

تمرين ① ص 97 $f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x + 2}$

هل يمكن أن تكون متصلة؟
توسع إلى دالة جديدة متصلة على نطاق

$f(x) = \frac{(x+2)(x-1)}{x+2} = (x-1)$ غير متصلة عند $x = -2$ أكد (لأنه يمكن)

$x + 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -2$ أي $f(-2)$ غير موجود يوجد فجوة عند $x = -2$

والتمثيل البياني للدالة هو نفس التمثيل البياني للدالة $g(x) = x - 1$ صقيم ولكن لا نكمل النقطة $(-2, -3)$

يمكن إزالة الانفصال بكل بساطة بتعريف الدالة عند النقطة $(-2, -3)$

توسع للدالة لتكون متصلة $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 2}{x + 2} & : x \neq -2 \\ -3 & : x = -2 \end{cases}$

تمرين ② ص 97 $f(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x - 3}$

هل يمكن أن تكون متصلة؟
توسع إلى دالة لتكون متصلة

$f(x) = \frac{(x-3)(x+2)}{x-3} = x+2$

$x - 3 \neq 0$ (أي $x \neq 3$) الدالة متصلة عند $x = 3$ توجد فجوة

والرسم البياني لها هو نفس الرسم البياني للدالة $g(x) = x + 2$ (صقيم)

لكن لا نكمل النقطة $(3, 5)$

يمكن إزالة الانفصال بكل بساطة بتعريف الدالة عند النقطة $(3, 5)$

توسع f إلى دالة جديدة متصلة $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3} & : x \neq 3 \\ 5 & : x = 3 \end{cases}$

تمرين ③ ص 97 $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$

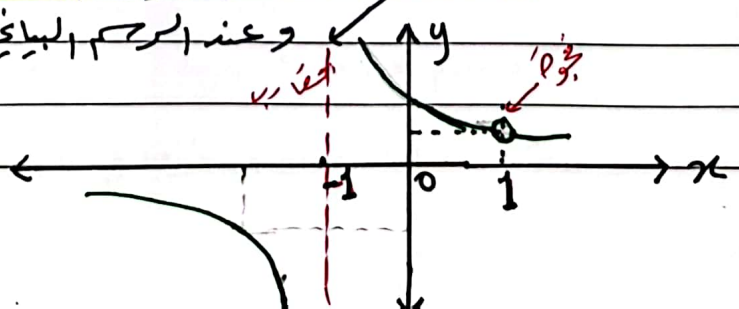
هل يمكن أن تكون متصلة؟
توسع إلى دالة لتكون متصلة

$f(x) = \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{x+1}$
حيث $x \neq -1$ و $x \neq 1$

عند $x = 1$ انفصال يمكن إزالته بإضافة مكان الفجوة فقط $(\frac{1}{2}, 1)$

عند $x = -1$ انفصال غير قابل للإزالة حيث $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x+1}$ غير موجود

وعند الرسم البياني للدالة يكون $x = -1$ خط تقارب رأسي



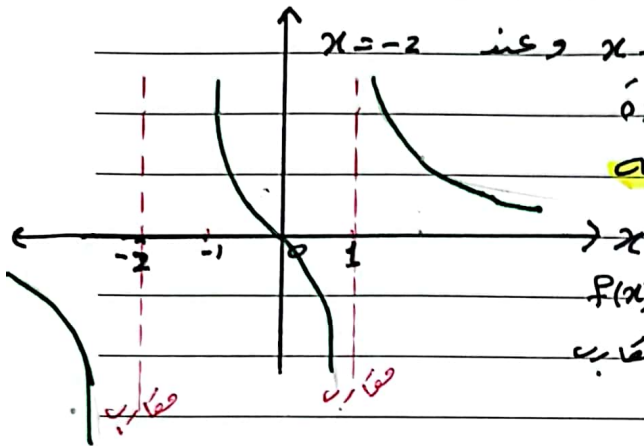
No:

Date:

$$f(x) = \frac{4x}{x^2 + x - 2}$$

تمرين (4) ص 97

$$= \frac{4x}{(x+2)(x-1)}$$

 $x \neq -2$ و $x \neq 1$ الدالة ليست معرفة عند $x = -2$ وعند $x = 1$ $f(-2)$ و $f(1)$ غير موجوده

وعند كل 1 و -2 انفصال لا يمكن إزالته

لاحظ الرسم التقريبي لـ $f(x)$ أ = x مقارب و $x = -2$ مقارب

$$f(x) = \frac{4x}{x^2 + 4}$$

تمرين (5) ص 97

هذه الدالة معرفة ومعرفة على R

لا يوجد انقطاع

لاحظ عندما
 $x^2 + 4 = 0$
 $x^2 = -4$
 لا يوجد حلول حقيقية
 أي $x^2 + 4 \neq 0$

$$f(x) = \frac{3x}{x^2 + 2x - 4}$$

تمرين (6) ص 97

معرفة ومعرفة $x^2 + 2x - 4 \neq 0$ عندما

$$x = -1 + \sqrt{5}$$

$$x = -1 - \sqrt{5}$$

$$x^2 + 2x - 4 = 0 \quad \text{عندما}$$

الدالة معرفة عندما $x \neq -1 \pm \sqrt{5}$ (انفصال غير قابل للإزالة عند $x = -1 \pm \sqrt{5}$)

$$f(x) = x^2 \cdot \tan x$$

تمرين (7) ص 97

لاحظ (x^2) معرفة دائماً بينما $(\tan x)$ معرفة عندما $x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$

