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-70h(1 + 0.07h)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} -70(1 + 0.07h)$$

$$= -70 - 0.49 = -70.49$$

$$d(7+h) = 420 - 5(7+h)^2$$

$$= 420 - 5(49 + 14h + h^2)$$

$$= 420 - 245 - 70h - 5h^2$$

$$= 175 - 70h - 5h^2$$

تبلغ السرعة اللحظية عند 7 ثواني 70 مترًا في الثانية (إشارة السالب تعني أن ارتفاع العلبة يقل)



تُعطى المسافة التي يقطعها جسم بالسنتيمترات بعد t ثانية بالدالة $s(t) = 18t - 3t^3 - 1$. أوجد معادلة السرعة المتجهة اللحظية $v(t)$ للجسم عند أي زمن.

$$v(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(t+h) - s(t)}{h} \quad (\text{السرعة اللحظية})$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{18t + 18h - 3t^3 - 9t^2h - 9th^2 - 3h^3 - (18t - 3t^3 - 1)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{18h - 9t^2h - 9th^2 - 3h^3}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(18 - 9t^2 - 9th - 3h^2)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} (18 - 9t^2 - 9th - 3h^2)$$

$$= 18 - 9t^2 - 9t(0) - 3(0)^3$$

$$= \boxed{18 - 9t^2}$$

$$s(t+h) = 18(t+h) - 3(t+h)^3 - 1$$

$$= 18t + 18h - 3(t+h)^3 - 1$$

$$= 18t + 18h - 3(t+h)(t^2 + 2th + h^2) - 1$$

$$= 18t + 18h - 3(t^3 + 2t^2h + th^2 + ht^2 + 2th^2 + h^3) - 1$$

$$= 18t + 18h - 3t^3 - 6t^2h - 3th^2 - 3ht^2 - 6th^2 - 3h^3 - 1$$

$$= 18t + 18h - 3t^3 - 9t^2h - 9th^2 - 3h^3 - 1$$

تمثل الدالة $s(t) = 30t - 5t^2$ ارتفاع صاروخ بعد t ثانية من إطلاقه رأسياً من مستوى سطح البحر، حيث الارتفاع بالأمتار. أوجد معادلة السرعة المتجهة اللحظية $v(t)$ للصاروخ عند أي زمن.

$$v(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(t+h) - s(t)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{30t + 30h - 5t^2 - 10th - 5h^2 - (30t - 5t^2)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{30h - 10th - 5h^2}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(30 - 10t - 5h)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} (30 - 10t - 5h)$$

$$= 30 - 10t - 5(0)$$

$$= \boxed{30 - 10t}$$

$$s(t+h) = 30(t+h) - 5(t+h)^2$$

$$= 30t + 30h - 5(t^2 + 2th + h^2)$$

$$= 30t + 30h - 5t^2 - 10th - 5h^2$$



ضغط هنا للصور

11-4 المشتقات

ورقة عمل الثاني عشر العام

- 1- إيجاد معدلات التغير اللحظي بواسطة حساب المشتقات.
- 2- استخدام قاعدتي ناتج الضرب وناتج القسمة لحساب المشتقات.

في هذا الدرس سوف نتعلم:

تعلمت في الدرس السابق كيفية استخدام النهايات لتحديد ميل مماس منحنى الدالة $f(x)$ عند أي نقطة عليه، وتُسمى هذه

النهاية مشتقة الدالة ويرمز لها بالرمز $f'(x)$ ، وتُعطى بالصيغة: $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ مشتقة الدالة

بشرط وجود هذه النهاية، وتُسمى عملية إيجاد المشتقة الاشتقاق، وتُسمى النتيجة معادلة تفاضلية.

مشتقة دالة عند أي نقطة

أوجد مشتقة $f(x)$ باستعمال النهايات، ثم احسب قيمة المشتقة عند قيم x المعطاة:

$$f(x) = 4x^2 - 5x + 8; x = 1 \text{ and } 5$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4x^2 + 8xh + 4h^2 - 5x - 5h + 8 - (4x^2 - 5x + 8)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(8x + 4h - 5)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (8x + 4h - 5)$$

$$= 8x + 4(0) - 5 = \boxed{8x - 5}$$

$$\begin{aligned} f(x+h) &= 4(x+h)^2 - 5(x+h) + 8 \\ &= 4(x^2 + 2xh + h^2) - 5x - 5h + 8 \\ &= 4x^2 + 8xh + 4h^2 - 5x - 5h + 8 \end{aligned}$$

$$f'(x) = 8x - 5$$

$$f'(1) = 8(1) - 5 = \boxed{3}$$

$$f'(5) = 8(5) - 5 = \boxed{35}$$

$$f(x) = 6x^2 + 7; x = 2 \text{ and } 5$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6x^2 + 12xh + 6h^2 + 7 - (6x^2 + 7)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(12x + 6h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (12x + 6h)$$

$$= 12x + 6(0) = \boxed{12x}$$

$$\begin{aligned} f(x+h) &= 6(x+h)^2 + 7 \\ &= 6(x^2 + 2xh + h^2) + 7 = 6x^2 + 12xh + 6h^2 + 7 \end{aligned}$$

$$f'(x) = 12x$$

$$f'(2) = 12(2) = \boxed{24}$$

$$f'(5) = 12(5) = \boxed{60}$$

$$f(x) = -5x^2 + 2x - 12; x = 1 \text{ and } 4$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-5x^2 - 10xh - 5h^2 + 2x + 2h - 12 - (-5x^2 + 2x - 12)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(-10x - 5h + 2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (-10x - 5h + 2)$$

$$= -10x - 5(0) + 2 = \boxed{-10x + 2}$$

$$\begin{aligned} f(x+h) &= -5(x+h)^2 + 2(x+h) - 12 \\ &= -5(x^2 + 2xh + h^2) + 2x + 2h - 12 \\ &= -5x^2 - 10xh - 5h^2 + 2x + 2h - 12 \end{aligned}$$

$$f'(x) = -10x + 2$$

$$f'(1) = -10(1) + 2 = \boxed{-8}$$

$$f'(4) = -10(4) + 2 = \boxed{-38}$$



يُرمز لمشتقة $y = f(x)$ أيضًا بالرموز $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df}{dx}$, y' , وإذا سبق الدالة المؤثر التفاضلي $\frac{d}{dx}$, فإن ذلك يعني إيجاد مشتقة الدالة.

حتى هذه اللحظة استعملت النهاية؛ لإيجاد كلٍّ من المشتقة وميل المماس والسرعة المتجهة اللحظية. وتُعدُّ قاعدة مشتقة القوة من أكثر القواعد فعالية لإيجاد المشتقات من دون اللجوء إلى استعمال النهايات، مما يجعل عملية إيجاد المشتقات أكثر سهولة ودقة.

قاعدة مشتقة دالة القوة

مفهوم أساسي

التعبير اللفظي: في مشتقة دالة القوة تكون قوة x أقل بواحد من قوة x في الدالة الأصلية، ومعامل x في المشتقة يساوي قوة x في الدالة الأصلية.

الرموز: إذا كان $f(x) = x^n$ ، حيث n عدد حقيقي، فإن: $f'(x) = nx^{n-1}$.

قاعدة مشتقة دالة القوة

أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي:

$$f(x) = x^9$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 9x^{9-1} \\ &= 9x^8 \end{aligned}$$

$$g(x) = \sqrt[5]{x^7}$$

$$\begin{aligned} g(x) &= x^{\frac{7}{5}} \\ g'(x) &= \frac{7}{5} x^{\frac{7}{5}-1} \\ &= \frac{7}{5} x^{\frac{2}{5}} \\ &= \frac{7}{5} \sqrt[5]{x^2} \end{aligned}$$

$$h(x) = \frac{1}{x^8}$$

$$\begin{aligned} h(x) &= x^{-8} \\ h'(x) &= -8x^{-8-1} \\ &= -8x^{-9} \\ &= -\frac{8}{x^9} \end{aligned}$$

$$j(x) = x^4$$

$$\begin{aligned} j'(x) &= 4x^{4-1} \\ &= 4x^3 \end{aligned}$$

$$k(x) = \sqrt{x^3}$$

$$\begin{aligned} k(x) &= x^{\frac{3}{2}} \\ k'(x) &= \frac{3}{2} x^{\frac{3}{2}-1} \\ &= \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{3}{2} \sqrt{x} \end{aligned}$$

$$m(x) = \frac{1}{x^5}$$

$$\begin{aligned} m(x) &= x^{-5} \\ m'(x) &= -5x^{-5-1} \\ &= -5x^{-6} \\ &= -\frac{5}{x^6} \end{aligned}$$



مفهوم أساسي

قواعد أخرى للاشتقاق

مشتقة الثابت:

مشتقة الدالة الثابتة تساوي صفراً؛ أي أنه إذا كانت $f(x) = c$ ، حيث c عدد ثابت، فإن $f'(x) = 0$.

