هل أنت مستعدّ؟

١ إذا كانت س = { ٢ ، ٣ ، ٤ }

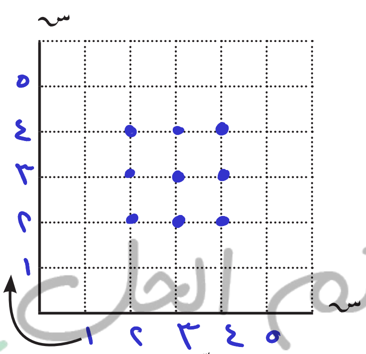
(أ) أوجِد عدد عناصر س × س .

٣ × ٣ = ٩

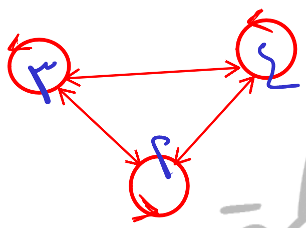
(ب) اُكتب س × س بذكر العناصر .

س × س = {(٢،٢)، (٢،٣)، (٢،٤)، (٣،٢)، (٣،٣)، (٣،٤)، (٤،٢)، (٤،٣)، (٤،٤)}

(ج) مثِّل س × س بمخطّط بياني وآخر سهمي .



مخطّط بياني



مخطّط سهمي

٢ فيما يلي مجموعة من العلاقات المعرَّفة على س = { ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ }

اُكتب كلّ علاقة بذكر عناصرها :

(أ) $ع_1$ = { (أ ، ب) : أ ، ب ∈ س ، أ + ب = ٨ }

$ع_1$ = {(٢،٦)، (٣،٥)، (٦،٢)، (٥،٣)}

(ب) $ع_2$ = { (أ ، ب) : أ ، ب ∈ س ، أ = ب }

$ع_2$ = {(٢،٢)، (٣،٣)، (٤،٤)، (٥،٥)، (٦،٦)}

(ج) $ع_3$ = { (أ ، ب) : أ ، ب ∈ س ، أ = ٢ ب }

$ع_3$ = {(٤،٢)، (٦،٣)}

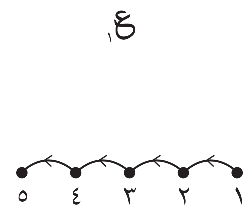
(د) $ع_4$ = { (أ ، ب) : أ ، ب ∈ س ، أ = $\sqrt{ب}$ }

$ع_4$ = {(٢،٤)}

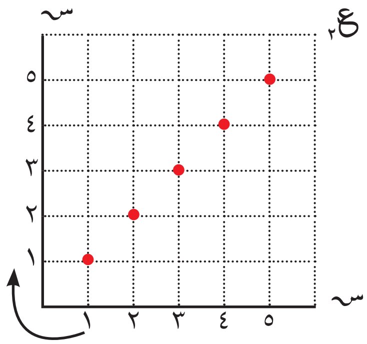
(هـ) $ع_5$ = { (أ ، ب) : أ ، ب ∈ س ، أ > ب }

$ع_5$ = {(٣،٢)، (٤،٢)، (٤،٣)، (٥،٤)، (٥،٣)، (٥،٢)، (٦،٥)، (٦،٤)، (٦،٣)، (٦،٢)}

٣ أُكتب العلاقات ع١ ، ع٢ على سـ التي يمثّلهما كلّ من المخطّطَين السهمي والبياني الآتيَين ، بذكر العناصر ثمّ بذكر الصفة المميِّزة . حيث سـ = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ }



مخطّط سهمي



مخطّط بياني

ع١ = {(١،٢)، (٢،٣)، (٣،٤)، (٤،٥)} ← ع١ = {(أ، ب) : أ، ب ∈ سـ ، أ = ب - ١}

ع٢ = {(١،١)، (٢،٢)، (٣،٣)، (٤،٤)، (٥،٥)} ← ع٢ = {(أ، ب) : أ، ب ∈ سـ ، أ = ب}

٤ أوجِد قيمة ٦س + ٤ إذا كانت س = ١١

٦ × ١١ + ٤ = ٦٦ + ٤ = ٧٠

٥ أوجِد قيمة ٢س^{٢} - ١ إذا كانت س = -٣

٢ × (-٣)^{٢} - ١ = ٢ × ٩ - ١

= ١٨ - ١ = ١٧

٦ أوجِد قيمة ١ - ٢س إذا كانت س = -٤

١ - ٢ × (-٤) = ١ + ٨ = ٩

٧ مثِّل كلّ نقطة ممّا يلي في المستوى الإحداثي :

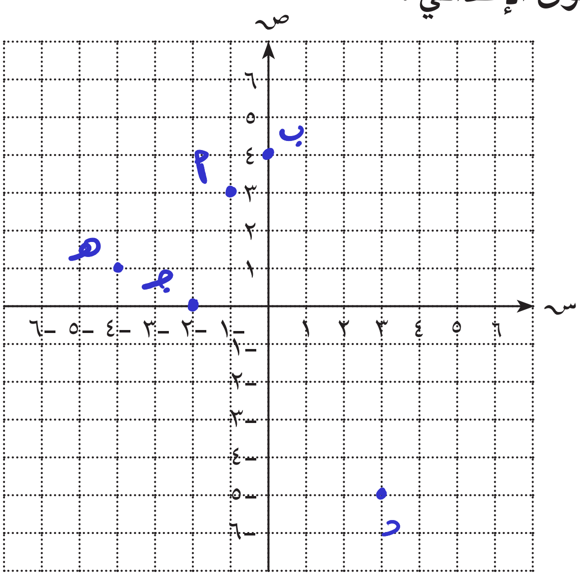
أ (-١ ، ٣)

ب (٠ ، ٤)

جـ (-٢ ، ٠)

د (٣ ، -٥)

هـ (-٤ ، ١)



٥ - ١ العلاقة وخواصّها
The Relation and its Properties

سوف تتعلّم : خواصّ العلاقة على مجموعة .

العبارات والمفردات :

علاقة انعكاسية	Reflexive Relation	علاقة متعدّية	Transitive Relation
علاقة متناظرة	Symmetric Relation	علاقة تكافؤ	Equivalence Relation

تعلّمت سابقًا أنّ : العلاقة ع على المجموعة سـ هي مجموعة جزئية من حاصل الضرب الديكارتي سـ × سـ ، أي أنّ : ع ⊆ سـ × سـ .

كما تمتلك بعض هذه العلاقات مجموعة من الخواصّ التي يعتمد عليها في التصنيف والتحليل وهي الانعكاسية ، المتناظرة ، المتعدّية والتكافؤ .

أوّلًا : خاصّية الانعكاس

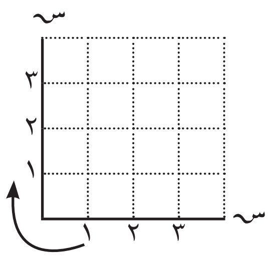
تظهر العلاقة الانعكاسية بشكل طبيعي في حياتنا اليومية والأنظمة من حولنا .
ومن استخدامات العلاقة الانعكاسية في الحياة الواقعية :

في التعليم وتقييم الذات : عندما يقيّم المتعلّم نفسه (تقييم ذاتي) ، فالعلاقة هنا بين الشخص ونفسه .

حُلّ وناقِش (١)

لتكن سـ = { ١ ، ٢ ، ٣ }

١ مثّل الحاصل الديكارتي سـ × سـ بمخطّط بياني .



٢ أُكتب ع١ علاقة « يساوي » على سـ بذكر العناصر .

