حل تمارين الدرس (4-4) الدوال المتزايدة والمتناقصة

تمرين (1) ص 267 $y = x^3 - 3x + 2$ مطلوب تحديد فترات التزايد والتناقص/ قيم عظمى وصغرى محلية ورسم بيانيا

لنشتق وندرس إشارة المشتقة f'

$y' = 3x^2 - 3$

$y' = 0 \to 3x^2 - 3 = 0 \to 3x^2 = 3 \to x^2 = 1 \to x = 1 ,\ x = -1$

$f(1) = 1^3 - 3(1) + 2 = 0$ / $f(-1) = 4$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
إشارة $y' = 3x^2 - 3$		$+ + +$	0	$- -$	0	$+ + +$	
تزايد وتناقص y		متزايدة ↗	4	↘ متناقصة	0	متزايدة ↗	

تذكر عند دراسة إشارة حدودية تربيعية ax^2+bx+c وكان لها صفران x_1 و x_2 فإن الإشارة للحدودية بعكس إشارة a بين الجذرين ومثل إشارة a خارجهما

x		x_1		x_2	
ax^2+bx+c	مثل إشارة a	0	عكس إشارة a	0	مثل إشارة a

الدالة متناقصة في $(-1, 1)$

ومتزايدة في $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ أي $[x > 1$ أو $x < -1]$

وللدالة قيمة عظمى محلية $f(-1) = 4$

وقيمة صغرى محلية $f(1) = 0$

لاحظ: $f''(x) = 6x \leftarrow f''(-1) = 6(-1) = -6 < 0$

$f''(1) = 6(1) = 6 > 1$

يمكن الرسم باستخدام برامج الرسم

أو بنقاط مساعدة ظهرت: $(-1, 4)$ $(1, 0)$

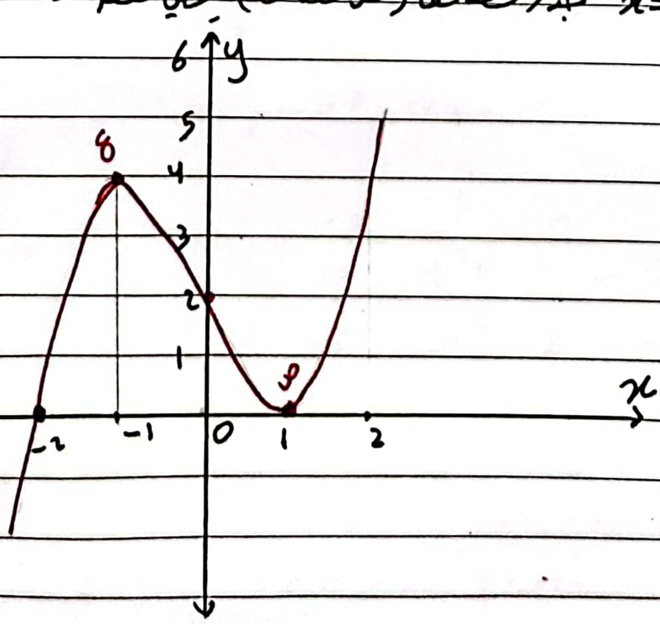
وقيمة عندما $x = 0 \leftarrow y = 2$ ظهرت $(0, 2)$ (التقاطع مع المحور y)

وعندما $y = 0 \leftarrow x^3 - 3x + 2 = 0 \to x = -2$ ، $x = 1$ (التقاطع مع المحور x)

(لاحظ $x = 1$ جذر مضاعف (حل مضاعف) يعطي نقطة تماس مع المحور x)

تذكر عندما $f' = 0$ عند $x = c$ و $f''(c) < 0$ فإن التقعر للأسفل ومنه قيمة عظمى محلية عند $x = c$

و $f''(c) > 0$ فإن التقعر للأعلى ومنه قيمة صغرى محلية عند $x = c$



تمرين ② ص 267 $y=x^3+2x^2+1$ مطلوب فترات التزايد والتناقص / قيم قصوى محلية / رسم بياني

تذكر ملاحظة إشارة ax^2+bx+c من التمرين السابق

$y' = 3x^2+4x$

$y'=0 \to 3x^2+4x=0$ → $x=0 \to f(0)=1$ ، $x=\frac{-4}{3} \approx -1.3$

$f(\frac{-4}{3}) = (\frac{-4}{3})^3 + 2(\frac{-4}{3})^2+1 = \frac{59}{27} \approx 2.2$

x	$-\infty$		$\frac{-4}{3}$		0		$+\infty$
إشارة $y'=3x^2+4x$	+	+	0	− − −	0	+	+
تزايد وتناقص y		↗ y متزايدة	2.2	↘ y متناقصة	1	↗ y متزايدة	

y متناقصة في $(\frac{-4}{3}, 0)$

ومتزايدة في $(-\infty, \frac{-4}{3}) \cup (0,+\infty)$ (أي عندما $x<-\frac{4}{3}$ أو $x>0$)

وللدالة قيمة عظمى محلية $f(\frac{-4}{3}) = \frac{59}{27}$

وقيمة صغرى محلية: $f(0)=1$

$y''=6x+4$: $f''(\frac{-4}{3})=-4<0$: لاحظ

ولاحظ : $f''(0)=4>0$

تقعر للأعلى

قيمة صغرى محلية $f(0)=1$

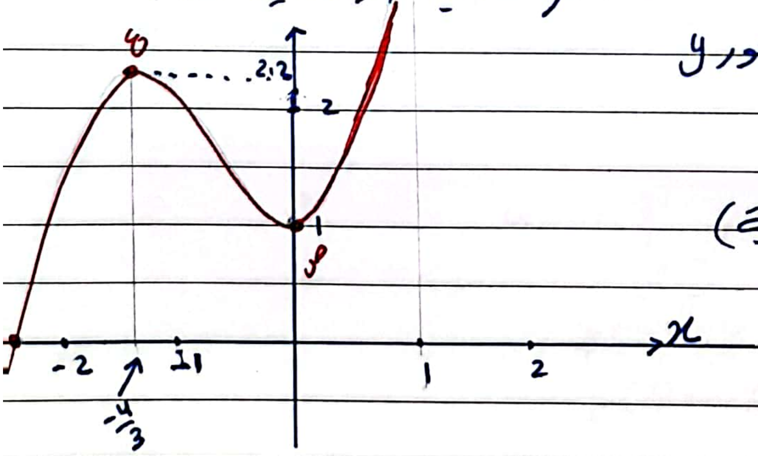
للرسم البياني ظهرت نقط $(\frac{-4}{3}, 2.2), (0,1)$

ويمكن إضافة نقط أخرى:

التقاطع مع المحور y $x=0 \to y=1$

والتقاطع مع المحور x تكون $y=0$

$x^3+2x^2+1=0$ → $x \approx -2.2$ (وبقية الحلول غير حقيقية)



تمرين ③ ص 267

$y=x^4-8x^2+1$

$y'=4x^3-16x$

$y'=0 \to 4x^3-16x=0$ → $x=2$ ، $x=-2$ ، $x=0$

x	$-\infty$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$+\infty$
إشارة y'	−	−6	0	+ 12 +	0	− −12	0	60 +	+
y	↘		−15	↗	1	↘	−15	↗	

لتحديد إشارة f' لاحظ وجود ثلاثة أصفار لها هي 0 ، ± 2 ضمن فترات x يمكن تبديل قيم x داخل هذه الفترات لتحديد إشارة f' وكالآتي:

$f'(-3)=-6$ سالب

$f'(-1)=12$ موجب

$f'(1)=-12$ سالب

$f'(3)=60$ موجب

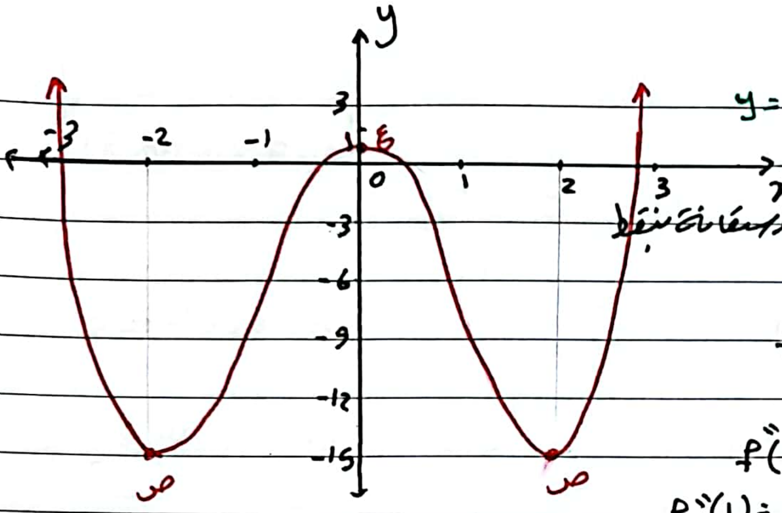
يتبع الرسم ←

y متناقصة في $(-\infty,-2) \cup (0,2)$

ومتزايدة في $(-2,0)\cup(2,+\infty)$

توجد قيم صغرى محلية هي $f(-2)=-15$ ، $f(2)=-15$ وعظمى محلية هي $f(0)=1$

تابع تمرين ③ ص 267 $y = x^4 - 8x^2 + 1$



الرسم البياني :

يمكن الرسم باستخدام برامج الرسم أو بالاستعانة بنقاط

لاحظ : $y'' = 12x^2 - 16$

$f''(-2) = 12(-2)^2 - 16 = 32 > 0 \Rightarrow$ ↑

وتوجد قيمة صغرى محلية

$f''(2) = 12(2)^2 - 16 = 32 > 0$ ↗

وأن : $f''(1) = 12(1)^2 - 16 = -4 < 0$

↓ وتوجد قيمة عظمى محلية

تمرين ④ ص 267 $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$

$y' = 3x^2 - 6x - 9$

$3x^2 - 6x - 9 = 0 \Rightarrow x = 3 ,\ x = -1$

$f(3) = 3^3 - 3(3)^2 - 9(3) + 1 = -26$

$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1) + 1 = 6$

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
إشارة $y' = 3x^2 - 6x - 9$		$+ \ +$	0	$- - -$	0	$+ \ + \ +$	
$y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$		y متزايدة ↗	6	y متناقصة ↘	-26	y متزايدة ↗	

y متزايدة في $(3, +\infty) \cup (-\infty, -1)$ [أي عندما $x < -1$ أو $x > 3$]

y متناقصة في $(-1, 3)$ [أي عندما : $-1 < x < 3$]

