

الرياضيات MATHEMATICS

2024-2025

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

الصف الثاني عشر متقدم

12 Advanced

ملخص دروس الفصل الثاني

الاستاذ Teacher

عماد عودة

IMAD ODEH

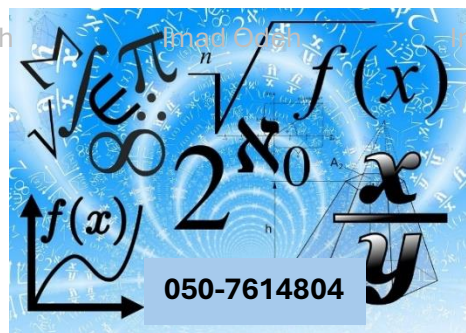
Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh



اسم الطالب: -

عزيزي الطالب وضعت هذه الملزمة لتساعدك في دراستك علما بان الكتاب المدرسي هو المرجع الرئيسي لنا جميعا

Imad Odeh

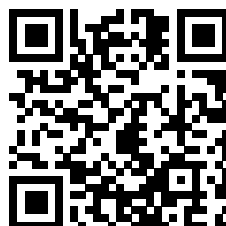
Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

اطيب التمنيات للجميع



الأستاذ عماد عودة 0507614804

<https://t.me/lomaths12>

<http://www.youtube.com/@imaths2022>

CHAPTER 4

Applications of Differentiation

تطبيقات التفاضل والتكامل

4-3	MAXIMUM AND MINIMUM VALUES	القيم العظمى و القيم الصغرى	4-3
4-4	INCREASING AND DECREASING FUNCTIONS	الدوال المتزايدة والدوال المتناقصة	4-4
4-5	CONCAVITY AND THE SECOND DERIVATIVE TEST	التقعر واختبار المشتقة الثانية	4-5
4-6	OVERVIEW OF CURVE SKETCHING	نظرة عامة على رسم المنحنيات	4-6
4-7	OPTIMIZATION	القيم المثلى	4-7
4-8	RELATED RATES	المعدلات المرتبطة	4-8
4-9	RATES OF CHANGE IN ECONOMICS AND THE SCIENCES	معدلات التغير في الاقتصاد والعلوم	4-9



Differentiation Rules

قواعد الاشتقاق

Function $f(x)$	Derivative $f'(x)$	Examples	
Function $f(x)$	Derivative $f'(x)$	Function $f(x)$	Derivative $f'(x)$
$f(x) = c, \text{ constant}$	$f'(x) = 0$	$f(x) = 3$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$f(x) = x^5$	$f'(x) = 5x^4$
$y = f(x) \cdot g(x)$	$\frac{dy}{dx} = f'(x)g(x) + f(x) \cdot g'(x)$	$y = (x^2 + 5)(3x + 1)$	$\frac{dy}{dx} = 2x(3x + 1) + (x^2 + 5)(3)$
$y = \frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{dy}{dx} = \frac{f'(x)g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$	$y = \frac{x^3 + 1}{5x - 2}$	$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2(5x - 2) - (x^3 + 1)(5)}{(5x - 2)^2}$
$y = \frac{c}{f(x)}$	$\frac{dy}{dx} = -\frac{cf'(x)}{(f(x))^2}$	$y = \frac{3}{x^2 + 2}$	$\frac{dy}{dx} = -\frac{3(2x)}{(x^2 + 2)^2}$
$y = \sqrt{f(x)}$	$\frac{dy}{dx} = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$	$y = \sqrt{5x^2 + 1}$	$\frac{dy}{dx} = \frac{10x}{2\sqrt{5x^2 + 1}}$
$y = (f(g(x)))$	$\frac{dy}{dx} = f'(g(x)) \cdot g'(x)$	$y = (x^3 + 8)^5$	$\frac{dy}{dx} = 5(x^3 + 8)^4(3x^2)$

Function $f(x)$	Derivative $f'(x)$	Function $f(x)$	Derivative $f'(x)$
$g(x) = f^{-1}(x)$	$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$	$y = \cot x$	$\frac{dy}{dx} = -\csc^2 x$
$y = e^{f(x)}$	$\frac{dy}{dx} = f'(x) \cdot e^{f(x)}$	$y = \csc x$	$\frac{dy}{dx} = -\csc x \cot x$
$y = \ln f(x) $	$\frac{dy}{dx} = \frac{f'(x)}{f(x)}$	$y = \sin^{-1} x$	$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = a^{f(x)}$	$\frac{dy}{dx} = f'(x) a^{f(x)} \ln a$	$y = \cos^{-1} x$	$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = \sin x$	$\frac{dy}{dx} = \cos x$	$y = \tan^{-1} x$	$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$
$y = \cos x$	$\frac{dy}{dx} = -\sin x$	$y = \cot^{-1} x$	$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{1+x^2}$
$y = \tan x$	$\frac{dy}{dx} = \sec^2 x$	$y = \sec^{-1} x$	$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{ x \sqrt{x^2-1}}$
$y = \sec x$	$\frac{dy}{dx} = \sec x \tan x$	$y = \csc^{-1} x$	$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{ x \sqrt{x^2-1}}$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

الأستاذ عماد عودة 0507614804

<https://t.me/lomaths12><http://www.youtube.com/@imaths2022>

CHAPTER 4

Applications of Differentiation

تطبيقات الاشتقاق

Lesson 4-3

الدرس 4-3

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

القيم العظمى والقيم الصغرى

MAXIMUM AND MINIMUM VALUES

DEFINITION 3.1

For a function f defined on a set S of real numbers and a number $c \in S$,

- (i) $f(c)$ is the **absolute maximum** of f on S if $f(c) \geq f(x)$ for all $x \in S$ and
- (ii) $f(c)$ is the **absolute minimum** of f on S if $f(c) \leq f(x)$ for all $x \in S$.

An absolute maximum or an absolute minimum is referred to as an **absolute extremum**. (The plural form of extremum is **extrema**.)

تعريف 3-1

لاي دالة $f(x)$ معرفة على الفترة S من مجموعة الاعداد الحقيقية ولأي عدد $c \in S$

- (1) فان $f(c)$ هي قيمة مطلقة عظمى للدالة f على الفترة S إذا كان $f(c) \geq f(x)$ for all $x \in S$
- (2) فان $f(c)$ هي قيمة مطلقة صغرى للدالة f على الفترة S إذا كان $f(c) \leq f(x)$ for all $x \in S$

An absolute maximum or an absolute minimum is referred to as an absolute extremum. (The plural form of extremum is extrema.)

يُشار إلى القيمة العظمى المطلقة أو القيمة الصغرى المطلقة باسم القيم القصوى المطلقة. (الجمع من extremum هو extrema.)

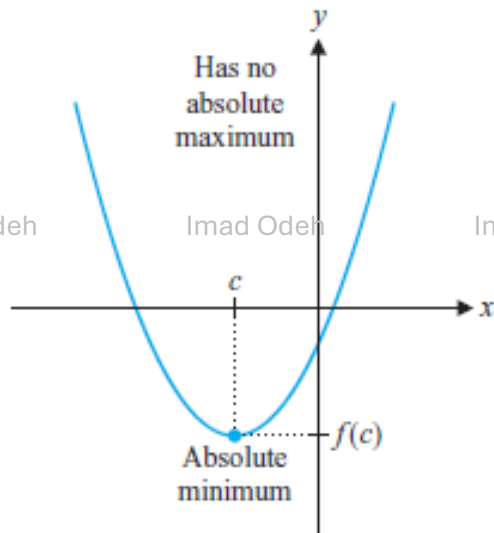
Imad Odeh

Imad Odeh

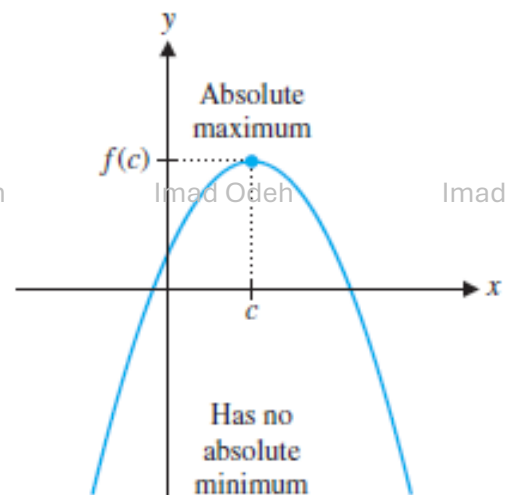
Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh



$f(c)$ صغرى مطلقة
لا يوجد عظمى مطلقة



$f(c)$ عظمى مطلقة
لا يوجد صغرى مطلقة

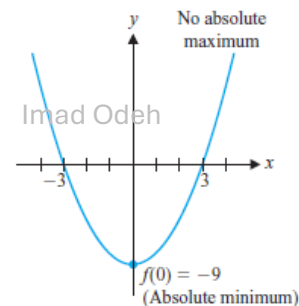
EXAMPLE 4.1

مثال 4-1

- (a) Locate any **absolute extrema** of $f(x) = x^2 - 9$ on the interval $(-\infty, \infty)$.

حدد أي قيمة قصوى مطلقة لـ

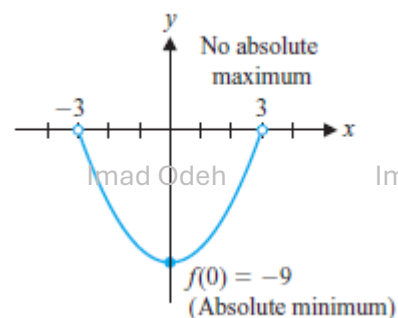
فترة مفتوحة يوجد قيمة صغرى مطلقة $f(0) = -9$
لا يوجد قيمة عظمى مطلقة



- (b) Locate any **absolute extrema** of $f(x) = x^2 - 9$ on the interval $(-3, 3)$.

حدد أي قيمة قصوى مطلقة لـ

فترة مفتوحة يوجد قيمة صغرى مطلقة $f(0) = -9$
لا يوجد قيمة عظمى مطلقة

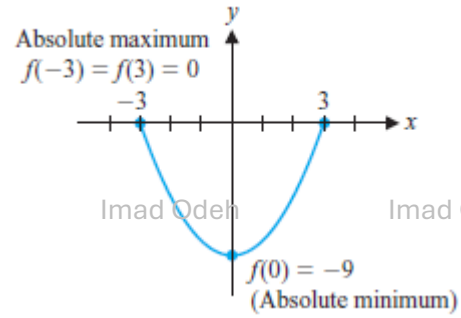


(c) Locate any **absolute extrema** of

$$f(x) = x^2 - 9 \text{ on the interval } [-3, 3].$$

حدد أي قيمة قصوى مطلقة لـ

فترة مغلقة يوجد
قيمة صغرى مطلقة $f(0) = -9$
قيمة عظمى مطلقة $f(-3) = f(3) = 0$



Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

EXAMPLE 4.2

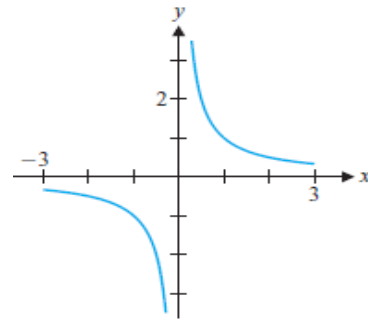
مثال 4-2

Locate any **absolute extrema** of

حدد أي قيمة قصوى مطلقة لـ

$$f(x) = \frac{1}{x} \text{ on } [-3, 0) \cup (0, 3].$$

من الرسم يلاحظ ان الدالة غير متصلة ولا يوجد لها قيمة
قصوى مطلقة
حيث يلاحظ انها تذهب الى سالب ما لانهاية عندما تقترب
الدالة من الصفر من اليسار والى ما لانهاية عندما تقترب من
الصفر من اليمين



THEOREM 3.1 (Extreme Value Theorem)

A continuous function f defined on a *closed, bounded* interval $[a, b]$ attains both an absolute maximum and an absolute minimum on that interval.

نظرية 3.1

لاي دالة متصلة ومعرفة على فترة مغلقة $[a, b]$ يوجد قيمة صغرى مطلقة وقيمة عظمى مطلقة

EXAMPLE 4.3

مثال 4-3

Locate any **absolute extrema** of

حدد أي قيمة قصوى مطلقة لـ

$$f(x) = \frac{1}{x} \text{ on the interval } [1, 3].$$

Imad Odeh

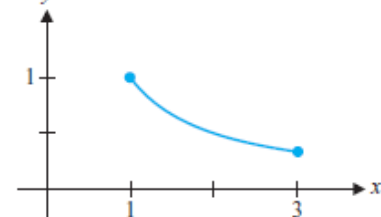
Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

دالة متصلة على دالة مغلقة يوجد
قيمة صغرى مطلقة $f(3) = \frac{1}{3}$
قيمة عظمى مطلقة $f(1) = 1$



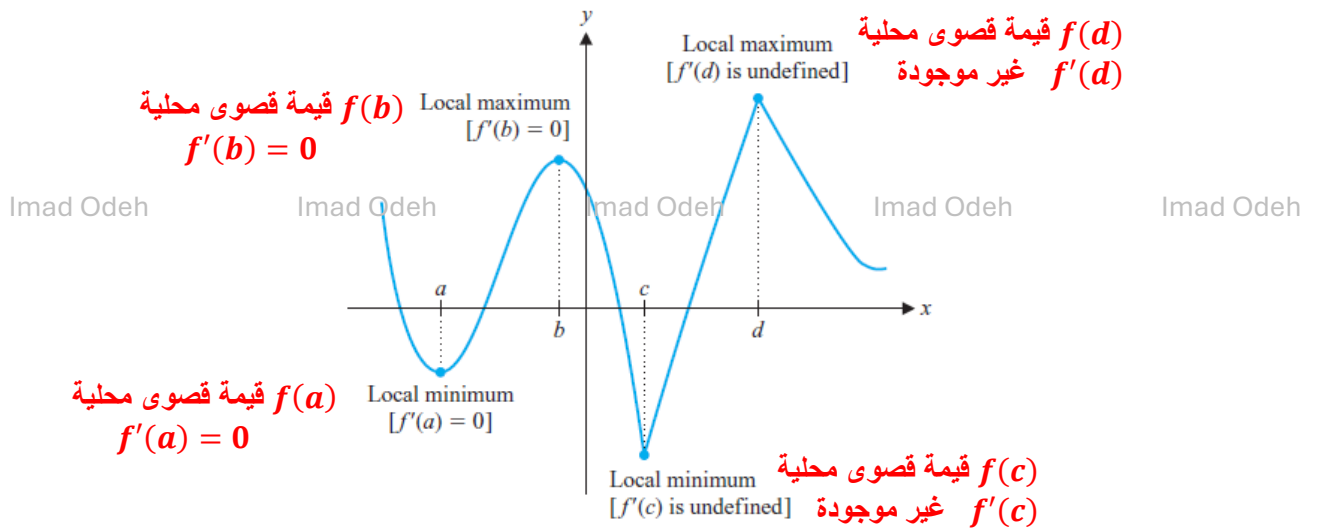
DEFINITION 3.2

- (i) $f(c)$ is a **local maximum** of f if $f(c) \geq f(x)$ for all x in some *open interval* containing c .
- (ii) $f(c)$ is a **local minimum** of f if $f(c) \leq f(x)$ for all x in some *open interval* containing c .

In either case, we call $f(c)$ a **local extremum** of f .

تعريف 3.2

تكون $f(c)$ قيمة عظمى محلية إذا وجدت فترة مفتوحة تحتوي c بحيث يكون $f(c) \geq f(x)$ لجميع قيم x في هذه الفترة وتكون $f(c)$ قيمة صغرى محلية إذا وجدت فترة مفتوحة تحتوي c بحيث يكون $f(c) \leq f(x)$ لجميع قيم x في هذه الفترة

**REMARK 3.1**

Local maxima and minima (the plural forms of maximum and minimum, respectively) are sometimes referred to as relative maxima and minima, respectively.

ملاحظة

يُشار أحياناً إلى القيم القصوى والدنيا المحلية باسم القيم القصوى والدنيا النسبية على التوالي.

EXAMPLE 4.4

مثال 4-4

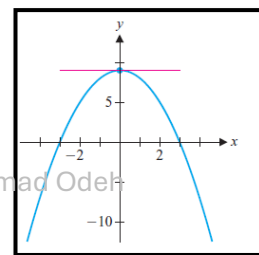
Locate any **local extrema** for

حدد أي قيمة قصوى محلية لـ

$$f(x) = 9 - x^2$$

and describe the behavior of the derivative at the local extremum.

صف سلوك المشتقة عند القيمة القصوى المحلية



Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

EXAMPLE 4.5

مثال 4-5

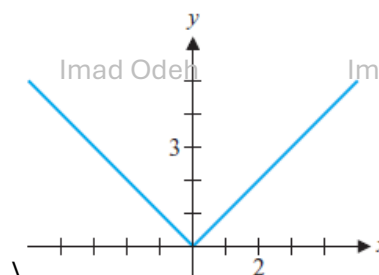
Locate any **local extrema** for

حدد أي قيمة قصوى محلية لـ

$$f(x) = |x|$$

and describe the behavior of the derivative at the local extremum.

صف سلوك المشتقة عند القيمة القصوى المحلية



Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

DEFINITION 3.3

A number c in the domain of a function f is called a **critical number** of f if $f'(c) = 0$ or $f'(c)$ is undefined.

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

تعريف 3.3
يكون العدد c في مجال الدالة $f(x)$ نقطة حرجة للدالة $f(x)$ إذا كان $f'(c) = 0$ or $f'(c)$ غير موجودة

THEOREM 3.2 (Fermat's Theorem)

Suppose that $f(c)$ is a local extremum (local maximum or local minimum). Then c must be a critical number of f .

نظرية فيرمات

إذا كانت $f(c)$ هي قيمة قصوى محلية للدالة $f(x)$ فإن c هي نقطة حرجة والعكس غير صحيح

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

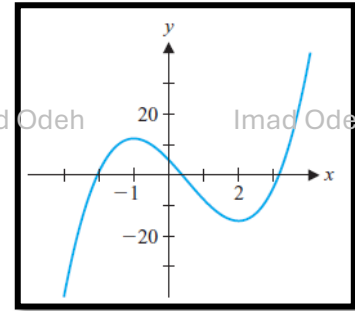
EXAMPLE 4.6

مثال 4-6

Find the critical numbers and local extrema of

اوجد النقاط الحرجة لـ

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5.$$



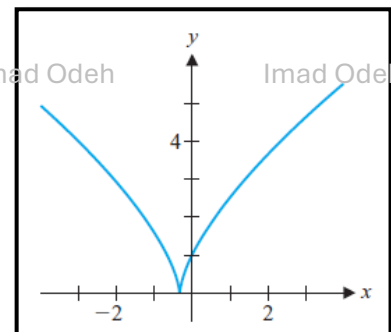
EXAMPLE 4.7

مثال 4-7

Find the critical numbers and local extrema of

اوجد النقاط الحرجة لـ

$$f(x) = (3x + 1)^{\frac{2}{3}}.$$



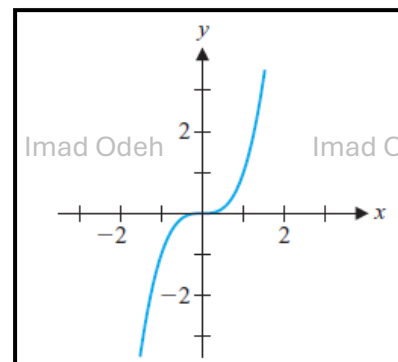
EXAMPLE 4.8

مثال 4-8

Find the critical numbers and local extrema of

اوجد النقاط الحرجة لـ

$$f(x) = x^3.$$



EXAMPLE 4.9

مثال 4-9

Find the critical numbers and local extrema of

اوجد النقاط الحرجة لـ

$$f(x) = x^{\frac{1}{3}}.$$

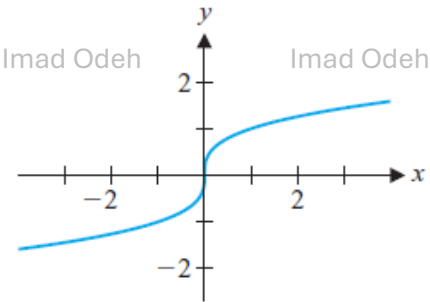
Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh



EXAMPLE 4.10

مثال 4-10

Find the critical numbers and local extrema of

اوجد النقاط الحرجة لـ

$$f(x) = \frac{2x^2}{x+2}$$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

THEOREM 3.3

Suppose that f is continuous on the closed interval $[a, b]$. Then, each absolute extremum of f must occur at an endpoint (a or b) or at a critical number.

