

الدرس 2.2 مفهوم النهايات

إذا كانت $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ أوجد قيمة $f(2) =$ لاحظ أنه لا يمكننا معرفة أي شيء عن قيمة هذه الدالة عن $x = 2$ ، تفيدنا النهايات في دراسة سلوك الدالة بالقرب من هذه النقطة

سوف ندرس إيجاد قيم النهايات بالجداول - النهايات أحادية الطرف - النهايات غير الموجودة - تحديد النهايات بيانياً - النهايات بالتحليل

الحالات التي لا تتفق فيها النهايات أحادية الطرف - نهاية تصف حركة رمية بيسبول

x	$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$
1.9	3.9
1.99	3.99
1.999	3.999
1.9999	3.9999

x	$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$
2.1	4.1
2.01	4.01
2.001	4.001
2.0001	4.0001

المثال 2.1 إيجاد قيمة النهايات

أوجد قيمة $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ حلل فرق مربعين

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{(x - 2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2)$$

$$= 2 + 2 = 4$$

نعوض $x = 2$

$$x^2 - 4 = x^2 - 2^2 = (x - 2)(x + 2)$$

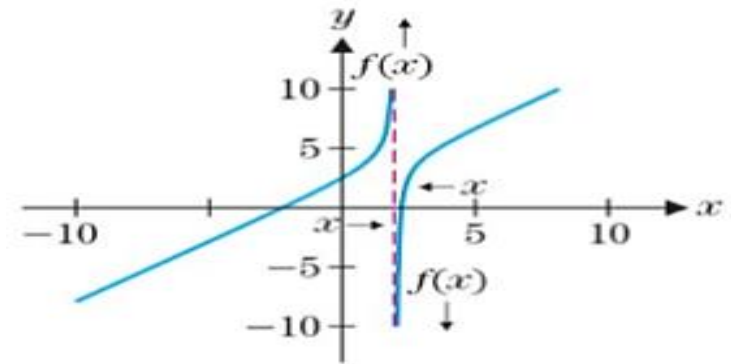
x	$g(x) = \frac{x^2 - 5}{x - 2}$
1.9	13.9
1.99	103.99
1.999	1003.999
1.9999	10,003.9999

x	$g(x) = \frac{x^2 - 5}{x - 2}$
2.1	-5.9
2.01	-95.99
2.001	-995.999
2.0001	-9995.9999

($\frac{0}{0}$) عدم تعيين

المثال 2.2 النهايات غير الموجودة

أوجد قيمة $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5}{x - 2}$



التمرين الأول : استخدم الدليل العددي (الجدول) أو البياني لتخمين القيم لكل نهاية ، و إذا أمكن استخدم التحليل إلى العوامل للتحقق من صحة تخمينك

تقويض مباشر

بالتحليل " فرق مربعين "

عدم تعيين

$$1. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

$$\frac{0^2 - 1}{0 - 1} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 1 + 1 = 2$$

SAIF ALDEEN	

SAIF ALDEEN

SAIF ALDEEN	

SAIF ALDEEN

2. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + x}{x^2 - x - 2}$ $\left(\frac{0}{0}\right)$ عدم تعيين

$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x(x+1)}{(x-2)(x+1)}$ خطا بسط وإلغاء

$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x}{x-2} = \frac{-1}{-1-2} = \boxed{\frac{1}{3}}$

3. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-4}$ $\left(\frac{0}{0}\right)$ عدم تعيين

$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)}{(x-2)(x+2)}$

$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x+2}$

$= \boxed{\frac{1}{4}}$

4. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2}{x^2+2x-3}$ $\left(\frac{0}{0}\right)$

$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2}{(x+2)(x-1)}$ (x-1)^2 = (x-1)(x-1)

$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)}{(x+2)} = \frac{1-1}{1+2} = 0$

5. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x-9}{x^2-5x+6}$ $\left(\frac{0}{0}\right)$

$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3(x-3)}{(x-3)(x-2)}$

$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3}{x-2} = \frac{3}{3-2} = 3$

6. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2+x}{x^2+2x}$ $\left(\frac{0}{0}\right)$

$= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(2+x)}{x(x+2)}$

$= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{x} = \boxed{-\frac{1}{2}}$

توجد النهايات اذا وفقط اذا كانت النهايتين أحاديتي الطرف موجودتين ومتساويتين. أي إن.