للدالة قيمة عظمى محلية : $f(-1) = 6$

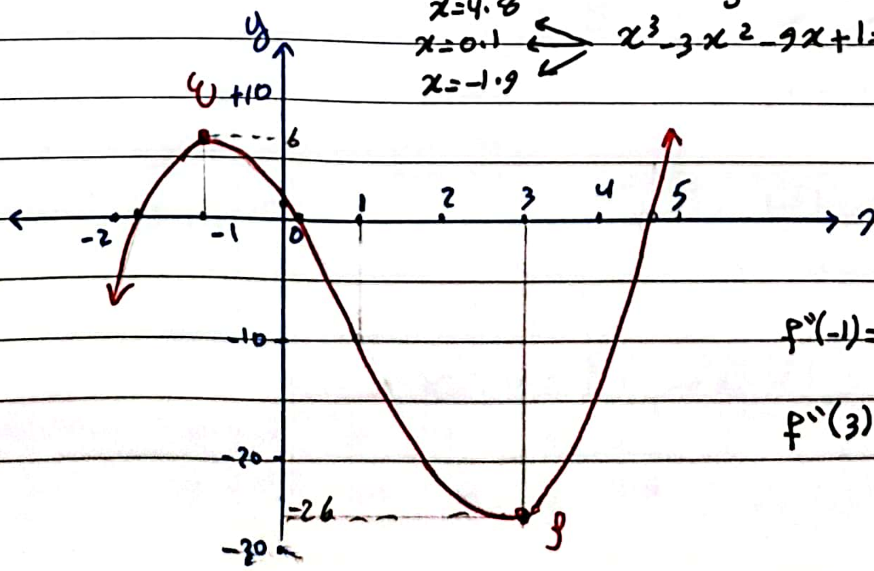
وقيمة صغرى محلية : $f(3) = -26$

للرسم يمكن استخدام برامج الرسم

أو بنقط مساعدة : ضرورية $(-1, 6)$ و $(3, -26)$

وعندما $x = 0 \leftarrow y = 1$

وعندما $y = 0$: $x^3 - 3x^2 - 9x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 4.8 ,\ x = 0.1 ,\ x = -1.9$



$y'' = 6x - 6$

لاحظ : $f''(-1) = -12 < 0$: ↓

$f''(3) = 12 > 0$ ↑ up

تمرين (5) ص 267 $y=(x+1)^{\frac{2}{3}}$ مطلوب فترات التزايد والتناقص / قيم قصوى / رسم

(مجال هذه الدالة R)

$$y' = \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3}(x+1)^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3(x+1)^{\frac{1}{3}}}$$

(ممكن كتابتها بالشكل $y' = \frac{2}{3\sqrt[3]{x+1}}$) معرف عندما $x \neq -1$

عندما $x=-1$ يكون y' غير معرف (ويكون $f(-1)=(-1+1)^{\frac{2}{3}}=0$ معرف)

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
إشارة y'	$- - -$	غير معرف	$+ + +$
y	متناقصة y ↘	0	↗ متزايدة y

لمعرفة إشارة y' نقوم بعد ممكن اختيار قيم موجبة أو سالبة

$f'(0)=\frac{2}{3\sqrt[3]{0+1}}=\frac{2}{3}$

$f'(-2)=\frac{2}{3\sqrt[3]{-2+1}}=-\frac{2}{3}$

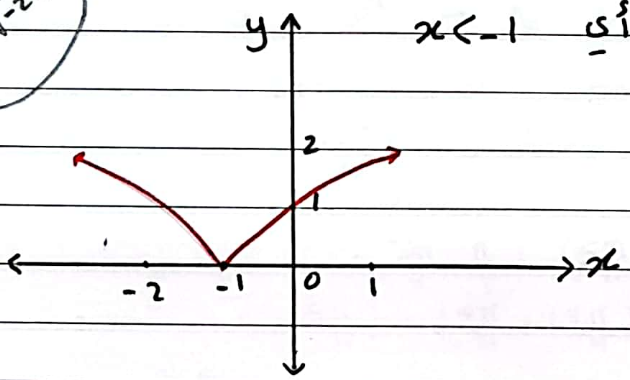
y متزايدة في $(-1,+\infty)$ أي $x>-1$

y متناقصة في $(-\infty,-1)$ أي $x<-1$

توجد قيمة صغرى محلية

$f(-1)=0$

لاحظ الرسم



تمرين (6) $y=(x-1)^{\frac{1}{3}}$ مجال هذه الدالة R

$y' = \frac{1}{3}(x-1)^{-\frac{2}{3}}$ ($= \frac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}}$: $x \neq 1$)

عندما $x=1$ يكون y' غير معرفة (ويكون : معرف $y=f(1)=(1-1)^{\frac{1}{3}}=0$)

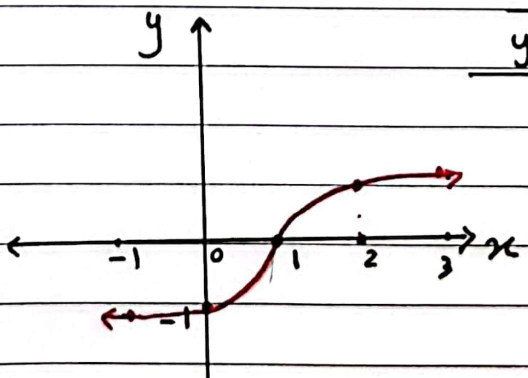
x	$-\infty$	1	$+\infty$
إشارة y'	$+ + +$	‖	$+ + +$
y	↗ ↗	0	↗ ↗

والدالة متزايدة لجميع قيم x

لاحظ الرسم :

عندما $x \to 1$ يقترب الميل رأسياً

ليس للدالة قيم قصوى



(ممكن الرسم باستخدام برامج الرسم) أو نختار نقط مساعدة

x	-1	0	1	2	3
y	-1.3	-1	0	1	1.3

تمرين ⑦ ص 267

المطلوب فترات التزايد والتناقص، القيم العظمى والصغرى المحلية والرسم $y = \sin x + \cos x$

$$y' = \cos x - \sin x$$

$$y' = 0 \Leftarrow \cos x - \sin x = 0$$

تمت مناقشة حل هذه المعادلة سابقاً ($\cos x = \sin x$

في تمرين 28 ص 258 وجدنا ضمن دورة واحدة $[0, 2\pi]$ حلين $\frac{\pi}{4}$ ، $\frac{5\pi}{4}$

بإضافة وطرح عدد صحيح من الدورات لهذه الحلول سنجد حلولاً أخرى غير منتهية

من هذه الحلول: $\frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{9\pi}{4}$

$\frac{5\pi}{4} - 2\pi = -\frac{3\pi}{4}$ و $\frac{5\pi}{4} + 2\pi = \frac{13\pi}{4}$

سنرتب الحلول المذكورة من الأصغر للأكبر: $\ldots, -\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}, \frac{13\pi}{4}, \ldots$

x	$-\infty$	$\ldots$	$-\frac{3\pi}{4}$		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{5\pi}{4}$		$\frac{9\pi}{4}$		$\frac{13\pi}{4}$	$\ldots$	$+\infty$
إشارة y'	..	$--$	0	+	0	$--$	0	$++$	0	$--$	0	$++$	...
y	...	↘	$-\sqrt{2}$	↗	$\sqrt{2}$	↘	$-\sqrt{2}$	↗	$\sqrt{2}$	↘	$-\sqrt{2}$	↗	....
			ص.م		ع.م		ص.م		ع.م		ص.م		

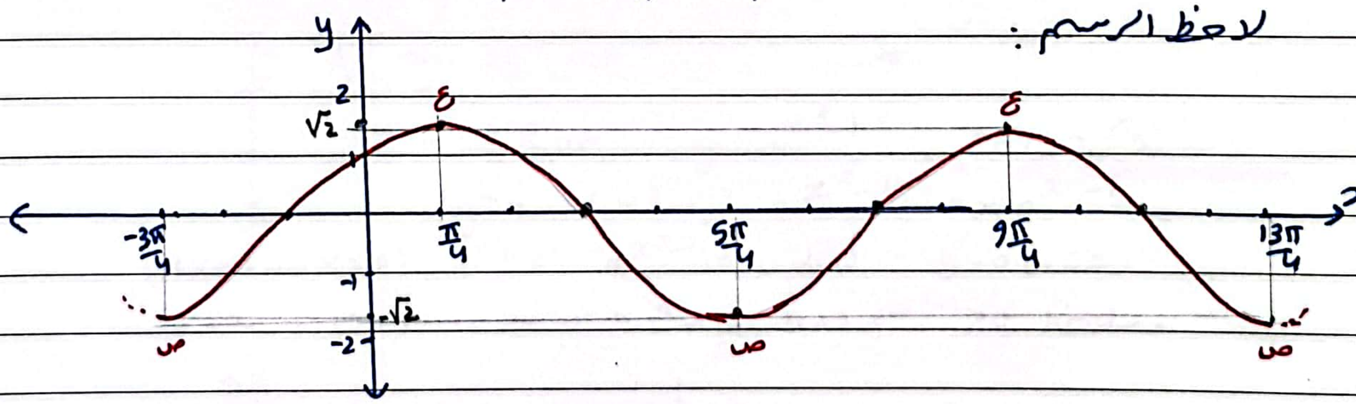
للدالة قيم صغرى محلية عند $\ldots, \frac{13\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}, \ldots$ (يضاف لكل منها $2n\pi$ ...)

وقيم عظمى محلية عند: $\ldots, \frac{9\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \ldots$ (" " " .

الدالة متزايدة في $\ldots (-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ و $(\frac{5\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}) \ldots$ " " " "

ومتناقصة في $(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4})$ و $(\frac{9\pi}{4}, \frac{13\pi}{4}) \ldots$ " " " "

لاحظ الرسم:



تمرين ⑧ ص267 $y = \sin^2 x$ مجالها R (ودورتها 2π)

$y' = 2\sin x . \cos x$

عندما $y' = 0$: إما: $\sin x = 0$ حلولها ضمن دورة $[0, 2\pi]$ هي: $x = 0$ و $x = \pi$ و $x = 2\pi$

أو: $\cos x = 0$ حلولها ضمن دورة: $x = 0$ و $x = 2\pi$

(ثم نجد حلول أخرى غير منتهية على مجال الدالة بإضافة $2n\pi$ للحلول السابقة)

وضمن دورة واحدة 4 حلول (زوايا ربعية)

وفي الربع الأول: $\sin x$ و $\cos x$ موجبتان ⇐ $y' > 0$ والدالة متزايدة

والثالث: $\sin x$ و $\cos x$ سالبتان ⇐ $y' > 0$ = =

وفي الربع الثاني: $\cos x$ سالب و $\sin x$ موجب ⇐ $y' < 0$ والدالة متناقصة

الرابع: $\cos x$ موجبة و $\sin x$ سالبة ⇐ $y' < 0$ والدالة متناقصة

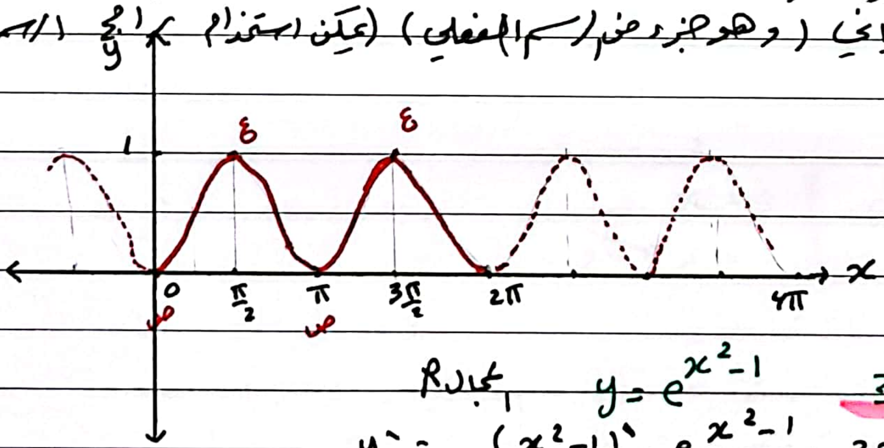
أي: الدالة متناقصة $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ أو $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ (وفي نفس الأرباع فيما بعد بإضافة $2n\pi$ دورات)