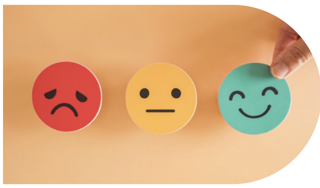
ع١ = {(١،١)، (١،٢)، (١،٣)، (٢،١)، (٢،٢)، (٢،٣)، (٣،١)، (٣،٢)، (٣،٣)}

٣ أُكتب ع٢ = { (ٲ ، ب) : ٲ ، ب ∈ سـ ، ٲ عامل من عوامل ب } بذكر العناصر .

ع٢ = {(١،١)، (١،٢)، (٢،٢)، (١،٣)، (٣،٣)}

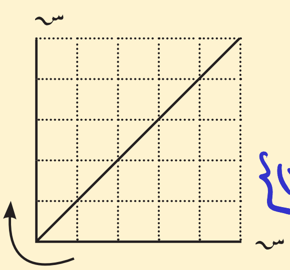
تذكَّر

- الحاصل الديكارتي على المجموعة سـ هو سـ × سـ = { (ٲ ، ب) : ٲ ، ب ∈ سـ }



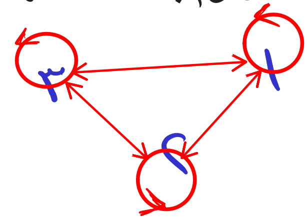
لاحِظ أنّ

في المخطّط البياني (Graph) الذي يمثّل العلاقة بين عناصر مجموعة ، يُسمّى « القطر » الذي يربط كلّ عنصر بنفسه بـ : « **القطر الرئيسي** » .

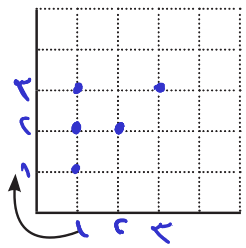


بشرط أن يكون ترتيب العناصر على المحورَين هو نفسه .

٤ مثِّل ع$_1$ بمخطّط سهمي .



٥ مثِّل ع$_1$ بمخطّط بياني .



لاحِظ أنّ :

١ ∈ سـ ، (١ ، ١) ∈ ع$_1$

٢ ∈ سـ ، (٢ ، ٢) ∈ ع$_1$

٣ ∈ سـ ، (٣ ، ٣) ∈ ع$_1$

وبالمثل في العلاقة ع$_2$.

إذًا ، **كلّ** عنصر من عناصر المجموعة سـ **ارتبط بنفسه** في العلاقة ع .

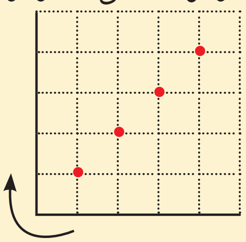
نسمّي مثل هذه العلاقة علاقة « **انعكاسية** » .

تُسمّى العلاقة ع المعرَّفة على المجموعة سـ علاقة انعكاسية

إذا وفقط إذا كان لكلّ ٲ ∈ سـ ، يكون (ٲ ، ٲ) ∈ ع .

لاحِظ أنّ

تكون العلاقة انعكاسية إذا شمل المخطّط البياني الذي يمثّلها جميع العناصر الواقعة على القطر الرئيسي.



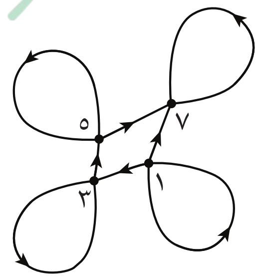
لاحِظ أنّ

تكون العلاقة انعكاسية إذا كان كلّ عنصر من عناصر سـ في المخطّط السهمي يخرج منه سهم ويعود إلى نفسه مكوِّنًا ما يُسمّى « عقدة » .

