بسم الله الرحمن الرحيم

حل إمتحان نهاية الفصل الدراسي الثاني

End of Term exam (answers)

وفقكم الله وأدخلكم فسيح جناته

Math رياضيات

By: Ahmed / Adam

A three-sided fence is to be built next to a straight section of river, which forms the fourth side of a rectangular region. There is 80 ft of fencing available. Find the maximum enclosed area.

يجب بناء سياج من ثلاثة جوانب بجوار الجزء المستقيم من النهر، الذي يشكل الجانب الرابع لمنطقة مستطيلة.
يتوفر 80 ft من السياج.
أوجد القيمة العظمى للمساحة المحاطة بالسياج.

المخرجات التعليمية المرتبطة

MAT.6.02.03.002

a. 4[illegible] ft^2

b. 6[illegible] ft^2

c. 4[illegible]0 ft^2

d. [illegible]0 ft^2 $800\ ft^2$

ملاحظة:

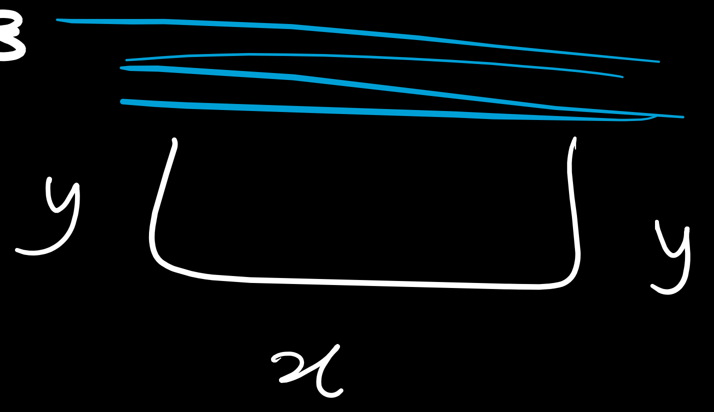
x	y
$\frac{P}{2}$	$\frac{P}{4}$

$A = xy$

$= \frac{P}{2} \times \frac{P}{4}$

$\frac{P^2}{8} = \frac{(80)^2}{8}$

$= \boxed{800}$



$A = xy$

$A(y) = (80-2y)y$

$x + 2y = 80$

$A(y) = 80y - 2y^2$

$x = 80 - 2y \Rightarrow 80 - 2(20) = 40$

$A'(y) = 80 - 4y = 0$ $\boxed{y = 20}$

$y = 20$

$x = 40$

y		20	
A'	$+$	0	$-$
A	$\nearrow$		$\searrow$

Find the general antiderivative.

$$\int \frac{8x}{x^2+7}\,dx$$

أوجد الدالة الأصلية.

$$\int \frac{8x}{x^2+7}\,dx$$

المخرجات التعليمية المرتبطة

MAT.6.03.02.001

a. $\frac{1}{2}\ln|x^2+7|+c$

b. $\frac{1}{4}\ln|x^2+7|+c$

c. $2\ln|x^2+7|+c$

d. $4\ln|x^2+7|+c$

$$\int \frac{8x}{\underbrace{x^2+7}_{f}}\,dx = 4\int \frac{\frac{1}{4}\times 8x}{x^2+7}\,dx = 4\ln|x^2+7|+C$$

$$\frac{d}{dx}(x^2+7) = 2x \longrightarrow \bar{f}$$

If $f(x) = \int_x^{x^2} \sin 3t\, dt$, compute $f'(x)$.

إذا كانت $f(x) = \int_x^{x^2} \sin 3t\, dt$ ، احسب $f'(x)$.

المخرجات التعليمية المرتبطة

MAT.6.03.04.002

a. $f'(x) = 2x \sin 3x^2 - \sin 3x$

b. $f'(x) = 2x \sin 3x^2 + \sin 3x$

c. $f'(x) = \sin 3x - 2x \sin 3x^2$

d. $f'(x) = \sin 3x^2 - \sin 3x$

$$f(x) = \int_x^{x^2} \sin 3t\, dt$$

$$f'(x) = 2x \times \left[\sin 3x^2\right] - 1 \times \left[\sin 3x\right]$$

$$f'(x) = 2x \sin 3x^2 - \sin 3x$$

$$f(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\, dt$$

$$f'(x) = f(v) \cdot v' - f(u) \cdot u'$$

$$f'(x) = v' f(v) - u' f(u)$$

Find the linear approximation to $f(x) = \frac{5}{x}$ at $x_0 = 1$.