ومتزايدة: $0 < x < \frac{\pi}{2}$ أو $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$

ولها قيم عظمى محلية عند $\frac{\pi}{2}$ و $\frac{3\pi}{2}$ (وقيم أخرى بإضافة $2n\pi$)

وقيم صغرى محلية عند: 2π، π و 0 (وقيم أخرى بإضافة $2n\pi$)

لاحظ الرسم البياني (وهو جزء من الرسم الفعلي) (يمكن استخدام برامج الرسم أو نقط عديدة)

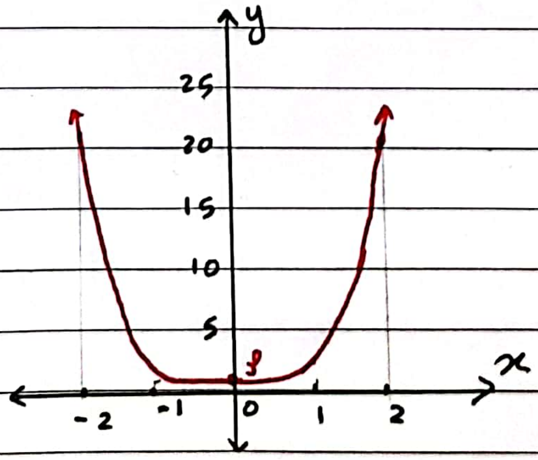


تمرين ⑨ ص267 $y = e^{x^2-1}$ المجال R

$y' = (x^2-1)' e^{x^2-1} = 2x e^{x^2-1}$

وعندما $y' = 0$ لا يكون $e^{x^2-1} = 0$ وإنما ($2x = 0 \rightarrow x = 0$)

وملاحظة $e^{x^2-1} > 0$ دوماً فإشارة y' حسب إشارة $2x$



x	$-\infty$	0	$+\infty$
إشارة y'	$- \ -$	0	$+ \ + \ +$
y	متناقصة في $x < 0$	$e^{-1} \simeq 0.4$	متزايدة في $x > 0$

للدالة قيمة صغرى محلية عند $x = 0$

لاحظ: $y'' = 2 . e^{x^2-1} + 2x(2x e^{x^2-1})$

$= 2e^{x^2-1}[1 + 2x^2] > 0$ دائماً

والقيمة صغرى محلية (عند $x = 0$) لاحظ الرسم باستخدام البرامج أو باختيار نقط

x	-2	-1	0	1
y	20.1	1	0.4	1

تمرين (10) ص 267

$y = \ln(x^2-1)$ الدالة معرفة عندما $x^2-1>0$

$x^2>1 \Rightarrow |x|>1$ ($x>1$ أو $x<-1$)

تذكر (a موجب)
$|x| \le a \Rightarrow -a \le x \le +a$
$|x| \ge a \Rightarrow x \ge a$ أو $x \le -a$

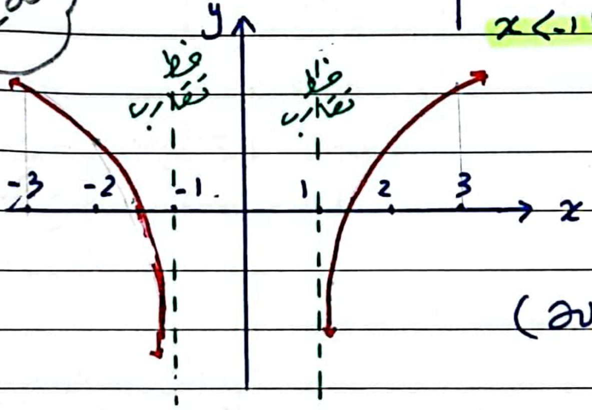
$y' = \dfrac{2x}{x^2-1}$ إشارة y' حسب إشارة البسط

(حتى المقام $\neq 0$) عندما البسط: ($2x=0 \Rightarrow x=0$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
إشارة y'	$- - -$		الدالة غير معرفة		$+ \ +$
y	y متناقصة عندما $x<-1$				y متزايدة عندما $x>1$

خط تقارب رأسي $x=-1$ ، خط تقارب رأسي $x=1$

تذكر: عندما $x \to \mp 1$
$(x^2-1) \to 0$
$\ln(x^2-1) \to -\infty$



لاحظ الرسم البياني:
(لا توجد قيم قصوى للدالة)

تمرين (11)

$y = x^4 + 4x^3 - 2$ المطلوب الأعداد الحرجة وتصنيفها (عظمى أو صغرى محلية أو غير ذلك)

$y' = 4x^3 + 12x^2$

$y' = 0 \Rightarrow 4x^3 + 12x^2 = 0$ → $x=-3$ أو $x=0$ } قيم حرجة

(يمكن ملاحظة أن $4x^2 \ge 0$) لاحظ $y' = 4x^2(x+3)$

وإشارة y' تتغير حسب إشارة العوض $x+3$)

أو من خلال تجربة قيم من y' عددية تجريبية تحدد إشارة y'

x	$-\infty$		-3		0		$+\infty$
إشارة y'		$- - -$	-41	$+ \ +$	-2	$+ \ +$	
y		$\searrow$	115	$\nearrow$	-2	$\nearrow$	

y متناقصة في $(-\infty, -3)$

y متزايدة في: $(-3, 0) \cup (0, +\infty)$

عند $x=-3$ توجد قيمة صغرى محلية ($f(-3) = 115$)

لا توجد قيمة قصوى (لا عظمى ولا صغرى عند $x=0$)

تمرين (12) ص 267 $y = x^5 - 5x^2 + 1$ المطلوب القيم الحرجة وتحديد القيم العظمى والصغرى المحلية إن وجدت

$y' = 5x^4 - 10x$

$y' = 0 \Rightarrow 5x^4 - 10x = 0 \Rightarrow 5x(x^3 - 2) = 0$

قيم حرجة: إما: $5x = 0 \Rightarrow x = 0$

أو: $x^3 - 2 = 0 \Rightarrow x^3 = 2 \Rightarrow x = \sqrt[3]{2} \approx 1.26$

x	$-\infty$		0		$\sqrt[3]{2}$		$+\infty$
إشارة y'		$+ +$	0	$- -$	0	$+ +$	
y		$\nearrow$ y متزايدة عندما $x < 0$	1	$\searrow$ y متناقصة عندما $0 < x < \sqrt[3]{2}$	-2.1	$\nearrow$ y متزايدة عندما $x > \sqrt[3]{2}$	

توجد قيمة صغرى محلية $f(\sqrt[3]{2}) = -2.1$ حيث تتغير إشارة y' عندها من سالب إلى موجب

وقيمة عظمى محلية $f(0) = 1$ حيث تتغير إشارة y' عندها من موجب إلى سالب

تمرين (13) $y = x \cdot e^{-2x}$ مجالها R

(مشتقة ضرب) $y' = 1(e^{-2x}) + x(-2 \cdot e^{-2x})$

$= e^{-2x}(1 - 2x)$

(موجب: $e^{-2x} \neq 0$) فعندما: $y' = 0$ سيكون ($1 - 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$:حرجة)

x	$-\infty$		$+\frac{1}{2}$		$+\infty$
إشارة y'		$+ + +$	0	$- - -$	
y		$\nearrow$ y متزايدة: $x < \frac{1}{2}$	0.18	$\searrow$ y متناقصة: $x > \frac{1}{2}$	

للدالة قيمة عظمى محلية ($f(\frac{1}{2}) \approx 0.18$)

تمرين (14) $y = x^2 \cdot e^{-x}$ المجال R

(مشتقة ضرب) $y' = 2x \cdot e^{-x} + x^2(-1 \cdot e^{-x})$

$= e^{-x}(2x - x^2)$

(لا وجود لـ $e^{-x} \neq 0$) عندما $y' = 0$ سيكون ($2x - x^2 = 0$ $\to x = 0$ حرجة، $\to x = 2$ حرجة)

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
إشارة y'		$- - -$	0	$+ + +$	0	$- - -$	
y		$\searrow$ الدالة متناقصة $x < 0$	0	$\nearrow$ الدالة متزايدة $0 < x < 2$	0.54	$\searrow$ الدالة متناقصة $x > 2$	

توجد قيمة صغرى محلية $f(0) = 0$ / وقيمة عظمى محلية $f(2) \approx 0.54$

تمرين (15) ص 267 $\quad y=\tan^{-1}(x^2)$ $\quad$ مجال هذه الدالة R

تذكر $\frac{d}{dx}\tan^{-1}(f(x)) = \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}$

$$y' = \frac{(x^2)'}{1+(x^2)^2} = \frac{2x}{1+x^4}$$

لاحظ $1+x^4 \neq 0$

وعندما $y'=0$ سيكون: $(2x=0 \Rightarrow x=0$ حرجة$)$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
إشارة y'	$- - -$	0	$+ + +$
y	الدالة متناقصة $x<0$	0	الدالة متزايدة $x>0$

للدالة قيمة صغرى محلية $(\ f(0)=0\ )$

تمرين (16) $\quad y=\sin^{-1}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)$

تذكر $\frac{d}{dx}\left(\sin^{-1}(f(x))\right) = \frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}$

مناقشة غير مطلوبة للطالب

لاحظ مجال هذه الدالة: $-1 \leqslant 1-\frac{1}{x^2} \leqslant 1$

$-2 \leqslant -\frac{1}{x^2} \leqslant 0 \quad) \times -1$

$2 \geqslant \frac{1}{x^2} \geqslant 0 \Rightarrow \frac{1}{x^2} \geqslant 2 \Rightarrow x^2 \geqslant \frac{1}{2} \Rightarrow x \geqslant \frac{1}{2},\ x \leqslant -\frac{1}{2}$

$$y' = \frac{0-\left(\frac{0-2x}{x^4}\right)}{\sqrt{1-\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^2}} = \frac{\frac{2}{x^3}}{\sqrt{1-\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^2}}$$

$$= \frac{2}{x^3\sqrt{1-\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^2}}$$

(البسط $2 \neq$ أبداً)

y' غير معرفة عند $x=0$ (ولاحظ $x=0$ ليست من مجال الدالة)

$y' \neq 0$ لا توجد نقط حرجة للدالة

تمرين (17) $\quad y=\frac{x}{1+x^3}$ $\quad$ الدالة معرفة عندما $1+x^3 \neq 0$ أي عندما $x \neq -1$)

$$y' = \frac{1(1+x^3)-x(3x^2)}{(1+x^3)^2} \quad \text{مشتقة قسمة}$$

$$= \frac{1+x^3-3x^3}{(1+x^3)^2} = \frac{1-2x^3}{(1+x^3)^2}$$

(لاحظ المقام موجب دوماً)