والدالة معرفة الانفصالات غير قابلة للإزالة أي عند هذه القيم

$$x = n\pi + \frac{\pi}{2} \quad \text{عندما}$$

$$f(x) = x \cdot \cot x$$

تمرين (8) ص 97

(x) معرفة دائماً بينما $\cot x = \frac{1}{\tan x}$ معرفة بشرط $\tan x \neq 0$ ونعلم عندما $\tan x = 0$ أي $\frac{\sin x}{\cos x} = 0$ أي $\sin x = 0$ عندما $x = n\pi$

أي عدد صحيح

الدالة معرفة الانفصالات غير قابلة للإزالة عند $x = n\pi$

No:

Date:

$$f(x) = \frac{3}{\ln x^2}$$

مَرْنِي (10) ص 27

$$x^2 \neq 1 \leftarrow \ln x^2 \neq 0$$

$$x \neq \pm 1$$

$$x \neq 0 \leftarrow x^2 > 0$$

ل: اللوغاريتم:

معرفة ومشتقة بترتيب

ونلاحظ

$$f(x) = \frac{3}{\ln x^2} = \frac{3}{2 \ln |x|}$$

وعندما $x \rightarrow 0$ فإن $f(x) \rightarrow 0$ - يمكن إزالة الانقطاع عند $x=0$

بإضافة نقطة (0,0)

- ولإزالة الانقطاع عند $x=\pm 1$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{\ln x^2} & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$$

يصبح مشتقة عند 0

$$f(x) = \ln x^2 \quad \text{مَرْنِي (9) ص 27}$$

$$x \neq 0 \leftarrow x^2 > 0$$

مشتقة عند $x=0$

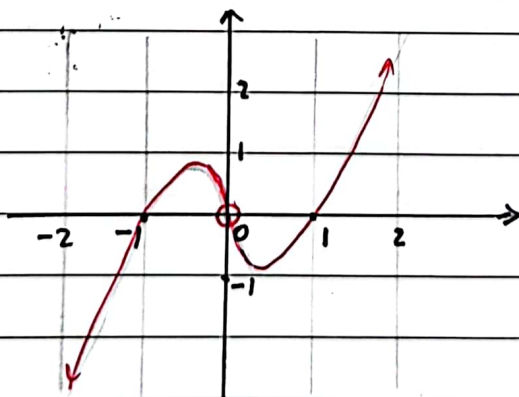
لا يمكن إزالة هذا الانقطاع

ملحوظة:

$$f(x) = x \ln x^2 \quad \text{في دليل المعلم المرنين مكتوب: (9) ص 27}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x^2 = 0$$

أو عن خلال الرسم البياني

انقطاع يمكن إزالته عند $x=0$

بإعادة التعريف

$$g(x) = \begin{cases} x \cdot \ln x^2 & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$$

No:

Date:

تمرين (11) 97 م

$$f(x) = \begin{cases} 2x & : x < 1 \\ x^2 & : x \geq 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x) = 2(-1) = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2) = (1)^2 = 1$$

غير موجودة
 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

الدالة غير متصلة عند $x=1$ (نقطة غير قابل للإزالة)

تمرين (12)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & : x \neq 0 \\ 1 & : x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right) = 1 \quad \text{نظرية}$$

$$f(0) = 1$$

متصلة

الدالة متصلة
 عند $x=0$

والدالة متصلة دائماً

تمرين (13)

$$f(x) = \begin{cases} 3x-1 & : x \leq -1 \\ x^2+5x & : -1 < x < 1 \\ 3x^3 & : x \geq 1 \end{cases}$$

سندرس الاتصال عند $x=1$ و $x=-1$
 (تتغير قايمة الدالة عند كل منها)

أولاً

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (3x-1) = 3(-1)-1 = -4$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (x^2+5x) = (-1)^2+5(-1) = -4$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -4$$

$$f(-1) = -4$$

متساويان: $f(x)$ متصلة عند $x=-1$

ثانياً

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2+5x) = (1)^2+5(1) = 6$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (3x^3) = 3(1)^3 = 3$$

غير موجودة
 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

انفصال غير قابل للإزالة عند $x=1$

No:

Date:

تمرين (14) ص 97

$$f(x) = \begin{cases} 2x & : x \leq 0 \\ \sin x & : 0 < x \leq \pi \\ x - \pi & : x > \pi \end{cases}$$

ندرس الاتصال عند $x=0$ و $x=\pi$

أولاً

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (2x) = 2(0) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x) = \sin 0 = 0$$

$$f(0) = 0$$

صفا وبيان $\rightarrow$

الدالة متصلة عند $x=0$

ثانياً

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^-} (\sin x) = \sin \pi = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^+} (x - \pi) = \pi - \pi = 0$$

$$f(\pi) = 0$$

صفا وبيان $\rightarrow$

الدالة متصلة عند $x=\pi$

الدالة متصلة دائماً

تمرين (15) ص 97

$$f(x) = \frac{x}{x-1} \quad x \neq 1$$

الدالة معرفة بشرط $x-1 \neq 0$ أي $x \neq 1$

وهي غير متصلة عند $x=1$ (لأن $f(1)$ غير موجودة و $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ غير موجود)