أوجد التقريب الخطي للدالة $f(x) = \frac{5}{x}$ عند $x_0 = 1$.

المخرجات التعليمية المرتبطة

- MAT.6.04.01.001

a. $L(x) = -10 - 5x$

b. $L(x) = -10 + 5x$

c. $L(x) = 10 - 5x$

d. $L(x) = 10 + 5x$

Suppose a forest fire spreads in a circle with radius changing at a rate of 5 ft/min. When the radius reaches 100 ft, at what rate is the area of the burning region increasing?

على فرض أن حريق غابات ينتشر في دائرة بنصف قطر يتغير بمعدل 5 ft/min. عندما يصل نصف القطر إلى 100 ft، فما هو معدل تزايد مساحة المنطقة المحترقة؟

المخرجات التعليمية المرتبطة

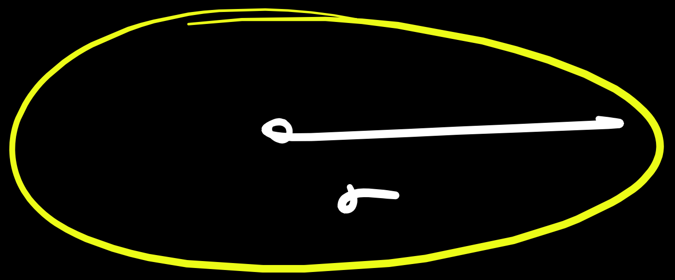
MAT.6.04.05.002

a. 2[illegible]0π ft^2/min

b. 5[illegible]0π ft^2/min

c. 1 000π ft^2/min

d. 2 000π ft^2/min



$$\frac{dr}{dt} = 5$$

$$\frac{dA}{dt} = ?$$

$$r = 100$$

$$A = \pi r^2$$

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi(100)(5) = 1000\pi \ \text{ft}^2/\text{min}$$

$$f(x)=\frac{2x}{x^2-1}$$

$x^2+1=0 \rightarrow x=\pm 1$

$\lim_{x\to a} f(x)=\infty$ رأسي

$\lim_{x\to \infty} f(x)=a$ أفقي

$\lim_{x\to 1^+} f(x)=+\infty$

$\lim_{x\to 1^-} f(x)=-\infty$

$x=1,\ x=-1$ خط تقارب رأسي

$\lim_{x\to -1^+} f(x)=+\infty$

$\lim_{x\to -1^-} f(x)=-\infty$

$y=0$ خط تقارب أفقي

$\lim_{x\to \infty} f(x)=0$

$\lim_{x\to -\infty} f(x)=0$

$$f'(x)=\frac{2(x^2-1)-2x(2x)}{(x^2-1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2x^2-2-4x^2}{(x^2-1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{-2x^2-2}{(x^2-1)^2}\rightarrow\frac{-2(x^2-1)}{(x^2-1)^2}<0$$