وإشارة y' حسب إشارة البسط: $1-2x^3=0 \Rightarrow 1=2x^3$

$x^3=\frac{1}{2} \Rightarrow x=\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ (قيمة حرجة)

x	$-\infty$	-1		$\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$	$+\infty$
إشارة y'	$+ +$	غير معرفة	$+ +$	0	$- - -$
y	$\nearrow$	غير معرفة	$\nearrow$	0.51	$\searrow$
	y متزايدة		ومتزايدة		y متناقصة
	$(-\infty,-1) \cup$		$(-1,\sqrt[3]{\frac{1}{2}})$		$(\sqrt[3]{\frac{1}{2}},+\infty)$

للدالة قيمة عظمى محلية عند $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ (وهي 0.51 تقريباً)

تمرين (18) ص 267 $y=\frac{x}{1+x^4}$ دالة مجالها R مطلوب القيم الحرجة والقصوى المحلية

$$y' = \frac{1(1+x^4) - x(0+4x^3)}{(1+x^4)^2}$$

$$= \frac{1+x^4-4x^4}{(1+x^4)^2} = \frac{1-3x^4}{(1+x^4)^2}$$ (لاحظ المقام $\neq 0$ وموجب)

$y'=0 \Rightarrow 1-3x^4=0 \Rightarrow 1=3x^4 \Rightarrow x^4=\frac{1}{3} \Rightarrow x=\sqrt[4]{\frac{1}{3}}$ حرجة ≈ 0.76

x	$-\infty$		$\sqrt[4]{\frac{1}{3}}$		$+\infty$
إشارة y'		+ +	0	− − −	
y		متزايدة عندما $x<\sqrt[4]{\frac{1}{3}}$	0.57	متناقصة عندما $x>\sqrt[4]{\frac{1}{3}}$	

للدالة قيمة عظمى محلية عند $\sqrt[4]{\frac{1}{3}}$ (تقريباً، $f(\sqrt[4]{\frac{1}{3}}) \approx 0.57$)

تمرين (19) $y=\sqrt{x^3+3x^2}$ (لاحظ: $\sqrt{x^3+3x^2}=\sqrt{x^2(x+3)}$)

(نعلم $x^2 \geq 0$ ∴ يجب أن يكون $x+3 \geq 0$)

المجال: $x \geq -3$

$$y' = \frac{(x^3+3x^2)'}{2\sqrt{x^3+3x^2}} = \frac{3x^2+6x}{2\sqrt{x^3+3x^2}}$$ المقام موجب

عندما $y'=0$ سيكون: $3x^2+6x=0$ → $x=-2$ ، $x=0$ قيم حرجة

x	$-\infty$		-3		-2		0		$+\infty$
إشارة y'		غير معرفة		+ +	0	− −	0	+ +	
y		غير معرفة	0	↗	2	↘	0	↗	

للدالة قيمة عظمى محلية عند $x=-2$ (وهي: $f(-2)=2$)

وقيمة صغرى محلية عند $x=0$ (وهي $f(0)=0$)

وصغرى عند $x=-3$ (حيث $f(-3)=0$) هكذا في دليل المعلم E

تمرين (20) $y=x^{\frac{4}{3}}+4x^{\frac{1}{3}}$ دالة مجالها R

$$y' = \frac{4}{3}(x)^{\frac{1}{3}} + 4\left(\frac{1}{3}\right)(x)^{-\frac{2}{3}}$$

$$= \frac{4}{3}(x)^{\frac{1}{3}} + \frac{4}{3}(x)^{-\frac{2}{3}} = \frac{4}{3}\left(\frac{x^{\frac{2}{3}} \times x^{\frac{1}{3}}}{1 \times x^{\frac{2}{3}}} + \frac{1}{(x)^{\frac{2}{3}}}\right)$$

(سنوحد المقامات داخل القوس)

$$y' = \frac{4}{3}\left(\frac{(x)^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}}+1}{(x)^{\frac{2}{3}}}\right) = \frac{4}{3}\left(\frac{x^1+1}{(x)^{\frac{2}{3}}}\right)$$

المقام $\neq 0$ قد يكون موجب أو سالب

$y'=0$ عندما $x+1=0 \Leftarrow x=-1$ قيمة حرجة

تابع حل تمرين (20) ص 267   وجدنا $y = x^{\frac{4}{3}} + 4x^{\frac{1}{3}}$ / $y' = \frac{4(x+1)}{3(x)^{\frac{2}{3}}}$

(لاحظ y' غير معرف عندما $x=0$ حرجة)

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
إشارة y'		$- - -$	0	$+ +$	غير معرفة	$+ +$	
y		$\searrow$	-3	$\nearrow$	0	$\nearrow$	

الدالة متناقصة عندما $x<-1$ ومتزايدة $(-1,0)\cup(0,+\infty)$

توجد قيمة صغرى محلية عند -1 (تتغير إشارة المشتقة من سالب إلى موجب)

ولا توجد قيمة قصوى عند $x=0$ ($f(-1) = -3$)

تمرين (21) ص 267 $y = x^4 - 15x^3 - 2x^2 + 40x - 2$ المطلوب القيم القصوى تقريباً ثم التمثيل البياني وسلوك الدالة العام والمحلي

$$y' = 4x^3 - 45x^2 - 4x + 40$$

عندما $y'=0$ (يمكن الحل باستخدام الآلة الحاسبة)

حرجة $x_1 \approx 11.2599$, $x_2 \approx 0.9374$, $x_3 \approx -0.9474$

x	$-\infty$		-0.9474		0.9374		11.2599		$+\infty$
إشارة y'		$- - -$	0	$+ + +$	0	$- - -$	0	$+ + +$	
y	$+\infty$	متناقصة y	-28.1	متزايدة y	22.1	متناقصة y	-5144	متزايدة y	$+\infty$
		عندما $x<-0.9474$		$-0.947<x<0.937$		$0.937<x<11.2599$		$x>11.2599$	

قيمة صغرى محلية $f(-0.9474) \approx -28.1$

قيمة عظمى محلية $f(0.9374) \approx 22.1$

قيمة صغرى محلية $f(11.2599) \approx -5144$

الرسم في الصفحة التالية للتمرينين

تمرين (22) $y = x^4 - 16x^3 - 0.1x^2 + 0.5x$

$$y' = 4x^3 - 48x^2 - 0.2x + 0.5$$

$y' = 0$ بالآلة نجد $x_3 = -0.1037$, $x_2 = 0.1004$, $x_1 = 12.003$ حرجة

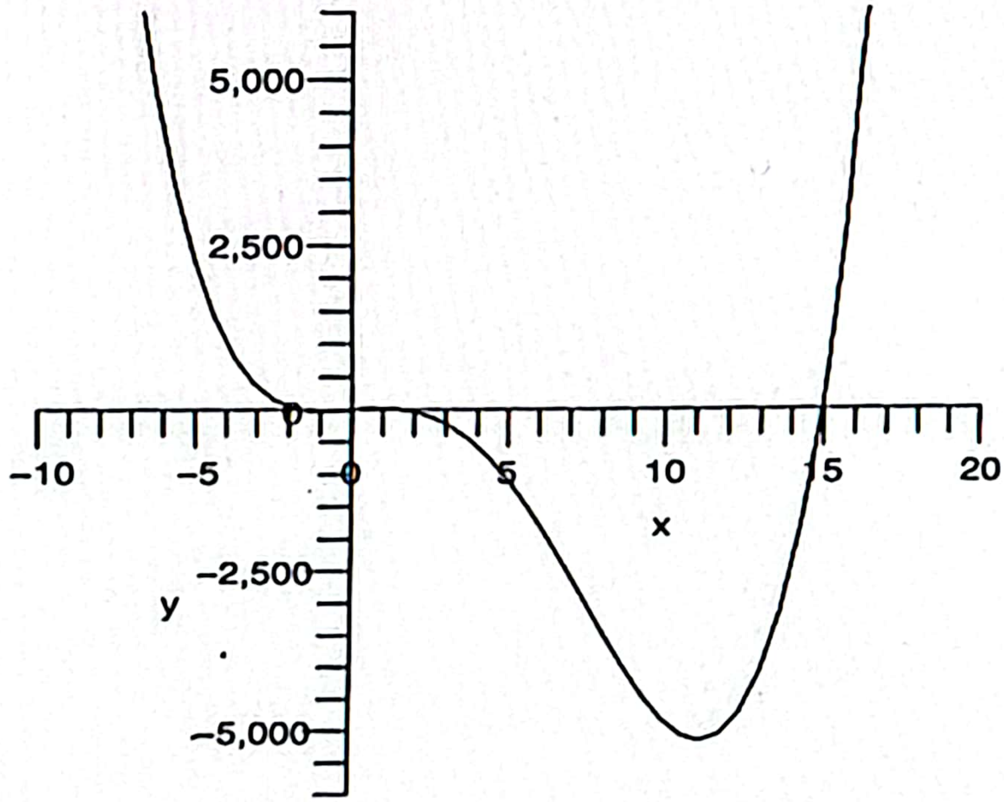
x	$-\infty$		-0.1037		0.1004		12.003		$+\infty$
y'		$- - -$	0	$+ +$	0	$- - -$	0	$+ + +$	
y		متناقصة y		متزايدة y		متناقصة y		متزايدة y	
		عندما $x<-0.1037$		$-0.1037<x<0.1004$		$0.1004<x<12.003$		$x>12.003$	