مثال (١) :

المخطّطات السهمية الآتية ، تمثّل علاقات على سـ حيث سـ = { ١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ }

اِختبِر ما إذا كانت كلّ من ع$_1$ ، ع$_2$ علاقات انعكاسية أم لا ، مع ذكر السبب في كلّ حالة ، ممّا يلي :



المخطّط السهمي للعلاقة ع$_1$

الحلّ :

ع$_1$ = { (١ ، ١) ، (١ ، ٣) ، (١ ، ٧) ، (٣ ، ٣) ،
(٣ ، ٥) ، (٥ ، ٥) ، (٥ ، ٧) ، (٧ ، ٧) }

∵ ١ ∈ سـ ، (١ ، ١) ∈ ع$_1$ ،

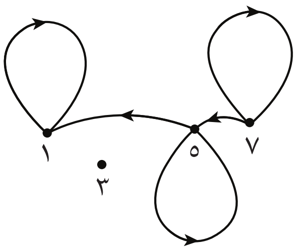
٣ ∈ سـ ، (٣ ، ٣) ∈ ع$_1$ ،

٥ ∈ سـ ، (٥ ، ٥) ∈ ع$_1$ ،

٧ ∈ سـ ، (٧ ، ٧) ∈ ع$_1$

∴ ع$_1$ علاقة انعكاسية

لأنّ لكلّ ٲ ∈ سـ ، يكون (ٲ ، ٲ) ∈ ع$_1$



المخطّط السهمي للعلاقة ع$_2$

الحلّ :

ع$_2$ ={ (١ ، ١) ، (٥ ، ٥) ، (٧ ، ٧) ،
(٧ ، ٥) ، (٥ ، ١) }

ع$_2$ علاقة ليست انعكاسية

لأنّ ٣ ∈ سـ ، ولكن (٣ ، ٣) ∉ ع$_2$

ملاحظة :

- للحكم على أنّ العلاقة انعكاسية ، يلزم التحقّق من أنّ كلّ عنصر من عناصر المجموعة يرتبط بنفسه في العلاقة .
- للحكم على أنّ العلاقة ليست انعكاسية يكفي وجود عنصر واحد من عناصر المجموعة لم يرتبط بنفسه في العلاقة .

مثال (٢) :

إذا عُلم أنّ س = { ١ ، -١ ، ٢ ، -٢ ، ٤ ، -٤ } .

(أ) أُكتب العلاقة ع المعرَّفة على س بذكر العناصر حيث ع = { (ﺃ ، ب) : ﺃ ، ب ∈ س ، ﺃ = ب^{٢} }

(ب) اِختبِر ما إذا كانت ع علاقة انعكاسية أم لا .

(ج) اُرسم المخطّط البياني الذي يمثّلها .

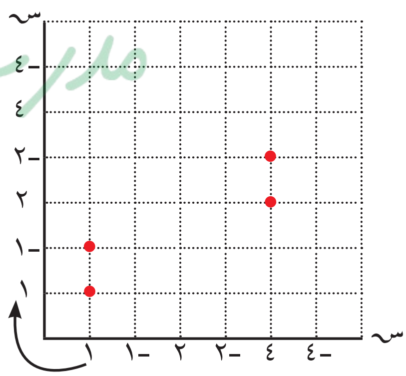
الحلّ :

(أ) ع = { (١ ، ١) ، (١ ، -١) ، (٤ ، ٢) ، (٤ ، -٢) }

(ب) ∵ -١ ∈ س ولكن (-١ ، -١) ∉ ع

∴ ع علاقة ليست انعكاسية

(ج)



اِنتبِه

١ = (-١)^{٢}

١ = (١)^{٢}

٤ = (-٢)^{٢}

٤ = (٢)^{٢}

نلاحظ أنّ المخطّط البياني لم يشمل جميع عناصر القطر الرئيسي .