مشتقة مضاعفات القوة: إذا كانت $f(x) = cx^n$ ، حيث c ثابت، و n عدد حقيقي، فإن: $f'(x) = cnx^{n-1}$.

مشتقة المجموع أو الفرق: إذا كانت: $f(x) = g(x) \pm h(x)$ ، فإن: $f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$.

قواعد الاشتقاق

Find the derivative of each function.

أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي:

$$f(x) = 5x^3 + 4$$

$$f'(x) = 5(3)x^{3-1} + 0$$

$$= 15x^2$$

$$g(x) = x^5(2x^3 + 4)$$

$$g(x) = 2x^8 + 4x^5$$

$$g'(x) = 2(8)x^{8-1} + 4(5)x^{5-1}$$

$$= 16x^7 + 20x^4$$

$$h(x) = \frac{5x^3 - 12x + 6\sqrt{x^5}}{x}$$

$$h(x) = \frac{5x^3}{x} - \frac{12x}{x} + \frac{6x^{\frac{5}{2}}}{x}$$

$$= 5x^2 - 12 + 6x^{\frac{3}{2}}$$

$$h'(x) = 5(2)x^{2-1} - 0 + 6(\frac{3}{2})x^{\frac{3}{2}-1}$$

$$= 10x + 9x^{\frac{1}{2}}$$

$$= 10x + 9\sqrt{x}$$

$$f(x) = 2x^5 - x^3 - 102$$

$$f'(x) = 2(5x^{5-1}) - 3x^{3-1} - 0$$

$$= 10x^4 - 3x^2$$

$$g(x) = 3x^4(x + 2)$$

$$g(x) = 3x^5 + 6x^4$$

$$g'(x) = 3(5x^{5-1}) + 6(4x^{4-1})$$

$$= 15x^4 + 24x^3$$

$$h(x) = \frac{4x^4 - 3x^2 + 5x}{x}$$

$$h(x) = \frac{4x^4}{x} - \frac{3x^2}{x} + \frac{5x}{x}$$

$$= 4x^3 - 3x + 5$$

$$h'(x) = 4(3x^{3-1}) - 3x^{1-1} + 0$$

$$= 12x^2 - 3$$



الآن، وبعد أن درست القواعد الأساسية للاشتقاق، يمكنك حل المسائل التي تتطلب حساب ميل مماس المنحنى، أو إيجاد السرعة المتجهة اللحظية بخطوات أقل، ففي الدرس السابق، أوجدنا معادلة السرعة المتجهة اللحظية لجسم متحرك، وستلاحظ الآن سهولة حل المسألة نفسها بتطبيق قواعد الاشتقاق.

تُعطى المسافة التي يقطعها جسم بالسنتيمترات بعد t ثانية بالدالة $s(t) = 18t - 3t^3 - 1$. أوجد معادلة السرعة المتجهة اللحظية $v(t)$ للجسم عند أي زمن.

$$\begin{aligned} \text{السرعة المتجهة اللحظية} \quad v(t) &= s'(t) = 18 - 3(3t^2) - 0 \\ &= 18 - 9t^2 \end{aligned}$$

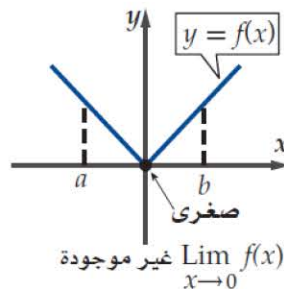
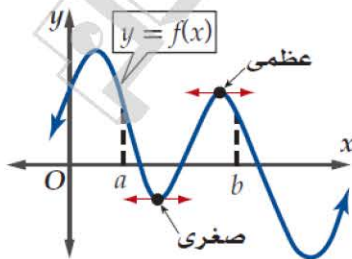
تمثل الدالة $h(t) = 18t - 5t^2$ الارتفاع بالأمتار بعد t ثانية لكرة قذفت رأسياً إلى أعلى. أوجد معادلة السرعة المتجهة اللحظية $v(t)$ للكرة عند أي زمن.

$$\begin{aligned} \text{السرعة المتجهة اللحظية} \quad v(t) &= h'(t) = 18 - 5(2t) \\ &= 18 - 10t \end{aligned}$$

النقطة التي تكون عندها مشتقة الدالة صفراً أو غير موجودة تُسمى نقطة حرجة للدالة، والنقطة الحرجة قد تشير إلى وجود نقطة قيمة عظمى أو صغرى للدالة، وتحدث عندما يكون ميل مماس منحنى الدالة صفراً أو غير موجود.

مفهوم أساسي

نظرية القيمة القصوى



إذا كانت $f(x)$ متصلة على الفترة المغلقة $[a, b]$ ، فإن لها قيمة عظمى وصغرى على الفترة $[a, b]$ ، وذلك إما عند أحد طرفي الفترة أو عند إحدى النقاط الحرجة.

لتعيين نقاط القيم العظمى والصغرى للدالة على فترة مغلقة، لا بد من حساب قيم الدالة عند أطراف الفترة، وعند النقاط الحرجة في تلك الفترة.



الأفعوانية الدالة $h(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 4t^2 + \frac{11}{3}$ تمثل ارتفاع إبراهيم بالأمتار في أثناء ركوبه أفعوانية، حيث t الزمن بالتواني في الفترة الزمنية $[1, 12]$ ، أوجد أقصى وأدنى ارتفاع يبلغه إبراهيم في هذه الفترة الزمنية.

$$h'(t) = -\frac{1}{3}(3t^2) + 4(2t) + 0$$

$$h'(t) = -t^2 + 8t$$

$$h'(t) = 0 \quad \text{نوجد أصفار المشتقة}$$

$$\Rightarrow -t^2 + 8t = 0$$

$$\Rightarrow -t(t - 8) = 0 \Rightarrow t = 0, t = 8$$

نحسب قيمة $h(t)$ عند أصفار المشتقة وعند أطراف الفترة الزمنية

$$t = 0, 8, 12$$

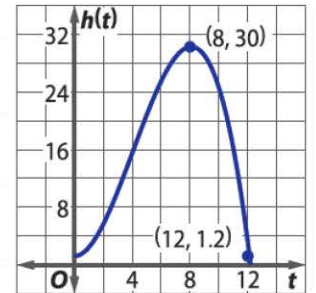
سوف نهمّل $t = 0$ لأنه لا ينتمي للفترة الزمنية $[1, 12]$

$$h(8) = -\frac{1}{3}(8^3) + 4(8^2) + \frac{11}{3} = 30$$

$$h(1) = -\frac{1}{3}(1^3) + 4(1^2) + \frac{11}{3} = 2.44$$

$$h(12) = -\frac{1}{3}(12^3) + 4(12^2) + \frac{11}{3} = 1.22$$

تصل العربة لأعلى ارتفاع 30m في 8 ثواني مع حركة القطار، وأقل ارتفاع 1.2m في 12 ثانية مع حركة القطار.



رياضة القفز الدالة $h(t) = 6t^2 - 48t + 100$ تمثل ارتفاع سعد بالأمتار في أثناء مشاركته في قفزة البنجي (القفر من أماكن مرتفعة، بحيث تكون القدمان موثقتين بحبل مطاطي)، حيث t الزمن بالتواني في الفترة الزمنية $[0, 6]$ ، أوجد أقصى وأدنى ارتفاع يبلغه سعد في هذه الفترة الزمنية.

$$h'(t) = 12t - 48$$

$$h'(t) = 0 \quad \text{نوجد أصفار المشتقة}$$

$$\Rightarrow 12t - 48 = 0$$

$$\Rightarrow t = \frac{48}{12} = 4$$

نحسب قيم $h(t)$ عند أصفار المشتقة (الفاصل المبرمج)

وعند أطراف الفترة الزمنية

$$t = 4, 0, 6$$

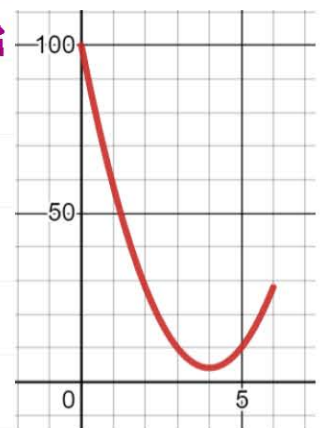
$$h(0) = 6(0)^2 - 48(0) + 100 = 100$$

$$h(4) = 6(4)^2 - 48(4) + 100 = 4$$

$$h(6) = 6(6)^2 - 48(6) + 100 = 28$$

أقصى ارتفاع 100m عند $t = 0$

أقل ارتفاع 4m عند $t = 4$





إن مشتقة ناتج ضرب دالتين لا تساوي بالضرورة ناتج ضرب مشتقتي الدالتين، ويمكننا استعمال القاعدة الآتية لإيجاد مشتقة ناتج ضرب دالتين.