قيمة صغرى محلية $f(-0.1037)$

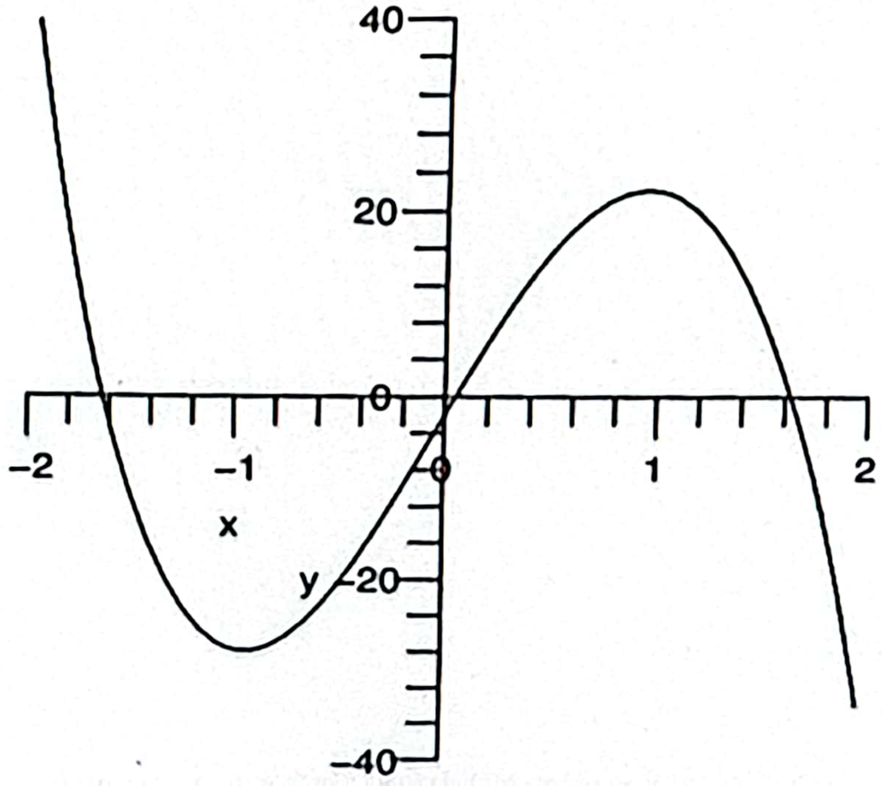
قيمة عظمى محلية $f(0.1004)$

قيمة صغرى محلية $f(12.003)$

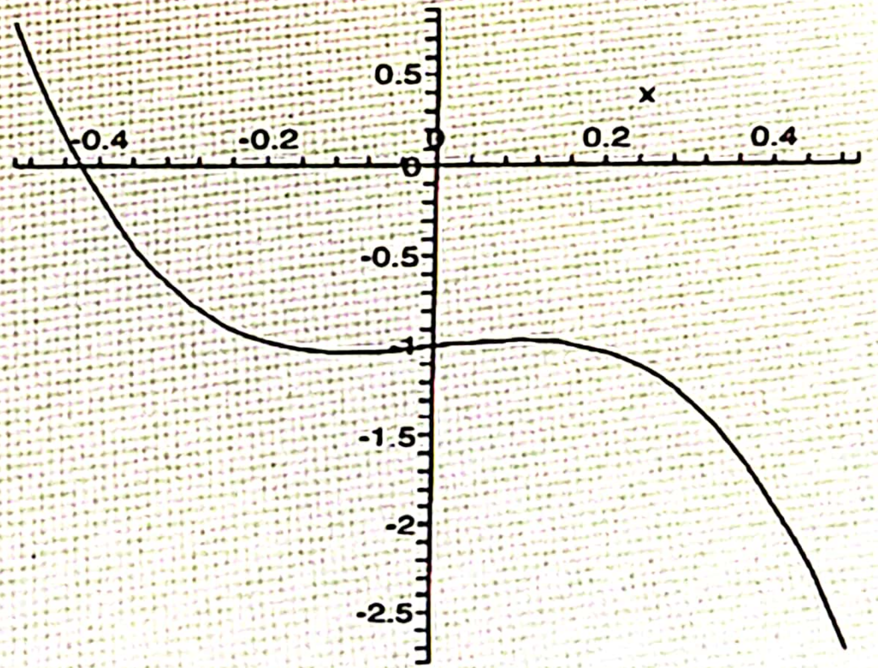
21



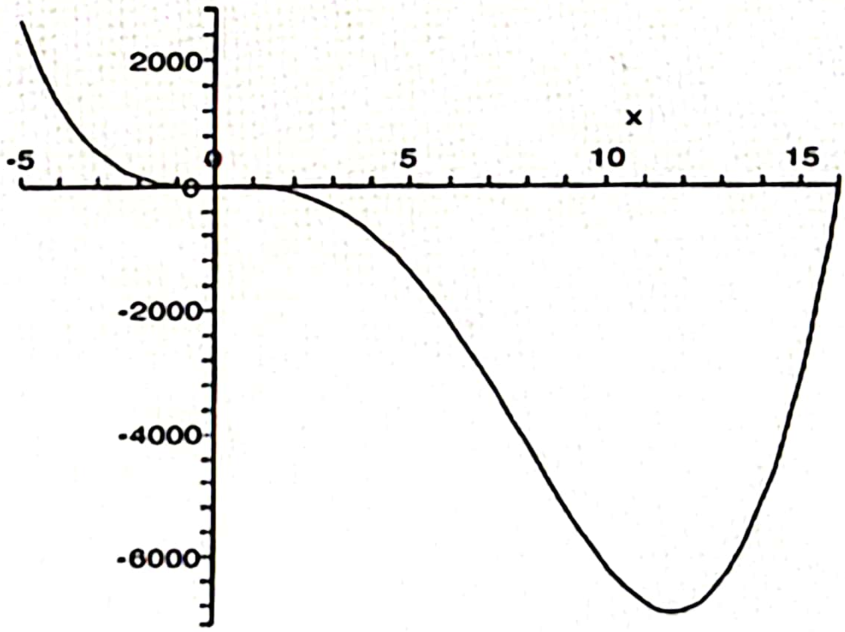
Global behavior of the function looks like



22



Global behavior of the function looks like



تمرين (23) ص 267 $y=x^5-200x^3+605x-2$ المجال R

$y' = 5x^4 - 600x^2 + 605$

وعندما $y'=0$ سيكون الحل لمعادلة تربيعية بالآلة MODE 5 3 فيعطينا

$x^2=Z \Rightarrow 5Z^2-600Z-605=0 \rightarrow (Z_1=118.98 \,,\, Z_2=1.0169)$

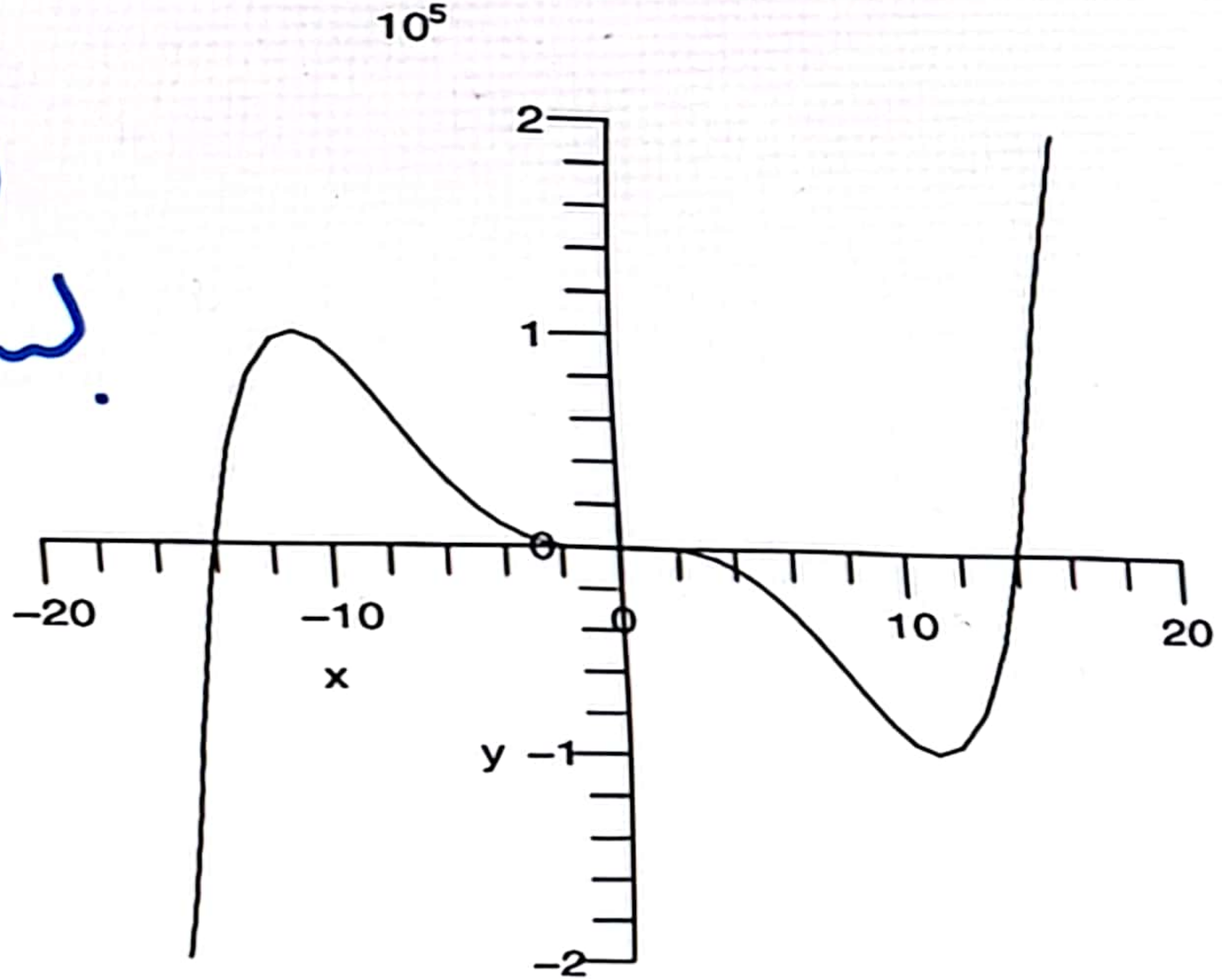
نجذر للحصول على قيم x (لكل قيمة لـ Z جذران ± قيم x)

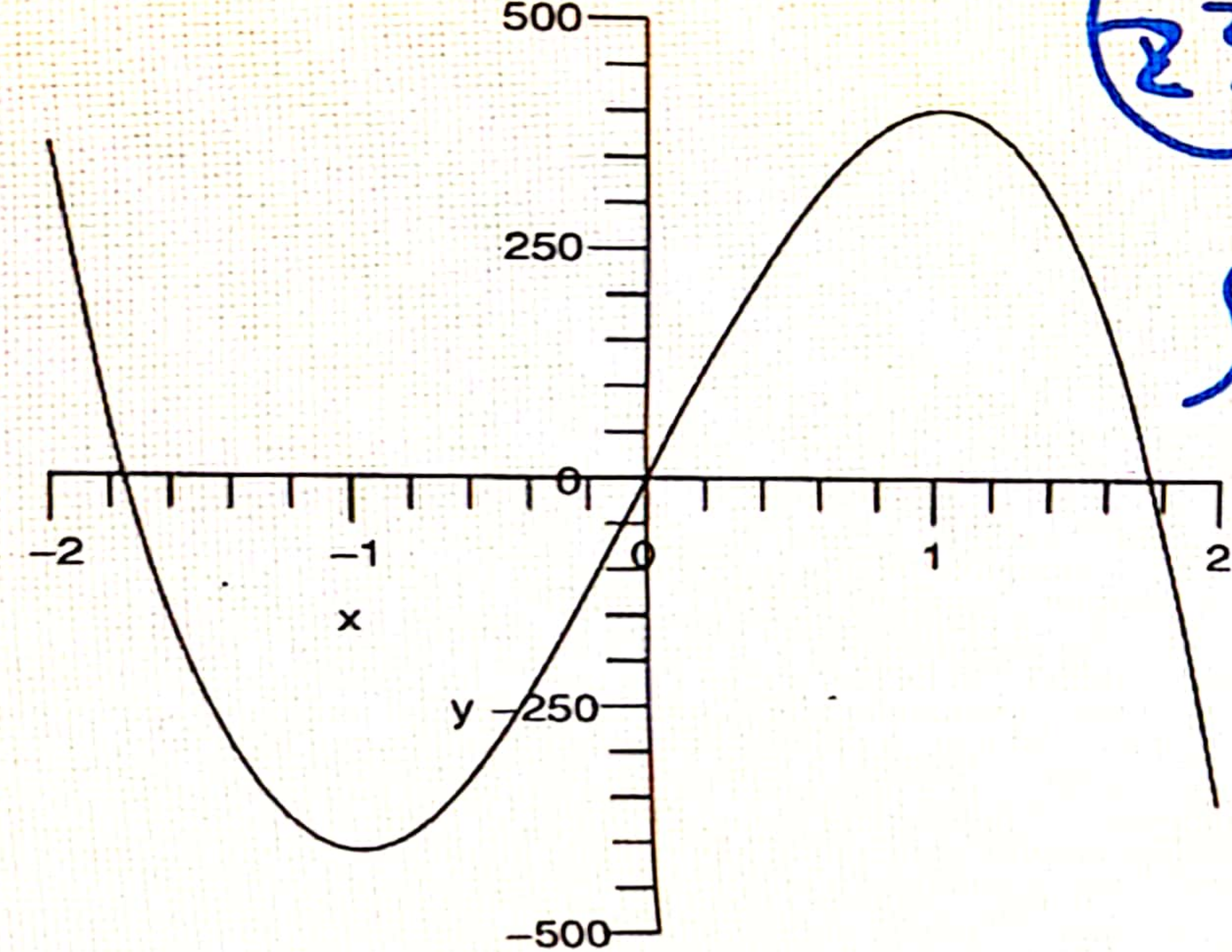
(الحرجة) $x_1=+\sqrt{118.98}\approx 10.908 \,,\, x_2=-10.908 \,,\, x_3=+\sqrt{1.0169}=+1.0084 \,,\, x_4=-1.0084$

x	$-\infty$		-10.908		-1.0084		1.0084		10.908		$+\infty$
y'		+ +	0	− − −	0	+ +	0	− −	0	+ + +	
y		y متزايدة عندما		y متناقصة		y متزايدة		y متناقصة		y متزايدة	
		$x<-10.908$		$-10.908<x<-1.0084$		$-1.008<x<1.0084$		$1.008<x<10.908$		$x>10.908$	