نظرية 3.3

إذا كانت الدالة f متصلة على الفترة المغلقة $[a, b]$ فإن القيم القصوى المطلقة يجب ان تقع عن أطراف الفترة او عند النقاط الحرجة

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

REMARK 3.4

Theorem 3.3 gives us a simple procedure for finding the absolute extrema of a continuous function on a closed, bounded interval:

1. Find all critical numbers in the interval and compute function values at these points.
2. Compute function values at the endpoints.
3. The largest of these function values is the absolute maximum and the smallest of these function values is the absolute minimum.

لإيجاد القيم القصوى المطلقة للدالة متصلة على فترة مغلقة

(1) اوجد جميع الاعداد الحرجة

(2) احسب قيمة الدالة عند الاعداد الحرجة وعند أطراف الفترة

(3) أكبر قيمة تكون قيمة عظمى مطلقة وأصغر قيمة تكون صغرى مطلقة

EXAMPLE 4.11**مثال 4-11**

Find the absolute extrema of

اوجد القيم القصوى المطلقة

$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$ on the interval $[-2, 4]$.

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

EXERCISES 3.3 تمارين

Find all critical numbers by hand. Determine whether the critical number represents a local maximum, local minimum or neither.

اوجد جميع النقاط الحرجة ثم حدد اين منها قيمة عظمى محلية واي منها قيمة صغرى محلية واي منها ليست عظمى او صغرى

$$(3a) f(x) = x^2 + 5x - 1$$

$$(3b) f(x) = -x^2 + 4x + 2$$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

$$(4a) f(x) = x^3 - 3x + 1$$

$$(4b) f(x) = -x^3 + 3x^2 + 2$$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

$$(5a) f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x$$

$$(5b) f(x) = -x^3 + 3x^2 - 3x$$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Find all critical numbers by hand. Determine whether the critical number represents a local maximum, local minimum or neither.

اوجد جميع النقاط الحرجة ثم حدد اين منها قيمة عظمى محلية واي منها قيمة صغرى محلية واي منها ليست عظمى او صغرى

(6a) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$

(6b) $f(x) = x^4 - 3x^3 + 2$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

7. $f(x) = x^4 - 3x^3 + 2$

(8) $f(x) = x^4 + 6x^2 - 2$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

11. $f(x) = \sin x \cos x, [0, \pi]$

12. $f(x) = \sqrt{3} \sin x + \cos x$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Find all critical numbers by hand. Determine whether the critical number represents a local maximum, local minimum or neither.

اوجد جميع النقاط الحرجة ثم حدد اين منها قيمة عظمى محلية واي منها قيمة صغرى محلية واي منها ليست عظمى او صغرى

19. $f(x) = 2x\sqrt{x+1}$

20. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

16. $f(x) = xe^{-2x}$

21. $f(x) = |x^2 - 1|$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

23. $f(x) = f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 1, & x < 0 \\ x^2 - 4x + 3, & x \geq 0 \end{cases}$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Find the absolute extrema of the given function on each indicated interval.

أوجد القيم القصوى المطلقة لـ

25. $f(x) = x^3 - 3x + 1$

a) $[0, 2]$

b) $[-3, 2]$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

26. $f(x) = x^4 - 8x^2 + 2$

a) $[-3, 1]$

b) $[-1, 3]$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

27. $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$

a) $[-4, -2]$

b) $[-1, 3]$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Find the absolute extrema of the given function on each indicated interval.

اوجد القيم القصوى المطلقة لـ

28. $f(x) = \sin x + \cos x$

a) $[0, 2\pi]$

b) $[\frac{\pi}{2}, \pi]$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

29. $f(x) = e^{-x^2}$

a) $[0, 2]$

b) $[-3, 2]$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

30. $f(x) = x^2 e^{-4x}$

a) $[-2, 0]$

b) $[0, 4]$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Find the absolute extrema of the given function on each indicated interval.

أوجد القيم القصوى المطلقة لـ

31. $f(x) = \frac{3x^2}{x-3}$

a) $[-2, 2]$

b) $[2, 8]$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

32. $f(x) = \tan^{-1}(x^2)$

a) $[0, 1]$

b) $[-3, 4]$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

33. $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

a) $[0, 2]$

b) $[-3, 4]$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Find the absolute extrema of the given function on each indicated interval.

اوجد القيم القصوى المطلقة ل

34. $f(x) = \frac{3x}{x^2+16}$

a) $[0,2]$

b) $[0,6]$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

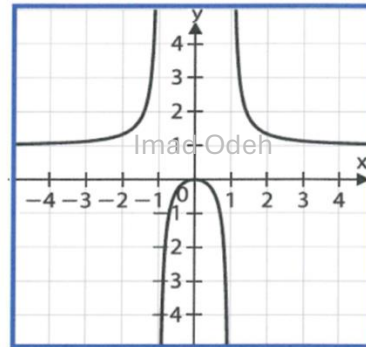
Imad Odeh

أسئلة سنوات سابقة

Q11 Find the local minimum of the function where $f(x)$ is graphically represented below.

س11 استخدم الرسم البياني لتحديد القيم المطلقة للدالة في الفترة المعطاة

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}, (-1, 1)$$



Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Q1 Find the x -coordinate of the local maximum of

س1 اوجد احداثيات x للقيمة العظمى المحلية ل

$$y = \frac{x}{1+x^3}$$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Q2 Find the x –coordinate of the local maximum of

س2 اوجد احداثيات x للقيمة العظمى المحلية لـ

$$f(x) = x^2 e^{-x}$$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Q3 Find the absolute extrema of

س3 اوجد القيم القصوى المطلقة لـ

$$f(x) = x^3 - 12x + 10 \text{ on the interval } [0,3]$$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Q4 Find the absolute extrema of

س4 اوجد القيم القصوى المطلقة لـ

$$f(x) = e^{x^2} \text{ on the interval } [0,2]$$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

س5 أوجد القيم القصوى المطلقة للدالة المعطاة على الفترة المشار إليها.

Q5 Find the absolute extrema of the given function on the indicated interval.

$$f(x) = \sqrt{x^3 - 3x^2 + 2x}, [-1, 3]$$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

س6 أوجد القيم القصوى المطلقة للدالة المعطاة على الفترة المشار إليها.

Q6 Find the absolute extrema of the given function on the indicated interval.

$$f(x) = x^2 e^{-x}, [-1, 4]$$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

س7 أوجد جميع الاعداد الحرجة ل

Q7 Find all critical points of

$$f(x) = x^4 + 3x^2 + 2$$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

س8 أوجد جميع الاعداد الحرجة ل

Q8 Find all critical points of

$$f(x) = x^4 - 8x^2 + 7$$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Q9 Find all critical points of

س9 اوجد جميع الاعداد الحرجة ل

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Q10 Find all critical points of

س10 اوجد جميع الاعداد الحرجة ل

$$f(x) = x^3 - 3x + 1$$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Q11 Find all critical points of

س11 اوجد جميع الاعداد الحرجة ل

$$f(x) = -9x^2 - 12x - 6$$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

- س12 اوجد قيمة k والتي تجعل للدالة $f(x)$ قيمه
 Q12 Find value of k such that the function
 $f(x)$ has a local extremum value at $x = 2$
 قصوى محلية عند $x = 2$

$$f(x) = x^3 + kx + 5$$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

- س13 اوجد قيمة a, b والتي تجعل للدالة $f(x)$ قيمه
 Q13 Find value of a, b such that the function
 $f(x)$ has a local extremum value at
 $f(-1) = 7$
 قيمه قصوى محلية هي $f(-1) = 7$

$$f(x) = ax^3 + bx + 3$$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

INCREASING AND DECREASING FUNCTIONS

DEFINITION 4.1

A function f is **increasing** on an interval I if for every $x_1, x_2 \in I$ with $x_1 < x_2$, $f(x_1) < f(x_2)$ [i.e., $f(x)$ gets larger as x gets larger].

A function f is **decreasing** on the interval I if for every $x_1, x_2 \in I$ with $x_1 < x_2$, $f(x_1) > f(x_2)$ [i.e., $f(x)$ gets smaller as x gets larger].

THEOREM 4.1

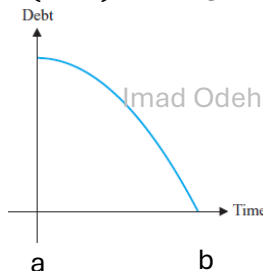
Suppose that f is differentiable on an interval I .

- (i) If $f'(x) > 0$ for all $x \in I$, then f is increasing on I .
- (ii) If $f'(x) < 0$ for all $x \in I$, then f is decreasing on I .

التزايد والتنقص وإشارة المشتقة الأولى
Increasing and decreasing and first derivative

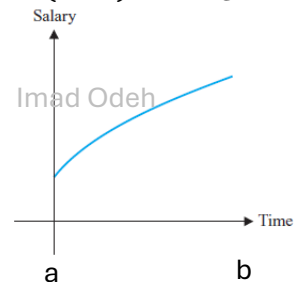
$$f'(x) < 0, x \in (a, b)$$

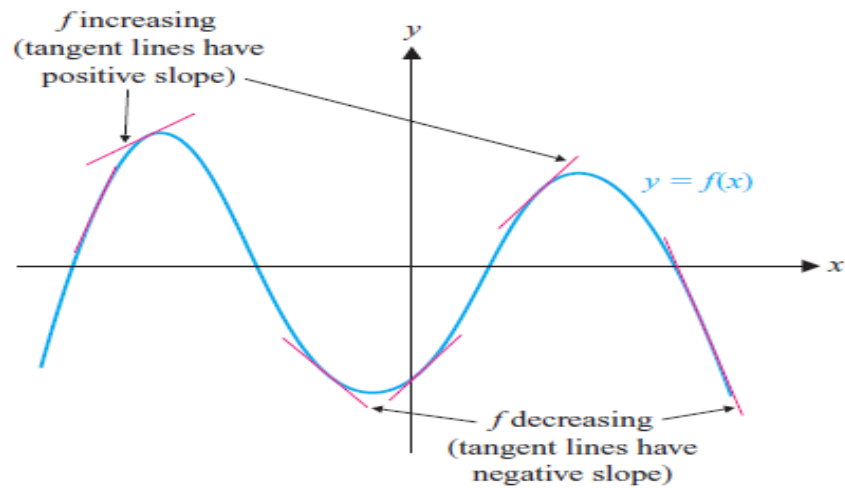
$f(x)$ decreasing متناقصة
على الفترة (a, b)



$$f'(x) > 0, x \in (a, b)$$

$f(x)$ increasing متزايدة
على الفترة (a, b)



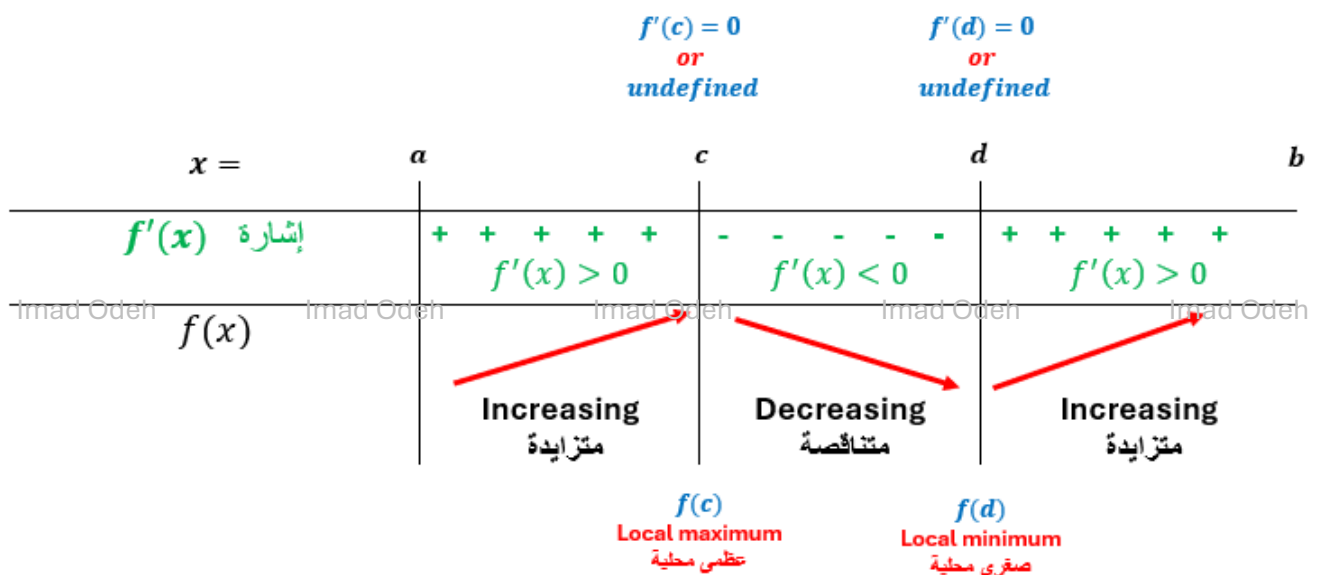


THEOREM 4.2 (First Derivative Test)

Suppose that f is continuous on the interval $[a, b]$ and $c \in (a, b)$ is a critical number.

- (i) If $f'(x) > 0$ for all $x \in (a, c)$ and $f'(x) < 0$ for all $x \in (c, b)$ (i.e., f changes from increasing to decreasing at c), then $f(c)$ is a local maximum.
- (ii) If $f'(x) < 0$ for all $x \in (a, c)$ and $f'(x) > 0$ for all $x \in (c, b)$ (i.e., f changes from decreasing to increasing at c), then $f(c)$ is a local minimum.
- (iii) If $f'(x)$ has the *same* sign on (a, c) and (c, b) , then $f(c)$ is *not* a local extremum.

اختبار المشتقة الأولى First derivative test



Increasing متزايدة for all $x \in (a, c) \cup (d, b)$

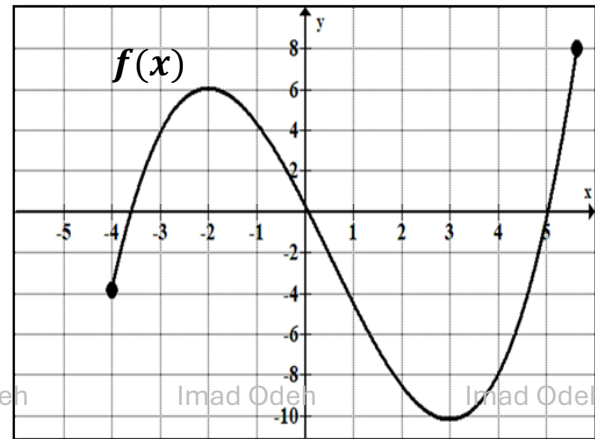
decreasing متناقصة for all $x \in (c, d)$

EXAMPLE

Use the graph to answer

مثال
اعتمد على الرسم التالي للإجابة عما يليه

- 1) Absolute maximum
القيمة العظمى المطلقة
- 2) Absolute minimum
القيمة الصغرى المطلقة
- 3) Local maximum
القيمة العظمى المحلية
- 4) Local minimum
القيمة الصغرى المحلية
- 5) Increasing interval(s)
فترات التزايد
- 6) Decreasing interval(s)
فترات التناقص



EXAMPLE 4.1

Find the intervals where the function is increasing and decreasing. Use this information to determine all local extrema

مثال 4-1
حدد فترات التزايد وفترات التناقص ثم حدد جميع القيم القصوى المحلية وبين نوعها

$$f(x) = 2x^3 + 9x^2 - 24x - 10$$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

EXAMPLE 4.2

Find the intervals where the function is increasing and decreasing. Use this information to determine all local extrema

مثال 4-2
حدد فترات التزايد وفترات التناقص ثم حدد جميع القيم القصوى المحلية وبين نوعها

$$f(x) = 3x^4 + 40x^3 - 0.06x^2 - 1.2x$$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

EXAMPLE 4.4

Find the intervals where the function is increasing and decreasing. Use this information to determine all local extrema

مثال 4-4

حدد فترات التزايد وفترات التناقص ثم حدد جميع القيم القصوى المحلية وبين نوعها

$$f(x) = x^{\frac{5}{3}} - 3x^{\frac{2}{3}}.$$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

EXERCISES 4-4

Find the intervals where the function is increasing and decreasing. Use this information to determine all local extrema

حدد فترات التزايد وفترات التناقص ثم حدد جميع القيم القصوى المحلية وبين نوعها

Q1

$$y = x^3 - 3x + 2$$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Q2

$$y = x^3 + 2x^2 + 1$$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Find the intervals where the function is increasing and decreasing. Use this information to determine all local extrema

حدد فترات التزايد وفترات التناقص ثم حدد جميع القيم القصوى المحلية وبين نوعها

Q3

$$y = x^4 - 8x^2 + 1$$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Q4

$$y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$$

Q5

$$y = (x + 1)^{\frac{2}{3}}$$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Find the intervals where the function is increasing and decreasing. Use this information to determine all local extrema

حدد فترات التزايد وفترات التناقص ثم حدد جميع القيم القصوى المحلية وبيّن نوعها

Q6

$$y = (x - 1)^{\frac{1}{3}}$$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Q7

$$y = \sin x + \cos x$$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Q8

$$y = \sin^2 x$$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Find the intervals where the function is increasing and decreasing. Use this information to determine all local extrema

حدد فترات التزايد وفترات التناقص ثم حدد جميع القيم القصوى المحلية وبيّن نوعها

Q9

$$y = e^{x^2-1}$$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Q10

$$y = \ln(x^2 - 1)$$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Find all critical numbers and use the First Derivative Test to classify each as the location of a local maximum, local minimum or neither.

اوجد جميع النقاط الحرجة ثم استخدم اختبار المشتقة الأولى لتحديد نوع كل منها

Q11

$$y = x^4 + 4x^3 - 2$$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Find all critical numbers and use the First Derivative Test to classify each as the location of a local maximum, local minimum or neither.

اوجد جميع النقاط الحرجة ثم استخدم اختبار المشتقة الأولى لتحديد نوع كل منها

Q12

$$y = x^5 - 5x^2 + 1$$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Q13

$$y = xe^{-x^2}$$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Q14

$$y = x^2e^{-x}$$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Find all critical numbers and use the First Derivative Test to classify each as the location of a local maximum, local minimum or neither.