قاعدة مشتقة الضرب

مفهوم أساسي

إذا كانت مشتقة كل من الدالتين f و g موجودة عند x ، فإن: $\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.

$$h(x) = (x^3 - 2x + 7)(3x^2 - 5)$$

أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي:

$$\begin{aligned} h'(x) &= (\text{الأول})(\text{مشتقة الثاني}) + (\text{الثاني})(\text{مشتقة الأول}) \\ &= (3x^2 - 2)(3x^2 - 5) + (6x)(x^3 - 2x + 7) \\ &= 9x^4 - 15x^2 - 6x^2 + 10 + 6x^4 - 12x^2 + 42x \\ &= 15x^4 - 33x^2 + 42x + 10 \end{aligned}$$

$$h(x) = (x^3 - 4x^2 + 48x - 64)(6x^2 - x - 2)$$

$$\begin{aligned} h'(x) &= (\text{الأول})(\text{مشتقة الثاني}) + (\text{الثاني})(\text{مشتقة الأول}) \\ &= (3x^2 - 8x + 48)(6x^2 - x - 2) + (12x - 1)(x^3 - 4x^2 + 48x - 64) \\ &= 18x^4 - 3x^3 - 6x^2 - 48x^3 + 8x^2 + 16x + 288x^2 - 48x - 96 + 12x^4 - 48x^3 + 576x^2 - 768x - x^3 + 4x^2 - 48x + 64 \\ &= 30x^4 - 100x^3 + 870x^2 - 848x - 32 \end{aligned}$$

$$h(x) = (x^5 + 13x^2)(7x^3 - 5x^2 + 18)$$

$$\begin{aligned} h'(x) &= (\text{الأول})(\text{مشتقة الثاني}) + (\text{الثاني})(\text{مشتقة الأول}) \\ &= (5x^4 + 26x)(7x^3 - 5x^2 + 18) + (21x^2 - 10x)(x^5 + 13x^2) \\ &= 35x^7 - 25x^6 + 90x^4 + 182x^4 - 130x^3 + 468x + 21x^7 + 273x^4 - 10x^6 - 130x^3 \\ &= 56x^7 - 35x^6 + 545x^4 - 260x^3 + 468x \end{aligned}$$

$$h(x) = (x^2 + x^3 + x)(8x^2 + 3)$$

$$\begin{aligned} h'(x) &= (\text{الأول})(\text{مشتقة الثاني}) + (\text{الثاني})(\text{مشتقة الأول}) \\ &= (2x + 3x^2 + 1)(8x^2 + 3) + (16x)(x^2 + x^3 + x) \\ &= 16x^3 + 6x + 24x^4 + 9x^2 + 8x^2 + 3 + 16x^3 + 16x^4 + 16x^2 \\ &= 40x^4 + 32x^3 + 33x^2 + 6x + 3 \end{aligned}$$



كذلك فإن مشتقة ناتج قسمة دالتين لا تساوي ناتج قسمة مشتقتي الدالتين، ويمكن استعمال القاعدة الآتية لحساب مشتقة قسمة دالتين.

قاعدة مشتقة القسمة

مفهوم أساسي

إذا كانت مشتقة كل من الدالتين f, g موجودة عند x ، وكان $g(x) \neq 0$ ، فإن:

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي:

$$h(x) = \frac{5x^2 - 3}{x^2 - 6} \quad \text{(البسط) (مشتقة المقام) - (المقام) (مشتقة البسط) = مشتقة الكسر}$$

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{(10x)(x^2 - 6) - (2x)(5x^2 - 3)}{(x^2 - 6)^2} \\ &= \frac{10x^3 - 60x - 10x^3 + 6x}{(x^2 - 6)^2} \\ &= \frac{-54x}{(x^2 - 6)^2} \end{aligned}$$

$$h(x) = \frac{x^2 + 8}{x^3 - 2} \quad \text{(البسط) (مشتقة المقام) - (المقام) (مشتقة البسط) = مشتقة الكسر}$$

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{(2x)(x^3 - 2) - (3x^2)(x^2 + 8)}{(x^3 - 2)^2} \\ &= \frac{2x^4 - 4x - 3x^4 - 24x^2}{(x^3 - 2)^2} \\ &= \frac{-x^4 - 24x^2 - 4x}{(x^3 - 2)^2} \end{aligned}$$

$$j(x) = \frac{7x - 10}{12x + 5} \quad \text{(البسط) (مشتقة المقام) - (المقام) (مشتقة البسط) = مشتقة الكسر}$$

$$\begin{aligned} j'(x) &= \frac{7(12x + 5) - 12(7x - 10)}{(12x + 5)^2} \\ &= \frac{84x + 35 - 84x + 120}{(12x + 5)^2} \\ &= \frac{155}{(12x + 5)^2} \end{aligned}$$

$$k(x) = \frac{6x}{2x^2 + 4} \quad \text{(البسط) (مشتقة المقام) - (المقام) (مشتقة البسط) = مشتقة الكسر}$$

$$\begin{aligned} k'(x) &= \frac{6(2x^2 + 4) - (4x)(6x)}{(2x^2 + 4)^2} \\ &= \frac{12x^2 + 24 - 24x^2}{(2x^2 + 4)^2} \\ &= \frac{-12x^2 + 24}{(2x^2 + 4)^2} \end{aligned}$$



ضغط هنا للصور

11-5 المساحة تحت المنحنى والتكامل

ورقة عمل الثاني عشر العام

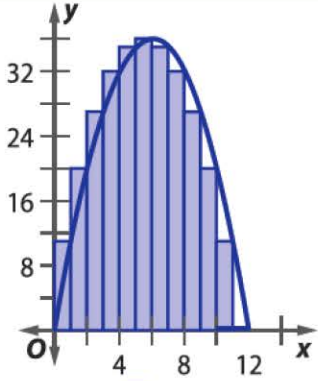
في هذا الدرس سوف نتعلم:

1- تقريب المساحة تحت المنحنى باستخدام المستطيلات.

2- تقريب المساحة تحت المنحنى باستخدام التكاملات المحددة والتكامل.

المساحة تحت المنحنى باستخدام الأطراف اليمنى للمستطيلات

قرب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $f(x) = -x^2 + 12x$ والمحور x على الفترة $[0, 12]$ باستخدام 4، 6، 12 مستطيلات على الترتيب. استعمل الطرف الأيمن لقاعدة كل مستطيل لتحديد ارتفاعه.