نهاية عظمى محلية	صغرى محلية	عظمى محلية	صغرى محلية
$f(-10.908)$ محلية	$f(-1.0084)$	$f(1.0084)$	$f(10.908)$

23





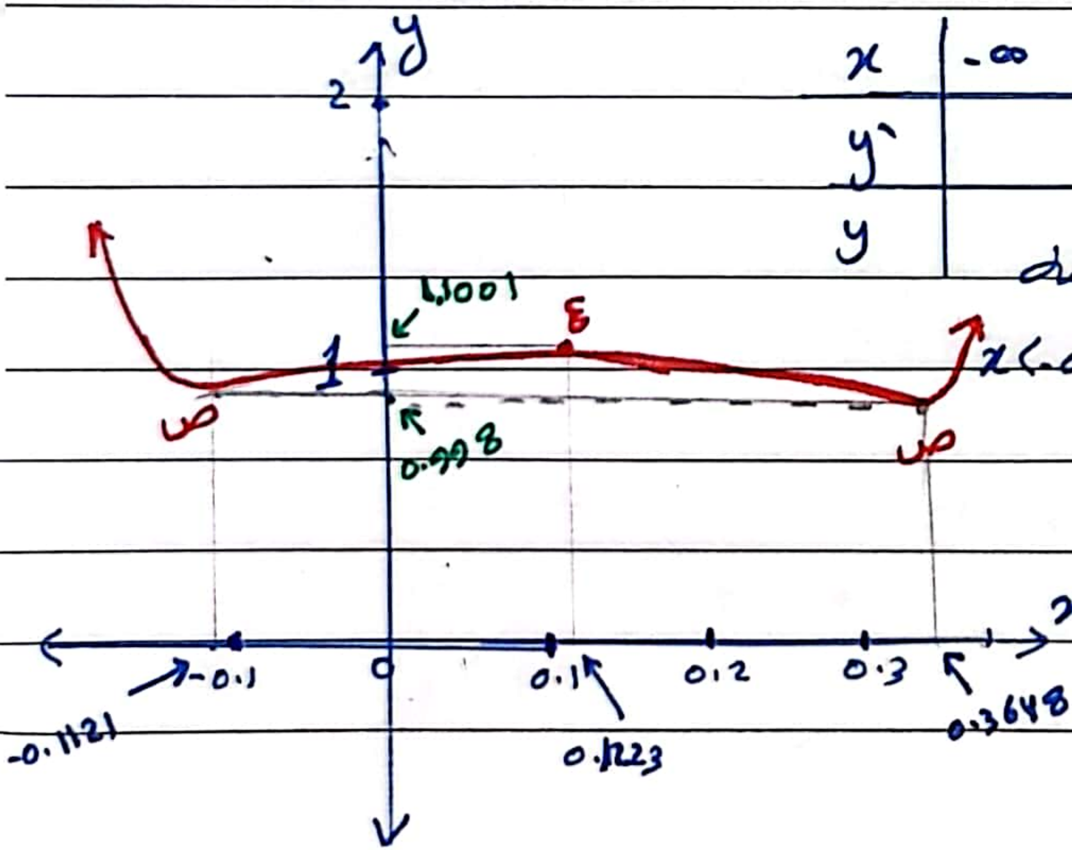
23

تكبير

المجال R $\qquad$ عرّف $y = x^4 - 0.5x^3 - 0.02x^2 + 0.02x + 1$ (24)

$$y' = 4x^3 - 1.5x^2 - 0.04x + 0.02$$

$y' = 0$ بالآلة الحلول : $x_1 = 0.3648$ / $x_2 \approx 0.1223$ / $x_3 \approx -0.1121$



x	$-\infty$		-0.1121		0.1223		0.3648		∞
y'		$- \; -$	0	$+ \; +$	0	$- \; -$	0	$+ \; +$	
y		y متناقصة		y متزايدة		y متناقصة		y متزايدة	
		عندما $x < -0.1121$		$-0.1121 < x < 0.1223$		$0.1223 < x < 0.364$		$x > 0.3648$	

صغرى محلية	عظمى محلية	صغرى محلية
$f(-0.1121)$	$f(0.1223)$	$f(0.3648)$
≈ 0.998	≈ 1.001	≈ 0.998

تمرين 25 ص 267 $y=(x^2+x+0.45)e^{-2x}$ المجال R

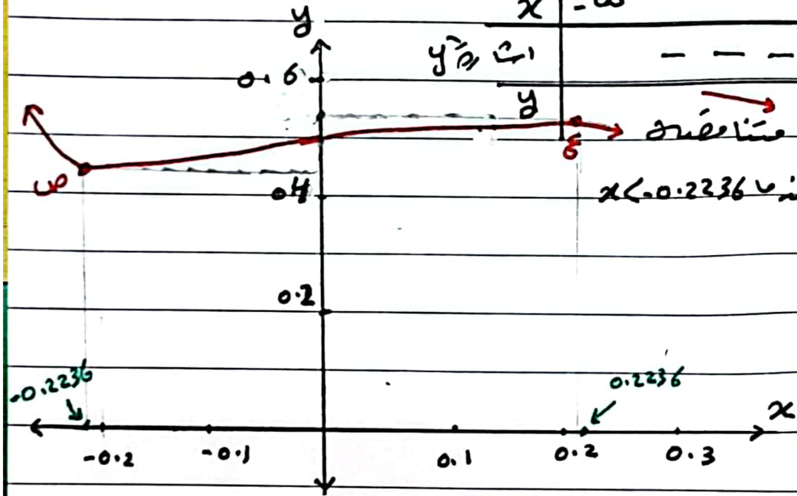
مشتقة ضرب $y'=(2x+1)e^{-2x}+(x^2+x+0.45)(-2e^{-2x})$

عامل مشترك $=e^{-2x}[\cancel{2x}+1-2x^2-\cancel{2x}-0.9]$

$=e^{-2x}(-2x^2+0.1)$

(e^{-2x} موجب دوماً $\neq 0$) وعندما $y'=0$ سيكون: $-2x^2+0.1=0$

بحل هذه المعادلة نستنتج: $x_1=0.2236$, $x_2=-0.2236$



x	$-\infty$		-0.2236		0.2236		$+\infty$
إشارة y'		− − −	0	+ +	0	− − −	
y		y متناقصة		y متزايدة		y متناقصة	
		عندما $x<-0.2236$		$-0.2236<x<0.2236$		$x>0.2236$	

صغرى محلية $f(-0.2236)\approx 0.4321$

عظمى محلية $f(0.2236)\approx 0.4627$

تمرين 26 $y=x^5 \cdot Ln(8x^2)$ مجال هذه الدالة R ماعدا $x=0$ (اللوغاريتم غير معرف عندها)

(مشتقة ضرب) $y'=5x^4Ln(8x^2)+x^5\left(\frac{16x}{8x^2}\right)$

$=5x^4 \cdot Ln(8x^2)+2x^4$

عامل مشترك $=x^4[5Ln(8x^2)+2]$

لاحظ x^4 موجب ولا يساوي الصفر

فعندما $y'=0$ سيكون: $5Ln(8x^2)+2=0$

$\Rightarrow Ln(8x^2)=\frac{-2}{5}=-0.4$

نحول العبارة أسية $8x^2=e^{-0.4} \Rightarrow x^2=\frac{e^{-0.4}}{8}$ بجذر $x=+0.2895$, $x=-0.2895$

المشتقة والدالة غير معرفة عند 0 (لكن y' سالب على كلا جانبي الصفر بشكل قريب)

وحسب الرسم (أو من مناقشة قيم في الجدول)

سنلاحظ: قيمة صغرى محلية $f(0.2895)\approx -0.0008$

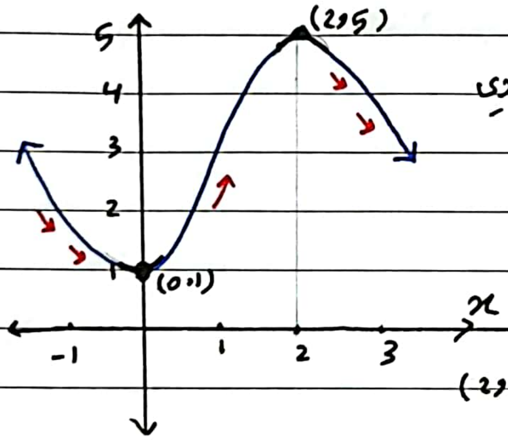
قيمة عظمى محلية $f(-0.2895)\approx 0.0008$

x	$-\infty$		-0.2895		0		0.2895		$+\infty$
y'		+ +	0	− −	‖	− −	0	+ + +	
y		y متزايدة	ع م	y متناقصة	‖	y متناقصة	ص م	y متزايدة	

تمرين 27 ص 267 المطلوب رسم بياني للدالة لها الخواص

$f(0)=1$ ، $f(2)=5$ يحدد نقطتين من الرسم: $(0,1)$ و $(2,5)$

x		0		2	
معطى إشارة f'	$f'(x)<0$		$f'(x)>0$		$f'(x)<0$
	$x<0$ ← f متناقصة		$0<x<2$ f متزايدة		$x>2$ f متناقصة
سلوك الدالة في الرسم		$(0,1)$ صغرى محلية ← أسفل وادي		$(2,5)$ عظمى محلية ← رأس جبل	