اوجد جميع النقاط الحرجة ثم استخدم اختبار المشتقة الأولى لتحديد نوع كل منها

Q15

$$y = \tan^{-1}(x^2)$$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Q16

$$y = \sin^{-1}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Q17

$$y = \frac{x}{1 + x^3}$$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Find all critical numbers and use the First Derivative Test to classify each as the location of a local maximum, local minimum or neither.

اوجد جميع النقاط الحرجة ثم استخدم اختبار المشتقة الأولى لتحديد نوع كل منها

Q18

$$y = \frac{x}{1 + x^4}$$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Q19

$$y = \sqrt{x^3 + 3x^2}$$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Q20

$$y = x^{\frac{4}{3}} + 4x^{\frac{1}{3}}$$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

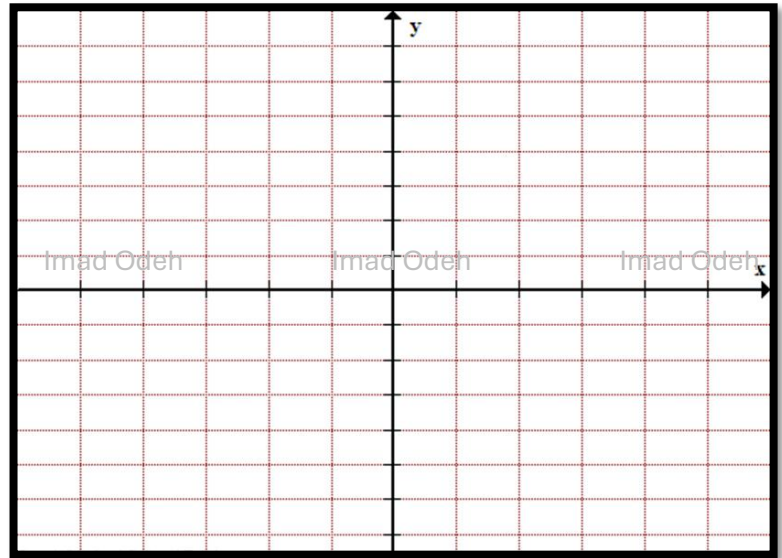
Imad Odeh

Q27 sketch a graph of a function with the given properties.

ارسم بيان الدالة التي لها الخواص التالية

س27

$$f(0) = 1, f(2) = 5, f'(x) < 0 \text{ for } x < 0 \text{ and } x > 2, \\ f'(x) > 0 \text{ for } 0 < x < 2.$$



Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

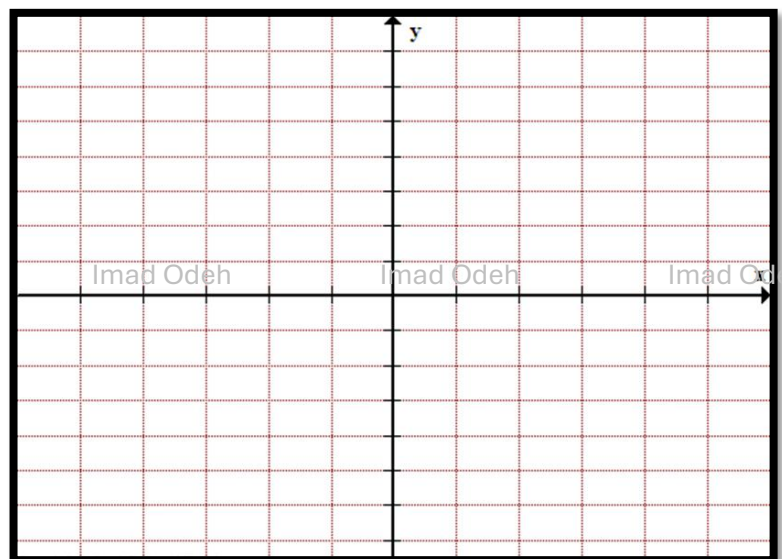
Imad Odeh

Q29 sketch a graph of a function with the given properties.

ارسم بيان الدالة التي لها الخواص التالية

س27

$$f(3) = 0, f'(x) < 0 \text{ for } x < 0 \text{ and } x > 3, f'(x) > 0 \text{ for } \\ 0 < x < 3, f'(3) = 0, f(0) \text{ and } f'(0) \text{ do not exist.}$$



Imad Odeh

Imad Odeh

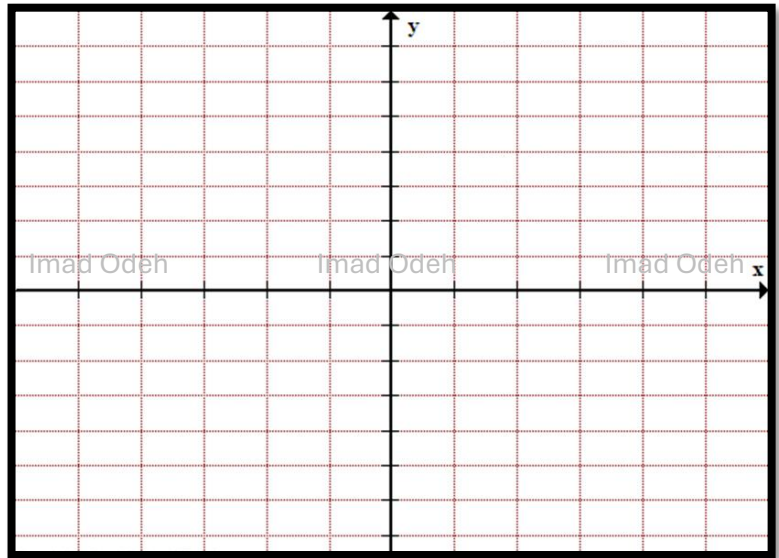
Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Q44 Assume that f is an increasing function with inverse function f^{-1} . Show that f^{-1} is also an increasing function.

س44 افرض ان الدالة f متزايدة ولها دالة معكوس هي f^{-1} بين ان الدالة f^{-1} هي دالة متزايدة أيضا

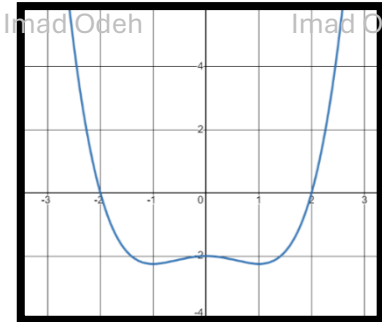


أسئلة سنوات سابقة واسئلة أخرى

Q1 Find the local minimum of the function where $f(x)$ is graphically represented below.

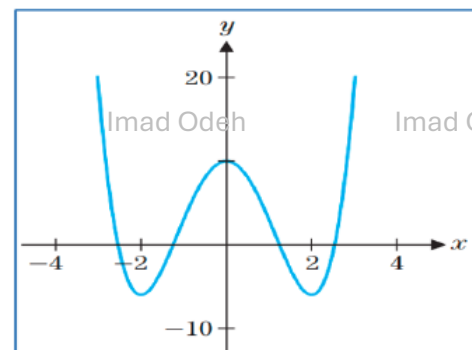
س1 اوجد القيم الصغرى المحلية للدالة $f(x)$ والموضحة بيانيا

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 - 2$$



Q2 Find the intervals where the function $f(x)$ is increasing

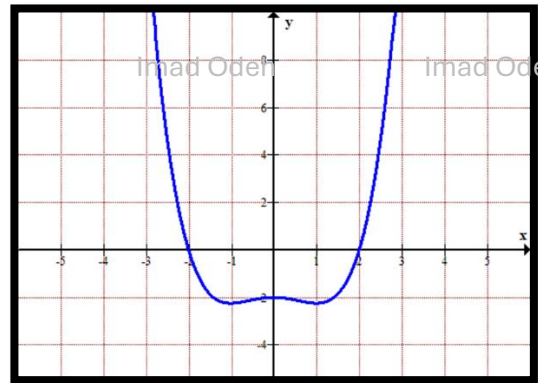
س2 اوجد الفترات التي تكون فيها الدالة $f(x)$ متزايدة



Q3 Find the intervals where the function $f(x)$ is increasing

س3 اوجد الفترات التي تكون فيها الدالة $f(x)$ متزايدة

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 - 2$$



Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Q4 Find the intervals where the function $g(x)$ is increasing

س4 اوجد الفترات التي تكون فيها الدالة $g(x)$ متزايدة

$$g(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 70x + 5,$$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Q5 Find the intervals where the function $f(x)$ is decreasing

س5 اوجد الفترات التي تكون فيها الدالة $f(x)$ متناقصة

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1,$$

Imad Odeh

Imad Odeh

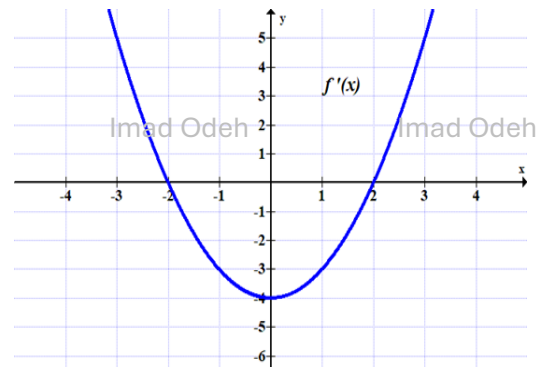
Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Q6 The graph represents $f'(x)$ determine where $f(x)$ is decreasing

س6 الرسم الموضح ادناه يمثل بيان $f'(x)$ حدد الفترات تكون عندها الدالة $f(x)$ متناقصة



Imad Odeh

Imad Odeh

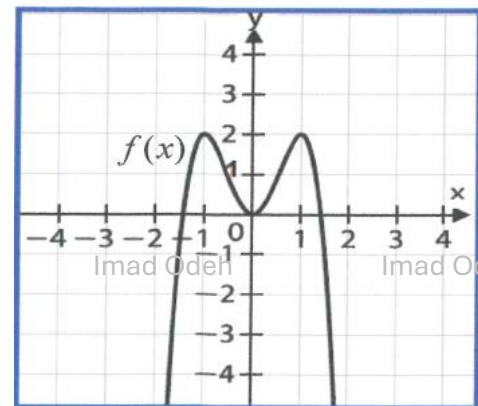
Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Q7 The graph represents $f'(x)$ determine where $f(x)$ is decreasing

س7 الرسم الموضح ادناه يمثل بيان $f'(x)$ حدد الفترات تكون عندها الدالة $f(x)$ متناقصة والفترات التي تكون متزايدة



Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

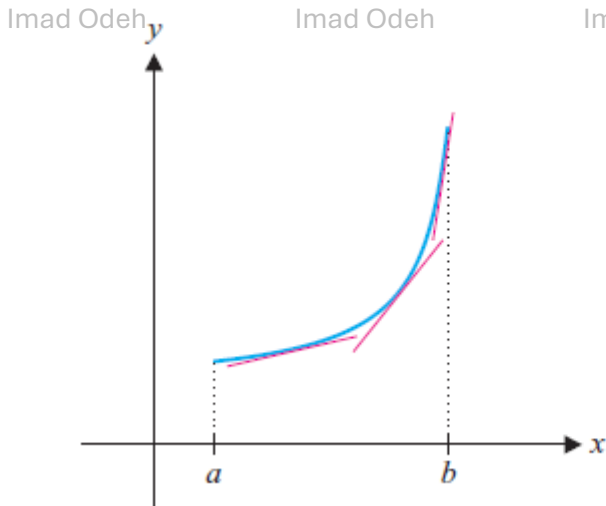
Imad Odeh

Imad Odeh

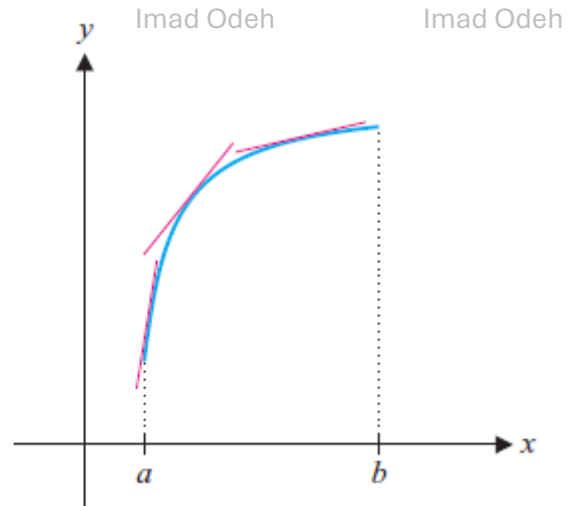
Imad Odeh

Imad Odeh

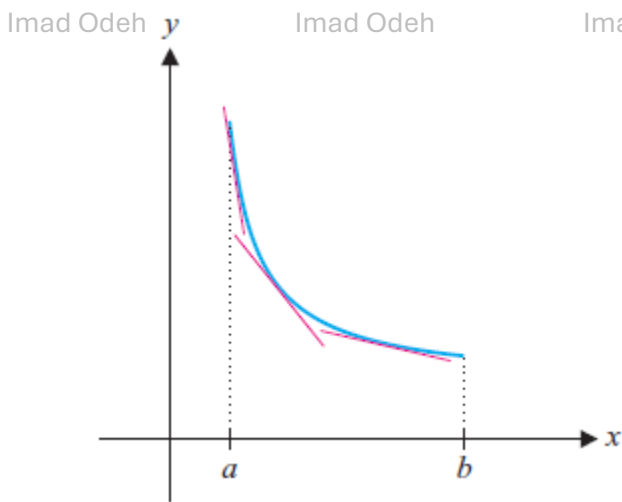
4.5 CONCAVITY AND THE SECOND DERIVATIVE TEST



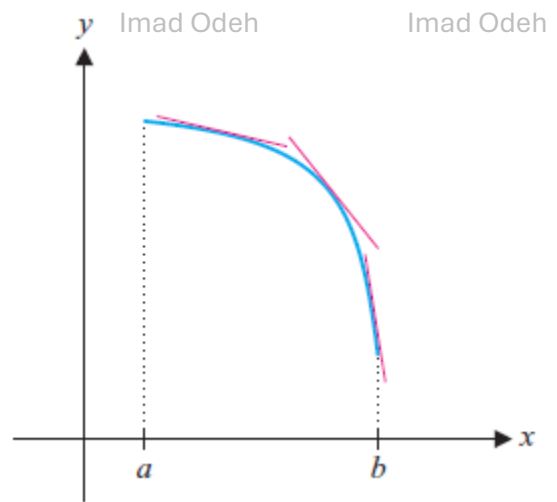
Concave up, increasnig
مقعر لاعلى , متزايدة



Concave down, increasing
مقعر لاسفل , متزايدة



Concave up, decreasnig
مقعر لاعلى , متناقصة



Concave down, decreasing
مقعر لاسفل , متناقصة

DEFINITION 5.1

For a function f that is differentiable on an interval I , the graph of f is

- (i) concave up on I if f' is increasing on I or
- (ii) concave down on I if f' is decreasing on I .

THEOREM 5.1

Suppose that f'' exists on an interval I .

- (i) If $f''(x) > 0$ on I , then the graph of f is concave up on I .
- (ii) If $f''(x) < 0$ on I , then the graph of f is concave down on I .

DEFINITION 5.2

Suppose that f is continuous on the interval (a, b) and that the graph changes concavity at a point $c \in (a, b)$ (i.e., the graph is concave down on one side of c and concave up on the other). Then, the point $(c, f(c))$ is called an inflection point of f .

لإيجاد فترات التقعر ونقاط الانعطاف نقوم بأشياء ودراسة الجدول التالي

		$f''(c) = 0$ or undefined	$f''(d) = 0$ or undefined	
Imad Odeh	Imad Odeh	Imad Odeh	Imad Odeh	Imad Odeh
$x =$	a	c	d	b
$f''(x)$ إشارة	$+$ $+$ $+$ $+$ $+$	$-$ $-$ $-$ $-$ $-$	$+$ $+$ $+$ $+$ $+$	
	$f''(x) > 0$	$f''(x) < 0$	$f''(x) > 0$	
$f(x)$				
	Concave up مقعرة لأعلى	Concave down مقعرة لأسفل	Concave up مقعرة لأعلى	
		$(c, f(c))$ inflection point نقطة انعطاف	$(d, f(d))$ inflection point نقطة انعطاف	
Imad Odeh	Imad Odeh	Imad Odeh	Imad Odeh	Imad Odeh
Concave up مقعرة لأعلى for all $x \in (a, c) \cup (d, b)$				
Concave down مقعرة لأسفل for all $x \in (c, d)$				

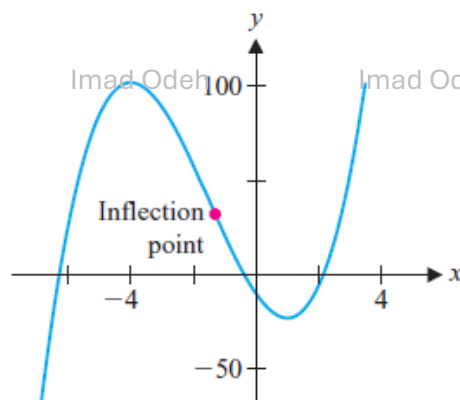
EXAMPLE 5.1

مثال 5-1

- 1- Determine where the graph of $f(x)$ is **concave up** and **concave down**
- 2- find any **inflection points**
- 3- draw a graph showing all significant features of the function.

- 1- حدد الفترات التي يكون عندها منحنى الدالة $f(x)$ مقعر لأعلى والفترات التي يكون عندها مقعر لأسفل
- 2- حدد نقاط الانعطاف ان وجدت
- 3- مثل المنحنى بيانيا

$$f(x) = 2x^3 + 9x^2 - 24x - 10$$



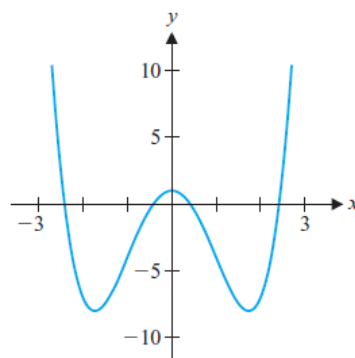
EXAMPLE 5.2

مثال 5-2

- 1- Determine where the graph of $f(x)$ is **concave up** and **concave down**
- 2- find any **inflection points**
- 3- draw a graph showing all significant features of the function.

- 1- حدد الفترات التي يكون عندها منحنى الدالة $f(x)$ مقعر لأعلى والفترات التي يكون عندها مقعر لأسفل
- 2- حدد نقاط الانعطاف ان وجدت
- 3- مثل المنحنى بيانيا

$$f(x) = x^4 - 6x^2 + 1$$



EXAMPLE 5.3

مثال 5-3

- 1- Determine where the graph of $f(x)$ is **concave up** and **concave down**
- 2- find any **inflection points**
- 3- draw a graph showing all significant features of the function.