المساحة باستخدام 12 مستطيل

$$R_1 = 1 \cdot f(1) = 11$$

$$R_2 = 1 \cdot f(2) = 20$$

$$R_3 = 1 \cdot f(3) = 27$$

$$R_4 = 1 \cdot f(4) = 32$$

$$R_5 = 1 \cdot f(5) = 35$$

$$R_6 = 1 \cdot f(6) = 36$$

$$R_7 = 1 \cdot f(7) = 35$$

$$R_8 = 1 \cdot f(8) = 32$$

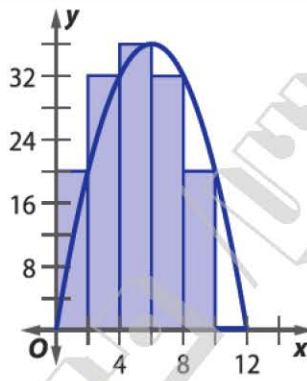
$$R_9 = 1 \cdot f(9) = 27$$

$$R_{10} = 1 \cdot f(10) = 20$$

$$R_{11} = 1 \cdot f(11) = 11$$

$$R_{12} = 1 \cdot f(12) = 0$$

المساحة الإجمالية = 286



المساحة باستخدام 6 مستطيلات

$$R_1 = 2 \cdot f(2) = 40$$

$$R_2 = 2 \cdot f(4) = 64$$

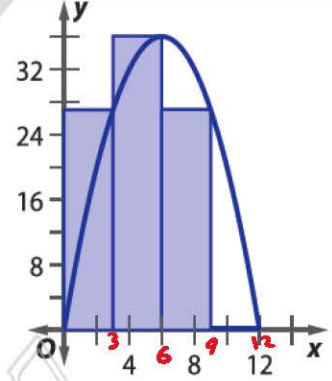
$$R_3 = 2 \cdot f(6) = 72$$

$$R_4 = 2 \cdot f(8) = 64$$

$$R_5 = 2 \cdot f(10) = 40$$

$$R_6 = 2 \cdot f(12) = 0$$

المساحة الإجمالية = 280



المساحة باستخدام 4 مستطيلات

$$R_1 = 3 \cdot f(3) = 81$$

$$R_2 = 3 \cdot f(6) = 108$$

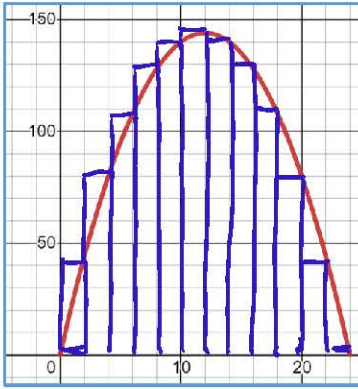
$$R_3 = 3 \cdot f(9) = 81$$

$$R_4 = 3 \cdot f(12) = 0$$

المساحة الإجمالية = 270



قرب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $f(x) = -x^2 + 24x$ والمحور x على الفترة $[0, 24]$ باستخدام $12, 8, 6$ مستطيلات على الترتيب. استعمل الطرف الأيمن لقاعدة كل مستطيل لتحديد ارتفاعه.



المساحة باستخدام 12 مستطيلات

$$R_1 = 2 \cdot f(2) = 88$$

$$R_2 = 2 \cdot f(4) = 160$$

$$R_3 = 2 \cdot f(6) = 216$$

$$R_4 = 2 \cdot f(8) = 256$$

$$R_5 = 2 \cdot f(10) = 280$$

$$R_6 = 2 \cdot f(12) = 288$$

$$R_7 = 2 \cdot f(14) = 280$$

$$R_8 = 2 \cdot f(16) = 256$$

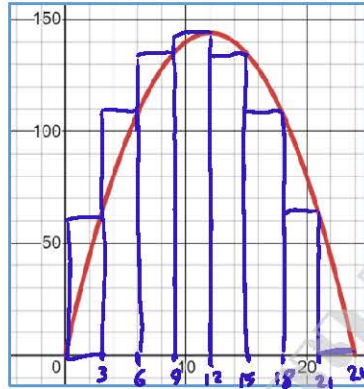
$$R_9 = 2 \cdot f(18) = 216$$

$$R_{10} = 2 \cdot f(20) = 160$$

$$R_{11} = 2 \cdot f(22) = 88$$

$$R_{12} = 2 \cdot f(24) = 0$$

$$2288 = \text{المساحة الإجمالية}$$



المساحة باستخدام 8 مستطيلات

$$R_1 = 3 \cdot f(3) = 189$$

$$R_2 = 3 \cdot f(6) = 324$$

$$R_3 = 3 \cdot f(9) = 405$$

$$R_4 = 3 \cdot f(12) = 432$$

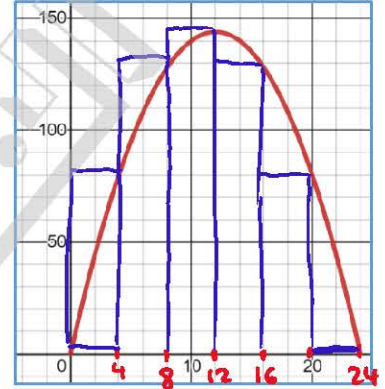
$$R_5 = 3 \cdot f(15) = 405$$

$$R_6 = 3 \cdot f(18) = 324$$

$$R_7 = 3 \cdot f(21) = 189$$

$$R_8 = 3 \cdot f(24) = 0$$

$$2268 = \text{المساحة الإجمالية}$$



المساحة باستخدام 6 مستطيلات

$$R_1 = 4 \cdot f(4) = 320$$

$$R_2 = 4 \cdot f(8) = 512$$

$$R_3 = 4 \cdot f(12) = 576$$

$$R_4 = 4 \cdot f(16) = 512$$

$$R_5 = 4 \cdot f(20) = 320$$

$$R_6 = 4 \cdot f(24) = 0$$

$$2240 = \text{المساحة الإجمالية}$$

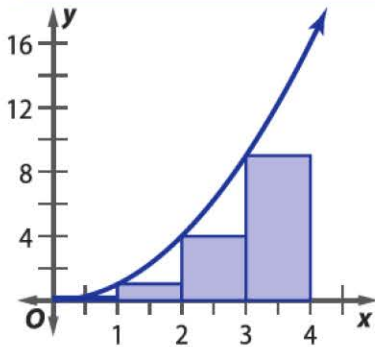


لاحظ أن المستطيلات الأقل عرضاً تمثل المساحة المطلوبة بصورة أفضل، وتعطي تقريباً أدق للمساحة الكلية. وكما استعملنا الأطراف اليمنى لقاعدة كل مستطيل لتحديد ارتفاعاتها، فإنه يمكننا أيضاً استعمال أطرافها اليسرى لتحديد ارتفاعاتها وهذا قد ينتج عنه تقريب مختلف للمساحة.

ومن الممكن الحصول على تقريب أفضل للمساحة في بعض الأحيان باستعمال كل من الأطراف اليمنى واليسرى لقواعد المستطيلات، ثم أخذ الوسط للتقريبين.

المساحة تحت المنحنى باستخدام الأطراف اليسرى واليمنى للمستطيلات

قرب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $f(x) = x^2$ والمحور x على الفترة $[0, 4]$ باستخدام مستطيلات عرض كل واحد منها وحدة واحدة. استعمال الأطراف اليمنى ثم اليسرى لقواعد المستطيلات لتحديد ارتفاعاتها، ثم احسب الوسط للتقريبين.



المساحة باستخدام نقاط النهاية اليسرى

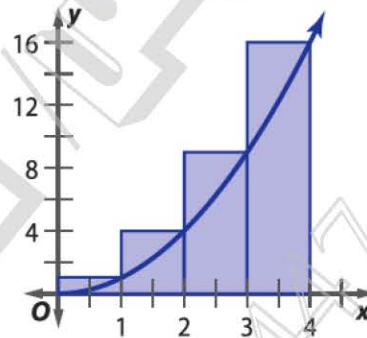
$$R_1 = 1 \cdot f(0) = 0$$

$$R_2 = 1 \cdot f(1) = 1$$

$$R_3 = 1 \cdot f(2) = 4$$

$$R_4 = 1 \cdot f(3) = 9$$

$$المساحة \text{ إجمالية } = 14$$



المساحة باستخدام نقاط النهاية اليمنى

$$R_1 = 1 \cdot f(1) = 1$$

$$R_2 = 1 \cdot f(2) = 4$$

$$R_3 = 1 \cdot f(3) = 9$$

$$R_4 = 1 \cdot f(4) = 16$$

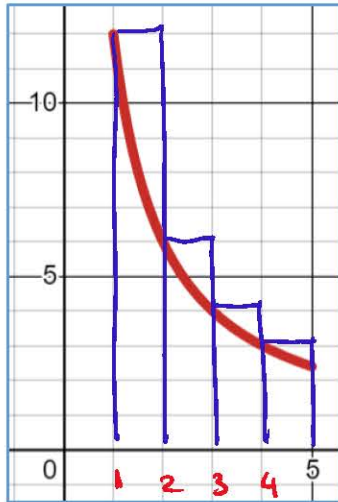
$$المساحة \text{ إجمالية } = 30$$

لدينا الآن تقدير أعلى وتقدير أدنى لمساحة المنطقة $\Leftarrow 30 > المساحة > 14$

للحصول على أفضل تقريب لمساحة المنطقة نأخذ المتوسط $\Leftarrow \frac{30+14}{2} = 22$ وحدة مربعة



قرب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $f(x) = \frac{12}{x}$ والمحور x على الفترة $[1, 5]$ باستخدام باستعمال مستطيلات عرض كل واحد منها وحدة واحدة. استعمل الأطراف اليمنى ثم اليسرى لقواعد المستطيلات لتحديد ارتفاعاتها، ثم احسب الوسط للتقريبين.