يصلح الرسم البياني المجاور

تمرين 28

$f(-1)=1$
$f(2)=5$ ⇐ نقطتان من الرسم $(-1,1)$ و $(2,5)$

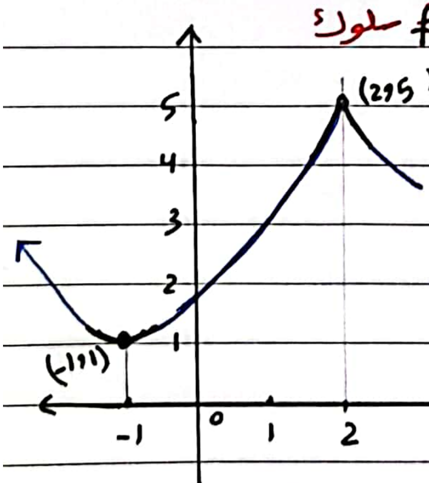
x		-1		2	
معطى إشارة f'	f' سالب −	0	f' موجب + +	غير موجودة	f' سالب − − −
سلوك f	f متناقصة		f متزايدة		f متناقصة

$(-1,1)$ توجد صغرى محلية

$(2,5)$ توجد قيمة عظمى محلية ولكن f' غير معروف

(الميل مختلف الإشارة على جانبي 2)

(الانحناء أو التقعر يتغير)



تمرين 29

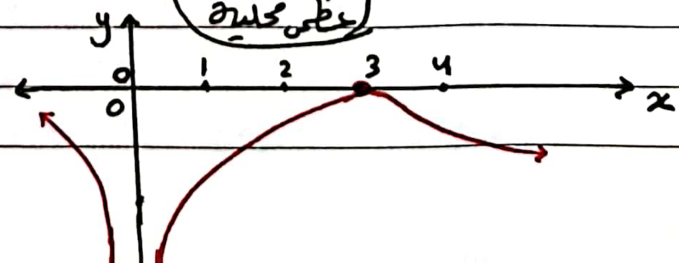
$f(3)=0$ نقطة $(3,0)$

x		0		3	
إشارة f'	f' سالب − −	غير موجودة	f' موجب + + +	0	f' سالب − −
f	f متناقصة	f غير موجودة عنده	f متزايدة	0	f متناقصة

عند $(3,0)$ عظمى محلية

عند $x=0$: الميل مختلف على جانبي 0، f' غير معروف

عند $x=0$: يوجد خط تقارب رأسي، f غير معروف



تمرين (30) ص 267 $f(1)=0$ نقطة $(1,0)$

$\lim_{x\to\infty} f(x)=2 \Leftarrow$ خط تقارب أفقي $y=2$ (عندما $x\to+\infty$ من اليمين)

$f'(1)=0 \Leftarrow$ ميل المماس عند نقطة $(1,0)$ يساوي صفر فهو مماس أفقي

(عند هذه النقطة قيمة عظمى محلية أو صغرى محلية)

وعلى خط: $x<1 \Leftarrow f'(x)<0$

$x>1 \Leftarrow f'(x)>0$

$f'(1)=0$

$\Leftarrow$ نعوض

x		1	
f'	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	......	$\nearrow$

يوجد قيمة صغرى محلية عند $f(1)=0$

تمرين (31) $f(-1)=f(2)=0$ نقطتان $(-1,0)$ $(2,0)$

يوجد خطأ في دليل المعلم

$f'(x)<0$ عندما $x<-1$ و $0<x<2$ (y متناقصة)

$f'(x)>0$ عندما $x>2$ (y متزايدة)

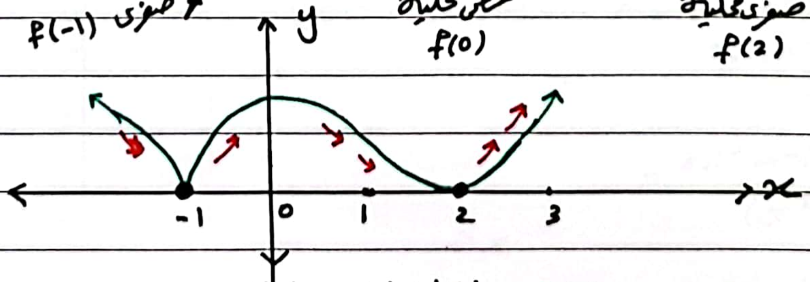
$f'(-1)$ غير موجودة : (الميل مختلف قبل -1 وبعد -1)

$f'(2)=0$: ميل المماس عند $x=2$ يساوي صفر (مماس أفقي عند $x=2$)

$f'(0)=0$: ميل المماس عند $x=0$ يساوي صفر (مماس أفقي عند $x=0$)

x		-1		0		2	
f'	$- - -$	غير موجودة	$+ + +$	0	$- - -$	0	$+ + +$
f	$\searrow \searrow$	0	$\nearrow$		$\searrow \searrow$	0	$\nearrow \nearrow$

صغرى $f(-1)$ — عظمى محلية $f(0)$ — صغرى محلية $f(2)$



تمرين (32) $f(0)=0$ و $f(3)=-1$ نقطتان $(3,-1)$ و $(0,0)$

$f'(x)<0$ لكل $x>3$ الدالة متناقصة : $f'(x)>0$ لكل $x<0$: متزايدة

$f'(3)=0$ ميل المماس عند $(3,-1)$ يساوي صفر (مماس أفقي)

$1<x<3$ ($f'(x)<0$) وكذلك: $0<x<1$ ($f'(x)>0$) متزايدة

$f'(0)=0$ ميل المماس عند $(0,0)$ يساوي صفر (مماس أفقي)

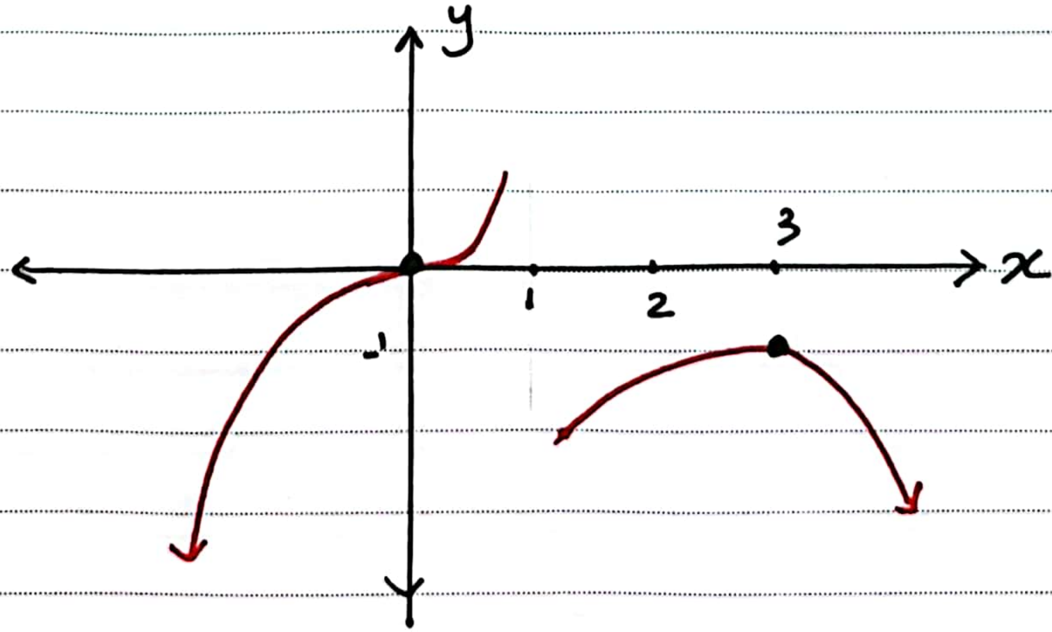
$f'(1)$ غير موجودة ، رغم أن الدالة متزايدة قبل $x=1$ وبعدها (انقطاع عندها)

x		0		1		3	
f'	+ +	0	+ +	غير معرف	+ ++	0	− −
f	↗	0	↗		↗	-1	↘
	f متزايدة	نقطة (0,0)	f متزايدة	انقطاع عند $x=1$	f متزايدة	نقطة (3,-1)	f متناقصة

الميل عند 0 أفقي (يتحول القاطع)

الميل قبل 1 مختلف عن الميل بعد 1

قمة عظمى محلية $f(3)=-1$



تمرين (33) ص 267 $y = \frac{x}{x^2-1}$ مطلوب: خطوط التقارب والقيم القصوى والرسم

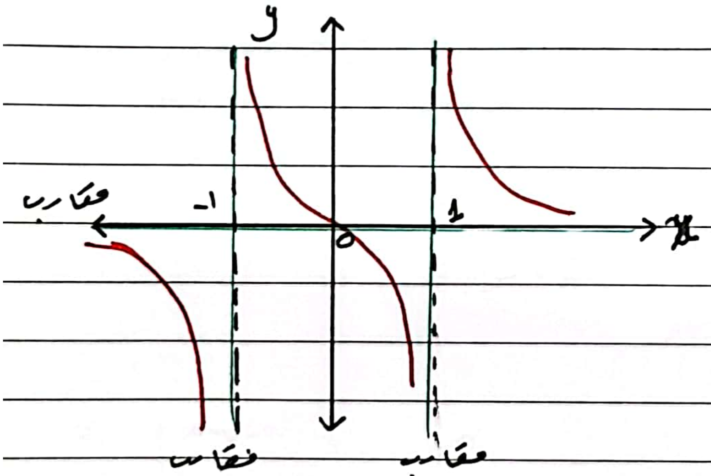
لاحظ أن الدالة معرفة عندما $x^2-1 \neq 0$ ($x \neq \mp 1$)

$\lim_{x \to -1} f(x) = +\infty$ (مقارب رأسي $x=-1$)

$\lim_{x \to 1} f(x) = -\infty$ (مقارب رأسي $x = 1$)

$$\lim_{x \to \mp\infty} f(x) = \lim_{x \to \mp\infty} \frac{x}{x^2-1} = \lim_{x \to \mp\infty} \frac{\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}} = \lim_{x \to \mp\infty} \frac{1}{x} = 0$$

(خط مقارب أفقي $y=0$)



$$y' = \frac{1(x^2-1) - x(2x)}{(x^2-1)^2}$$

$$= \frac{x^2-1-2x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{-x^2-1}{(x^2-1)^2}$$

ولكون $y'=0$ سيكون: $-x^2-1=0$ ليس لها حلول حقيقية

ولا توجد نقاط حرجة $y' \neq 0$

ولا توجد قيم قصوى للدالة (الرسم يوضح)

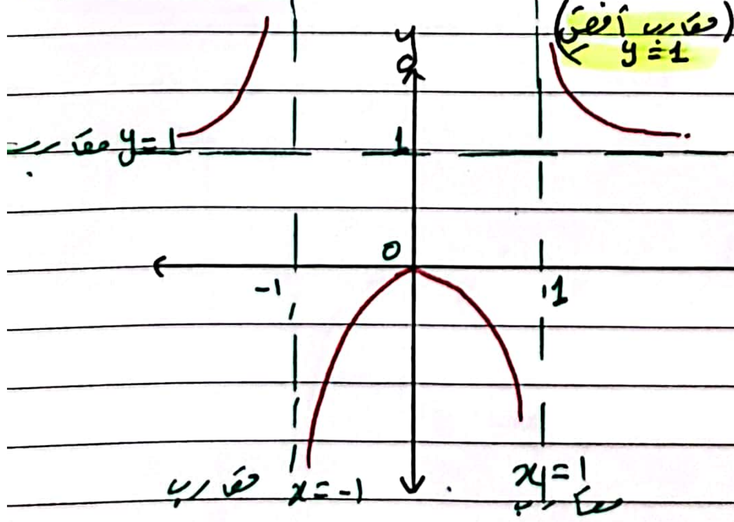
ولاحظ: $y' = -\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2}$