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L \text{ اذا وفقط اذا } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

(7) استخدم التمثيل البياني لتحديد كل نهاية (إذا كانت موجودة) أو اذكر عدم وجودها في كل مما يلي

(a) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 2$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ م.غ

(d) $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)$

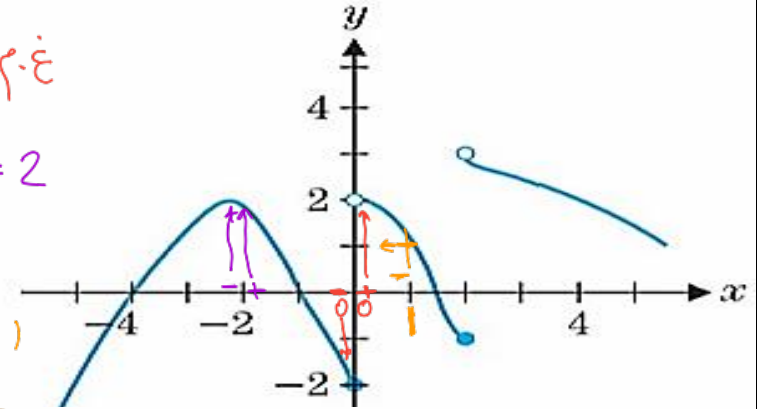
(e) $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = 2$

(f) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 2$

(g) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

(h) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$

عندما نكون لهالة متصلة
النهاية = قيمة الدالة.



8)

فتصلة
x=1

(a) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$

(b) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$

(c) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$

(d) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -1$

(e) $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = 2$

(f) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

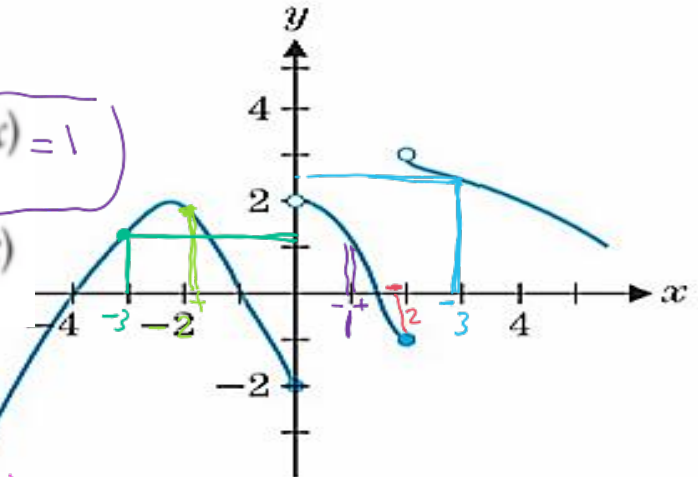
(g) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 2.5$

(h) $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = 1.25$

غير موجود

قفزة

$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -1$
 $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 3$



SAIF ALDEEN

فتصلة
x=3

SAIF ALDEEN

9. ارسم التمثيل البياني لـ

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & x < 2 \\ x^2, & x \geq 2 \end{cases}$$

وحدد كل نهاية فيما يلي:

(a) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 4$

(b) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 4$

(c) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$

(d) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$

(e) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 9$

f) $f(2) = 4$

(g) $f(1) = 2$

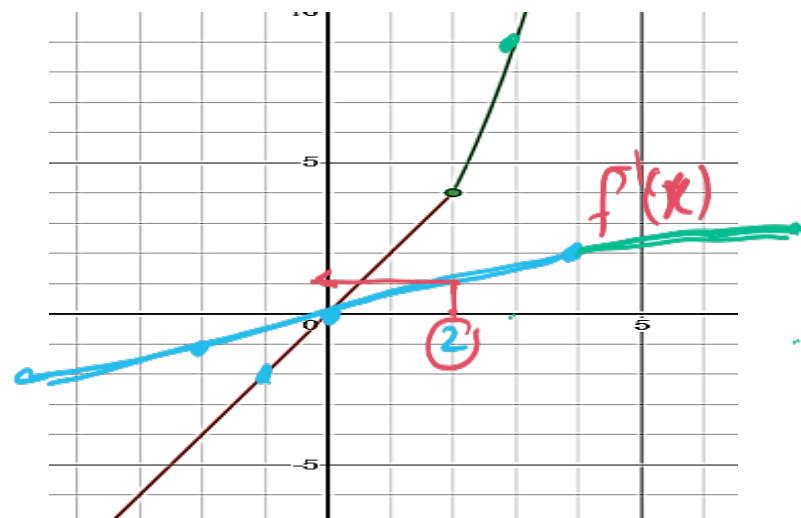
(h) $f(3) = 9$

(k) $\lim_{x \rightarrow 2} f^{-1}(x) = 1$

SAIF ALDEEN

SAIF ALDEEN

SAIF ALDEEN



$$f(2) = (2)^2 = 4$$

$$f(1) = 2(1) = 2$$

$$f(3) = 3^2 = 9$$

10. ارسم التمثيل البياني لـ

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ \sqrt{x+1} - 2, & x > 0 \end{cases}$$

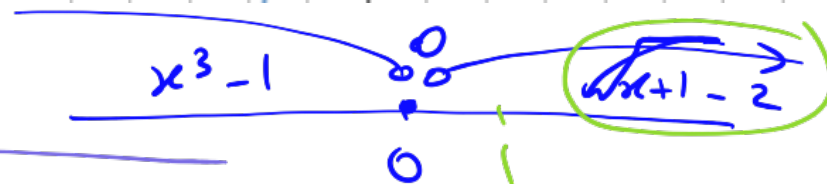
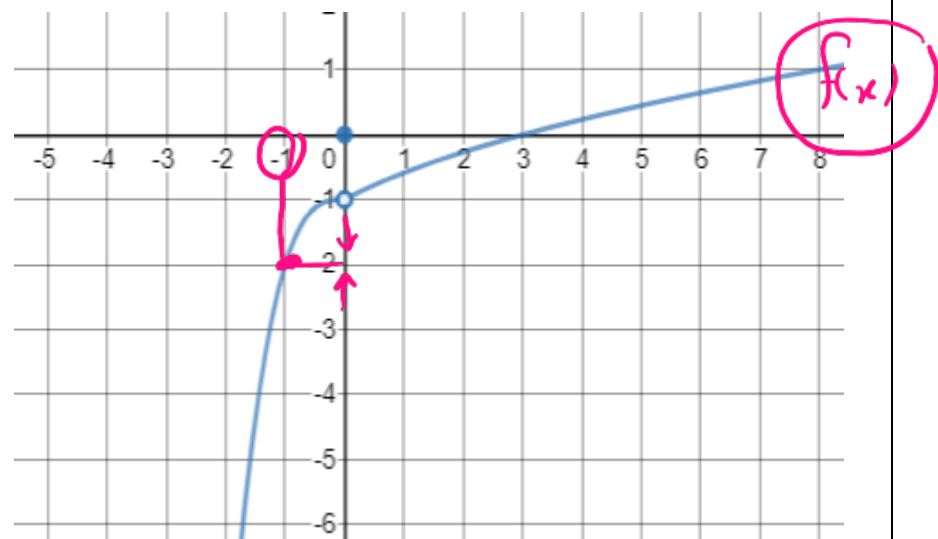
وحدد كل نهاية فيما يلي:

(a) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$ (b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -1$ (c) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1$

(d) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -2$ (e) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -0.6$

(f) $f(0) = 0$

(g) $f^{-1}(1) = 8$



$$\begin{aligned} \sqrt{1+1} - 2 \\ \sqrt{2} - 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(8) &= 1 & (8, 1) \\ f^{-1}(1) &= 8 & (1, 8) \end{aligned}$$