المساحة باستخدام نقاط النهاية اليسرى

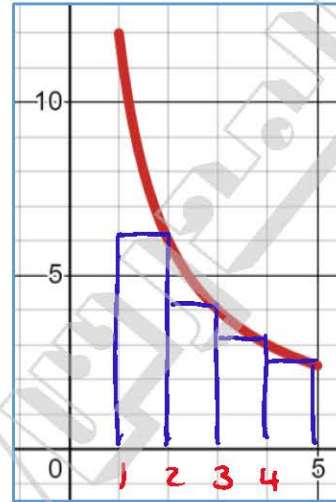
$$R_1 = 1 \cdot f(1) = 12$$

$$R_2 = 1 \cdot f(2) = 6$$

$$R_3 = 1 \cdot f(3) = 4$$

$$R_4 = 1 \cdot f(4) = 3$$

$$المساحة \text{ إجمالية} = 25$$



المساحة باستخدام نقاط النهاية اليمنى

$$R_1 = 1 \cdot f(2) = 6$$

$$R_2 = 1 \cdot f(3) = 4$$

$$R_3 = 1 \cdot f(4) = 3$$

$$R_4 = 1 \cdot f(5) = 2.4$$

$$المساحة \text{ إجمالية} = 15.4$$

لدينا الآن تقدير أعلى وتقدير أدنى لمساحة المنطقة $\Leftarrow 15.4 < \text{المساحة} < 25$

للحصول على أفضل تقريب لمساحة المنطقة نأخذ المتوسط $\Leftarrow \frac{15.4 + 25}{2} = 20.2$ وحدة مربعة

عند تقريب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى دالة والمحور x ، فإنه يمكننا استعمال أي نقطة على قاعدة المستطيل لتحديد ارتفاعه، إلا أن النقاط الأكثر شيوعاً هي نقطتا الطرفين الأيمن والأيسر، ونقطة المنتصف.



التكامل لاحظت في مثال 1 أنه كلما قل عرض المستطيلات، فإن مساحتها الكلية تقترب من المساحة الفعلية تحت المنحنى، ومن ذلك نستنتج أن المساحة المطلوبة هي نهاية مجموع مساحات المستطيلات عندما يقترب عرض كل مستطيل من الصفر.

لاحظ أنه كلما اقترب عرض المستطيل من الصفر، فإن عدد المستطيلات يقترب من المالا نهاية، وتُسمى هذه النهاية **التكامل المحدد**، ويُعبّر عنها برمز خاص.

مفهوم أساسي

التكامل المحدد

عرض المستطيل Δx

عدد المستطيلات n

نقطة النهاية اليمنى x_i

يعطى التكامل المحدد للدالة $f(x)$ في الفترة $[a, b]$ بالصيغة:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x, \Delta x = \frac{b-a}{n}, x_i = a + i \Delta x$$

حيث a الحد الأدنى للتكامل، و b الحد الأعلى للتكامل، وتُسمى هذه الصيغة مجموع ريمان الأيمن.

ويُعبّر هذا التكامل عن مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة $f(x)$ والمحور x في الفترة $[a, b]$

قراءة الرياضيات

رمز المجموع

تُقرأ العبارة $\sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x$ كالآتي مجموع حواصل ضرب $f(x_i)$ في Δx من $i=1$ إلى $i=n$.

رمز التكامل المحدد

يقرأ الرمز $\int_a^b f(x) dx$ التكامل من a إلى b للدالة $d(x), f(x)$

وتسمى عملية حساب التكامل **تكاملًا**، وتُستعمل صيغ المجاميع الآتية لحساب التكامل المحدد.

$$\sum_{i=1}^n c = cn, \text{ عدد ثابت } c$$

$$\sum_{i=1}^n i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^n i^4 = \frac{6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n}{30}$$

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{i=1}^n i^5 = \frac{2n^6 + 6n^5 + 5n^4 - n^2}{12}$$

تُستعمل خاصيتا المجموع الآتيتان لحساب بعض التكاملات:

$$\sum_{i=1}^n (a_i \pm b_i) = \sum_{i=1}^n a_i \pm \sum_{i=1}^n b_i, \quad \sum_{i=1}^n ci = c \sum_{i=1}^n i, \text{ عدد ثابت } c$$



المساحة تحت المنحنى باستخدام التكامل حال كون نقطة الأصل حذاً أدنى لها

استخدم النهايات: لإيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة والمحور x والمعطاة بالتكامل المحدد في كل مما يلي: **نفسه هنا** للحصول على النتيجة بدون

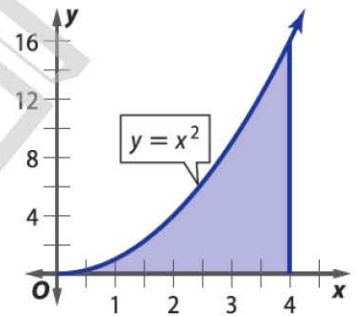
$$\int_0^4 x^2 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x \quad \text{--- (1)}$$

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{4-0}{n} = \frac{4}{n}$$

$$x_i = a + i \Delta x$$

$$= 0 + i \left(\frac{4}{n} \right) = \frac{4}{n} i$$

$$f(x_i) = \left(\frac{4}{n} i \right)^2 = \frac{16}{n^2} i^2$$



نعوض في (1)

$$\int_0^4 x^2 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\frac{16}{n^2} \right) i^2 \left(\frac{4}{n} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{64}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{64}{n^3} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{64 (2n^3)}{6 n^3}$$



الحد الرئيس للبسط
الحد الرئيس للمقام

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{64 (2)}{6}$$

$$= \frac{64 (2)}{6}$$

$$= \boxed{\frac{64}{3}} = \boxed{21 \frac{1}{3}}$$

← المساحة هي $21 \frac{1}{3}$ وحدة مربعة، أو $\frac{64}{3}$



استخدم النهايات؛ لإيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة والمحور x والمعدة بالتكامل المحدد في كل من معايير اللي معايير على الترميز بدون

$$\int_0^1 3x^2 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x$$

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}$$

$$x_i = a + i \Delta x = 0 + i \left(\frac{1}{n}\right) = \frac{i}{n}$$

$$f(x_i) = f\left(\frac{i}{n}\right) = 3\left(\frac{i}{n}\right)^2 = \frac{3}{n^2} i^2$$

$$\int_0^1 3x^2 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\frac{3}{n^2} i^2\right) \left(\frac{1}{n}\right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{3}{n^3} i^2$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n^3} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right)$$

$$\frac{\text{الحد الرئيس للبسط}}{\text{الحد الرئيس للمقام}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3(2n^3)}{6n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1} = 1$$

المساحة هي وحدة واحدة مربعة.

$$\int_0^3 x dx$$

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{3-0}{n} = \frac{3}{n}$$

$$x_i = a + i \Delta x = 0 + i \left(\frac{3}{n}\right) = \frac{3}{n} i$$

$$f(x_i) = f\left(\frac{3}{n} i\right) = \frac{3}{n} i$$

$$\int_0^3 x dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\frac{3}{n} i\right) \left(\frac{3}{n}\right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\frac{9}{n^2} i\right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9}{n^2} \sum_{i=1}^n i$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9}{n^2} \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9n^2}{2n^2}$$

$$\frac{\text{الحد الرئيس للبسط}}{\text{الحد الرئيس للمقام}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9}{2} = 4.5$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9}{2}$$

$$= \frac{9}{2} = 4.5$$

المساحة هي 4.5 وحدة مربعة.



المساحة تحت المنحنى باستخدام التكامل حال كون نقطة الأصل ليست حدًا أدنى لها

نضغط هنا للحصول على اللزمة بدون

يمكننا أيضًا حساب مساحات المناطق باستعمال النهايات حال كون نقطة الأصل ليست حدًا أدنى لها.