تمرين (16) ص 97

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} \quad x \neq 1$$

معرفة بشرط $x-1 \neq 0$ أي $x \neq 1$

غير متصلة لأنه $f(1)$ غير موجود عند $x=1$

تمرين (17) ص 97

$$f(x) = \sin \frac{1}{x} \quad x \neq 0$$

معرفة بشرط $x \neq 0$

غير متصلة لأن $f(0)$ غير موجود عند $x=0$

تمرين (18) ص 97

$$f(x) = \frac{e^x-1}{e^x-1} \quad x \neq 0$$

معرفة بشرط $e^x-1 \neq 0 \leftarrow e^x \neq 1 \leftarrow x \neq 0$

غير متصلة عند $x=0$ لأنه $f(0)$ غير موجود

No:

Date:

مَرْيَم (19) ص 97

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & : x < 2 \\ 3 & : x = 2 \\ 3x - 2 & : x > 2 \end{cases}$$

ما سبب عدم الاتصال عند $x=2$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2) = (2)^2 = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (3x - 2) = 3(2) - 2 = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$$

$$f(2) = 3$$

الدالة ليست متصلة عند $x=2$ لأن: $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \neq f(2)$

مَرْيَم (20) ص 97

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & : x < 2 \\ 3x - 2 & : x > 2 \end{cases}$$

ما سبب عدم الاتصال عند $x=2$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2) = (2)^2 = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (3x - 2) = 3(2) - 2 = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$$

موجود

ولكن نتجت عن $f(2)$ غير موجودة

ولست واردة في مجال الدالة

الدالة متصلة عند $x=2$

مَرْيَم (21) ص 97

$$f(x) = \sqrt{x+3}$$

مطلوب تحديد فترات الاتصال

بغير تركيب دالتين $g(x) = x+3$ متصلة دائماً

$f(x) = \sqrt{g(x)}$ متصلة عندما $g(x) = x+3 \geq 0$

أي عندما $x \geq -3$ و $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = f(-3) = 0$

$f(x)$ متصلة في الفترة $(-3, \infty)$

مَرْيَم (22) ص 97

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$$

$x^2 - 4$ معرفة دائماً لكن $\sqrt{x^2 - 4}$ معرفة عندما $x^2 - 4 \geq 0$

$$x \leq -2 \text{ أو } x \geq 2$$

الدالة متصلة في $(-\infty, -2]$ و $[2, +\infty)$ و $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = f(-2) = 0$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x+2}$$

ص 97

مَرْيَم (23)

$x+2$ متصلة ومعرفة دائماً وكذلك الجذر التكعيبي لها

الدالة متصلة دائماً $(-\infty, +\infty)$

No:

Date:

$$f(x) = (x-1)^{\frac{3}{2}}$$

تمرين (24) ص 27

$$(\text{محول الأس السببي الجذر}) = \sqrt[3]{(x-1)^3}$$

مشتقة عند: $x-1 \geq 0 \iff x \geq 1$ ، و $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) = 0$ ،
الدالة مشتقة في $(0, \infty)$

$$f(x) = \sin^{-1}(x+2) \quad \text{تمرين (25)}$$

نعلم أنه $\sin^{-1}(x)$ مشتقة عند $-1 < x < 1$
(نظرية 4.1 ص 9)

تكون $f(x)$ مشتقة عند: $-1 < x+2 < 1$

$$-1-2 < x+2 < 1-2$$

$$-3 < x < -1$$

$f(x)$ مشتقة في: $[-3, -1]$

$$f(x) = \ln(\sin x) \quad \text{تمرين (26) ص 27}$$

معرفة ومشتقة عند ما $\sin x > 0$

حسب معلوماتنا السابقة هذا في الربعين الأول والثاني

يعني ضمن فترة $[0, 2\pi]$: الاتصال في $(0, \pi)$

وفي π دمج على أساس صفة عدد صحيح من الدورات $h(2\pi)$

الاتصال في $(0+2n\pi, \pi+2n\pi)$

حيث n عدد صحيح $= (\pi(1+2n), 2n\pi)$

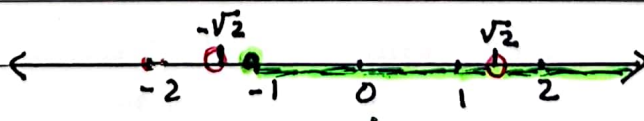
$$f(x) = \frac{\sqrt{x+1} + e^x}{x^2 - 2}$$

تمرين (27) ص 27

$\sqrt{x+1}$ معرفة ومشتقة عند $x+1 \geq 0$ أي $x \geq -1$ (ملون أخضر)

والكسر : $x^2 - 2 \neq 0$ عندنا

$$\left(\begin{array}{l} x = -\sqrt{2} \\ x = +\sqrt{2} \end{array} \right) \text{ هذان نقطتان}$$