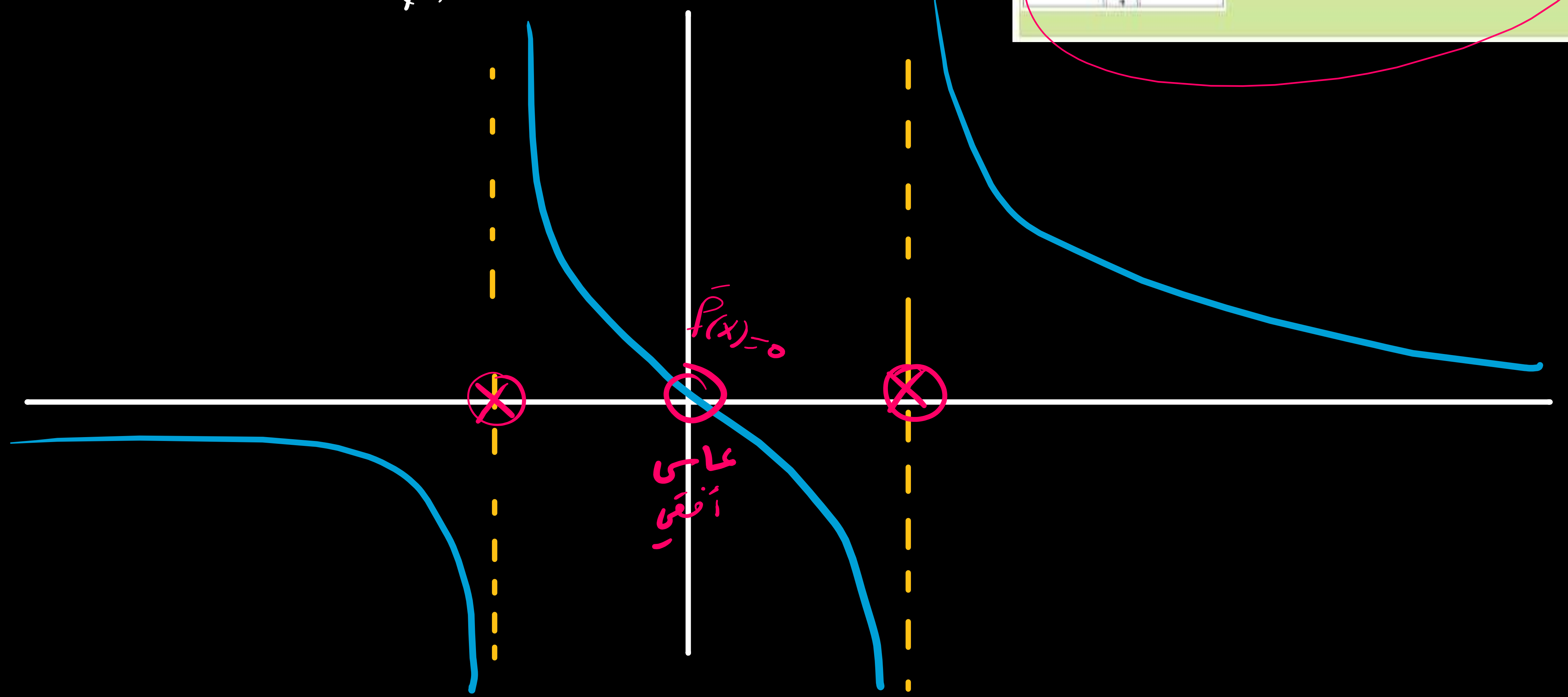
الدالة متناقصة.

$f'(x)=0$ / $f'(x)=$ غ.م

$x=0,\ x=\pm 1$

x	$-\infty$		-1		0		1		∞
f'		$-$	$\otimes$	$+$	0	$-$	$\otimes$	$+$	
f	0	$\searrow$ $-\infty$	$\otimes$	$+\infty$ $\nearrow$		$\searrow$ $-\infty$	$\otimes$	$+\infty$ $\nearrow$	0

$\lim_{x\to -\infty} f$



Write the expression as a single integral.

اكتب التعبير في صورة تكامل منفرد.

$$\int_0^5 f(x)dx - \int_2^5 f(x)dx$$

$$\int_0^5 f(x)dx - \int_2^5 f(x)dx$$

المخرجات التعليمية المرتبطة

MAT.6.03.03.007

a. $\int_0^2 f(x)dx$

b. $\int_2^5 f(x)dx$

c. $\int_5^2 f(x)dx$

d. $\int_0^5 f(x)dx$

من علاقة تماثل

$$\int_0^5 f(x)dx - \int_2^5 f(x)dx$$

$$\int_0^5 f(x)dx - \left(-\int_5^2 f(x)dx\right) = \int_0^5 f(x)dx + \int_5^2 f(x)dx = \int_0^2 f(x)dx$$

Determine the position function if the velocity function is $v(t) = 8 - 6t$ and the initial position is $s(0) = 4$.