- 1- حدد الفترات التي يكون عندها منحنى الدالة $f(x)$ مقعر لأعلى والفترات التي يكون عندها مقعر لأسفل
- 2- حدد نقاط الانعطاف ان وجدت
- 3- مثل المنحنى بيانيا

$$f(x) = x^4$$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

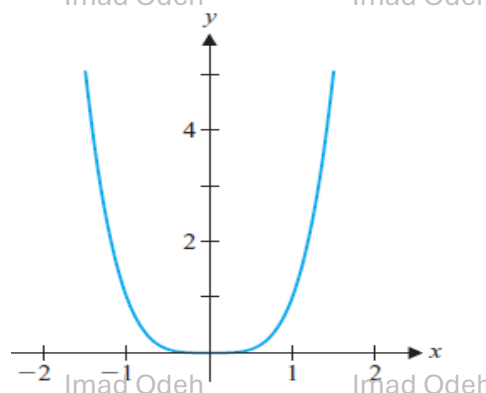
Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh



THEOREM 5.2 (Second Derivative Test)

Suppose that f'' is continuous on the interval (a, b) and $f'(c) = 0$, for some number $c \in (a, b)$.

- (i) If $f''(c) < 0$, then $f(c)$ is a local maximum.
- (ii) If $f''(c) > 0$, then $f(c)$ is a local minimum.

REMARK 5.1

If $f''(c) = 0$ or $f''(c)$ is undefined, the Second Derivative Test yields no conclusion. That is, $f(c)$ may be a local maximum, a local minimum or neither. In this event, we must rely on other methods (such as the First Derivative Test) to determine whether $f(c)$ is a local extremum. We illustrate this with example 5.5.

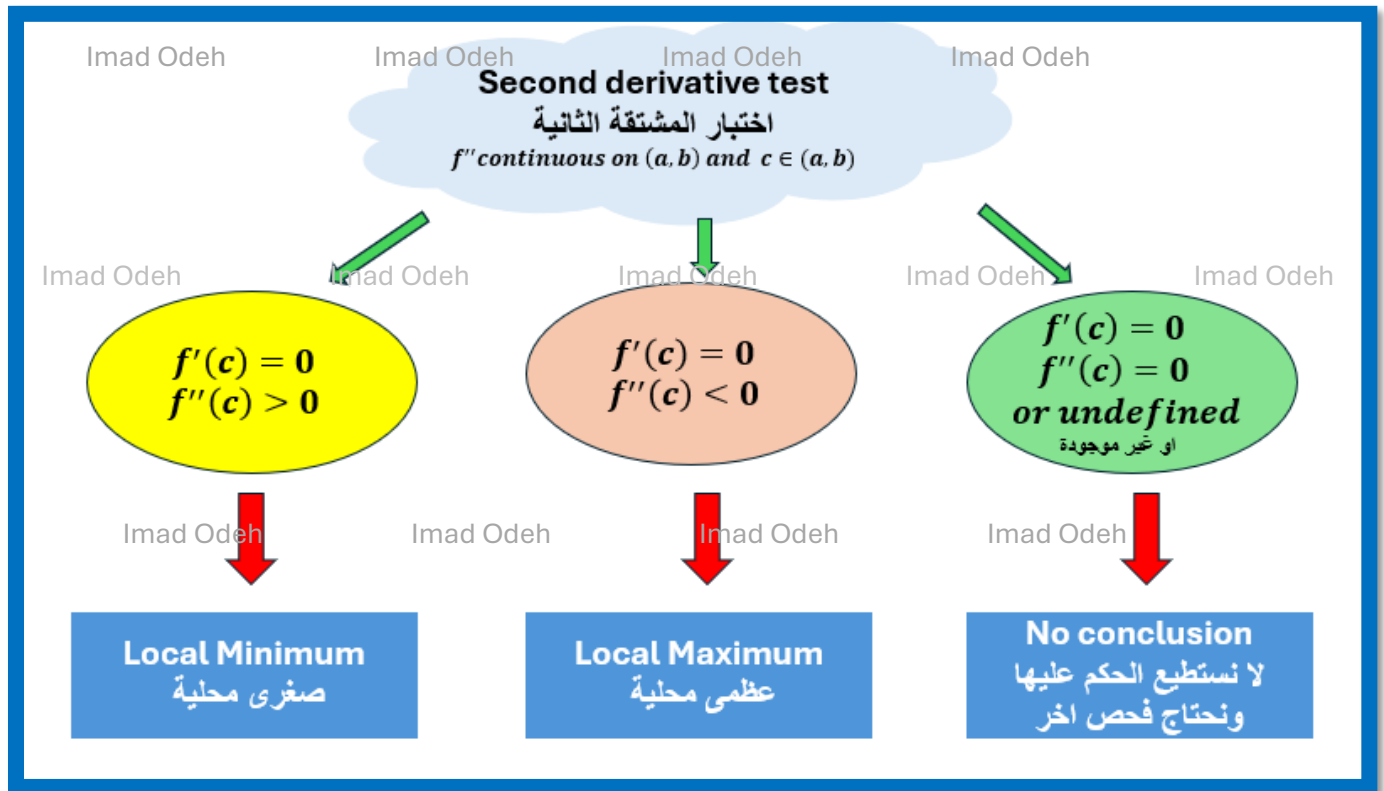
Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh



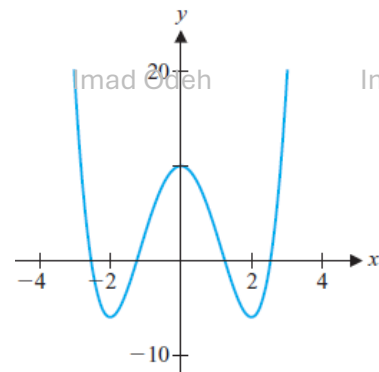
EXAMPLE 5.4

Use the Second Derivative Test to find the local extrema of

$$f(x) = x^4 - 8x^2 + 10.$$

مثال 5-4

استخدم اختبار المشتقة الثانية لتحديد القيم القصوى المحلية

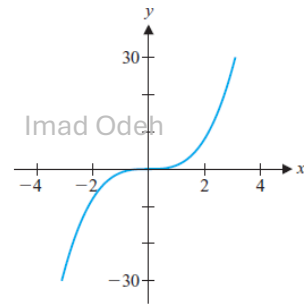


EXAMPLE 5.5

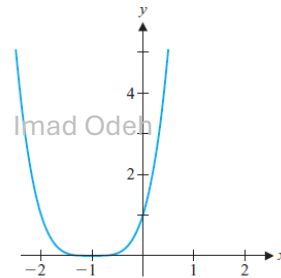
Use the Second Derivative Test to find the local extrema of

(a) $f(x) = x^3$

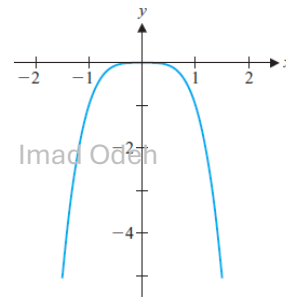
مثال 5-5
استخدم اختبار المشتقة الثانية لتحديد القيم القصوى المحلية



(b) $g(x) = (x + 1)^4$



(c) $h(x) = -x^4$

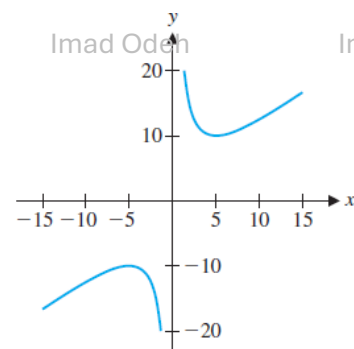


EXAMPLE 5.6

Draw a graph of $f(x)$ showing all significant features.

مثال 5-6
ارسم بيان الدالة $f(x)$ مبيناً جميع خصائصها

$$f(x) = x + \frac{25}{x}$$

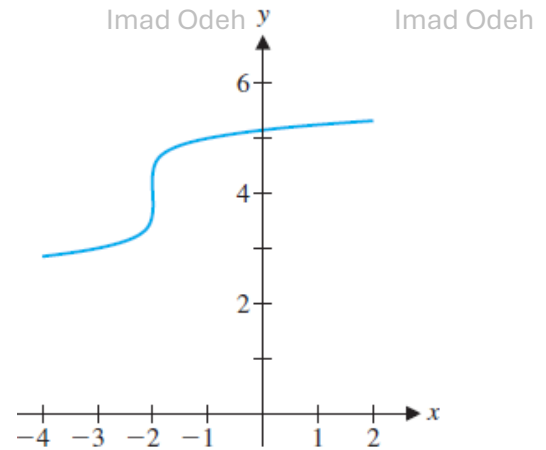


EXAMPLE 5.7

Draw a graph of $f(x)$ showing all significant features.

مثال 5-7
ارسم بيان الدالة $f(x)$ مبيناً جميع خصائصها

$$f(x) = (x + 2)^{\frac{1}{5}} + 4$$



EXERCISES 4.5 تمارين

1- Determine where the graph of $f(x)$ is concave up and concave down

1- حدد الفترات التي يكون عندها منحنى الدالة $f(x)$ مقعر لأعلى والفترات التي يكون عندها مقعر لأسفل

2- find any inflection points

2- حدد نقاط الانعطاف ان وجدت

Q1

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Q2

$$f(x) = x^4 - 6x^2 + 2x + 3$$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Q3

$$f(x) = x + \frac{1}{x}$$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

- 1- Determine where the graph of $f(x)$ is **concave up** and **concave down**
 2- find any **inflection points**

- 3- حدد الفترات التي يكون عندها منحنى الدالة $f(x)$ مقعر لأعلى والفترات التي يكون عندها مقعر لأسفل
 4- حدد نقاط الانعطاف ان وجدت

Q4

$$f(x) = x + 3(1 - x)^{\frac{1}{3}}$$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Q5

$$f(x) = \sin x - \cos x$$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Q6

$$f(x) = \tan^{-1}(x^2)$$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

- 1- Determine where the graph of $f(x)$ is **concave up** and **concave down**
 2- find any **inflection points**

- 1- حدد الفترات التي يكون عندها منحنى الدالة $f(x)$ مقعر لأعلى والفترات التي يكون عندها مقعر لأسفل
 2- حدد نقاط الانعطاف ان وجدت

Q7

$$f(x) = x^{\frac{4}{3}} + 4x^{\frac{1}{3}}$$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Q8

$$f(x) = xe^{-4x}$$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Find all critical numbers and use the second derivative Test to determine all local extrema.

اوجد جميع النقاط الحرجة ثم استخدم اختبار المشتقة الثانية لتحديد القيم القصوى المحلية ونوعها

Q9

$$f(x) = x^4 + 4x^3 - 1$$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Find all critical numbers and use the second derivative Test to determine all local extrema.

اوجد جميع النقاط الحرجة ثم استخدم اختبار المشتقة الثانية لتحديد القيم القصوى المحلية ونوعها

Q10

$$f(x) = x^4 + 4x^2 + 1$$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Q11

$$f(x) = xe^{-x}$$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Q12

$$f(x) = e^{-x}$$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Find all critical numbers and use the second derivative Test to determine all local extrema.

أوجد جميع النقاط الحرجة ثم استخدم اختبار المشتقة الثانية لتحديد القيم القصوى المحلية ونوعها

Q13

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 4}{x}$$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Q14

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x}$$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

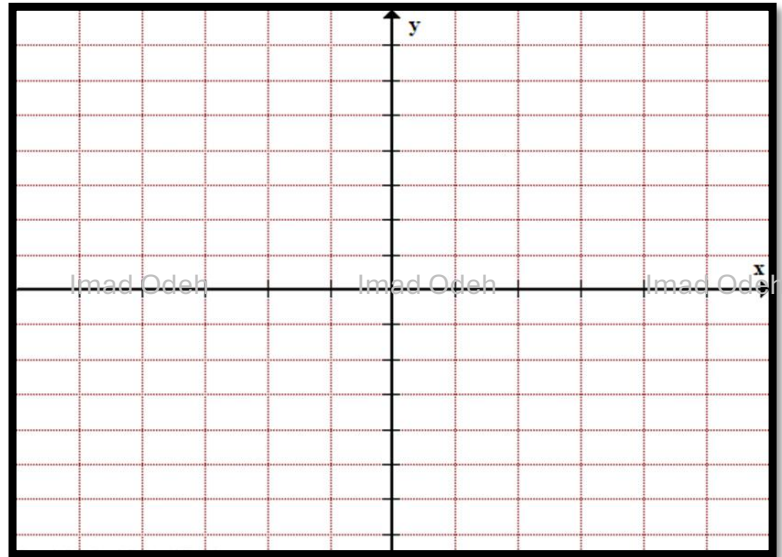
Imad Odeh

Imad Odeh

Q37 sketch a graph of a function with the given properties.

س ارسم بيان الدالة التي لها الخواص التالية

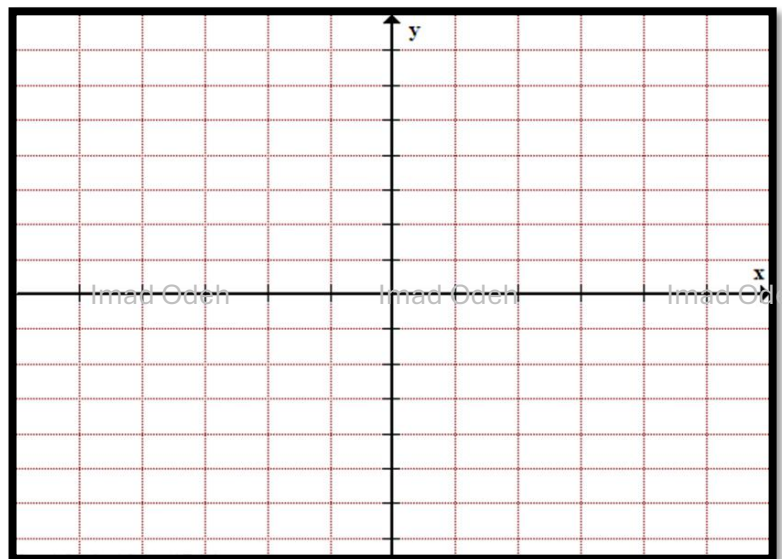
$f(0) = 0, f'(x) > 0$ for $x < -1$ and $-1 < x < 1, f'(x) < 0$
for $x > 1, f''(x) > 0$ for $x < -1, 0 < x < 1$ and $x > 1,$
 $f''(x) < 0$ for $-1 < x < 0$



Q40 sketch a graph of a function with the given properties.

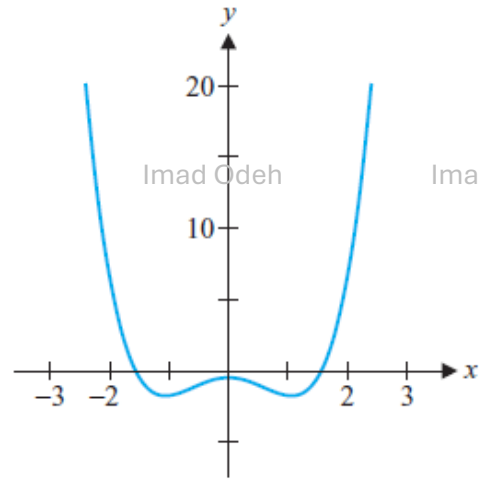
س ارسم بيان الدالة التي لها الخواص التالية

$f(1) = 0, f'(x) < 0$ for $x < 1, f'(x) > 0$ for $x > 1,$
 $f''(x) < 0$ for $x < 1$ and $x > 1$



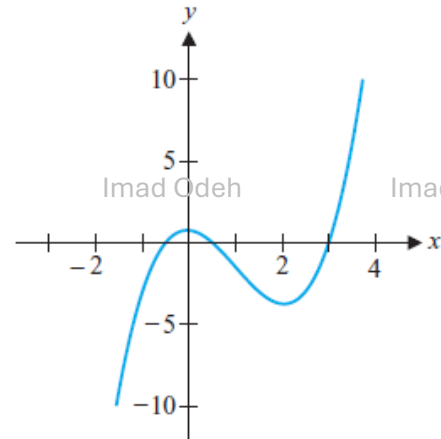
- Q45 a) Estimate the intervals of increase and decrease,
b) the locations of local extrema,
c) intervals of concavity and locations of inflection points.

س قدر فترات التزايد وفترات التناقص
قيم x التي عندها قيم قصوى محلية
فترات التفرع لأعلى وفترات التفرع لأسفل
نقاط الانعطاف



- Q46 a) Estimate the intervals of increase and decrease,
b) the locations of local extrema,
c) intervals of concavity and locations of inflection points.

س قدر فترات التزايد وفترات التناقص
قيم x التي عندها قيم قصوى محلية
فترات التفرع لأعلى وفترات التفرع لأسفل
نقاط الانعطاف



سئلة سنوات سابقة وأخرى

س1 اوجد نقاط الانعطاف ل Find the inflection point of Q1

$$f(x) = x^4 + 12x^3 - x$$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

س2 اوجد نقاط الانعطاف ل Find the inflection point of Q2

$$f(x) = x^4 - 6x^2 - 2x + 3$$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

س3 اوجد نقاط الانعطاف ل Find the inflection point of Q3

$$f(x) = 2x^3 + 9x^2 - 24x - 10$$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Q4 Find the inflection point of

س4 اوجد نقاط الانعطاف لـ

$$f(x) = \tan^{-1}(x^2)$$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

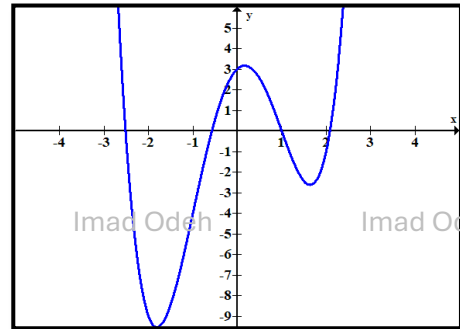
Imad Odeh

Imad Odeh

Q5 Determine where the graph of the function $f(x)$ is concave up

س5 حدد اين يكون التمثيل البيان للدالة $f(x)$ مقعرا لأعلى

$$f(x) = x^4 - 6x^2 + 2x + 3$$



Imad Odeh

Imad Odeh

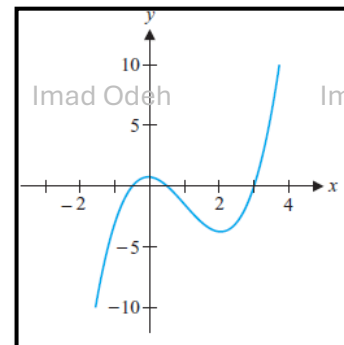
Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Q6 Determine where the graph of the function $f(x)$ is concave up

س6 حدد اين يكون التمثيل البيان للدالة $f(x)$ مقعرا لأعلى



Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

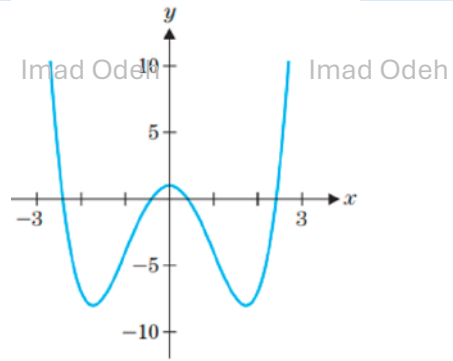
Q7 Determine where the graph of the function $f(x)$ is concave down

س7 حدد أين يكون التمثيل البياني للدالة $f(x)$ مقعرا للأسفل

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh



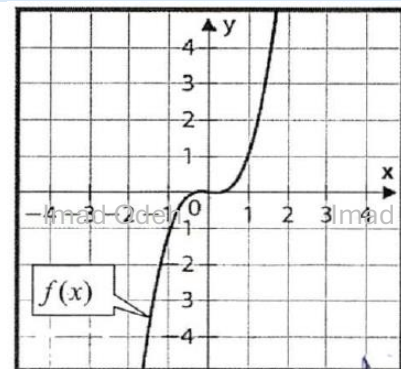
Q8 Estimate the interval(s) where the curve of the $f(x)$ concave up and where concave down