الاتصال للدالة في $(-\infty, -1)$ و $(1, +\infty)$ ما عدا $x = \sqrt{2}$ و $x = -\sqrt{2}$

(نحذف البقية عن فترات الاتصال: $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$)

No:

Date:

$$f(x) = \frac{\ln(x^2 - 1)}{\sqrt{x^2 - 2x}}$$

تمرين (28) ص 97

البسط: $\ln(x^2 - 1)$ متصلة عندما $x^2 - 1 > 0$

$$x^2 > 1 \Rightarrow \begin{cases} x > 1 \\ \text{أو} \\ x < -1 \end{cases} *$$

المقام: $\sqrt{x^2 - 2x}$

$$x^2 - 2x > 0$$

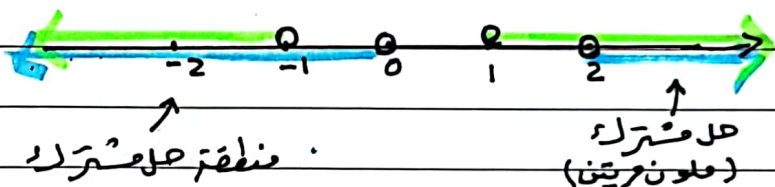
$$x=0$$

$$x=+2$$

وعندما $x^2 - 2x = 0$ ويكون: $x^2 - 2x > 0$ عندما

$$x > 2 \text{ أو } x < 0 *$$

نوجد الحل المشترك للمبانيات * و *

منطقة حل مشترك
(ملون خضرا)الدالة متصلة في فترتين: $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$

تمرين (29) ص 97

$$T(x) = \begin{cases} 0 & : x \leq 0 \\ 0.14x & : 0 < x < 10000 \\ c + 0.21x & : x \geq 10000 \end{cases}$$

تكون $T(x)$ متصلة عندما يتحقق الشرط عند 0 وعند 10000

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (0.14x) = 0.14(0) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (0) = 0 \quad \text{و} \quad f(0) = 0$$

متصلة عند 0

$$\lim_{x \rightarrow 10000^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 10000^+} (c + 0.21x) = c + 0.21(10000) = c + 2100$$

$$\lim_{x \rightarrow 10000^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 10000^-} (0.14x) = 0.14(10000) = 1400$$

يتحقق الاتصال
عند 10000

$$\Rightarrow c + 2100 = 1400 \Rightarrow c = 1400 - 2100 = -700$$

وتكون T متصلة لأن $\lim_{x \rightarrow 10000} f(x) = f(10000) = 1400$ (ويكون)

No:

Date:

تمرين (30) ص 97

$$T(x) = \begin{cases} 0 & : x \leq 0 \\ a + 0.12x & : 0 < x \leq 20000 \\ b + 0.16(x - 20000) & : x > 20000 \end{cases}$$

مطلوب إيجاد a و b لتكون T متصلة

للاضطلاع عند $x=0$: $T(0)=0$

فما يخص $\lim_{x \rightarrow 0^-} T(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} T(x) = a + 0.12(0) = a$

لما $\lim_{x \rightarrow 0^+} T(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} [a] = a$

$\Rightarrow a=0$

للاضطلاع عند $x=20000$:

$T(20000) = a + 0.12(20000) = 2400$

$\lim_{x \rightarrow 20000^-} T(x) = \lim_{x \rightarrow 20000^-} (a + 0.12x) = 0 + 0.12(20000) = 2400$

$\lim_{x \rightarrow 20000^+} T(x) = \lim_{x \rightarrow 20000^+} [b + 0.16(x - 20000)]$

$= b + 0.16(20000 - 20000) = b$

$\Rightarrow b=2400$

تمرين (31) ص 97 من خلال الجدول الأخير ص 94 للمثال 4.8

نكتب دالة الالتزام كالتالي:

$$T(x) = \begin{cases} 0.30x - a & : 67.7 \leq x \leq 141.25 \\ 0.35x - b & : 141.25 < x \leq 307.05 \\ 0.386x - c & : x > 307.05 \end{cases}$$

مطلوب إيجاد a و b و c لتكون $T(x)$ متصلة

أولاً : $\lim_{x \rightarrow 141.25^-} T(x) = 0.30(141.25) - a = 36690$

$\lim_{x \rightarrow 141.25^+} T(x) = 0.35(141.25) - b = 49437.5 - b$

$49437.5 - b = 36690$

$\Rightarrow b = 49437.5$

ثانياً : $\lim_{x \rightarrow 307.05^-} T(x) = 0.35(307.05) - b = 94720$

$\lim_{x \rightarrow 307.05^+} T(x) = 0.386(307.05) - c = 118521.3 - c$

$94720 = 118521.3 - c$

$\Rightarrow c = 23801.3$

No:

Date:

المطلوب في المثال 4.7 ص 94

ص 97

(32) مَرِنِي

نوضح اتصال الدالة $T(x)$ عند $x=6000$

الدالة مكتوبة بمقدرة القواعد في المَرِنِي

$$\lim_{x \rightarrow 6000^-} T(x) = \lim_{x \rightarrow 6000^-} (0.10x) = 0.10(6000) = 600$$

$$\lim_{x \rightarrow 6000^+} T(x) = \lim_{x \rightarrow 6000^+} (0.15x - 300) = 0.15(6000) - 300 = 600$$

$$T(6000) = 0.10(6000) = 600$$

$$\lim_{x \rightarrow 6000} f(x) = f(6000) = 600$$

عند $x=6000$

كلها

متساوية

الدالة متصلة

مَرِنِي (33) ص 97 [a] $f(x) = x^2 - 7$ في الفترة [2,3]المطلوب ① التحقق من الاتصال صفر المطلوب ② إيجاد فترة طول $\frac{1}{32}$ تحتوي على صفر للدالة

مطلوب ① في الفترة [2,3]

$$f(2) = (2)^2 - 7 = -3 \text{ سالبة}$$

$$f(3) = (3)^2 - 7 = 2 \text{ موجبة}$$

حسب نتيجة نظرية القيمة العرفية (ص 96) يوجد عدد بين 2 و 3

وهذا العدد صفر للدالة $f(x)$ نأخذ نقطة في منتصف الفترة [2,3] وهو $\frac{2+3}{2} = 2.5$