البسط $-(x^2+1)$ سالب دوماً
والمقام $(x^2-1)^2$ موجب دوماً

y' سالب دوماً
والدالة متناقصة دوماً

تمرين (34) $y = \frac{x^2}{x^2-1}$ الدالة معرفة عندما $x \neq \mp 1$ (وسيكون $x = \mp 1$ مقاربان رأسيان)

وعندما $x \to \mp\infty$ فإن $y \to 1$ (مقارب أفقي $y=1$)



$$y' = \frac{2x(x^2-1) - x^2(2x)}{(x^2-1)^2}$$

$$= \frac{\cancel{2x^3} - 2x - \cancel{2x^3}}{(x^2-1)^2}$$

$$= \frac{-2x}{(x^2-1)^2}$$

$y'=0 \Leftarrow -2x=0 \Leftarrow x=0$ قيمة حرجة

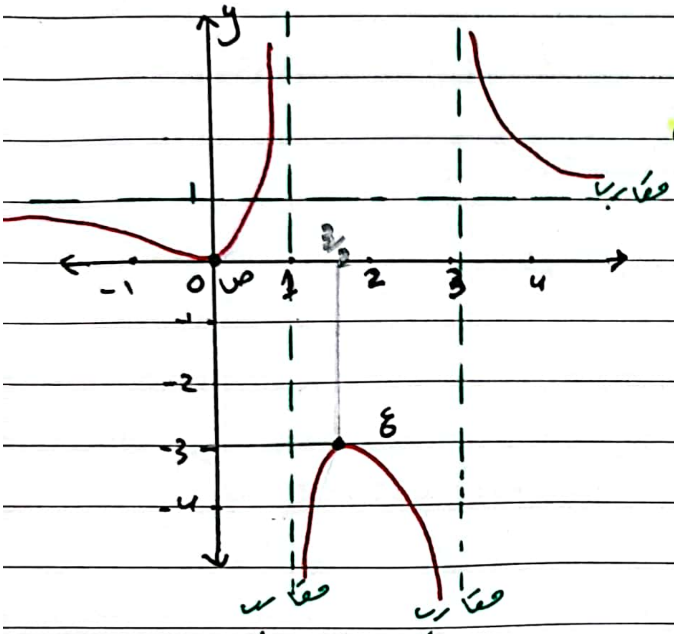
f متزايدة: $x<0 \Rightarrow y'>0$

f متناقصة: $y>0 \Rightarrow y'<0$

عند $x=0$ قيمة عظمى محلية $f(0)=0$ (لاحظ الرسم)

تمرين 35 ص 267

$y = \frac{x^2}{x^2-4x+3}$ الدالة معرفة عندما $x^2-4x+3 \neq 0$



وعندما $x^2-4x+3=0$

$x=1$ / $x=3$ مقاربان رأسيان

$\lim_{x\to\mp\infty} f(x) = \lim_{x\to\mp\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 \Rightarrow$ $y=1$ مقارب أفقي

$$y' = \frac{2x(x^2-4x+3)-x^2(2x-4)}{(x^2-4x+3)^2}$$

$$= \frac{\cancel{2x^3}-8x^2+6x-\cancel{2x^3}+4x^2}{(x^2-4x+3)^2}$$

$$= \frac{-4x^2+6x}{(x^2-4x+3)^2}$$

$y'=0 \Leftarrow -4x^2+6x=0$ إما $x=0$ أو $x=\frac{3}{2}$ نقط حرجة

x	$x\to-\infty$		0		1		$\frac{3}{2}$		3		$x\to+\infty$
y'		$-$	0		غير معرفة	$+$	0	$-$	غير معرفة	$-$	$-$
y	$y\to1$ مقارب $y=1$	↘	0	↗	غير معرفة	↗	-3	↘	غير معرفة	↘	$y\to1$ مقارب $y=1$

$x=1$ مقارب، $x=3$ مقارب

قيمة صغرى محلية $f(0)=0$

قيمة عظمى محلية $f(\frac{3}{2})=-3$

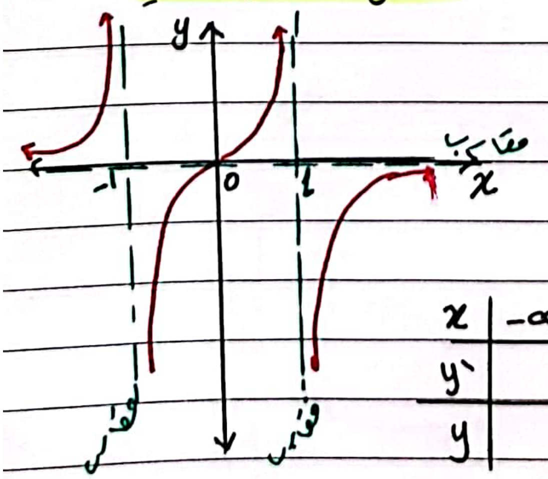
تمرين 36

$y = \frac{x}{1-x^4}$ معرفة عندما $1-x^4 \neq 0$ (عندما $x \neq \mp1$) ويكون $x=\mp1$ مقاربان رأسيان

ولاحظ عندما $x\to\mp\infty$ فإن $y\to0$:
يكون $y=0$ مقارب أفقي

$$y' = \frac{1(1-x^4)-x(-4x^3)}{(1-x^4)^2}$$

$$= \frac{1-x^4+4x^4}{(1+x^4)^2} = \frac{1+3x^4}{(1+x^4)^2}$$



عندما $y'=0$ سيكون $1+3x^4=0$ (موجب دوماً) ليس لها حلول (لا توجد نقط حرجة)

x	$-\infty$		-1		$+1$		$+\infty$
y'		$+$	غير معرفة	$+$	غير معرفة	$+$	
y		↗	غير معرفة	↗	غير معرفة	↗	

تمرين (37) ص 267 $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ الدالة معرفة على R حيث $\sqrt{x^2+1} \neq 0$ لا توجد مقاربات رأسية

مشتقة: $y' = \dfrac{1(\sqrt{x^2+1}) - x\left(\dfrac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+1}}\right)}{(\cancel{\sqrt{x^2+1}})^{\cancel{2}}}$

$= \dfrac{(\sqrt{x^2+1}) - \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{(x^2+1)}$ نضرب كل حد في البسط والمقام بـ $(\sqrt{x^2+1})$

$= \dfrac{\sqrt{x^2+1} \times \sqrt{x^2+1} - \dfrac{x^2}{\cancel{\sqrt{x^2+1}}} \times \cancel{\sqrt{x^2+1}}}{(x^2+1)^1 (\sqrt{x^2+1})}$

$= \dfrac{(x^2+1) - x^2}{(x^2+1)^{1+\frac{1}{2}}} = \dfrac{1}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} \neq 0$ لا توجد نقط حرجة

ونلاحظ أن $y' > 0$: والدالة متزايدة دوماً (لا توجد قيم قصوى)

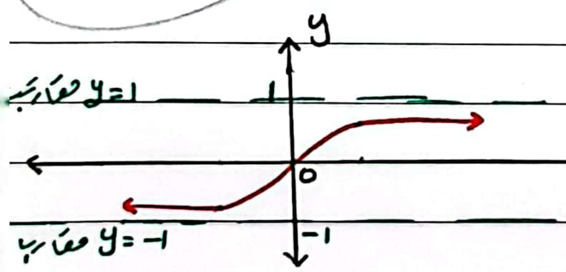
تذكر $\lim\limits_{x \to \mp\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$

للمقاربات الأفقية:

$\lim\limits_{x \to \mp\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \mp\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim\limits_{x \to \mp\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})}}$

$= \lim\limits_{x \to \mp\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2} \cdot \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \lim\limits_{x \to \mp\infty} \dfrac{x}{|x| \cdot \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$ $\to 0$

$= \lim\limits_{x \to \mp\infty} \dfrac{x}{|x|}$ → $= 1$ (عندما $x \to +\infty$) → $= -1$ (عندما $x \to -\infty$)



مقاربان أفقيان $y = -1$ ، $y = 1$

تمرين (38) $y = \dfrac{x^2+2}{(x+1)^2}$ • نلاحظ $(x+1)^2 \neq 0 \Leftarrow x \neq -1$ فيكون $x = -1$ مقارب رأسي

$y = \dfrac{x^2+2}{x^2+2x+1}$: نلاحظ

عندما: $\lim\limits_{x \to \mp\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \mp\infty} \dfrac{x^2}{x^2} = 1$

مقارب أفقي $y = 1$

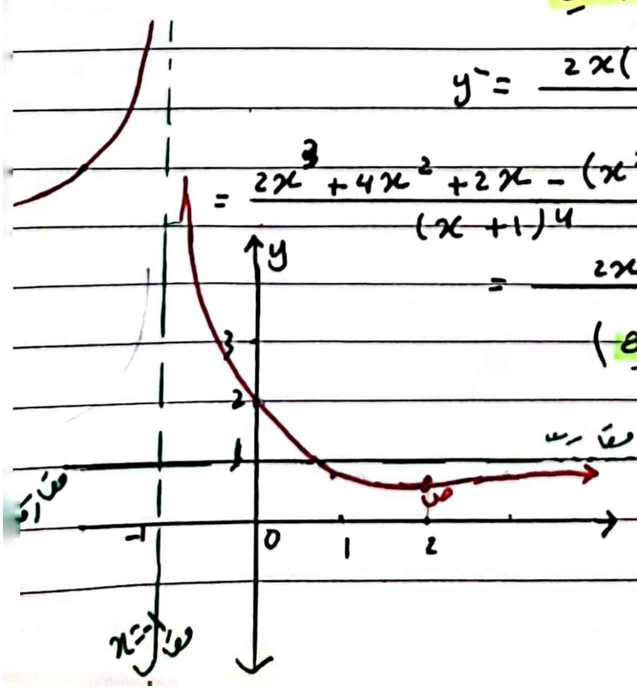
نشتق:

$y' = \dfrac{2x(x+1)^2 - (x^2+2)[2(x+1) \times 1]}{(x+1)^4}$ (x^2+2x+1 ، $2x+2$)

$= \dfrac{2x^3 + 4x^2 + 2x - (x^2+2)(2x+1)}{(x+1)^4} = \dfrac{\cancel{2x^3} + 4x^2 + 2x - \cancel{2x^3} - 2x^2 - 4x - 4}{(x+1)^4}$

$= \dfrac{2x^2 - 2x - 4}{(x+1)^4}$ ($y' = 0 : 2x^2 - 2x - 4 = 0$ → $x = 2$ ، $x = -1$ مرفوضة)

قيمة $x = 2$ حرجة ($f(2)$ صغرى محلية)



x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
y'		+ +	غير معرفة	− −	0	+ +	
y		↗		↘	$\frac{2}{3}$	↗	

قيمة صغرى $f(2) = \frac{2}{3}$