س8 قدر الفترات التي يكون فيها التمثيل البياني للدالة $f(x)$ مقعرا لأعلى والفترات التي يكون فيها مقعرا لأسفل

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh



Q9 Suppose f is a polynomial function such that

س9 لتكن f دالة حدودية بحيث

$$f'(-3) = 0, f''(-3) = -25$$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Q10 What is the coordinate of inflection point where the function change from concave down to concave upward

س10 اوجد احداثي نقطة الانعطاف التي يغير عندها منحنى الدالة من تقعره من تقعر الى الأسفل الى تقعر الى الأعلى

$$f(x) = \cos x - \sin x \quad \text{for } 0 \leq x \leq 2\pi$$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Q11 Find the interval where $f(x)$ will be concave upward If

س11 اوجد فترات التقعر للأعلى إذا علمت ان

$$f'(x) = x^2 - 4x - 5 ,$$

Imad Odeh

Imad Odeh

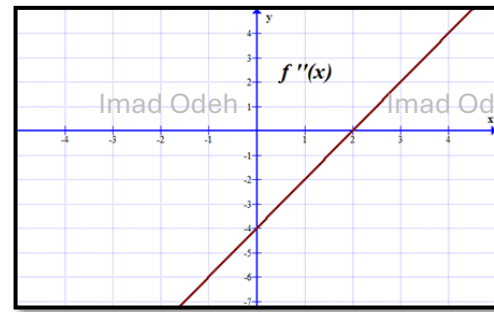
Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

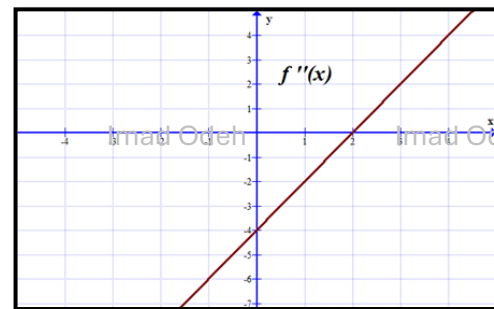
Q12 The graph represents $f''(x)$
Find the interval where $f(x)$ will be concave upward

س12 اعتمد على الرسم البياني الذي يمثل $f''(x)$
اوجد فترات التقعر للأعلى



Q13 The graph represents $f''(x)$
Find the inflection point

س13 اعتمد على الرسم البياني الذي يمثل $f''(x)$ اوجد
نقاط الانعطاف



Q14 If the graph of $f(x)$ has inflection point at $(1, -2)$ find the value of a and b

س14 إذا كان الرسم البياني للدالة $f(x)$ نقطة انعطاف عند $(1, -2)$ اوجد قيمة كل من a و b

$$f(x) = ax^3 - 6x^2 + bx - 7$$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

3.6 OVERVIEW OF CURVE SKETCHING

Steps that you should take when trying to draw a graph of $y = f(x)$.	الخطوات التي يجب اتباعها لرسم منحنى الدالة $y = f(x)$.
- Domain - Vertical Asymptotes - First Derivative Information - Vertical Tangent Lines - Second Derivative Information - Horizontal Asymptotes - Intercepts	- حدد المجال - اوجد المقاربات العمودية - اوجد المشتقة الأولى ونتائجها - اوجد المماسات العمودية - اوجد المشتقة الثانية ونتائجها - اوجد المقاربات الافقية - اوجد المقاطع مع المحاور

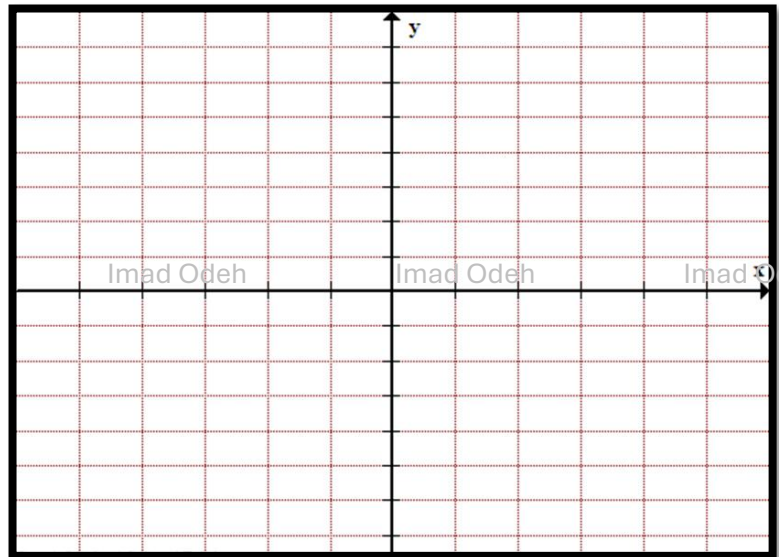
EXAMPLE 6.1

Draw a graph of $f(x)$ showing all significant features.

مثال 6-1

ارسم بيان الدالة $f(x)$ مبيناً جميع خصائصها

$$f(x) = x^4 + 6x^3 + 12x^2 + 8x + 1,$$

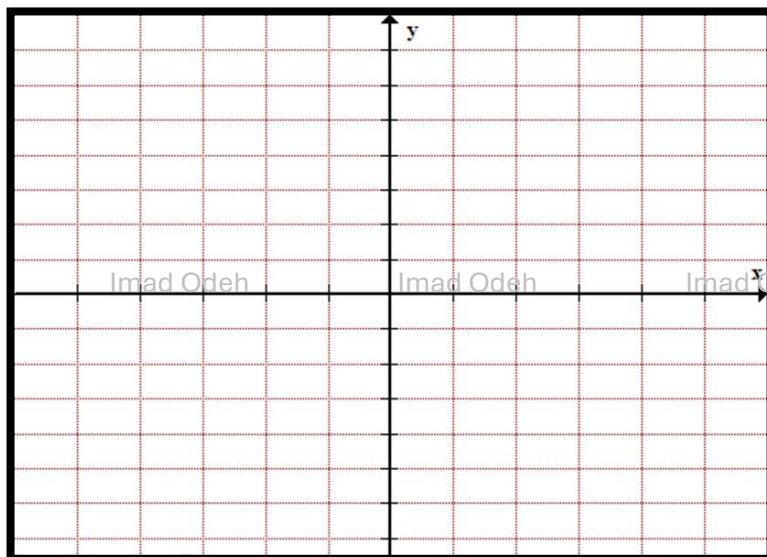


EXAMPLE 6.2

Draw a graph of $f(x)$ showing all significant features.

مثال 6-2
ارسم بيان الدالة $f(x)$ مبيناً جميع خصائصها

$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{x^3}$$



Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

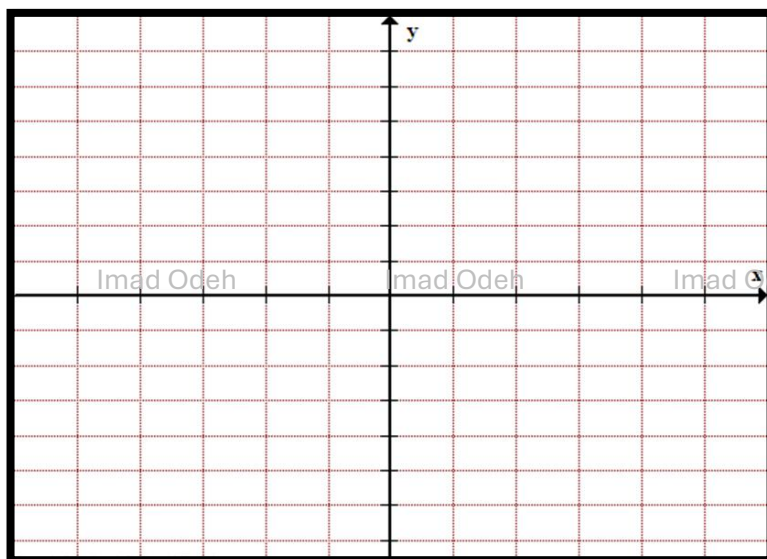
Imad Odeh

EXAMPLE 6.3

Draw a graph of $f(x)$ showing all significant features.

مثال 6-3
ارسم بيان الدالة $f(x)$ مبيناً جميع خصائصها

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4}$$



Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

أسئلة سنوات سابقة وأخرى

س1 اوجد جميع خطوط التقارب الرأسية للدالة
Q1 Find all vertical asymptotes of the function

$$f(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}$$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

س2 اوجد الدالة التي يكون لتمثيلها البياني خطوط التقارب
Q2 Find a function whose graph has the given asymptotes.

$$y = 8, x = 3, x = -8$$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

س3 اوجد الدالة التي يكون لتمثيلها البياني خطوط التقارب
Q3 Find a function whose graph has the given asymptotes.

$$y = 3, x = 1, x = 2$$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Q4 Find a function whose graph has the given asymptotes.

س4 اوجد الدالة التي يكون لتمثيلها البياني خطوط التقارب

$$y = -2, y = 2, x = 1, x = 1$$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

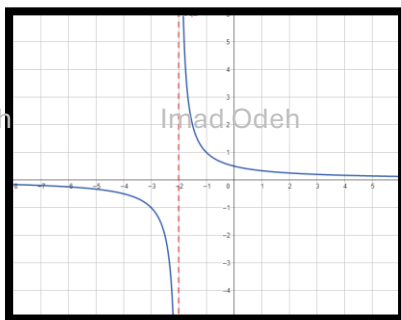
Imad Odeh

Q5 Determine the graph of the function

س5 حدد التمثيل البياني للدالة

$$f(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}$$

a)

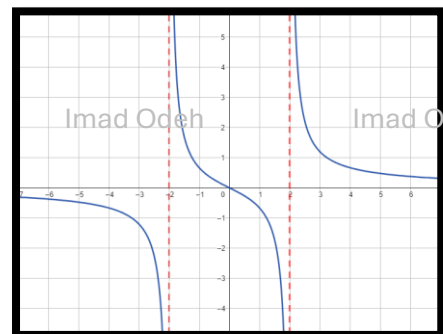


Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

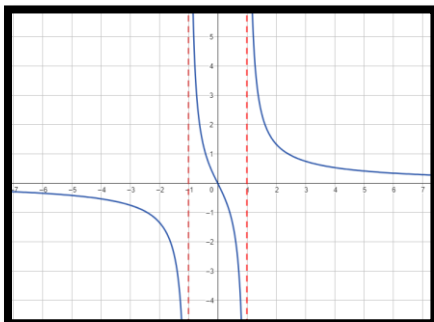
b)



Imad Odeh

Imad Odeh

c)

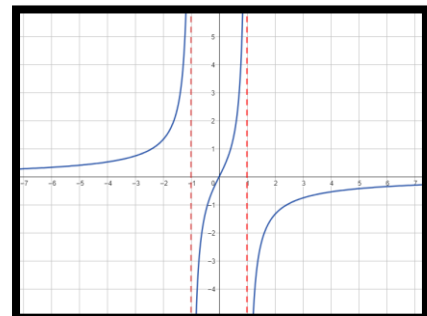


Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

d)



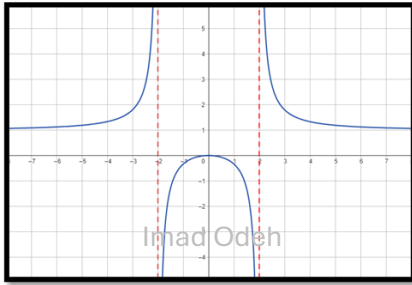
Imad Odeh

Imad Odeh

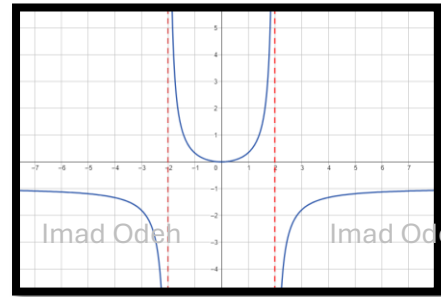
Q6 Determine the graph of the function

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4}$$

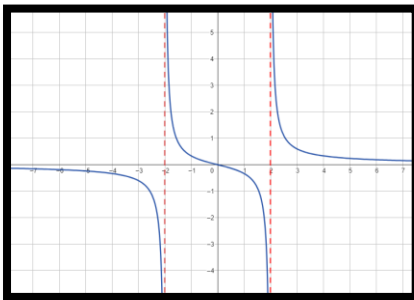
a)



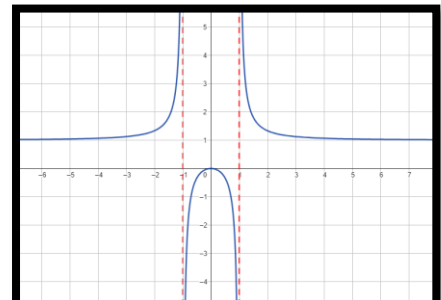
b)



c)



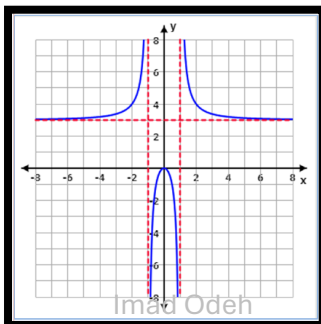
d)



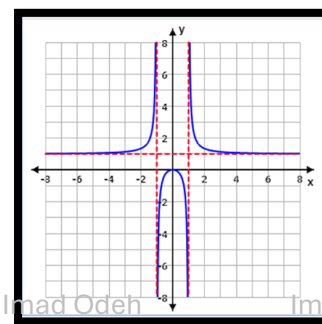
Q7 Determine the graph of the function

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}$$

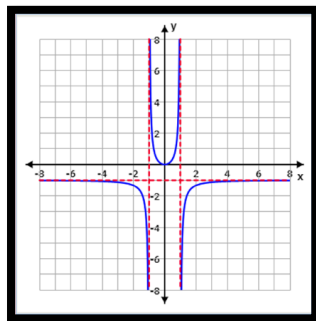
a)



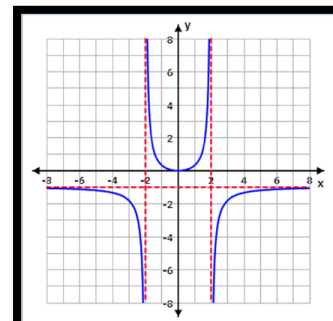
b)



c)

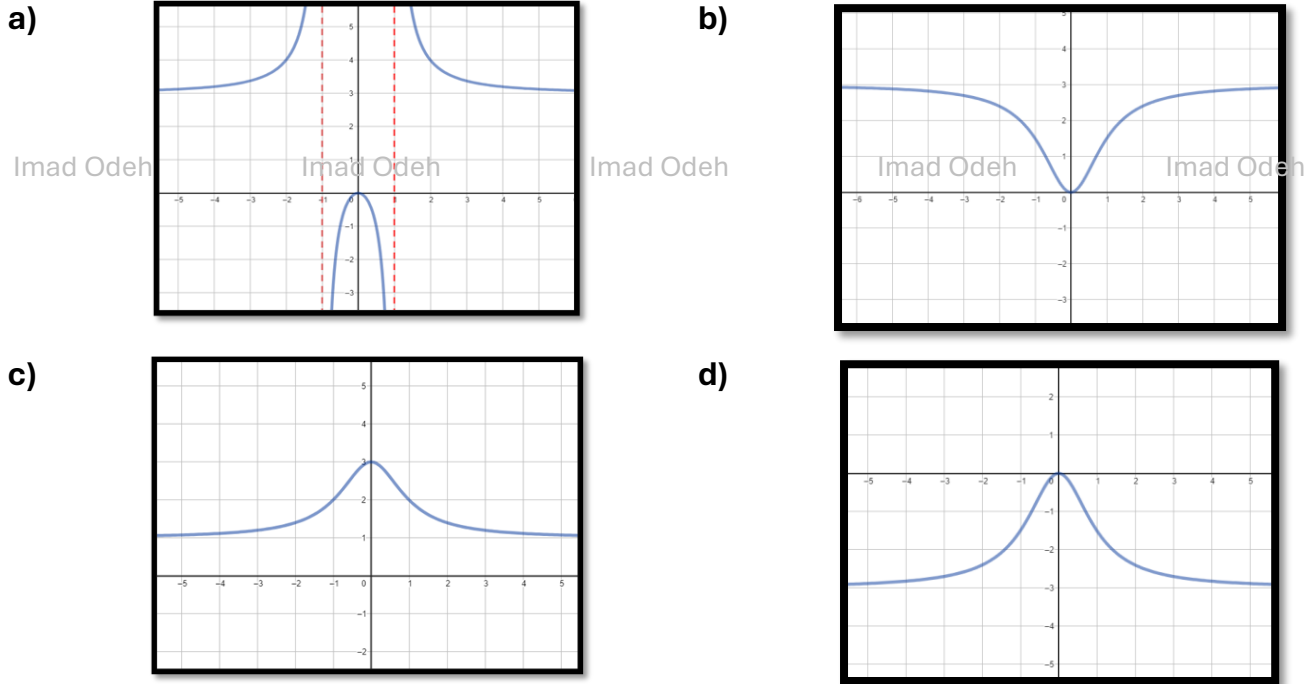


d)