$$f(2.5) = (2.5)^2 - 7 = -0.75 \text{ سالبة}$$

$$f(3) = 2 \text{ موجبة}$$

يوجد حسب نتيجة النظرية صفر للدالة بين 2.5 و 3

نأخذ نقطة المنتصف بينهما: $\frac{3+2.5}{2} = 2.75$

$$f(2.75) = (2.75)^2 - 7 = 0.5625 \text{ موجبة}$$

$$f(2.5) = -0.75 \text{ سالبة}$$

يوجد حسب نتيجة النظرية صفر للدالة بين 2.5 و 2.75

نأخذ نقطة المنتصف بينهما: $\frac{2.5+2.75}{2} = 2.625$

$$f(2.625) = (2.625)^2 - 7 = -0.109375 \text{ سالبة}$$

$$f(2.75) = 0.5625 \text{ موجبة}$$

نأخذ نقطة المنتصف: $\frac{2.625+2.75}{2} = 2.6875$

$$f(2.6875) = (2.6875)^2 - 7 = 2.223 \text{ موجبة}$$

$$f(2.625) = -0.109375 \text{ سالبة}$$

نأخذ نقطة المنتصف: $\frac{2.6875+2.625}{2} = 2.65625$

$$f(2.65625) = 0.557 \text{ موجبة}$$

$$f(2.625) = -0.109375 \text{ سالبة}$$

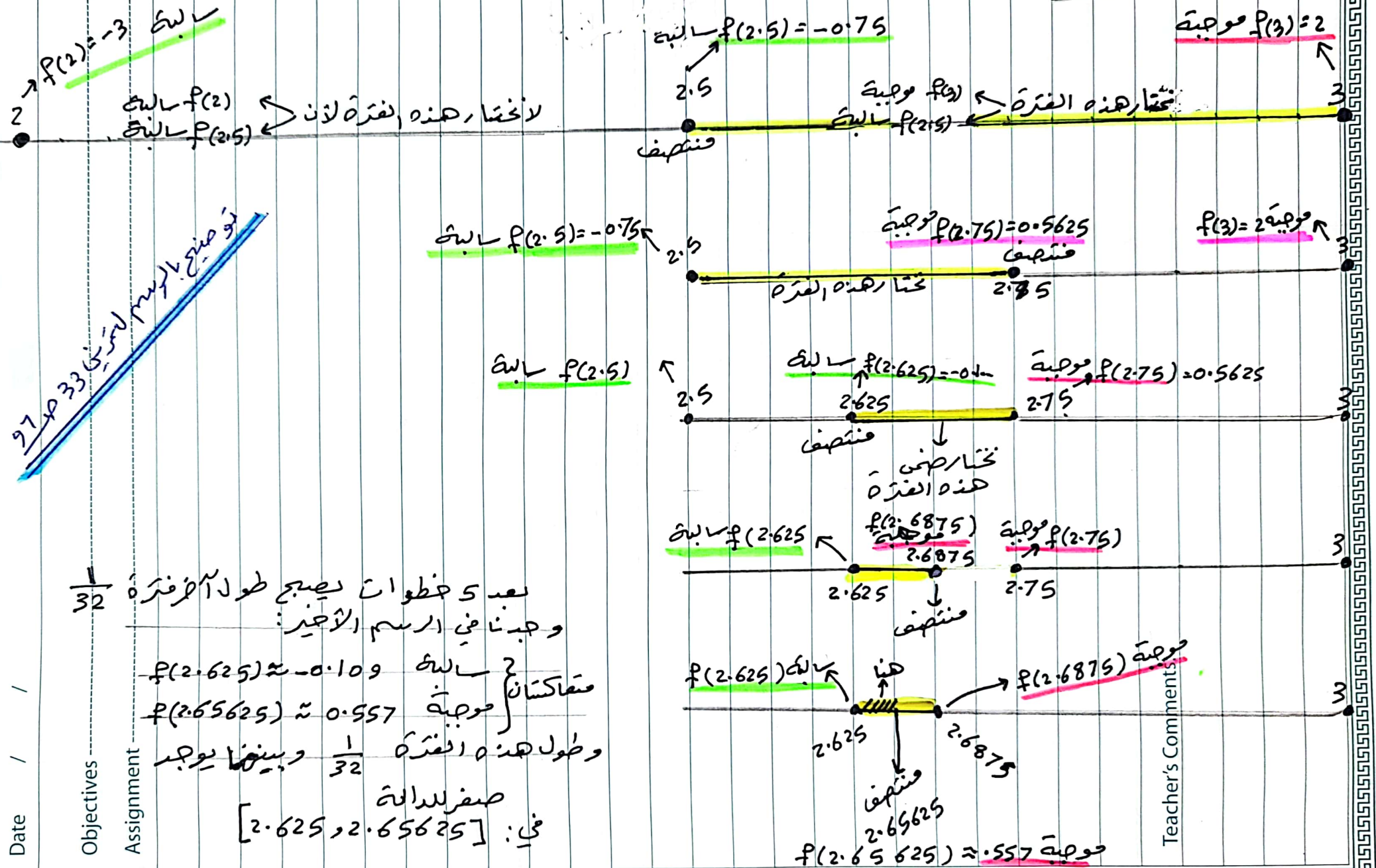
مقابلة

الرجعية
انظر الدالة
بين العددين
2.625 و 2.65625
نأخذ
المتوسط
المتوسط = 2.640625
طول الفترة = 32
لا أخيه 1/32

توضيح الرسم التكراري ص 33 ص 27

بعد 5 خطوات يصبح طول الفترة $\frac{1}{32}$
وحدثنا في الرسم الأخير:

مقاطعة $f(2.625) \approx -0.109$ سالبة
مقاطعة $f(2.65625) \approx 0.557$ موجبة
وطول هذه الفترة $\frac{1}{32}$ وبينهما يوجد
صفر للدالة
في: $[2.625, 2.65625]$



No:

Date:

للتاريخ من (33) إلى (36) ص 97

تحتاج آليه لكل وجد اول جال لآلة الحاسبة كما تم في تمرين 33 [a]

اجابة (33) [b] صف والدالة في $[-2.65625, -2.625]$

اجابة (34) [a] $[2.1875, 2.21875]$

[b] $[-0.5625, -0.5]$

اجابة (35) [a] $[0.71875, 0.75]$

اجابة (36) $[-0.59375, -0.5625]$

No: توجد نهاية

Date:

تمرين (37) ص 98

$$[-2, -6.5]$$

الدالة متصلة في

ومصلة في : يوجد انفصال عند $x = -2$ (خط تقارب رأسي)

ومصلة في : يوجد انفصال واضح عند $x = 4$

ومصلة في : حيث النهاية من يسار 7 موجودة

وبما أن $f(7)$

تمرين (38) ص 98

ومصلة في : الدالة متصلة من يسار 6 - فقط توجد نهاية

ومصلة في : الانفصال الانتهائي عند $x = 2$ (خط تقارب رأسي)

ومصلة في : عند $x = 4$ (خط تقارب رأسي)

ومصلة في : [4, 7] متصلة عند 7 من اليسار

تمرين (39) ص 98

$$f(x) = \begin{cases} 2 \frac{\sin x}{x} & : x < 0 \\ a & : x = 0 \\ b \cos x & : x > 0 \end{cases}$$

وطالب إيجاد قيم a و b لتكون f متصلة

من أجل الدالة عند $x = 0$ (تغير قايمة الدالة):

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 2 \frac{\sin x}{x} = 2(1) = 2 \text{ (نظرية)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (b \cos x) = b \cos 0 = b(1) = b$$

$$f(0) = a$$

$$2 = b = a$$

يجب أن تتساوى هذه النتائج لتتم الدالة

$$f(x) = \begin{cases} ae^x + 1 & : x < 0 \\ \sin^{-1}(\frac{x}{2}) & : x \leq 2 \\ x^2 - x + b & : x > 2 \end{cases}$$

تمرين (40) ص 98

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} (\sin \frac{x}{2}) = \sin(\frac{2}{2}) = \frac{\pi}{2} \quad : \text{عند } x = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 - x + b) = 2^2 - 2 + b = 2 + b$$

$$f(2) = 2^2 - 2 + b = 2 + b$$

$$2 + b = \frac{\pi}{2} \quad : \text{لنتم الدالة}$$

$$b = \frac{\pi}{2} - 2 \approx -0.429$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (ae^x + 1) = ae^0 + 1 = a + 1 \quad : \text{عند } x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin^{-1} \frac{x}{2}) = \sin^{-1} \frac{0}{2} = 0$$

$$f(0) = \sin^{-1} \frac{0}{2} = 0$$

$$a + 1 = 0 \Rightarrow a = -1$$

تساوى هذه المقادير

No:

Date:

تمرين (41) ص 98

$$f(x) = \begin{cases} a(\tan^{-1}(x) - 2) & : x < 0 \\ 2e^{bx} + 1 & : 0 \leq x \leq 3 \\ \ln(x-2) + x^2 & : x > 3 \end{cases}$$