استخدم النهايات؛ لإيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة والمحور x والمعطاة بالتكامل المحدد في كلٍ مما يأتي:

$$\int_1^3 4x^3 dx$$

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{3-1}{n} = \frac{2}{n}$$

$$x_i = a + i\Delta x = 1 + i\left(\frac{2}{n}\right) = 1 + \frac{2i}{n}$$

$$f(x_i) = f\left(1 + \frac{2i}{n}\right) = 4\left(1 + \frac{2i}{n}\right)^3$$

$$= 4\left(1 + \frac{2i}{n}\right)^2 \left(1 + \frac{2i}{n}\right)$$

$$= 4\left(1 + \frac{4i}{n} + \frac{4i^2}{n^2}\right) \left(1 + \frac{2i}{n}\right)$$

$$= 4\left(1 + \frac{2i}{n} + \frac{4i}{n} + \frac{8i^2}{n^2} + \frac{4i^2}{n^2} + \frac{8i^3}{n^3}\right)$$

$$= 4\left(1 + \frac{6i}{n} + \frac{12i^2}{n^2} + \frac{8i^3}{n^3}\right)$$

$$\int_1^3 4x^3 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n 4\left(1 + \frac{6i}{n} + \frac{12i^2}{n^2} + \frac{8i^3}{n^3}\right) \left(\frac{2}{n}\right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8}{n} \sum_{i=1}^n \left(1 + \frac{6i}{n} + \frac{12i^2}{n^2} + \frac{8i^3}{n^3}\right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8}{n} \left[\sum_{i=1}^n 1 + \frac{6}{n} \sum_{i=1}^n i + \frac{12}{n^2} \sum_{i=1}^n i^2 + \frac{8}{n^3} \sum_{i=1}^n i^3 \right]$$

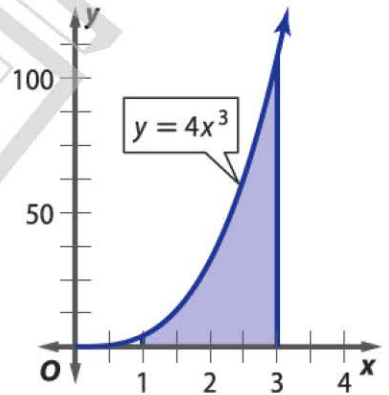
$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8}{n} \left[n + \frac{6}{n} \left(\frac{n(n+1)}{2}\right) + \frac{12}{n^2} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) + \frac{8}{n^3} \left(\frac{n^2(n+1)^2}{4}\right) \right]$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[8 + \frac{48}{n^2} \left(\frac{n(n+1)}{2}\right) + \frac{96}{n^3} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) + \frac{64}{n^4} \left(\frac{n^2(n+1)^2}{4}\right) \right]$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[8 + \frac{48n^2}{2n^2} + \frac{192n^3}{6n^3} + \frac{64n^4}{4n^4} \right]$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} [8 + 24 + 32 + 16]$$

$$= 8 + 24 + 32 + 16 = 80 \Rightarrow \text{مساحة المنطقة هي } 80 \text{ وحدة مربعة.}$$



الحد الرئيس للبسط

الحد الرئيس للمقام



استخدم النهايات؛ لإيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة والمحور x والمعطاة بالتكامل المحدد في شكل معايير بالصيغة على الترميز بدون

$$\int_1^3 x^2 dx$$

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{3-1}{n} = \frac{2}{n}$$

$$x_i = a + i\Delta x = 1 + \frac{2i}{n}$$

$$f(x_i) = f\left(1 + \frac{2i}{n}\right)$$

$$= \left(1 + \frac{2i}{n}\right)^2$$

$$= 1 + \frac{4i}{n} + \frac{4i^2}{n^2}$$

$$\int_1^3 x^2 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(1 + \frac{4i}{n} + \frac{4i^2}{n^2}\right) \left(\frac{2}{n}\right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \left(1 + \frac{4i}{n} + \frac{4i^2}{n^2}\right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} \left[\sum_{i=1}^n 1 + \frac{4}{n} \sum_{i=1}^n i + \frac{4}{n^2} \sum_{i=1}^n i^2 \right]$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} \left[n + \frac{4}{n} \left(\frac{n(n+1)}{2}\right) + \frac{4}{n^2} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) \right]$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[2 + \frac{8}{n^2} \left(\frac{n(n+1)}{2}\right) + \frac{8}{n^3} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) \right]$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[2 + \frac{8n^2}{2n^2} + \frac{16n^3}{6n^3} \right]$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[2 + 4 + \frac{16}{6} \right]$$

$$= 2 + 4 + \frac{16}{6} = 8 \frac{2}{3}$$

الحد الرئيس للبسط

الحد الرئيس للمقام

مساحة المنطقة هي $8 \frac{2}{3}$ وحدة مربعة.

$$\int_2^4 x^3 dx$$

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{4-2}{n} = \frac{2}{n}$$

$$x_i = a + i\Delta x = 2 + \frac{2i}{n}$$

$$f(x_i) = f\left(2 + \frac{2i}{n}\right)$$

$$= \left(2 + \frac{2i}{n}\right)^3$$

$$= \left(2 + \frac{2i}{n}\right)^2 \left(2 + \frac{2i}{n}\right)$$

$$= \left(4 + \frac{8i}{n} + \frac{4i^2}{n^2}\right) \left(2 + \frac{2i}{n}\right)$$

$$= 8 + \frac{8i}{n} + \frac{16i}{n} + \frac{16i^2}{n^2} + \frac{8i^2}{n^2} + \frac{8i^3}{n^3}$$

$$= 8 + \frac{24i}{n} + \frac{24i^2}{n^2} + \frac{8i^3}{n^3}$$

$$\Rightarrow \int_2^4 x^3 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(8 + \frac{24i}{n} + \frac{24i^2}{n^2} + \frac{8i^3}{n^3}\right) \left(\frac{2}{n}\right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} \left[\sum_{i=1}^n 8 + \frac{24}{n} \sum_{i=1}^n i + \frac{24}{n^2} \sum_{i=1}^n i^2 + \frac{8}{n^3} \sum_{i=1}^n i^3 \right]$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} \left[8n + \frac{24}{n} \left(\frac{n(n+1)}{2}\right) + \frac{24}{n^2} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) + \frac{8}{n^3} \left(\frac{n^2(n+1)^2}{4}\right) \right]$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[16 + \frac{48}{n^2} \left(\frac{n(n+1)}{2}\right) + \frac{48}{n^3} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) + \frac{16}{n^4} \left(\frac{n^2(n+1)^2}{4}\right) \right]$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[16 + \frac{48n^2}{2n^2} + \frac{96n^3}{6n^3} + \frac{16n^4}{4n^4} \right]$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} (16 + 24 + 16 + 4) = 16 + 24 + 16 + 4 = 60$$

الحد الرئيس للبسط

الحد الرئيس للمقام

مساحة المنطقة هي 60 وحدة مربعة.



بلاط: يكلف تبليط المتر المربع الواحد من فناء منزل بالجرانيت 2.40 AED. إذا تم تبليط ممرين متطابقين في فناء المنزل بالجرانيت، وكانت المساحة بالمتر المربع لأي من الممرين تُعطى بالتكامل $\int_0^{10} (10 - 0.1x^2) dx$ ، فما تكلفة تبليط الممرين؟

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{10-0}{n} = \frac{10}{n}$$

$$x_i = a + i\Delta x = 0 + \frac{10i}{n} = \frac{10i}{n}$$

$$f(x_i) = f\left(\frac{10i}{n}\right) = 10 - 0.1\left(\frac{10i}{n}\right)^2 = 10 - 0.1\left(\frac{100i^2}{n^2}\right) = 10 - \frac{10i^2}{n^2}$$

$$\int_0^{10} (10 - 0.1x^2) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(10 - \frac{10i^2}{n^2}\right) \left(\frac{10}{n}\right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10}{n} \left(\sum_{i=1}^n 10 - \sum_{i=1}^n \frac{10i^2}{n^2} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10}{n} \left[10n - \frac{10}{n^2} \sum_{i=1}^n i^2 \right]$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[100 - \frac{100}{n^3} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right) \right]$$

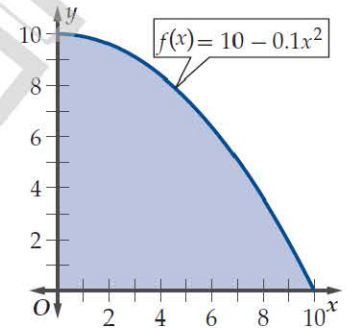
$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[100 - \frac{200n^3}{6n^3} \right]$$

الحد الرئيس للبسط
الحد الرئيس للمقام

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(100 - \frac{200}{6} \right)$$

$$= 100 - \frac{200}{6}$$

$$= 66 \frac{2}{3}$$



المساحة هي $66 \frac{2}{3}$ متر مربع.
تكلفة تبليط الممرين = $\left(66 \frac{2}{3} \times 2.40\right) \times 2$
= **20** درهم



طلاء: لدى عبد الله كمية من الطلاء تكفي لطلاء 30 m^2 . هل تكفي هذه الكمية لطلاء جزأين من جدار مساحة كل منهما $16 \frac{2}{3} \text{ m}^2$ ؟
نُعطي بالتكامل $\int_0^5 (5 - 0.2x^2) dx$ ؟ برّر إجابتك.