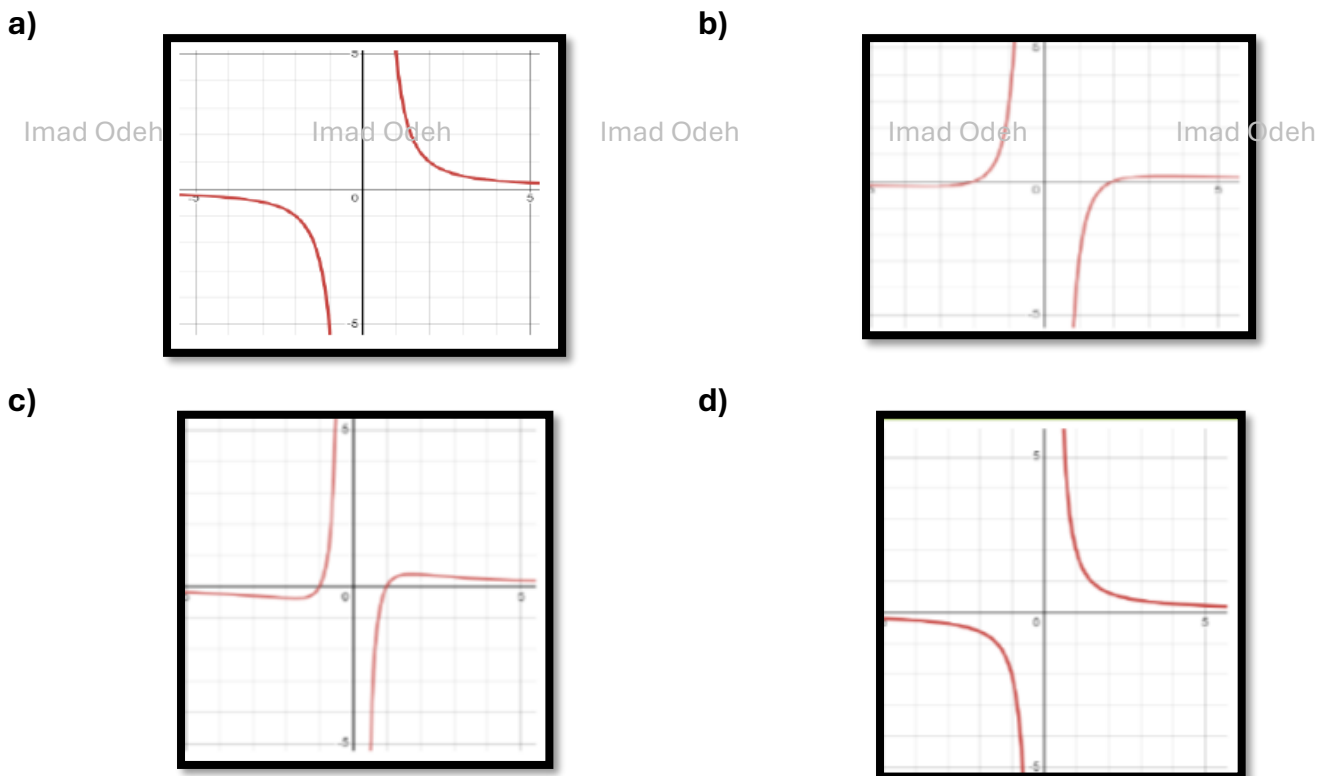
Q8 Determine the graph of the function

$$f(x) = \frac{3x^2}{x^2 + 1}$$



Q9 Determine the graph of the function

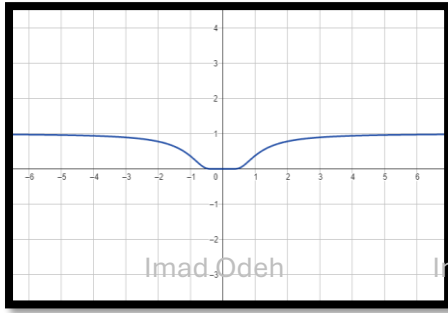
$$f(x) = \frac{x^2 + 4}{x^3}$$



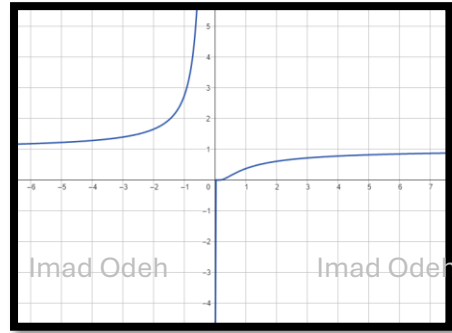
Q10 Determine the graph of the function

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}}$$

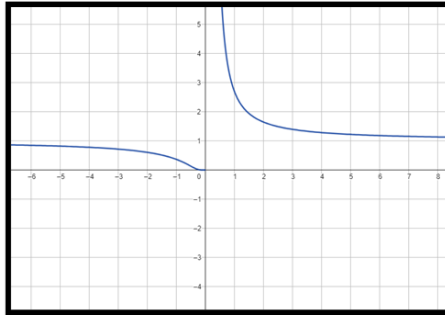
a)



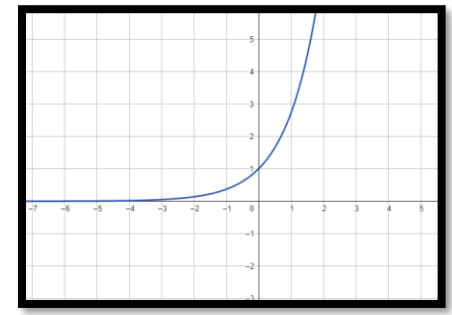
b)



c)



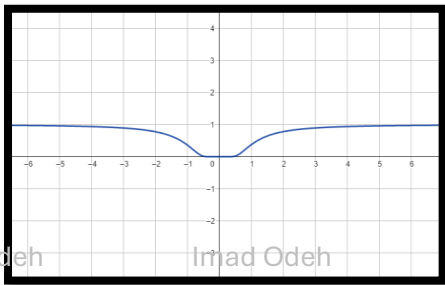
d)



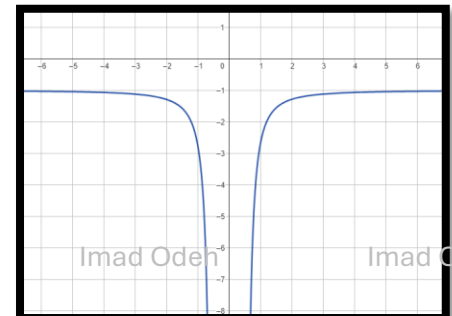
Q11 Determine the graph of the function

$$f(x) = e^{\frac{1}{x^2}}$$

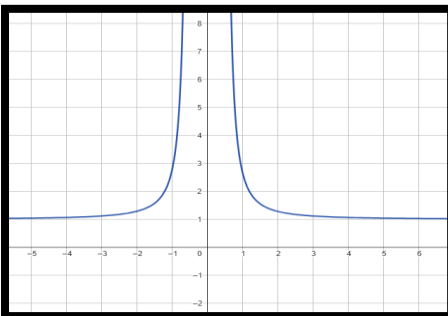
a)



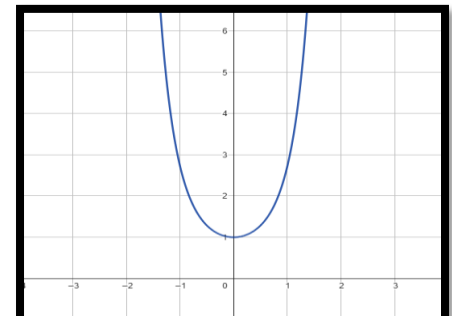
b)



c)



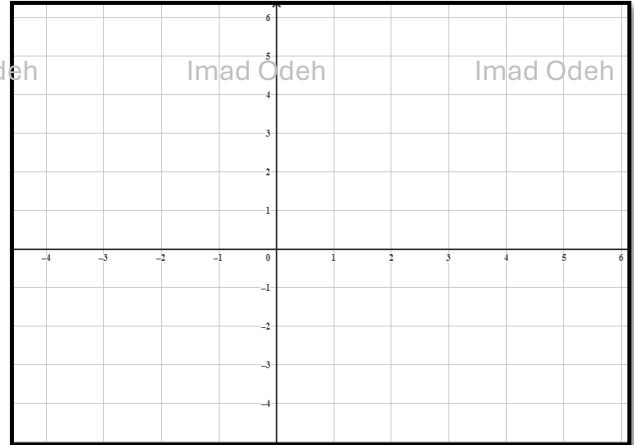
d)



Q12 graph the function

س12 مثل بيانيا

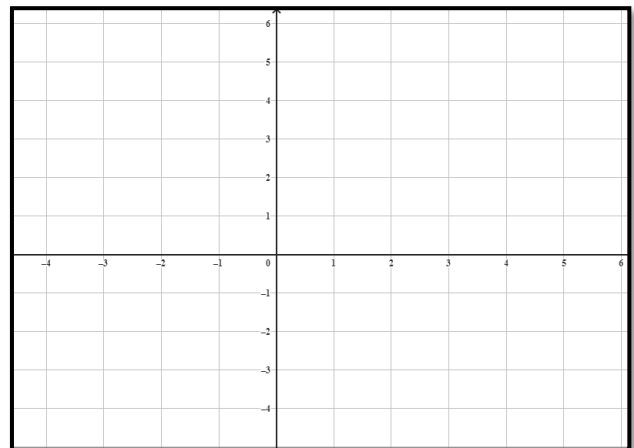
$$f(x) = \frac{x-4}{x^3}$$



Q13 Determine the graph of the function

س13 حدد التمثيل البياني للدالة

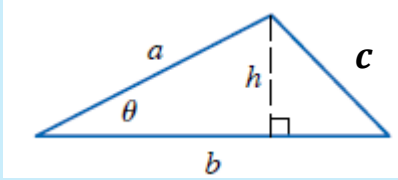
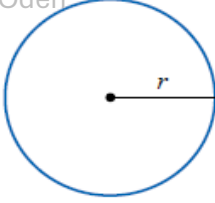
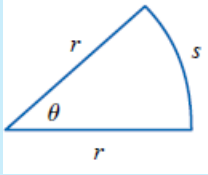
$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$$

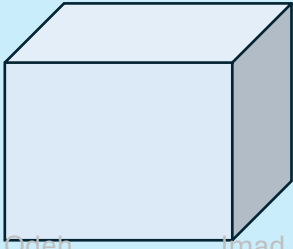
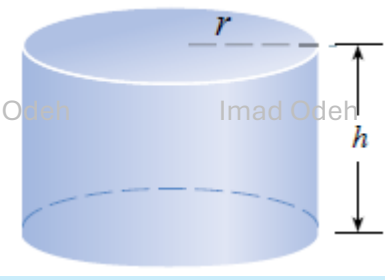
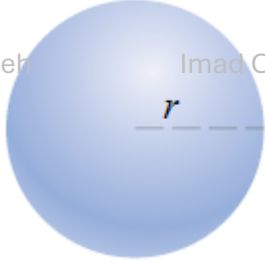
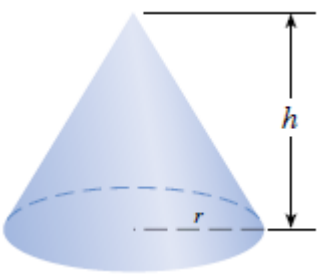


4.7

القيم المثلى

OPTIMIZATION

Shape الشكل	Area المساحة	Circumference/Perimeter المحيط
Square مربع 	$A = s^2$	$P = 4s$
Rectangle مستطيل 	$A = l w$	$P = 2l + 2w$
Triangle مثلث 	$A = \frac{1}{2} b h$ $A = \frac{1}{2} a b \sin \theta$	$P = a + b + c$
Circle دائرة 	$A = \pi r^2$	$c = 2 \pi r$
Sector قطاع دائري 	$A = \frac{1}{2} r^2 \theta$	$c = 2 r + s$ $s = r \theta$

Shape الشكل	Volume الحجم	Surface area المساحة السطحية
	$v = s^3$	$A = 6s^2$
	$v = l w h$	$A = 2lw + 2lh + 2wh$
	$v = \pi r^2 h$	$A = 2\pi r h + 2\pi r^2$
	$v = \frac{4}{3} \pi r^3$	$A = 4\pi r^2$
	$v = \frac{1}{3} \pi r^2 h$	

• Draw a picture and label it • Determine what the variables are and how they are related. • Decide what quantity needs to be maximized or minimized. • Write an expression for the quantity to be maximized or minimized in terms of only <i>one</i> variable. • Determine the minimum and maximum allowable values (if any) of the variable you're using. • Solve the problem and be sure to answer the question that is asked.	• أقرأ المسألة جيداً، ثم أحدّد المعلومات اللازمة لحلّ المسألة. • أرسم مخططاً يُمثّل المسألة، ثم أدوّن عليه المعلومات المهمّة لحلّ المسألة، وأختار رمزاً يُمثّل الكمية التي أريد أن أجد لها أكبر قيمة أو أقل قيمة ورموزاً للكميات المتغيرة الأخرى في المسألة • حدد نوع المتغيرات والنوابت وحدد علاقة كل منها ببعضها البعض • حدد ما هو المطلوب إيجاد أصغر قيمة أو أكبر قيمة له • اكتب التعبير الذي يحدد المقدار المطلوب إيجاد أصغر قيمة له أو أكبر قيمة له بدلالة متغير واحد • حدد الحد الأدنى والحد الأقصى للقيم المسموح بها (إن وجدت) للمتغير الذي تستخدمه (حدد المجال). • اوجد المشتقة الأولى • أجد القيم التي تكون عندها مشتقة الدالة صفراً أو غير موجودة، وقيمتي الدالة عند طرفي الفترة
--	---

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

EXAMPLE 7.1

You have 40 (linear) feet of fencing with which to enclose a rectangular space for a garden. Find the largest area that can be enclosed with this much fencing and the dimensions of the corresponding garden.

مثال 7-1

لديك 40 قدماً من السياج الذي يمكنك إحاطة مساحة مستطيلة به لحديقة. اوجد عن أكبر مساحة يمكن إحاطتها بهذا القدر من السياج وأبعاد الحديقة.

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

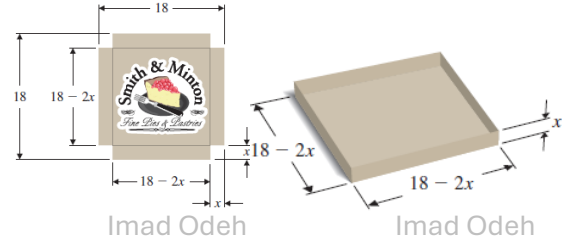
Imad Odeh

EXAMPLE 7.2

A square sheet of cardboard 18'' on a side is made into an open box (i.e., there's no top), by cutting squares of equal size out of each corner and folding up the sides along the dotted lines. Find the dimensions of the box with the maximum volume.

مثال 7-2

يراد صناعة صندوق مفتوح من الأعلى بواسطة ورقة مربعة من الورق المقوى طول ضلعها 18 بوصة عن طريق قطع مربعات متساوية الحجم من كل زاوية وطوي الأضلاع. أوجد أبعاد الصندوق ذو أكبر حجم.



Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

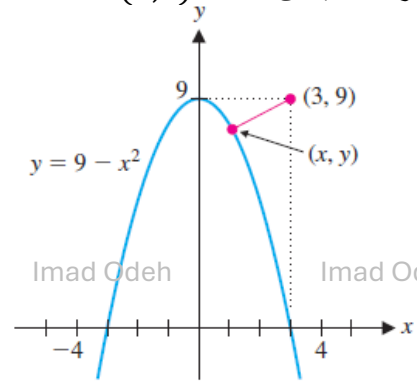
Imad Odeh

EXAMPLE 7.3

Find the point on the parabola $y = 9 - x^2$ closest to the point (3, 9).

مثال 7-3

أوجد نقطة على منحنى الدالة $y = 9 - x^2$ والتي تكون أقرب ما يمكن للنقطة (3,9)



Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

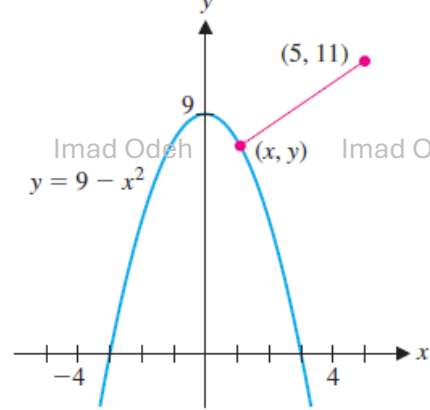
Imad Odeh

EXAMPLE 7.4

Find the point on the parabola $y = 9 - x^2$ closest to the point $(5, 11)$.

مثال 7-4

أوجد نقطة على منحنى الدالة $y = 9 - x^2$ والتي تكون أقرب ما يمكن للنقطة $(5, 11)$



Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

EXAMPLE 7.5

A soda can is to hold 12 fluid ounces. Find the dimensions that will minimize the amount of material used in its construction, assuming that the thickness of the material is uniform (i.e., the thickness of the aluminum is the same everywhere in the can).

مثال 7-5

يجب أن تتسع علبة الصودا لـ 12 أونصة سائلة. ابحث عن الأبعاد التي ستقلل من كمية المواد المستخدمة في تصنيعها، على افتراض أن سمك المادة موحد (أي أن سمك الألومنيوم هو نفسه في كل مكان في العلبة).



Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

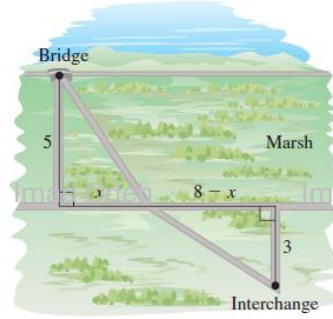
Imad Odeh

EXAMPLE 7.5

The state wants to build a new stretch of highway to link an existing bridge with a turnpike interchange, located 8 miles to the east and 8 miles to the south of the bridge. There is a 5-mile-wide stretch of marshland adjacent to the bridge that must be crossed. Given that the highway costs \$10 million per mile to build over the marsh and only \$7 million per mile to build over dry land, how far to the east of the bridge should the highway be when it crosses out of the marsh?

مثال 7-5

تريد الولاية بناء امتداد جديد من الطريق السريع لربط جسر قائم بتقاطع طريق سريع يقع على بعد 8 أميال إلى الشرق و 8 أميال إلى الجنوب من الجسر. هناك امتداد من الأراضي المستنقعية بعرض 5 أميال بجوار الجسر يجب عبوره. نظرًا لأن تكلفة بناء الطريق السريع 10 ملايين دولار لكل ميل فوق المستنقع و 7 ملايين دولار فقط لكل ميل فوق الأراضي الجافة، فإلى أي مدى يجب أن يكون الطريق السريع شرق الجسر عندما يعبر المستنقع؟



Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

EXERCISES 3.7

- Q1** A three-sided fence is to be built next to a straight section of river, which forms the fourth side of a rectangular region. The enclosed area is equal 1800 ft^2 . Find the minimum perimeter and the dimensions of the corresponding enclosure.

س1 سيتم بناء سياج ثلاثي الجوانب بجوار قسم مستقيم من النهر، والذي يشكل الجانب الرابع لمنطقة مستطيلة الشكل. المساحة المغلقة تساوي 1800 قدم مربع. أوجد الحد الأدنى للمحيط وأبعاد المنطقة المغلقة المقابلة.

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh



Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Q2 A three-sided fence is to be built next to a straight section of river, which forms the fourth side of a rectangular region. There is 96 feet of fencing available. Find the maximum enclosed area and the dimensions of the corresponding enclosure.

س2 سيتم بناء سياج ثلاثي الجوانب بجوار قسم مستقيم من النهر، والذي يشكل الجانب الرابع لمنطقة مستطيلة الشكل. يتوفر سياج بطول 96 قدمًا. ابحث عن أقصى مساحة محاطة وأبعاد السياج المقابل.



Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Q3 A two-pen corral is to be built. The outline of the corral forms two identical adjoining rectangles. If there is **120 ft** of fencing available, what dimensions of the corral will maximize the enclosed area?

س3 سيتم بناء حظيرة ذات حجرتين. يشكل مخطط الحظيرة مستطيلين متجاورين متطابقين. إذا كان هناك 120 قدمًا من السياج المتاح، فما أبعاد الحظيرة التي ستزيد من مساحة المنطقة المغلقة إلى أقصى حد؟

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Q4 A showroom for a department store is to be rectangular with walls on three sides, $6 - ft$ door openings on the two facing sides and a $10 - ft$ door opening on the remaining wall. The showroom is to have $800 ft^2$ of floor space. What dimensions will minimize the length of wall used?

س4 صالة عرض مكونة من ثلاثة جدران بحيث يكون هناك بوابتان عرض كل منها $6ft$ في الجدارين المتقابلين وبوابة أخرى في الجدار الثالث عرضها $10ft$ إذا كانت مساحة صالة العرض $800ft^2$ اوجد ابعاد الصالة بحيث يكون طول الجدران اقل ما يمكن؟

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Q5 Show that the rectangle of maximum area for a given perimeter P is always a square.

س5 أثبت أن المستطيل الذي له أقصى مساحة لمحيط معين P يكون دائماً مربعاً.