(h) $\lim_{x \rightarrow -1^-} f^{-1}(x) = 0$

(i) $\lim_{x \rightarrow -2} f^{-1}(x) = -1$

SAIF ALDEEN

SAIF ALDEEN

(11) لتكن $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$ ، اكمل الجدول ، ثم خمن النهايات التالية .

x	$f(x)$
0.5	
0.9	
0.99	
0.999	

x	$f(x)$
1.5	
1.1	
1.01	
1.001	

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$$

SAIF ALDEEN

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

SAIF ALDEEN

SAIF ALDEEN

أوجد النهاية جبرياً (اضرب بمرافق المقام)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} \quad \left(\frac{0}{0} \right)$$

SAIF ALDEEN

SAIF ALDEEN

نضرب بالمرافق

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x}+1) = \sqrt{1}+1 = 2$$

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

$$(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1) = (\sqrt{x})^2 - (1)^2 = x - 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

التمرين الرابع: استخدم الدليل العددي أو التمثيل البياني أو جبرياً لتصور إن كانت النهاية عند $x = a$ موجودة أم لا ، إذا كانت الإجابة لا ، اذكر ما يحدث عند $x = a$ بيانياً

$$13) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x}{\sin x} \left(\frac{0}{0} \right)$$

حل بسيط

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x+1)}{\sin x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(\frac{x}{\sin x} \right) (x+1) \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} (x+1)$$

$$= (1) (0+1) = 1$$

14

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x + 1} \left(\frac{0}{0} \right)$$

حل بسيط وجميل

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x-1} = \frac{2}{0}$$

حرف مربعين

$$x^2 - 1 = x^2 - 1^2 = (x-1)(x+1)$$

حل بسيط وجميل

الدرس 2.5

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1}{x-1} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+1}{x-1} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

غير موجودة

15)

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{-1/x^2}$$

الدليل العددي

16)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\ln x} \left(\frac{0}{0} \right)$$

الدليل العددي

$$= 1$$

Or
الدرس
2.5

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{x^2} \right) = -\frac{1}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = e^{-\infty} = \frac{1}{\infty} = \frac{1}{\infty} = 0$$

قاعدة لوبيتال
فصل 2

17) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$

18) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^{-1} x}{x}$

(لدليل إحصائي)

SAIF ALDEEN

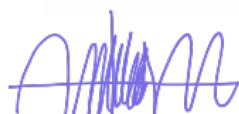
SAIF ALDEEN

= 1

SAIF ALDEEN

SAIF ALDEEN

19) $\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ غير موجود



SAIF ALDEEN

SAIF ALDEEN

نضرب بمرافق البسط
و مرافق المقام

20 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{10-x}-3} \left(\frac{0}{0}\right)$ دليل عددي = 1.5

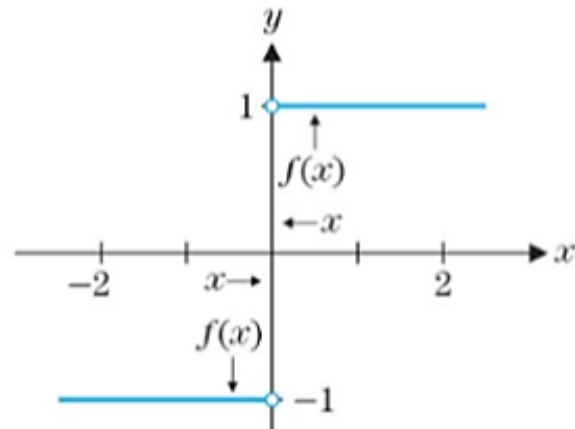
نضرب بمرافق المقام

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{5-x}-2)(\sqrt{5-x}+2)(\sqrt{10-x}+3)}{(\sqrt{10-x}-3)(\sqrt{10-x}+3)(\sqrt{5-x}+2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(5-x-4)(\sqrt{10-x}+3)}{(10-x-9)(\sqrt{5-x}+2)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-x)(\sqrt{10-x}+3)}{(1-x)(\sqrt{5-x}+2)} = \frac{\sqrt{10-1}+3}{\sqrt{5-1}+2} = \frac{3+3}{2+2} = 1.5$$