نريد شروط الاتصال عند $x=0$ وعند $x=3$

مستوى الاتصال عند $x=0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} [a(\tan^{-1}(x) - 2)] = a \tan^{-1}(0) + 2 = a(0) + 2 = 2a$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} [2e^{bx} + 1] = 2e^{b(0)} + 1 = 2e^0 + 1 = 3$$

$$f(0) = 2e^{b(0)} + 1 = 3$$

نم الاتصال عند $x=0$ عندما: $2a = 3$

$$a = \frac{3}{2} = 1.5$$

مستوى الاتصال عند $x=3$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} [2e^{bx} + 1] = 2e^{3b} + 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} [\ln(x-2) + x^2] = \ln(3-2) + 3^2 = 9$$

$$f(3) = \ln(3-2) + 3^2 = 9$$

$$2e^{3b} + 1 = 9 \Rightarrow 2e^{3b} = 9 - 1$$

$$\frac{2e^{3b}}{2} = \frac{8}{2} \rightarrow e^{3b} = 4$$

↓

نأخذ $\ln$ للطرفين $3b = \ln 4$

$$b = \frac{\ln 4}{3} \approx 0.462$$

تمرين (42) مطلوب إثبات نتيجة 4.1 د.م

إذا كانت g متصلة عند a وكانت f متصلة عند $g(a)$ فإن $f \circ g$ متصلة

معطى: $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a)$ و $\lim_{x \rightarrow g(a)} f(x) = f(g(a))$

حسب نظرية (4.3) $\lim_{x \rightarrow a} (f \circ g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} (f(g(x))) = f(\lim_{x \rightarrow a} g(x))$

من المعطيات: $= f(g(a))$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f \circ g)(x) = (f \circ g)(a)$$

وبالتالي $(f \circ g)$ متصلة عند a

No:

Date:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & : x < 2 \\ 3x-3 & : x > 2 \end{cases}$$

تمرين (43) ص 98

المطلوب حدد ما إذا كانت $f(x)$ متصلة في اليمين عند 2 (أي $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2)$)

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (3x-3) = 3(2)-3 = 3$$

حذرتان

$$f(2) = (2)^2 = 4$$

الدالة ليست متصلة عند $x=2$ من اليمين

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & : x < 2 \\ 3 & : x = 2 \\ 3x-3 & : x > 2 \end{cases}$$

تمرين (44) ص 98

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (3x-3) = 3(2)-3 = 3$$

$$f(2) = 3$$

الدالة متصلة في اليمين عند $x=2$

تمرين (45) ص 98

أولاً نكتب معنى: الاتصال $f(x)$ من اليسار عند a : $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$

ثانياً: في التمرين 43

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} x^2 = 2^2 = 4 = f(2)$$

f متصلة من اليسار عند $x=2$

ثالثاً: في التمرين 44

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2) = 2^2 = 4$$

$$f(2) = 3 \quad \text{بينما}$$

الدالة ليست متصلة من اليسار عند $x=2$

تمرين (46) معطى: $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ و $h(a) = 0$

المطلوب الرأي في العبارة: $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ غير موجود

a

الرأي ربما يكون $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ موجوداً

عندما $g(a) = 0$ و $h(a) = 0$ كنا نحل ونختصر ثم نؤمن وقد يوجد نهاية

المطلوب الرأي في العبارة: $f(x)$ ليست متصلة عند $x=a$

b

الرأي (صحيح دوماً) أكتب $f(x)$ ليست متصلة عند a لأنه المقام $h(a) = 0$ وطالب
و س يكون f متقطعة لأنه $h(a)$ غير موجود

No:

Date:

تمرين (47) ص 98 بفرض $f(x)$ متصلة عند $x=0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot f(x) = 0 \quad \text{مطلوب}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} [x \cdot f(x)] &= \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \\ &= (0) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \times \text{عدد} = 0 \end{aligned}$$

فوجوده لان f متصلة مظهر في السؤال

$$\lim_{x \rightarrow 0} x f(x) = 0 \quad \text{مطلوب مثال} \quad \text{تمرين (48) ص 98}$$

و: $f(x)$ غير متصلة عند 0

$$f(x) = \begin{cases} -1 & : x \leq 0 \\ 1 & : x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(0) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 \end{cases}$$

غير متصلة
 f غير متصلة عنده

$$\text{لكن } x \cdot f(x) =$$

$$\begin{cases} x(-1) = -x & : x \leq 0 \\ x(1) = +x & : x > 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -x & : x \leq 0 \\ +x & : x > 0 \end{cases} \quad \text{وهذه دالة مطلوبة}$$

$$[x \cdot f(x)] \quad \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) = 0 \right) \quad \text{وهي 0} \quad \text{لها نهاية عند } x=0 \quad \text{وهي 0}$$

ومع ذلك $f(x)$ غير متصلة عند 0

$$\text{تمرين (49) ص 98 } f(x) \text{ متصلة عند } x=a \quad \text{مطلوب } |f(x)| \text{ متصلة عند } x=a$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \quad \text{مطلوب}$$

$$\left(\lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a) \right) \rightarrow \text{مطلوب } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} |f(x)|$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} |f(x)| \quad \text{مطلوب}$$

$$= |f(a)| = g(a)$$

معطى $|f(x)|$ متصلة عند $x=a$
 $\rightarrow$ فكل من $f(x)$ و $f(x)$ متصلة عند a (أي k متناهي)