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

- س6 أثبت أن المستطيل الذي له الحد الأدنى من المحيط لمساحة معينة A يكون دائمًا مربعًا.
- Q6 Show that the rectangle of minimum perimeter for a given area A is always a square.

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

- س7 يمكن صنع صندوق بدون غطاء من خلال أخذ ورقة من الورق المقوى مقاس 10×6 ، وقطع مربعات مقاس x بوصة من كل زاوية وطي الجوانب. أوجد قيمة x التي تزيد من حجم الصندوق إلى أقصى حد.
- Q7 A box with no top is to be built by taking a $6'' - by - 10''$ sheet of cardboard, cutting $x - in.$ squares out of each corner and folding up the sides. Find the value of x that maximizes the volume of the box.

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

- Q8 A box with no top is to be built by taking a $12'' - by - 16''$ sheet of cardboard, cutting x -in. squares out of each corner and folding up the sides. Find the value of x that maximizes the volume of the box.
- س8 يمكن صنع صندوق بدون غطاء من خلال أخذ ورقة من الورق المقوى مقاس 16×12 بوصة، وقطع مربعات مقاس x بوصة من كل زاوية وطي الجوانب. أوجد قيمة x التي تزيد من حجم الصندوق إلى أقصى حد.

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

- Q9 a) A box with no top is built by taking a $6'' - by - 6''$ piece of cardboard, cutting $x - in.$ squares out of each corner and folding up the sides. The four x -in. squares are then taped together to form a second box (with no top or bottom). Find the value of x that maximizes the sum of the volumes of the boxes.
- س9 (أ) يمكن بناء صندوق بدون غطاء عن طريق أخذ قطعة من الورق المقوى مقاس 6×6 ، وقطع مربعات مقاس x بوصة من كل زاوية وطي الجوانب. ثم يتم لصق المربعات الأربعة مقاس x بوصة معًا لتكوين صندوق ثانٍ (بدون غطاء أو قاع). أوجد قيمة x التي تزيد من مجموع أحجام الصناديق إلى الحد الأقصى.
- b) Repeat the problem starting with a $4'' - by - 6''$ piece of cardboard.
- (ب) كرر المسألة بدءًا من قطعة من الورق المقوى مقاس 6×4 .

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Q10 Find the point on the curve $y = x^2$ closest to the point $(0, 1)$.

س10 اوجد نقطة على منحنى الدالة $y = x^2$ والتي تكون أقرب ما يمكن للنقطة $(0,1)$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Q11 Find the point on the curve $y = x^2$ closest to the point $(3, 4)$.

س11 اوجد نقطة على منحنى الدالة $y = x^2$ والتي تكون أقرب ما يمكن للنقطة $(3,4)$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

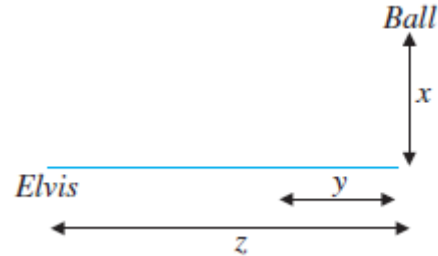
Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Q12 Elvis the dog stands on a shoreline while a ball is thrown $x = 4$ meters into the water and $z = 8$ meters down shore. If he runs 6.4 m/s and swims 0.9 m/s , find the place (y) at which he should enter the water to minimize the time to reach the ball. Show that you get the same y -value for any $z > 1$.

س12 يقف الكلب الفيس على الشاطئ بينما يتم رمي كرة $x = 4$ أمتار في الماء و $z = 8$ أمتار في اتجاه الشاطئ. إذا ركض بسرعة ثانية/متر 6.4 وسبح بسرعة ثانية/متر 0.9، فابحث عن المكان (y) الذي يجب أن يدخل فيه الماء لتقليل الوقت اللازم للوصول إلى الكرة. أظهر أنك حصلت على نفس قيمة y لأي $z > 1$.



Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Q13 Suppose a wire 2 ft long is to be cut into two pieces, each of which will be formed into a square. Find the size of each piece to maximize the total area of the two squares.

س13 افترض أن سلكاً طوله 2 قدم سيتم قطعه إلى قطعتين، كل منهما سيتم تشكيلها على شكل مربع. أوجد حجم كل قطعة لتعظيم المساحة الإجمالية للمربعين.

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Q14 An advertisement consists of a rectangular printed region plus $1 - in.$ margins on the sides and $2 - in.$ margins at top and bottom. If the area of the printed region is to be $92 in^2$, find the dimensions of the printed region and overall advertisement that minimize the total area.

س14 يتكون الإعلان من منطقة مطبوعة مستطيلة بالإضافة إلى هوامش 1 بوصة على الجانبين وهوامش 2 بوصة في الأعلى والأسفل. إذا كانت مساحة المنطقة المطبوعة 92 بوصة مربعة، فابحث عن أبعاد المنطقة المطبوعة والإعلان الإجمالي الذي يقلل المساحة الإجمالية.

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Q15 An advertisement consists of a rectangular printed region plus 1-in. margins on the sides and 1.5-in. margins at top and bottom. If the total area of the advertisement is to be 120 in.², what dimensions should the advertisement be to maximize the area of the printed region?

س15 يتكون الإعلان من منطقة مطبوعة مستطيلة بالإضافة إلى هوامش 1 بوصة على الجانبين وهوامش 1.5 بوصة في الأعلى والأسفل. إذا كانت المساحة الإجمالية للإعلان 120 بوصة مربعة، فما هي الأبعاد التي يجب أن تكون عليها الإعلان لتحقيق أقصى قدر من مساحة المنطقة المطبوعة؟

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

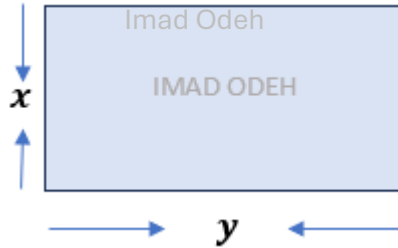
أسئلة سنوات سابقة و أخرى

- Q1 1س A circular sector with a perimeter of **12 cm**. Find the length of the radius of its circle, which makes its area as large as possible. Note that the area of the sector is given by
- قطاع دائري محيطه **12 cm** اوجد طول نصف قطر دائرته والتي تجعل مساحته أكبر ما يمكن علما ان مساحة القطاع تعطي بالعلاقة

$$A = \frac{1}{2}rl ,$$



- Q2- 2س You have **60 m** fencing with which to enclose a rectangular space for a garden. Find the dimensions of the garden to get the largest area that can be enclosed by this fence.
- لديك سياج طوله **60m** لتحيط به حديقة مستطيلة الشكل. اوجد ابعاد الحديقة لتحصل على أكبر مساحة ممكنة يمكن احاطتها بهذا السياج



Q3- A box with no top is to be built by taking a 12 by 16 sheet of cardboard, cutting x in. squares out of each corner and folding up the sides. Find the value of x that maximizes the volume of the box.

س 3 يراد صنع صندوق مفتوح من الأعلى باستخدام قطعة من الكرتون طولها 16 in وعرضها 12 in وذلك بقطع مربعات متساوية طول ضلع كل منها يساوي x in عند كل زاوية من زواياها ثم يتم ثنيها للحصول على الصندوق اوجد قيمة x والتي تجعل حجم الصندوق ابر ما يمكن

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh



Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Q4 A rectangle has length x m and its perimeter is 20 m What is the maximum area of such a rectangle?

س 4 مستطيل طوله x متر ومحيطه يساوي 20 m اوجد أكبر مساحة للمستطيل



Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

- Q5 The energy required for a bird to fly at speed v is proportional to P . Find v that satisfies the largest value of energy.
- س5 الطاقة اللازمة لطائر لكي يطير بسرعة v تتناسب مع P . اوجد v التي تحقق القيمة الصغرى للطاقة

$$P = \frac{1}{v} + cv^3, \quad c > 0$$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

- Q6 Find the maximum area of a rectangle having a base on the x-axis and upper vertices on the parabola
- س6 اوجد مساحة المستطيل ذو أكبر مساحة والذي يقع رأسين من رؤوسه على محور x والرأسان الآخران على منحنى الدالة

$$y = 12 - x^2$$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

المعدلات المرتبطة

3.8 RELATED RATES

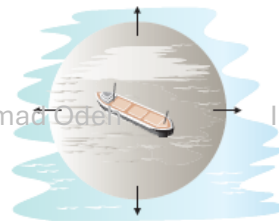
1. Make a simple sketch, if appropriate. 2. Set up an equation relating all of the relevant quantities. 3. Differentiate (implicitly) both sides of the equation with respect to time (t). 4. Substitute in values for all known quantities and derivatives. 5. Solve for the remaining rate.	1. أقرأ المسألة جيداً، ثم أحدد المتغير الذي أريد إيجاد معدل تغيره، ومعدلات التغير المعطاة. 2. أرسم مخططاً يُمثل المسألة، ثم أدون عليه المعلومات المهمة لحل المسألة، مثل: الكميات الثابتة، والكميات المتغيرة بمرور الزمن. 3. أكتب معادلة تربط بين المتغير الذي أريد إيجاد معدل تغيره والمتغيرات التي علمتُ معدلات تغيرها. 4. أستعمل قاعدة السلسلة والاشتقاق الضمني لإيجاد مشتقة طرفي المعادلة بالنسبة إلى t. المتغير الوسيط 5. أعوض في المعادلة الناتجة جميع القيم المعروفة للمتغيرات ومعدلات تغيرها، 6. أحل المعادلة تبعاً لمعدل التغير المطلوب إيجاده.

EXAMPLE 8.1

An oil tanker has an accident, and oil pours out at the rate of **150** gallons per minute. Suppose that the oil spreads onto the water in a circle at a thickness of $\frac{1}{10}$ " Given that 1 ft³ equals **7.5** gallons, determine the rate at which the radius of the spill is increasing when the radius reaches **500 feet**.

مثال 8-1

تعرضت ناقلة نفط لحادث وتسرب النفط بمعدل 150 جالون /دقيقة على فرض ان النفط ينتشر على الماء في دائرة بسُمك $\frac{1}{10}$ " اعتبر ان **1ft³** يساوي جالون **7.5** اوجد معدل تزايد نصف قطر التسرب عند وصول القطر الى **500ft**



EXAMPLE 8.2

A **10 ft** ladder leans against the side of a building. If the top of the ladder begins to slide down the wall at the rate of **2 ft/sec**, how fast is the bottom of the ladder sliding away from the wall when the top of the ladder is **8 ft** off the ground?

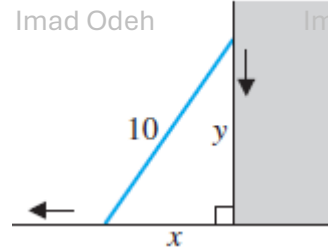
Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh



Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

مثال 8-2

يرتكز سلم بطول **10 ft** على جانب المبنى. إذا بدأ الجزء العلوي من السلم في الانزلاق إلى أسفل الجدار بمعدل **2 ft/sec**، فما سرعة انزلاق الجزء السفلي من السلم مبتعداً عن الحائط عندما يكون الجزء العلوي من السلم مرتفعاً عن الأرض بـ **8 ft**؟

EXAMPLE 8.3

A car is traveling at 50 mph due south at a point $\frac{1}{2}$ mile north of an intersection. A police car is traveling at 40 mph due west at a point $\frac{1}{4}$ mile east of the same intersection. At that instant, the radar in the police car measures the rate at which the distance between the two cars is changing. What does the radar gun register?

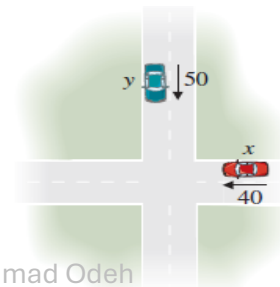
Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh



مثال 8-3

تسير سيارة شرطة بسرعة **50mph** تجاه الجنوب من نقطة تبعد شمال التقاطع $\frac{1}{2}$ mi. وتسير سيارة شرطة بسرعة **40mph** من نقطة تبعد شرق التقاطع $\frac{1}{4}$ mi. في هذه اللحظة، يقيس الرادار في سيارة الشرطة المعدل الذي تتغير به المسافة بين السيارتين. فما الذي سيسجله جهاز الرادار؟

EXAMPLE 8.4

A small company estimates that when it spends x thousand dollars for advertising in a year, its annual sales will be described by $s = 60 - 40e^{-0.05x}$ thousand dollars. The four most recent annual advertising totals are given in the following table.

Year	1	2	3	4
Advertising Dollars	14,500	16,000	18,000	20,000

Estimate the current (year 4) value of $x'(t)$ and the current rate of change of sales.

قدر القيمة الحالية (السنة 4) لـ $x'(t)$ والمعدل الحالي للتغير في المبيعات.

مثال 8-4

تقوم شركة صغيرة بتقدير أنه عند إنفاق ألف درهم على الإعلانات في السنة، فمن الممكن وصف مبيعاتها السنوية بالدالة $s = 60 - 40e^{-0.05x}$ ألف درهم. يوضح الجدول التالي آخر أربعة إجماليات للإعلانات السنوية.

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

EXAMPLE 8.5

A spectator at an air show is trying to follow the flight of a jet. The jet follows a straight path in front of the observer at **540 mph**. At its closest approach, the jet passes **600 feet** in front of the person. Find the maximum rate of change of the angle between the spectator's line of sight and a line perpendicular to the flight path, as the jet flies by.

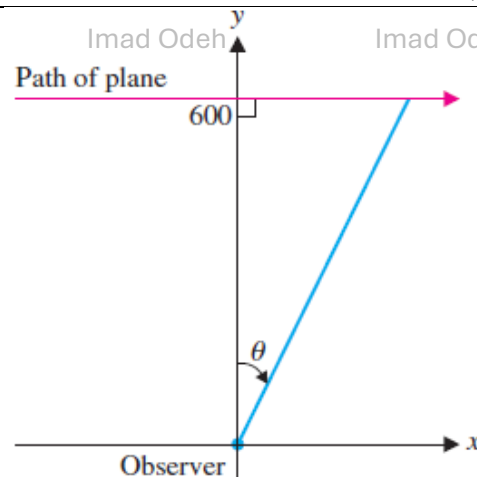
مثال 8-5

يحاول مراقب عرض جوي تتبع رحلة لطائرة نفثة. تسير الطائرة النفثة في خط مستقيم أمام المراقب بسرعة **540 mph**. وعند أقرب نقطة لها، تمر الطائرة النفثة أمام المراقب على بعد **600 feet** جد معدل تغير الزاوية بين خط نظر المراقب والخط العمودي على مسار الطيران، عند مرور الطائرة النفثة به.

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh



EXERCISES 3.8 تمارين

- س1 افتراض أن المنطقة المصابة دائرية.
 (أ) إذا كان نصف قطر المنطقة المصابة 3 مم وينمو بمعدل 1 مم/ساعة، فما معدل زيادة المنطقة المصابة؟
 (ب) أوجد معدل زيادة المنطقة المصابة عندما يصل نصف القطر إلى 6 مم. اشرح بمصطلحات منطقية لماذا يكون هذا المعدل أكبر من المعدل في الجزء (أ).
- Q1 Assume that the infected area of an injury is circular.
 (a) If the radius of the infected area is **3 mm** and growing at a rate of **1 mm/hr**, at what rate is the infected area increasing?
 (b) Find the rate of increase of the infected area when the radius reaches **6 mm**. Explain in commonsense terms why this rate is larger than that of part (a).

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

- س2 حريق في الغابة ينتشر في دائرة يتغير نصف قطرها بمعدل 5 أقدام في الدقيقة. اوجد معدل تزايد مساحة المنطقة المحترقة عندما يصل نصف القطر إلى 200 قدم؟
- Q2 Suppose a forest fire spreads in a circle with radius changing at a rate of **5 feet per minute**. When the radius reaches **200 feet**, at what rate is the area of the burning region increasing?

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

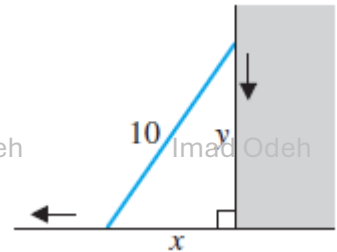
Imad Odeh

- Q3** A **10 ft** ladder leans against the side of a building. If the bottom of the ladder is pulled away from the wall at the rate of **3 ft/s** and the ladder remains in contact with the wall,
- (a) find the rate at which the top of the ladder is dropping when the bottom is **6 ft** from the wall.
- (b) Find the rate at which the angle between the ladder and the horizontal is changing when the bottom of the ladder is **6 ft** from the wall.

س3 يتكئ سلم طوله **10 أقدام** على جانب مبنى. إذا تم سحب الجزء السفلي من السلم بعيداً عن الحائط بمعدل **3 أقدام/ثانية** وظل السلم على اتصال بالحائط،

(أ) أوجد المعدل الذي ينخفض به الجزء العلوي من السلم عندما يكون الجزء السفلي على بعد **6 أقدام** من الحائط.

(ب) أوجد المعدل الذي تتغير به الزاوية بين السلم والأفقي عندما يكون الجزء السفلي من السلم على بعد **6 أقدام** من الحائط.



Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

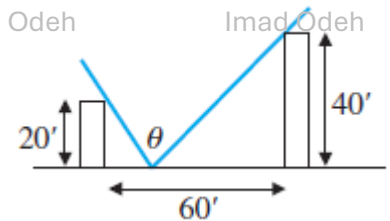
Imad Odeh

- Q4** Two buildings of height **20 feet** and **40 feet**, respectively, are **60 feet** apart. Suppose that the intensity of light at a point between the buildings is proportional to the angle θ in the figure.
- (a) If a person is moving from right to left at **4 ft/s**, at what rate is θ changing when the person is exactly halfway between the two buildings?
- (b) Find the location at which the angle θ is maximum.

س4 مبنيان ارتفاعهما **20** قدماً و **40** قدماً على التوالي، ويفصل بينهما **60** قدماً. افترض أن شدة الضوء عند نقطة بين المبنيين تتناسب مع الزاوية θ في الشكل.

(أ) إذا كان شخص يتحرك من اليمين إلى اليسار بسرعة **4 أقدام/ثانية**، فما معدل تغير الزاوية θ عندما يكون الشخص في منتصف المسافة تماماً بين المبنيين؟

(ب) أوجد الموقع الذي تكون فيه الزاوية θ في أقصى حد لها.



Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Q5 A plane is located $x = 40$ miles (horizontally) away from an airport at an altitude of h miles. Radar at the airport detects that the distance $s(t)$ between the plane and airport is changing at the rate of $s'(t) = -240 \text{ mph}$.

(a) If the plane flies toward the airport at the constant altitude $h = 4$, what is the speed $|x'(t)|$ of the airplane?

(b) Repeat with a height of **6 miles**. Based on your answers, how important is it to know the actual height of the airplane?

س5 توجد طائرة على مسافة $x = 40$ ميلاً (أفقياً) من مطار على ارتفاع h أميال. يكتشف الرادار في المطار أن المسافة $s(t)$ بين الطائرة والمطار تتغير بمعدل $s'(t) = -240$ ميلاً في الساعة.
(أ) إذا طارت الطائرة باتجاه المطار على ارتفاع ثابت $h = 4$ ، فما سرعة $|x'(t)|$ الطائرة؟
(ب) كرر ذلك على ارتفاع **6 أميال**. بناءً على إجاباتك، ما مدى أهمية معرفة الارتفاع الفعلي للطائرة؟

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Q6- A camera tracks the launch of a vertically ascending spacecraft. The camera is located at ground level 2 miles from the launchpad. If the spacecraft is **3 miles** up and traveling at **0.2 mile per second**, at what rate is the camera angle (measured from the horizontal) changing?