المثال 2.7 الحالات التي لا تتفق فيها النهايات أحادية الطرف

أوجد قيمة $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{|x|}$ 

$$|x| = 0 \quad x = 0$$

$$\text{or } |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

SAIF ALDEEN

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{-x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-1) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1$$

SAIF ALDEEN

النهاية من اليمين لا تساوي النهاية من اليسار لماذا؟ النهاية غير موجودة
 غ موجودة $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ، انقصال قفزة

$$21) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{|x-2|} \quad \left(\frac{0}{0}\right) \quad |x-2| = 0 \quad x = 2$$

صفر المطلق

$$\frac{-(x-2)}{-2^-} \quad \frac{(x-2)}{-2^+}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-2}{|x-2|}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x-2)}{-(x-2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^-} (-1) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-2}{|x-2|}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-2}{x-2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^+} (1) = 1$$

≠

$$22) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{|x+1|}{x^2-1} \quad \left(\frac{0}{0}\right) \quad |x+1| = 0 \quad x = -1$$

صفر المطلق

$$\frac{-(x+1)}{-1^-} \quad \frac{(x+1)}{-1^+}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{|x+1|}{x^2-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{-(x+1)}{(x-1)(x+1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{-1}{x-1} = \frac{-1}{-1-1} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{|x+1|}{x^2-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x+1}{(x-1)(x+1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{-1-1} = -\frac{1}{2}$$

النهاية غير موجودة

$$= \frac{1}{-1-1} = -\frac{1}{2}$$

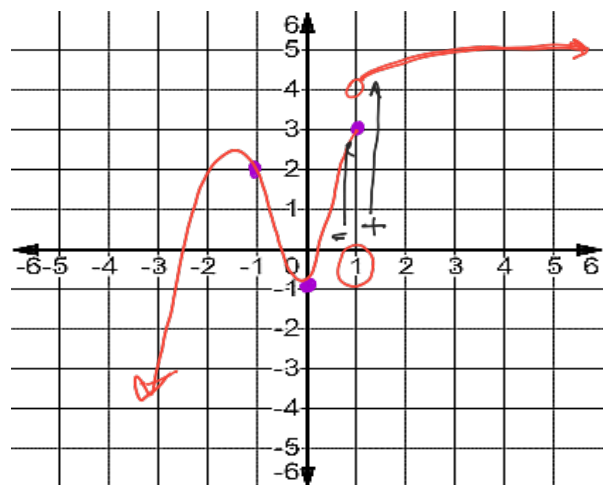
النهاية غير موجودة

التمرين الخامس: ارسم التمثيل البياني لدالة بالخواص المذكورة. التمارين 23-26

23

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ غير موجودة. و $f(-1) = 2, f(0) = -1, f(1) = 3$

$(-1, 2) (0, -1) (1, 3)$



SAIF ALDEEN

SAIF ALDEEN

SAIF ALDEEN

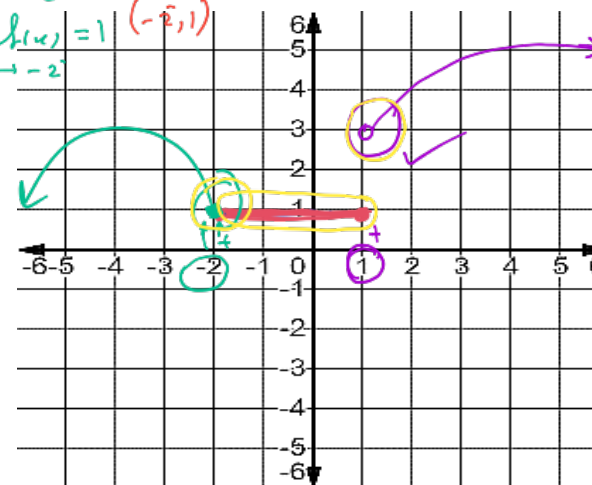
SAIF ALDEEN

24

$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 1$ و $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3$ $-2 \leq x \leq 1$ $f(x) = 1$