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{5-0}{n} = \frac{5}{n}$$

$$x_i = a + i \Delta x = 0 + i \left(\frac{5}{n} \right) = \frac{5i}{n}$$

$$f(x_i) = f\left(\frac{5i}{n}\right)$$

$$= 5 - 0.2 \left(\frac{5i}{n} \right)^2$$

$$= 5 - 0.2 \frac{25i^2}{n^2}$$

$$= 5 - \frac{5i^2}{n^2}$$

$$\int_0^5 (5 - 0.2x^2) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (f(x_i) \Delta x)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(5 - \frac{5i^2}{n^2} \right) \left(\frac{5}{n} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n} \left[\sum_{i=1}^n 5 - \frac{5}{n^2} \sum_{i=1}^n i^2 \right]$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n} \left[5n - \frac{5}{n^2} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right) \right]$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n} \left[5n - \frac{10n^3}{6n^2} \right]$$

الحد الرئيس للبسط
الحد الرئيس للمقام

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[25 - \frac{50n^3}{6n^3} \right]$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[25 - \frac{50}{6} \right]$$

$$= 25 - \frac{50}{6}$$

$$= 16 \frac{2}{3}$$

المساحة هي $16 \frac{2}{3} \text{ m}^2$

$$\text{مساحة الجزأين} = \left(16 \frac{2}{3} \right) (2)$$

$$= 33 \frac{1}{3} \text{ m}^2$$

الطلاء الذي لدى عبد الله يكفي لمساحة

30 m^2 مربع

إذاً الطلاء لن يكفي.



11-6 النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل

ورقة عمل الثاني عشر العام

1- إيجاد المشتقات العكسية.

2- استخدام النظرية الأساسية للتفاضل والتكامل.

في هذا الدرس سوف نتعلم:

تعلمت في الدرسين 11-3 و 11-4 أنه إذا أُعطيت موقع جسم بـ $f(x) = x^2 + 2x$ ، فإن العبارة التي تمثل سرعة الجسم هي مشتقة $f(x)$ أو $f'(x) = 2x + 2$ ، لكن إذا أُعطيت عبارة تمثل السرعة، وطُلب إليك إيجاد صيغة المسافة التي تم إيجاد السرعة منها، فلا بد من وجود طريقة للعمل عكسيًا والعودة إلى الدالة الأصلية وإلغاء الاشتقاق.

وبمعنى آخر، فإننا نبحث عن $F(x)$ ، بحيث إن $F'(x) = f(x)$. وتُسمى $F(x)$ عكس المشتقة (دالة أصلية) للدالة $f(x)$.

إيجاد المشتقات العكسية

جد مشتقتين عكسيتين مختلفتين لكل دالة.

$$f(x) = 3x^2$$

$$F(x) = \frac{3x^{2+1}}{2+1} = x^3 + C$$

$$H(x) = x^3 + 2$$

$$K(x) = x^3 - 5$$

$$f(x) = -\frac{8}{x^9}$$

$$F(x) = -8x^{-9}$$

$$F(x) = \frac{-8x^{-9+1}}{-9+1} + C = \frac{-8x^{-8}}{-8} + C = x^{-8} + C = \frac{1}{x^8} + C$$

$$H(x) = \frac{1}{x^8} + 1$$

$$f(x) = 2x$$

$$F(x) = \frac{2x^{1+1}}{1+1} + C = x^2 + C$$

$$H(x) = x^2 + 4$$

$$G(x) = x^2 - 10$$

$$f(x) = -3x^{-4}$$

$$F(x) = \frac{-3x^{-4+1}}{-4+1} + C = \frac{-3x^{-3}}{-3} + C = x^{-3} + C$$

$$= \frac{1}{x^3} + C$$

$$H(x) = \frac{1}{x^3} + 7$$

$$G(x) = \frac{1}{x^3} - 12$$

في المثال السابق لاحظ أن إضافة أو طرح ثابت لمشتقة عكسية ينتج عنه مشتقة عكسية أخرى، وبشكل عام فإن إضافة أو طرح ثابت C لمشتقة عكسية يُنتج مشتقة عكسية أخرى؛ لأن مشتقة الثابت صفر. وعليه فإن هناك عددًا لا نهائيًا من المشتقات العكسية لأي دالة. والشكل العام للمشتقة العكسية هو الشكل الذي يحوي الثابت C .



مفهوم أساسي

قواعد المشتقات العكسية

ن:

قاعدة القوة إذا كان $f(x) = x^n$ ، حيث n عدد نسبي لا يساوي -1 ، فإن: $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

قاعدة ضرب دالة إذا كان $f(x) = kx^n$ ، حيث n عدد نسبي لا يساوي -1 ، k عددًا ثابتًا، فإن:

$$F(x) = \frac{kx^{n+1}}{n+1} + C$$

قاعدة المجموع والفرق إذا كان $f(x)$ ، $g(x)$ مشتقتان عكسيتان هما $F(x)$ ، $G(x)$ على الترتيب،

فإن: $F(x) \pm G(x)$ مشتقة عكسية لـ $f(x) \pm g(x)$.

قواعد المشتقات العكسية

جد جميع المشتقات العكسية لكل دالة.

$$f(x) = 4x^7$$

$$F(x) = \frac{4x^{7+1}}{7+1} + C$$

$$= \frac{4x^8}{8} + C = \frac{1}{2}x^8 + C$$

$$f(x) = \frac{2}{x^4} = 2x^{-4}$$

$$F(x) = \frac{2x^{-4+1}}{-4+1} + C$$

$$= \frac{2x^{-3}}{-3} + C = -\frac{2}{3x^3} + C$$

$$f(x) = x^2 - 8x + 5x^0$$

$$F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{8x^2}{2} + \frac{5x^1}{1} + C$$

$$= \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 5x + C$$

$$f(x) = 6x^4$$

$$F(x) = \frac{6x^5}{5} + C$$

$$= \frac{6}{5}x^5 + C$$

$$f(x) = \frac{10}{x^3} = 10x^{-3}$$

$$F(x) = \frac{10x^{-2}}{-2} + C$$

$$= -\frac{5}{x^2} + C$$

$$f(x) = 8x^7 + 6x + 2x^0$$

$$F(x) = \frac{8x^8}{8} + \frac{6x^2}{2} + \frac{2x^1}{1} + C$$

$$= x^8 + 3x^2 + 2x + C$$



اضغط هنا للحصول على اللزمة بدون

يُعطى الشكل العام للمشتقة العكسية باسم ورمز خاصين.

التكامل غير المحدد

مفهوم أساسي

يُعطى التكامل غير المحدد للدالة f بالصيغة $\int f(x) dx = F(x) + C$ ، حيث $F(x)$ مشتقة عكسية لـ $f(x)$ ، و C ثابت.

من الحياة اليومية التكامل غير المحدود

فيزياء: أجرى طلاب الصف الثاني عشر في إحدى المدارس الثانوية تجربة فيزيائية تتضمن إسقاط كرة من نافذة الفصل التي ترتفع عن

سطح الأرض بـ 9 أمتار، وتمثل $v(t) = -10t$ سرعة الكرة المتجهة اللحظية بالأمتار بعد t ثانية من سقوطها. $t=0 \Rightarrow s(t)=9$

(a) أوجد دالة موقع الكرة $s(t)$ بعد t ثانية من سقوطها.

$$s(t) = \int v(t) dt$$

$$= \int -10t dt = -\frac{10t^2}{2} + C = -5t^2 + C$$

$$\text{if } t=0 \Rightarrow s(t)=9 \Rightarrow 9 = -5(0)^2 + C \Rightarrow C=9 \Rightarrow \boxed{s(t) = -5t^2 + 9}$$

(b) أوجد الزمن الذي تستغرقه الكرة حتى تصل إلى سطح الأرض. $t=? \leftarrow s(t)=0$

$$\begin{array}{l|l|l} -5t^2 + 9 = 0 & t^2 = \frac{9}{5} & t = \sqrt{\frac{9}{5}} \\ t^2 = \frac{-9}{-5} & t = \pm \sqrt{\frac{9}{5}} & = \boxed{1.34} \text{ ثانية} \end{array}$$

لـ سالب مرفوض لأنه زمن

سقوط حر: عند قيام فيّ بإصلاح نافذة برج على ارتفاع 36 مترًا سقطت محفظته نحو الأرض، وتمثل $v(t) = -10t$ سرعة

$$t=0 \Rightarrow s(t)=36$$

المحفظة المتجهة اللحظية بالأمتار بعد t ثانية من سقوطها.