س6 ترصد كاميرا انطلاق مركبة فضائية تنطلق عمودياً، إذا كانت الكاميرا على بعد 2 ميل من نقطة انطلاق المركبة أوجد سرعة تغير زاوية رصد المركبة إذا كانت سرعة انطلاق المركبة 0.2 ميل/الثانية عندما تكن على ارتفاع 3 ميل

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Q7- Sand is dumped such that the shape of the sandpile remains a cone with height equal to twice the radius. If the sand is dumped at the constant rate of $36ft^3/s$. Find the rate t which the radius is increasing when the height reaches $6 ft$.
(Hint: Cone volume $v = \frac{1}{3}\pi r^2 h$)

س 7 يسقط الرمل بحيث يشكل الرمل كومة على شكل مخروطي بارتفاع يساوي مثلي نصف القطر. إذا الرمل يسقط بمعدل ثابت قدره $36ft^3/s$ اوجد المعدل الذي يزداد فيه نصف القطر عندما يصل الارتفاع إلى 6 أقدام.

(تلميح: حجم المخروط $(v = \frac{1}{3}\pi r^2 h)$)

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Q8- A dock is $6 ft$ above water. Suppose you stand on the edge of the dock and pull a rope attached to a boat at the constant rate of $2 ft/s$. Assume that the boat remains at water level. At what speed is the boat approaching the dock when it is $20 ft$ from the dock?

س 8 رصيف على ارتفاع 6 أقدام فوق الماء. لنفترض أنك تقف على حافة الرصيف وتسحب حبلًا مربوطًا بقارب بمعدل ثابت قدره 2 قدم/ثانية. افترض أن القارب لا يزال عند مستوى الماء. ما السرعة التي يقترب بها القارب من الرصيف عندما يكون على بعد 20 قدمًا من الرصيف؟

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Q9- Suppose that you are blowing up a balloon by adding air at the rate of $1 \text{ ft}^3/\text{s}$. If the balloon maintains a spherical shape, the volume and radius are related by $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Compare the rate at which the radius is changing when $r = 0.01 \text{ ft}$ versus when $r = 0.1 \text{ ft}$.

س 9
لنفترض أنك تقوم بنفخ بالون بإضافة الهواء بمعدل $1 \text{ ft}^3/\text{s}$. إذا كان البالون يحتفظ بشكله الكروي، فإن الحجم ونصف القطر يرتبطان بـ $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. قارن معدل تغير نصف القطر عندما يكون $r = 0.01$ قدم مقابل عندما يكون $r = 0.1$ قدم

Imad Odeh

Imad Odeh

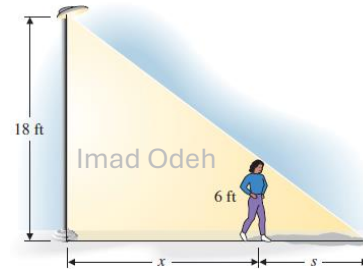
Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Q10- Suppose a 6-ft-tall person is 12 ft away from an 18 ft -tall lamppost. If the person is moving away from the lamppost at a rate of 2 ft/s , at what rate is the length of the shadow changing?

س 10
افترض أن شخصاً يبلغ طوله 6 أقدام يبعد 12 قدماً عن عمود إنارة طوله 18 قدماً. إذا كان الشخص يتحرك بعيداً عن عمود الإنارة بمعدل 2 ft/s ، فما المعدل الذي يتغير به طول الظل؟



Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Q11 Suppose a forest fire spreads in a circle with radius changing at a rate of $5 \text{ ft} / \text{min}$. When the radius reaches 200 ft , at what rate is the area of the burning region increasing?

س11 حريق غابات ينتشر على شكل دائرة حيث يتغير نصف قطرها بمعدل 5 ft/min . اوجد معدل تغير مساحة المنطقة المحترقة عندما يكون نصف قطرها 200 ft

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Q12 Sand is poured from the pipe with rate $9 \text{ m}^3/\text{s}$ So that formed a conical pile by a height equal to half the diameter of the base of the cone. Find the rate of increase in the height of the sand pile when it reaches a height of 3 meters .

س12 ينصب رمل من أنبوب بمعدل $9 \text{ m}^3/\text{sec}$ بحيث يشكل كومة مخروطية ارتفاعها يساوي نصف قطر قاعدة المخروط. اوجد معدل تزايد ارتفاع كومة الرمل عندما يكون ارتفاعها 3 m

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Q13 L and M two vertical roads in C, a gas station is **12 km** on M road from the intersection point C. If a car moves towards C with velocity **26 km/h**. find the rate of changing distance between the car and the station when car about 5 km from C

س13 L و M طريقان مستقيمان متعامدان في النقطة C. تقع محطة وقود على الطريق M وتبعد **12km** عن نقطة التقاطع C. إذا تحركت سيارة على الطريق L بسرعة **26 km/h** في اتجاه النقطة C , فما معدل تغير المسافة بين السيارة ومحطة الوقود عندما تكون السيارة على بعد **5 km** من نقطة التقاطع ؟

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Q14 An isosceles triangle **10 cm** each and the angle between them θ if the angle change with rate $\frac{\pi}{60} \text{ rad/min}$. Find the rate of change of the triangle area when $\theta = \frac{\pi}{3}$

س14 مثلث متطابق الضلعين طول كل من ضلعيه المتطابقين **10 cm** وقياس الزاوية بينهما θ إذا تغيرت θ بمعدل $\pi/60 \text{ rad/min}$ فان معدل تغير مساحة المثلث عندما $\theta = \pi/3$ هو

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Q15 The radius of a circle is changing at the rate of $\frac{1}{\pi} \text{ in/s}$.
At what rate is the circle's area changing when $r = 5 \text{ in}$?

س15 يتغير نصف قطر دائرة بمعدل $\frac{1}{\pi} \text{ in/s}$ اوجد معدل تغير مساحة الدائرة عندما يكون نصف قطرها 5cm

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

3.9

معدلات التغير في الاقتصاد والعلوم

RATES OF CHANGE IN ECONOMICS AND THE SCIENCES

EXAMPLE 9.1

مثال 9-1

Suppose that

على فرض أن

$$C(x) = 0.02x^2 + 2x + 4000$$

is the total cost (in dollars) for a company to produce x units of a certain product.

هو إجمالي التكلفة بالدرهم لشركة تنتج x وحدة من منتجات معينة. اوجد قيمة التكلفة

Compute the marginal cost at $x = 100$ and compare this to the actual cost of producing the 100^{th} unit

الحدية عند $x = 100$ وقارنها بالتكلفة الفعلية لإنتاج 100 وحدة.

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

EXAMPLE 9.2

مثال 9-2

Suppose that

على فرض أن

$$C(x) = 0.02x^2 + 2x + 4000$$

is the total cost (in dollars) for a company to produce x units of a certain product.

هي التكلفة الإجمالية (بالدولار) التي تتحملها الشركة لإنتاج x وحدات من منتج معين.

Find the production level x that minimizes the average cost

اوجد مستوى الإنتاج x الذي يحقق القيمة الصغرى لمتوسط التكلفة

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

EXAMPLE 9.2

مثال 9-2

Let $R(x)$ be the revenue and $C(x)$ be the cost of manufacturing x items. Profit is defined as

ليكن $R(x)$ هو الإيراد و $C(x)$ هو تكلفة تصنيع x من العناصر. يتم تعريف الربح على أنه

$$\begin{aligned} P(x) &= R(x) - C(x) \\ R(x) &= 10x - 0.001x^2 \\ C(x) &= 2x + 5000 \end{aligned}$$

Find the maximum profit

اوجد القيمة العظمى للأرباح

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

EXAMPLE 9.3

مثال 9-3

Suppose that

على فرض أن

$$f(p) = 400(20 - p)$$

is the demand for an item at price p (in AED) with $p < 20$.

هو طلب منتج معين بسعر p بالدرهم حيث $p < 20$ (أ) جد مرونة الطلب.

(a) Find the elasticity of demand.

(ب) اوجد مدى السعر التي تجعل $E < -1$

(b) Find the range of prices for which $E < -1$.

قارن مدى الأسعار الذي تكون فيه الإيرادات

Compare this to the range of prices for which revenue is a decreasing function of p .

دالة متناقصة ل p

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

EXAMPLE 9.4

In an autocatalytic chemical reaction, the reactant and the product are the same. The reaction continues until some saturation level is reached. From experimental evidence, chemists know that the reaction rate is jointly proportional to the amount of the product present and the difference between the saturation level and the amount of the product. If the initial concentration of the chemical is 0 and the saturation level is 1 (corresponding to 100%), this means that the concentration $x(t)$ of the chemical satisfies the equation

$$x'(t) = rx(t)[1 - x(t)], \text{ where } r > 0 \text{ is a constant.}$$

Find the concentration of chemical for which the reaction rate $x'(t)$ is a maximum

مثال 9-4

في التفاعل الكيميائي ذاتي التحفيز تتشابه المواد المتفاعلة والمنتج. يستمر التفاعل حتى الوصول إلى مستوى التشبع. يعرف الكيميائيين من الأدلة التجريبية أن سرعة التفاعل تتناسب مع قيمة المنتج المعروض والفرق بين مستوى التشبع وقيمة المنتج. إذا كان التركيز الأولي من المادة الكيميائية هو 0 ومستوى التشبع هو 1 (بما يناظر 100%) فهذا يعني أن التركيز $x(t)$ للمادة الكيميائية يحقق المعادلة

جد تركيز المادة الكيميائية الذي تصل فيه سرعة تفاعلها $x'(t)$ إلى القيمة العظمى

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

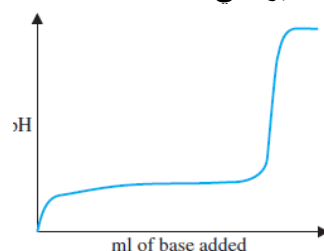
EXAMPLE 9.5

Find the value of x at which the rate of change of pH is the smallest. Identify the corresponding point on the titration curve in Figure

$$p(x) = c + \ln \frac{x}{1-x}$$

مثال 9-5

جد قيمة x التي يكون فيها معدل تغير الرقم الهيدروجيني pH صغير جداً. حدد النقطة المقابلة على منحنى المعايرة في الشكل



Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

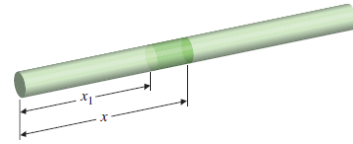
Imad Odeh

EXAMPLE 9.6

Suppose that the mass of the first x meters of a thin rod is given by $f(x) = \sqrt{2x}$. Compute the linear density at $x = 2$ and at $x = 8$, and compare the densities at the two points

مثال 9-6

على فرض أن كثافة الأمتار الأولى من قضيب معدني رقيق تعطى بالدالة $f(x) = \sqrt{2x}$ فاحسب الكثافة الخطية عند $x = 2$ وعند $x = 8$ ، وقارن الكثافتين عند النقطتين.



Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

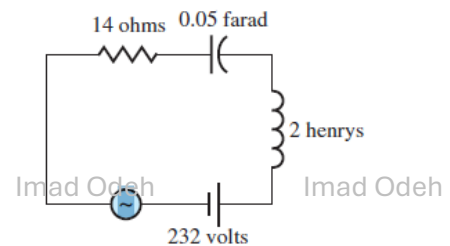
EXAMPLE 9.7

The electrical circuit shown in Figure includes a **14 – ohm** resistor, a **2 – henry inductor**, a **0.05 – farad** capacitor and a battery supplying **232 volts** of AC current modeled by the oscillating function **$232 \sin 2t$** , where t is measured in seconds. Find the current in the circuit at any time t .

مثال 9-7

تتضمن الدارة الكهربائية المبينة في الشكل مقاوم 14 أوم وأداة ومعايق 2 هنري ومكثف 0.05 فاراد وبطارية إمداد 232 فولت من التيار المتردد المنمذج بالدالة المتذبذبة **$232 \sin 2t$** حيث إن تقاس بالثواني. فجد التيار في الدارة عند أي وقت t

$$Q(t) = 10e^{-5t} + 2te^{-2t} + 3 \sin 2t - 7 \cos 2t \text{ coulombs}$$



Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

EXAMPLE 9.8

مثال 9-8

Suppose that a population grows according to the equation $p'(t) = 2p(t)[1 - p(t)]$ (the logistic equation with $r = 2$). Find the population for which the growth rate is a maximum. Interpret this point graphically.

على فرض أن النمو السكاني يعطى بالمعادلة المعادلة
 $p'(t) = 2p(t)[1 - p(t)]$
 (اللوغستية باستخدام $r = 2$)
 جد التعداد السكاني الذي يكون فيه معدل النمو هو
 القيمة العظمى. فسّر هذه النقطة بيانيًا.

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

- س 1 إذا كانت تكلفة تصنيع x منتج هي $C(x)$ $C(x)$ If the cost of manufacturing x items is $C(x)$
 اوجد التكلفة الحدية عند $x = 30$ find the marginal cost at $x = 30$
 $C(x) = x^3 + 20x^2 + 90x + 15$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Q2- Suppose that $C(x) = 10e^{0.02x}$ is the total cost (in dollars) for a company to produce x units of a certain product.

س (2) افترض ان $C(x) = 10e^{0.02x}$ هي التكلفة الكلية بالدولار لإنتاج x من الوحدات

a) Compute the **marginal cost** at $x = 100$

(أ) اوجد التكلفة الحدية لإنتاج $x = 100$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

b) Actual cost of producing the 100th unit

(ب) اوجد التكلفة الفعلية لإنتاج $x = 100$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

c) Find the production level that will **minimize** the average cost.

(ج) اوجد مستوى الإنتاج والذي يجعل التكلفة المتوسطة اقل ما يمكن

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

س 3 إذا كانت تكلفة تصنيع x عناصر تعطى بالعلاقة
Q3- The cost of manufacturing x items is given by

$$C(x) = 0.02x^2 + 20x + 1800$$

ا) Compute the marginal cost at $x = 20$ (ت) اوجد التكلفة الحدية لإنتاج $x = 20$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

ب) Actual cost of producing the 20th unit (ث) اوجد التكلفة الفعلية لإنتاج $x = 20$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

س 4 على فرض ان دالة الطلب هي
Q4- Suppose that $f(p) = 200(30 - p)$ is the demand.

ا) Find the elasticity of demand. (أ) اوجد مرونة الطلب

$$f(p) = 200(30 - p)$$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

ب) Find the range of prices for which the demand is elastic ($E < -1$) (ب) اوجد مدى السعر الذي يكون عنده الطلب مرن ($E < -1$)

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

ج) Compare this to the range of prices for which revenue is a decreasing function of p . (ج) قارن مدى السعر الذي قمت بإيجاده سابقا بالسعر الذي يجعل العائد يتناقص

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

س 5 إذا كان التركيز الكيميائي يتغير وفقا للمعادلة التالية

Q5- If the concentration of a chemical changes according to the equation

$$x'(t) = 2x(t)[4 - x(t)]$$

أ) اوجد التركيز الذي يحقق أكبر قيمة لسرعة التفاعل

a) Find the concentration $x(t)$ for which the reaction rate is maximum

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

ب) اوجد حدود التركيز

b) Find The Limiting concentration.

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

س 6 إذا كان التركيز الكيميائي يتغير وفقا للمعادلة التالية

Q6- If the concentration of a chemical changes according to the equation

$$x'(t) = 0.3x(t)[4 - x(t)]$$

ت) اوجد التركيز الذي يحقق أكبر قيمة لسرعة التفاعل

Find the concentration $x(t)$ for which the reaction rate is maximum

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

- س 7 عند معايرة حمض ضعيف مع قاعدة قوية يحدد الرقم الهيدروجيني بـ
- Q7- In the titration of a weak acid and strong base, the pH is given by $c + \ln \frac{x}{1-x}$, where f is the fraction ($0 < x < 1$) of converted acid. What happens to the rate of change of pH as x approaches 1?
- والذي في فيه الكسر ممثل بالدالة f
- $$pH = c + \ln \frac{x}{1-x}$$
- ماذا يحدث لمعدل التغير في pH ($0 < x < 1$) عندما تصل x الى 1

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

- س 8 افرض ان الشحنة في دائرة كهربائية تعطى بالعلاقة $Q(t)$ اوجد التيار
- Q8- Suppose that the charge in an electrical circuit is $Q(t)$ coulombs. Find the current
- $$Q(t) = e^{-2t} (\cos 3t - 2 \sin 3t)$$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

- س 9 افرض ان الشحنة في دائرة كهربائية تعطى بالعلاقة $Q(t)$ اوجد التيار
- Q9- Suppose that the charge in an electrical circuit is $Q(t)$ coulombs. Find the current
- $$Q(t) = e^{-3t} \sin 2t$$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

- س 10 افرض ان الشحنة في دائرة كهربائية تعطى بالعلاقة $Q(t)$ اوجد التيار
- Q10- Suppose that the charge in an electrical circuit is $Q(t)$ coulombs. Find the current
- $$Q(t) = e^{-3t} (\cos 2t + 4 \sin 3t)$$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

- س 11 إذا كانت كتلة ال x متر الأولى من قضيب معدني تعطى بالعلاقة $m(x)$ في الفترة المعطاة اوجد الدالة الخطية لكثافة الكتلة للقضيب المعدني في كل مما يلي. باختصار صف تركيب القضيب المعدني
- Q11- The mass of the first x meters of a thin rod is given by the function $m(x)$ on the indicated interval. Find the linear mass density function for the rod. Briefly describe the composition of the rod.

a) $m(x) = 4x - \sin x$ grams for $0 \leq x \leq 6$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

b) $m(x) = 4x$ grams for $0 \leq x \leq 2$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

c) $m(x) = (x - 1)^3 + 6x$ grams for $0 \leq x \leq 2$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

d) $m(x) = 4x^2$ grams for $0 \leq x \leq 2$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

س 12 افرض ان النمو السكاني يعطى وفقا لمعادلة النمو اللوجستي التالية

Q12- Suppose that a **population grows** according to the logistic growth equation.

$$p'(t) = 2p(t)[7 - 2p(t)].$$

اوجد التعداد السكاني والتي يصل عندها معدل النمو السكاني القيمة العظمى

Find the **population** for which the **growth rate** is a **maximum**.

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

س 13 افرض ان النمو السكاني يعطى وفقا لمعادلة النمو اللوجستي التالية

Q13- Suppose that a **population grows** according to the logistic growth equation.

$$p'(t) = 4p(t)[5 - p(t)].$$

اوجد التعداد السكاني والتي يصل عندها معدل النمو السكاني القيمة العظمى

Find the **population** for which the **growth rate** is a **maximum**.

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Q14- Suppose that the mass of the first x meters of a thin rod is given by

س 14 افترض أن كتلة أول x أمتار من قضيب رفيع تعطى بالعلاقة

$$m(x) = 20 + x^2 \text{ for } 0 \leq x \leq 4$$

Find the density of the rod and briefly describe the composition of the rod.

اوجد كثافة القضيب ثم اعطى وصفا لتركيب القضيب

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

اطيب التمنيات للجميع