حدد الدالة المكانية إذا كانت دالة السرعة المتجهة هي $v(t) = 8 - 6t$ والموقع الابتدائي هو $s(0) = 4$.

المخرجات التعليمية المرتبطة

MAT.6.03.02.002

a. $s(t) = 8t - 6t^2 + 4$

b. $s(t) = 8t - 3t^2 + 4$

c. $s(t) = 6t^2 - 8t + 4$

d. $s(t) = 3t^2 - 8t + 4$

$$s(t) = \int v(t)\,dt$$

$$= \int 8 - 6t \, dt$$

$v(t) = 8 - 6t$, $s(0) = 4$

$$\boxed{s(t) = 8t - 3t^2 + 4}$$

$$s(t) = 8t - 3t^2 + c \Longrightarrow s(0) = 4 \Longrightarrow 8(0) - 3(0)^2 + c = 4$$

$$c = 4$$

Find the inflection points of $f(x) = x^4 + 12x^3 - x$.

أوجد نقاط الانعطاف لـ $f(x) = x^4 + 12x^3 - x$.

المخرجات التعليمية المرتبطة

MAT.6.04.04.002

a. $(-6, f(-6)), (0, f(0))$

b. $(6, f(-6)), (6, f(6))$

c. $(0, f(0)), (6, f(6))$

d. $(-6, f(-6)), (0, f(0)), (6, f(6))$

$f(x) = x^4 + 12x^3 - x$

$f'(x) = 4x^3 + 36x^2 - 1$

$f''(x) = 12x^2 + 72x = 0$

$x = -6 \quad x = 0$

نقاط الانعطاف

$(-6, f(-6))$ و $(0, f(0))$

Evaluate $\int_0^3 (x^2-2)\,dx$.

أوجد قيمة $\int_0^3 (x^2-2)\,dx$.

المخرجات التعليمية المرتبطة

MAT.6.03.04.001

a. 3

b. 7

c. 2

d. 2

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

$$\int_0^3 (x^2-2)\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - 2x\right]_0^3 = \left(\frac{1}{3}(3)^3 - 2(3)\right) - 0 = 3$$

Evaluate $\lim_{x\to\infty} \frac{7x^2+5}{x^2-9}$.

أوجد قيمة $\lim_{x\to\infty} \frac{7x^2+5}{x^2-9}$.

المخرجات التعليمية المرتبطة

MAT.6.04.02.002

a. 0

b. $\frac{1}{7}$

c. 7

d. c

Find the general antiderivative.

$$\int 5 \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$$

أوجد الدالة الأصلية.

$$\int 5 \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$$

المخرجات التعليمية المرتبطة

MAT.6.03.02.001

a. $-5\sec x + c$

b. $5\sec^2 x + c$

c. $5\tan^2 x + c$

d. $5\sec x + c$

$$5\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx =$$

$$5\int \frac{\sin x}{\cos x \cdot \cos x}$$

$$5\int \sec x \tan x = \boxed{5\sec x + c}$$

Assume that   فرضًا أنّ

$\int_1^4 f(x)dx = 5$ and $\int_1^4 g(x)dx = -3$. $\int_1^4 g(x)dx = -3$ و $\int_1^4 f(x)dx = 5$

Find $\int_1^4 [2f(x) - g(x)]dx$.   أوجد $\int_1^4 [2f(x) - g(x)]dx$.

المخرجات التعليمية المرتبطة

MAT.6.03.03.007

a. 7

b. 7

c. 3

d. 13

$$\int_1^4 f(x)dx = 5 \qquad \int_1^4 g(x)dx = -3$$

$$\int_1^4 2f(x) - g(x)\, dx =$$

$$2\int_1^4 f(x) - \int_1^4 g(x)\, dx = 2(5) - (-3)$$

$$= 13$$

Evaluate $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

أوجد قيمة $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

المخرجات التعليمية المرتبطة

- MAT.6.04.02.002

a. $-\infty$

b. 0

c. $\frac{1}{2}$

d. ∞

Compute the average value of $f(x) = 4x + 3$ on the interval $[0, 2]$.