دورك الآن (١)

العلاقات الآتية معرَّفة على المجموعة س = { -١ ، ٠ ، ١ } . حدِّد أيًّا منها يمثّل علاقة انعكاسية مع ذكر السبب ، ثمّ مثّل ع$_{١}$ بمخطّط بياني وع$_{٢}$ بمخطّط سهمي :

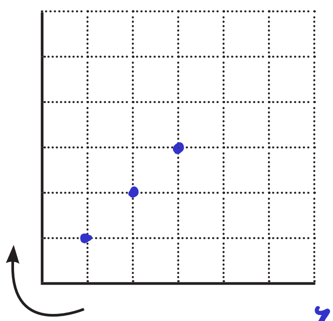
(١) ع$_{١}$ = { (-١ ، -١) ، (٠ ، ٠) ، (١ ، ١) ، (١ ، -١) }

∵ -١ ∈ س ، (-١ ، -١) ∈ ع$_{١}$ ،

١ ∈ س ، (١ ، ١) ∈ ع$_{١}$ ،

٠ ∈ س ، (٠ ، ٠) ∈ ع$_{١}$

∴ ع$_{١}$ علاقة انعكاسية لأنّ لكلّ ﺃ ∈ س ، يكون (ﺃ ، ﺃ) ∈ ع



٢ ع٢ = { (٠ ، ٠) ، (-١ ، ٠) ، (٠ ، -١) ، (١ ، ١) }

∵ -١ ∈ س ولكن (-١ ، -١) ∉ ع٢

∴ ع٢ علاقة ليست انعكاسية

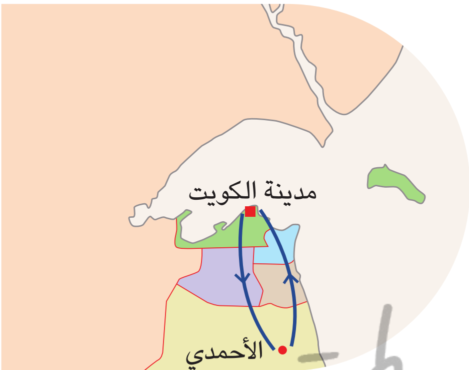
عبِّر عن فهمك (١)

لتكن س = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ } ، ع = { (ا ، ب) : ا ، ب ∈ س ، ب مضاعَف من مضاعَفات ا } ،
هل ع علاقة انعكاسية ؟ فسِّر إجابتك .

نعم ، لأنه أصغر مضاعف للعدد هو العدد نفسه

ثانيًا : خاصّية التناظر

تسكن نور في مدينة الأحمدي ، وذهبت يومًا لزيارة صديقتها في مدينة الكويت ثمّ عادت إلى منزلها بعد انتهاء الزيارة .
نلاحظ في هذا المثال أنّ الذهاب يلزمه عودة ، كما هو موضّح في الشكل المقابِل ، مثل هذه العلاقات تُسمّى «علاقة متناظرة» .



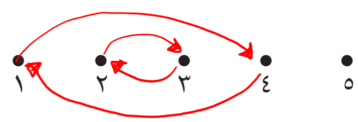
حُلّ وناقِش (٢)

إذا كانت س = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ } ،
ع = { (ا ، ب) : ا ، ب ∈ س ، ا + ب = ٥ }

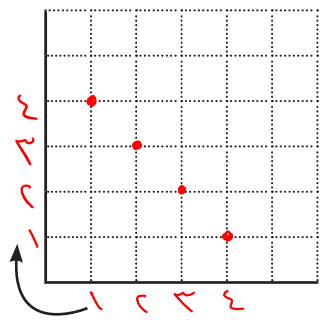
أ) اُكتب ع بذكر العناصر .
ع = { (٢ ، ٣) ، (٣ ، ٢) ، (١ ، ٤) ، (٤ ، ١) }

ب) مثِّل ع بمخطّط سهمي وآخر بياني .

مخطّط سهمي



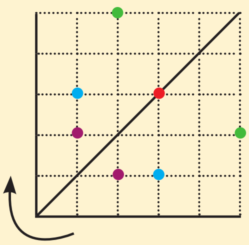
مخطّط بياني



لاحِظ أنّ

في المخطّط السهمي : تكون العلاقة متناظرة إذا وُجد سهم موجَّه من ا إلى ب ، فإنّه يلزم وجود سهم موجَّه من ب إلى ا .