الإجابة: لا : حيث نعتبر مثالاً : $f(x) = \begin{cases} 1 & : x < 0 \\ -1 & : x > 0 \end{cases}$

عندما $x < 0$: $f(x) = 1$
 $\Leftarrow f(x) = 1$ هنا $f(x)$ ليست متصلة عند 0

والدالة $g(x) = 1 \Rightarrow g(x) = 1$
 متصلة دائماً : $|f(x)|$: أي

تمرين (51) ص 98 : معطى : $f(x)$ متصلة عند $x=a$

وهناك دالة : $h(x) = \max_{a \leq t \leq x} f(t)$

مطلوب إثبات أن $h(x)$ متصلة ($x > a$)
 وقد علمت أنه يكون هذا صحيحاً إذا لم يكن $f(x)$ متصلة ؟

لو أخذنا مثلاً $b > a$ فإن :

$$\lim_{x \rightarrow b} h(x) = \lim_{x \rightarrow b} \left(\max_{a \leq t \leq x} f(t) \right)$$

$$= \max_{a \leq t \leq b} \left(\lim_{t \rightarrow b} f(t) \right)$$

من خواص النهايات

لا يتحقق شرطاً فـ $f(x)$ لم تكن متصلة

$$f(x) = \begin{cases} 1 & : a \leq x < b \\ 2 & : x \geq b \end{cases} \rightarrow h(x) = 1 : a \leq x < b$$

$h(x) = 2 : x \geq b$
 هذه دالة ليست متصلة عند $x=b$ (أي f ليست متصلة)

تمرين (52) ص 98 : $f(x) = \begin{cases} x^2 & : x \neq 0 \\ 4 & : x = 0 \end{cases}$ و $g(x) = 2x$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(g(x)) = \lim_{x \rightarrow 0} f(2x) = \lim_{x \rightarrow 0} (2x)^2 = 2(0) = 0 \leftarrow \text{غير متساويين}$$

$$f(\lim_{x \rightarrow 0} g(x)) = f(\lim_{x \rightarrow 0} (2x)) = f(2(0)) = f(0) = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(g(x)) \neq f(\lim_{x \rightarrow 0} g(x))$$

No:

Date:

تمرين (53) ص 98 • $f(x)$ متصلة

- f لها أصفار متتالية عند a و b ($f(a)=0$ و $f(b)=0$)
- نفرض $a < c < b$ و $f(x) \neq 0$ لكل $a < x < b$ لا توجد أصفار أخرى
- ونفرض $f(c) > 0$ موجب

و مطلوب استنتاج نظرية القيمة المتوسطة لتوضيح ان
 $f(x) > 0$ لجميع قيم $a < x < b$

(معطيات: $f(a)=0$ و $f(b)=0$ لأي x $a < x < b$ $f(x) \neq 0$)

(معطيات: $a < c < b$ و $f(c) > 0$)

لنوجد عدد d قبل $a < d < b$ وكان $f(d) < 0$
 لتغير إشارة الدالة في (d, c) من سالب إلى موجب

$f(d) < 0$ و $f(c) > 0$

وعندها سيكون للدالة صفر آخر بين c و d
 مثل e وهذا يتناقض مع المعطيات $f(x) \neq 0$
 لكل $a < x < b$

تمرين (54) ص 98

• $f(x) = 2x - \frac{400}{x}$ معرفة بـ $x \neq 0$ ($f(0)$ غير موجودة)

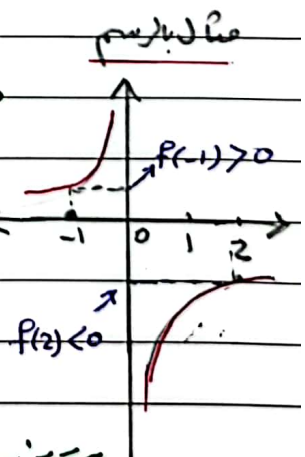
• $f(-1) > 0$ موجب
 • $f(2) < 0$ سالب

نتوقع أن يوجد صفر للدالة بين -1 و 2

ولكن هـ ضمن الفترة $[-2, 1]$ أو $f(0)$ غير موجود

لأنه نحن نبحث عن صفر للدالة في $[-2, 1]$

لعدم وجود الاتصال عند 0

تمرين (55) ص 98 • f متصلة على $[a, b]$

• $f(a) > a$ • $f(b) > b$

• $f(a) - a > 0$ • $f(b) - b > 0$

مطلوب حل: $f(x) = x$ أي حل $g(x) = f(x) - x = 0$

حتى يوجد حل في الفترة $[a, b]$ $(f(a) - a) > 0$ موجب

و $(f(b) - b) < 0$ سالب

يوجد صفر للدالة $g(x)$ في $[a, b]$ قبل c حيث $g(c) = 0$

$\downarrow$ $f(c) - c = 0 \Rightarrow f(c) = c$