احسب القيمة المتوسطة لـ $f(x) = 4x + 3$ على الفترة $[0, 2]$.

المخرجات التعليمية المرتبطة

MAT.6.03.03.008

a. 7

b. 1

c. 1

d. 2

$$f_{avg} = f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

$$f_{avg} = \frac{1}{2-0}\int_0^2 4x+3\,dx$$

$$f_{avg} = \frac{1}{2}\cdot\left[2x^2+3x\right]_0^2$$

$$f_{avg} = \frac{1}{2}\cdot\left[2(2)^2+3(2)-0\right]$$

$$\boxed{f_{avg} = 7}$$

Find all the critical numbers of
$f(x) = x^4 - 8x^2 + 7$.

أوجد كل الأعداد الحرجة لـ
$f(x) = x^4 - 8x^2 + 7$.

المخرجات التعليمية المرتبطة

MAT.6.04.03.002

a. $x = -\frac{1}{2}, x = 0, x = \frac{1}{2}$

b. $x = -\frac{1}{2}, x = \frac{1}{2}$

c. $x = -2, x = 2$

d. $x = -2, x = 0, x = 2$

$f(x) = x^4 - 8x^2 + 7$

$D: (-\infty, \infty)$

$f'(x) = 4x^3 + 16x = 0$

$4x(-x^2 + 4) = 0$

$4x = 0$

$\boxed{x = 0}$

$-x^2 + 4 = 0$

$4 - x^2 = 0$

$\boxed{x = \pm 2}$

Find the absolute extrema of the function $f(x) = x^3 - 12x + 10$ on the interval $[0, 3]$.

أوجد القيم القصوى المطلقة لدالة $f(x) = x^3 - 12x + 10$ في الفترة $[0, 3]$.

المخرجات التعليمية المرتبطة

MAT.6.04.03.004

a. $f(0) = 10, f(3) = 1$

b. $f(0) = 10, f(2) = -6$

c. $f(2) = -6, f(3) = 1$

d. $f(0) = 10, f(2) = -6, f(3) = 1$

$f(x) = x^3 - 12x + 10 \qquad [0, 3]$

$f'(x) = 3x^2 - 12 = 0$

$x^2 - 4 = 0$

$x = 2, x = -2$

* اختبار القيم عند الأعداد الحرجة وأطراف الفترة المغلقة

$f(0) = (0)^3 - 12(0) + 10 = 10$

$f(3) = (3)^3 - 12(3) + 10 = 1$

$f(2) = (2)^3 - 12(2) + 10 = -6$

$f(-2) = (-2)^3 - 12(-2) + 10 = 26$

القيم القصوى المطلقة:

$f(0) = 10$ قيمة عظمى مطلقة

$f(2) = -6$ قيمة صغرى مطلقة

If the cost of manufacturing x items is $C(x) = x^3 + 20x^2 + 90x + 15$

Find the marginal cost at $x = 30$.

إذا كانت تكلفة تصنيع x منتج هي
$C(x) = x^3 + 20x^2 + 90x + 15$
أوجد التكلفة الحدية عند $x = 30$.

المخرجات التعليمية المرتبطة

MAT.6.04.05.003

a. $C'(30) = 2190$

b. $C'(30) = 3390$

c. $C'(30) = 3990$

d. $C'(30) = 4005$

تكلفة إنتاج أول n قطعة $C(x_n)$

التكلفة الفعلية لإنتاج القطعة رقم n $C(x_n) - C(x_{n-1})$

التكلفة الحدية لإنتاج القطعة رقم n $C'(x_n)$

$$C(x) = x^3 + 20x^2 + 90x + 15$$

$$C'(x) = 3x^2 + 40x + 90$$

$$C'(30) = 3(30)^2 + 40(30) + 90$$

$$\boxed{C'(30) = 3990}$$

Evaluate the indicated integral.

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$$

أوجد قيمة التكامل غير المحدود.