(a) أوجد دالة موقع المحفظة $s(t)$ بعد t ثانية من سقوطها.

$$s(t) = \int v(t) dt = \int -10t dt = -\frac{10t^2}{2} = -5t^2 + C$$

$$t=0 \Rightarrow s(t)=36 \Rightarrow -5(0)^2 + C = 36 \Rightarrow C=36$$

$$\Rightarrow \boxed{s(t) = -5t^2 + 36}$$

(b) أوجد الزمن الذي تستغرقه المحفظة حتى تصل إلى سطح الأرض. $t=? \leftarrow s(t)=0$

$$\begin{array}{l|l|l} -5t^2 + 36 = 0 & t^2 = \frac{36}{5} & t = \sqrt{\frac{36}{5}} \\ t^2 = \frac{-36}{-5} & t = \pm \sqrt{\frac{36}{5}} & = \boxed{2.68} \text{ ثانية} \end{array}$$

لـ سالب مرفوض لأنه زمن



نُصُول على اللزمة بدون

النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل

مفهوم أساسي

إذا كانت $F(x)$ مشتقة عكسية للدالة المتصلة $f(x)$ ، فإن

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

ويمكن التعبير عن الطرف الأيمن من هذه العبارة بالرمز $F(x) \Big|_a^b$.

من نتائج النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل أنها ربطت بين التكاملات والمشتقات، فالتكامل هو عملية إيجاد مشتقة عكسية، في حين أن الاشتقاق هو عملية إيجاد مشتقات. لذا فإن عمليتي التكامل والاشتقاق هما عمليتان عكسيتان، ويمكننا استعمال النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل لحساب التكاملات المحددة دون الحاجة إلى استعمال النهايات.

المساحة تحت المنحنى

استخدم النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل لحساب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى كل دالة مما يأتي والمحور x على الفترة المعطاة:

$$y = 4x^3 \text{ (a) على الفترة } [1, 3] \text{ أي } \int_1^3 4x^3 dx$$

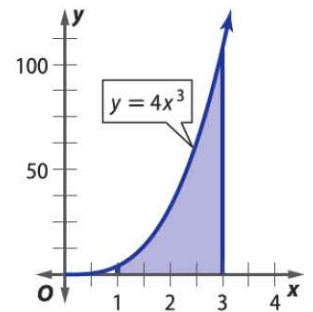
$$\int_1^3 4x^3 dx = \frac{4x^4}{4} \Big|_1^3 = x^4 \Big|_1^3$$

$$= (3)^4 - (1)^4$$

$$= 81 - 1$$

$$= \boxed{80}$$

تبلغ المساحة تحت المنحنى في الفترة $[1, 3]$ = 80 وحدة مربعة



$$y = -x^2 + 4x + 6 \text{ (b) على الفترة } [0, 4] \text{ أي } \int_0^4 (-x^2 + 4x + 6) dx$$

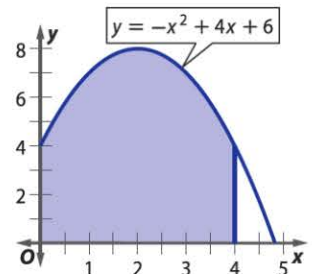
$$\int_0^4 (-x^2 + 4x + 6) dx = \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{4x^2}{2} + 6x \right) \Big|_0^4$$

$$= \left(-\frac{(4)^3}{3} + \frac{4(4)^2}{2} + 6(4) \right) - \left(-\frac{(0)^3}{3} + \frac{4(0)^2}{2} + 6(0) \right)$$

$$= \frac{104}{3} - \text{صفر}$$

$$= \frac{104}{3} = \boxed{34\frac{2}{3}}$$

تبلغ المساحة تحت المنحنى في الفترة $[0, 4]$ = $34\frac{2}{3}$ وحدة مربعة





استخدم النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل لحساب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى كل دالة مما يلي والمحور x على الفترة المعطاة:

$$\int_2^5 3x^2 dx$$

$$= \int_2^5 3x^2 dx$$

$$= \frac{3x^3}{3} \Big|_2^5$$

$$= x^3 \Big|_2^5$$

$$= (5)^3 - (2)^3$$

$$= 125 - 8$$

$$= \boxed{117}$$

$$\int_1^2 (16x^3 - 6x^2) dx$$

$$\int_1^2 (16x^3 - 6x^2) dx$$

$$= \frac{16x^4}{4} - \frac{6x^3}{3} \Big|_1^2$$

$$= 4x^4 - 2x^3 \Big|_1^2$$

$$= (4(2)^4 - 2(2)^3) - (4(1)^4 - 2(1)^3)$$

$$= 48 - 2$$

$$= \boxed{46}$$



ضغط [هنا](#) للحصول على اللزمة بدون

قبل حساب التكامل حدّ ما إذا كان محدّدًا أو غير محدّد.

جد قيمة كل تكامل مما يلي.

$$\int (9x - x^3) dx$$

$$= \frac{9x^2}{2} - \frac{x^4}{4} + C$$

غير محدود

$$\int_2^3 (9x - x^3) dx$$

$$= \frac{9x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \Big|_2^3$$

$$= \left(\frac{9(3)^2}{2} - \frac{(3)^4}{4} \right) - \left(\frac{9(2)^2}{2} - \frac{(2)^4}{4} \right)$$

$$= \frac{81}{2} - 14 = \boxed{6\frac{1}{2}}$$

محدود

$$\int (6x^2 + 8x - 3) dx$$

$$= \frac{6x^3}{3} + \frac{8x^2}{2} - 3x + C$$

$$= 2x^3 + 4x^2 - 3x + C$$

غير محدود

$$\int_1^3 (-x^4 + 8x^3 - 24x^2 + 30x - 4) dx$$

$$= -\frac{x^5}{5} + \frac{8x^4}{4} - \frac{24x^3}{3} + \frac{30x^2}{2} - 4x \Big|_1^3$$

$$= -\frac{1}{5}x^5 + 2x^4 - 8x^3 + 15x^2 - 4x \Big|_1^3$$

$$= \left(-\frac{1}{5}(3)^5 + 2(3)^4 - 8(3)^3 + 15(3)^2 - 4(3) \right) - \left(-\frac{1}{5}(1)^5 + 2(1)^4 - 8(1)^3 + 15(1)^2 - 4(1) \right)$$

$$= \frac{102}{5} - \frac{24}{5} = 15\frac{3}{5} = \boxed{15.6}$$

محدود



لاحظ أن التكامل غير المحدد يُعطي المشتقة العكسية، في حين لا يُعطي التكامل المحدد المشتقة العكسية بصورة صريحة، بل هو الفرق بين قيمتي المشتقة العكسية عند الحدين الأعلى والأدنى. أي أن التكامل غير المحدد يعطي دالة المشتقة العكسية، ويمكن استعمالها لإيجاد مساحة المنطقة تحت منحنى الدالة بين أي حدين أعلى وأدنى؛ ليصبح التكامل عندها محدداً.

التكاملات المحدودة

يُعطى الشغل اللازم لشد نابض ما مسافة 0.5 m من موضعه الطبيعي بالتكامل $\int_0^{0.5} 360x \, dx$

ما قيمة الشغل اللازم لشد النابض مقيسًا بوحدة الجول؟

$$\begin{aligned} \int_0^{0.5} 360x \, dx &= 180(0.5)^2 - 180(0)^2 \\ &= 45 \end{aligned}$$

الشغل المطلوب = 45 جول

يُعطى الشغل اللازم لشد نابض ما مسافة 0.7 m من موضعه الطبيعي بالتكامل $\int_0^{0.7} 476x \, dx$

ما قيمة الشغل اللازم لشد النابض مقيسًا بوحدة الجول؟

$$\begin{aligned} \int_0^{0.7} 476x \, dx &= 238(0.7)^2 - 238(0)^2 \\ &= 116.62 \end{aligned}$$

الشغل المطلوب = 116.62 J

يُعطى الشغل اللازم لشد نابض ما مسافة 1.4 m من موضعه الطبيعي بالتكامل $\int_0^{1.4} 512x \, dx$

ما قيمة الشغل اللازم لشد النابض مقيسًا بوحدة الجول؟

$$\begin{aligned} \int_0^{1.4} 512x \, dx &= 256(1.4)^2 - 256(0)^2 \\ &= 501.76 \end{aligned}$$

الشغل المطلوب = 501.76 J