$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = 1$ $(-2^+, 1)$ $(1^+, 3)$

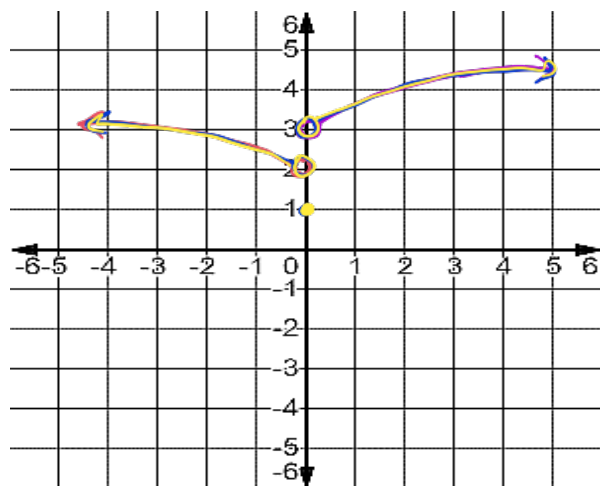
$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = 1$ $(-\infty, -2^-)$



IF ALDEEN

25) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 3$ و $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 2$, $f(0) = 1$

$(0^+, 3)$ $(0^-, 2)$ $(0, 1)$



SAIF ALDEEN

SAIF ALDEEN

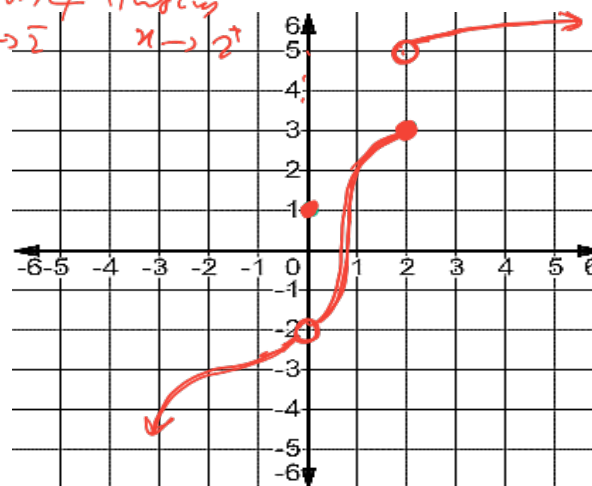
SAIF ALDEEN

SAIF ALDEEN

26) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ غير موجودة. $f(2) = 3$ $f(0) = 1$ $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -2$

$(2, 3)$ $(0, 1)$ $(0, -2)$

$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$



SAIF ALDEEN

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -2$

$(0^-, -2)$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -2$

$(0^+, -2)$

$$(31) \quad \text{قَدِّر عددِيًّا } \lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{1/x} \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0^-} (1+x)^{1/x}$$

SAIF ALDEEN

SAIF ALDEEN

SAIF ALDEEN

SAIF ALDEEN

$$(38) \quad \begin{aligned} &\text{تم رمي قذيفة كرة بمسكة مختلفة عن المذكورة} \\ &\text{في المثال 2.8 ويمكن تمثيل موقعها الأيمن /} \\ &\text{الأيسر بينما تعبر قاعدة الملعب من خلال} \\ &f(\omega) = \frac{0.625}{\omega^2} \left[1 - \sin \left(2.72\omega + \frac{\pi}{2} \right) \right] \\ &\text{استخدم الدليل} \\ &\text{البياني والعددي لتخمين } \lim_{\omega \rightarrow 0^+} f(\omega) \end{aligned}$$

SAIF ALDEEN

SAIF ALDEEN

SAIF ALDEEN

SAIF ALDEEN