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$$

المخرجات التعليمية المرتبطة

MAT.6.03.05.001

a. $-\frac{1}{2e^{\sqrt{x}}}+c$

b. $-\frac{2}{e^{\sqrt{x}}}+c$

c. $\frac{1}{2}e^{\sqrt{x}}+c$

d. $2e^{\sqrt{x}}+c$

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = 2\int \overbrace{\frac{1}{2\sqrt{x}}}^{u'} \cdot e^{\overbrace{\sqrt{x}}^{e^u}} = 2e^{\sqrt{x}}+C$$

u sub

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = \int \frac{e^u}{\cancel{\sqrt{x}}} \cdot 2\cancel{\sqrt{x}}\,du$$

$$= 2\int e^u\,du = 2e^u + C = 2e^{\sqrt{x}} + C$$

$$\boxed{\begin{aligned} u &= \sqrt{x} \\ du &= \frac{1}{2\sqrt{x}}dx \\ dx &= 2\sqrt{x}\,du \end{aligned}}$$

$$\sum_{i=1}^{n} c = nc$$

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Compute the sum.

$$\sum_{i=5}^{9}(i^2+3)$$

احسب المجموع.

$$\sum_{i=5}^{9}(i^2+3)$$

المخرجات التعليمية المرتبطة

MAT.6.03.03.001

a. 4[illegible]

b. 7[illegible]

c. 270

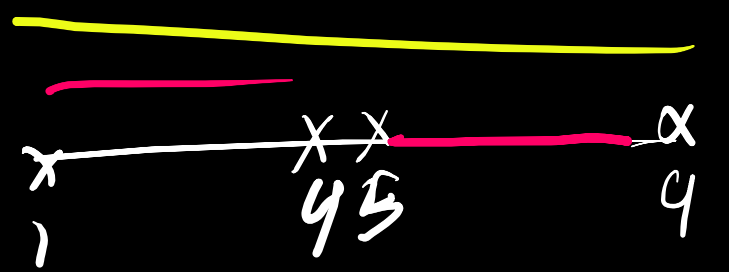
d. 3[illegible]2

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{m-1} a_i$$

$$\sum_{i=5}^{9} i^2+3 = \sum_{i=1}^{9} i^2+3 - \sum_{i=1}^{4} i^2+3$$

$$\left[\frac{9(9+1)(18+1)}{6} + 3(9)\right] - \left[\frac{4(4+1)(8+1)}{6} + 3(4)\right]$$

$$= 312 - 42 = \boxed{270}$$



Use the given function values to estimate the area under the curve using left-endpoint evaluation.

استخدم قيم الدالة المعطاة لتقدير المساحة تحت المنحنى باستخدام قيم نقطة النهاية اليسرى.

x	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4
$f(x)$	2.0	2.4	2.6	2.7	2.6

المخرجات التعليمية المرتبطة

MAT.6.03.03.002

a. 0.97

b. 1.03

c. 0.97

d. 10.3

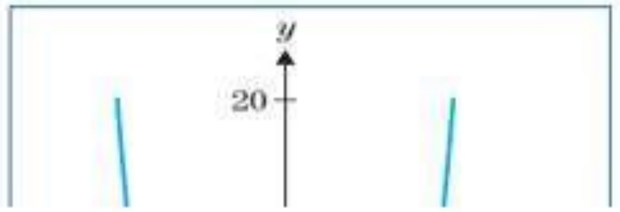
$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x =$$

$$(0.1)\sum_{i=1}^{3}\left[f(0)+f(0.1)+f(0.2)+f(0.3)\right] = \left[2+2.4+2.6+2.7\right] \times (0.1) =$$

$$\boxed{0.97}$$

Find the intervals where the function $f(x)$ is increasing.

أوجد الفترات التي تكون فيها الدالة $f(x)$ متزايدة.



المخرجات التعليمية المرتبطة

MAT.6.04.03.005

a. $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$

b. $(-2, 0) \cup (2, \infty)$

c. $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$

d. $(-2, 0) \cup (0, 2)$

Find the x –coordinate of the local maximum of $f(x) = x^2e^{-x}$.

أوجد إحداثي x للقيمة العظمى المحلية لـ $f(x) = x^2e^{-x}$.

المخرجات التعليمية المرتبطة

MAT.6.04.03.006

a. $x = -2$

b. $x = -\frac{1}{2}$

c. $x = 0$

d. $x = 2$

$$f(x) = x^2 e^{-x}$$

$$f'(x) = 2x e^{-x} - e^{-x} x^2$$

$$f'(x) = x e^{-x}(2 - x) = 0$$

$$x = 2 \;,\; x = 0$$

x	$-\infty$		0		2		∞
f'		$-$		$+$		$-$	
f							

$x = 2$

Write the given (total) area as an integral or sum of integrals.

The area above the x −axis and below $y = 4 - x^2$.

اكتب (مجمل) المساحة المعطاة في صورة تكامل أو ناتج جمع تكاملات.

المساحة فوق المحور x − وتحت $y = 4 - x^2$.

المخرجات التعليمية المرتبطة

MAT.6.03.03.004

a. $\int_{-2}^{2} (4 - x^2)dx$

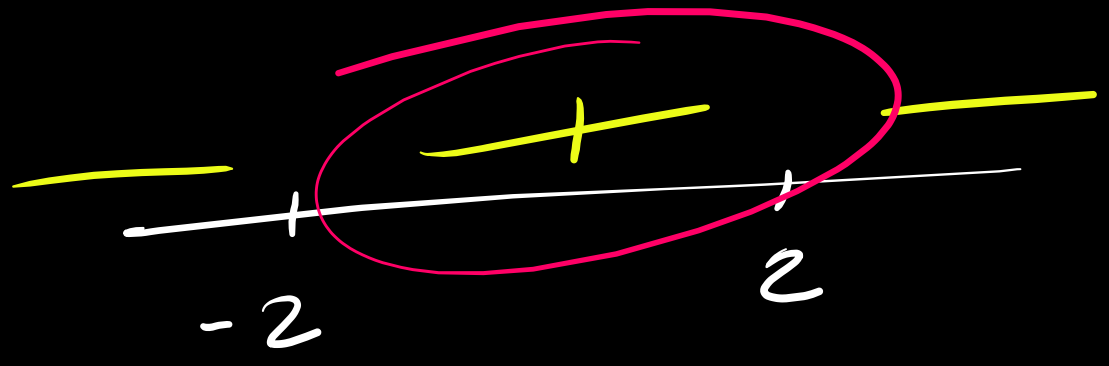
b. $\int_{-2}^{2} -(4 - x^2)dx$

c. $\int_{0}^{2} -(4 - x^2)dx$

d. $\int_{0}^{2} (4 - x^2)dx$

$y = 4 - x^2$

$x = \pm 2$

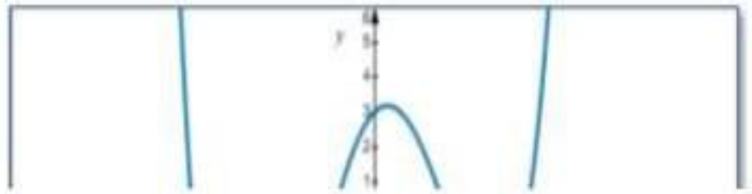


$$\boxed{\int_{-2}^{2} 4 - x^2 \, dx}$$

$$\sum_{i=0}^{5} i^2 + 2$$

Determine where the graph of $f(x) = x^4 - 6x^2 + 2x + 3$ is concave up.

حدد أين يكون التمثيل البياني للدالة $f(x) = x^4 - 6x^2 + 2x + 3$ مقعرًا للأعلى.



المخرجات التعليمية المرتبطة

MAT.6.04.04.001

a. $(-\infty, -1)$

b. $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

c. $(-1, 1)$

d. $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

$$f(x) = x^4 - 6x^2 + 2x + 3$$

$$f'(x) = 4x^3 - 12x + 2$$

$$f''(x) = 12x^2 - 12$$

$$x = 1$$

$$x = -1$$

x		-1		1	
f''	$+$	0	$-$	0	$+$
التقعر	$\cup$		$\cap$		$\cup$

$$(\infty, -1), (1, \infty)$$