لاحِظ أنّ



في المخطّط البياني : تكون العلاقة متناظرة إذا كان القطر الرئيسي هو محور التناظر بالنسبة إلى النقاط التي تمثّل العلاقة في المخطّط البياني .

لاحِظ أنّ :

(١ ، ٤) ∈ ع ، (٤ ، ١) ∈ ع
(٢ ، ٣) ∈ ع ، (٣ ، ٢) ∈ ع

نسمّي مثل هذه العلاقة علاقة « **متناظرة** » .

تُسمّى العلاقة ع المعرَّفة على المجموعة س علاقة متناظرة إذا وفقط إذا كان
لكلّ (أ ، ب) ∈ ع ، فإنّ (ب ، أ) ∈ ع

مثال (٣) :

إذا كانت س = { -١ ، ٢ ، ٣ } ، فأيّ العلاقات التالية متناظرة على س مع ذكر السبب ؟

أ) ع$_1$ = { (-١ ، ٢) ، (٢ ، ٣) ، (٢ ، -١) ، (٣ ، ٢) }

ب) ع$_2$ = { (٣ ، ٣) }

ج) ع$_3$ = { (-١ ، ٣) ، (٣ ، -١) ، (٢ ، ٣) } ، مثِّل ع$_3$ بمخطّط سهمي .

الحلّ :

أ) العلاقة ع$_1$: (-١ ، ٢) ∈ ع$_1$ وأيضًا (٢ ، -١) ∈ ع$_1$

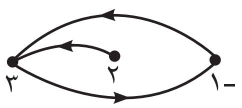
(٢ ، ٣) ∈ ع$_1$ وأيضًا (٣ ، ٢) ∈ ع$_1$

∴ ع$_1$ علاقة متناظرة لأنّ لكلّ (أ ، ب) ∈ ع$_1$ ، فإنّ (ب ، أ) ∈ ع$_1$

ب) العلاقة ع$_2$: (٣ ، ٣) ∈ ع$_2$ وأيضًا (٣ ، ٣) ∈ ع$_2$

∴ ع$_2$ علاقة متناظرة لأنّ لكلّ (أ ، ب) ∈ ع$_2$ ، فإنّ (ب ، أ) ∈ ع$_2$

ج) العلاقة ع$_3$ ليست متناظرة لأنّ (٢ ، ٣) ∈ ع$_3$ ولكن (٣ ، ٢) ∉ ع$_3$



عبِّر عن فهمك (٢)

هل كلّ علاقة انعكاسية على س هي علاقة متناظرة على س ؟ فسِّر إجابتك .

نعم ، لأن ع = {(أ ، ب) : أ ، ب ∈ س ، يوجد (أ ، أ) و (ب ، أ) ∈ ع

ملاحظة :

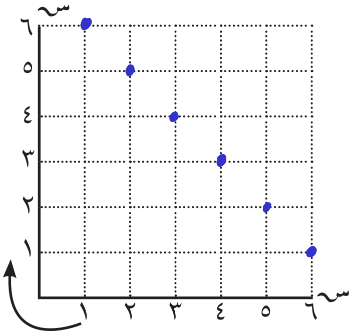
تكون العلاقة ع ليست متناظرة إذا وُجد (أ ، ب) ∈ ع ولكن (ب ، أ) ∉ ع (عنصر واحد على الأقلّ) .

دورك الآن (٢)

إذا كانت سـ = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ } ، $ع_1$ ، $ع_2$ علاقات معرَّفة على سـ :

$ع_1$ = { (أ ، ب) : أ ، ب ∈ سـ ، أ + ب = ٧ } ،

$ع_2$ = { (أ ، ب) : أ ، ب ∈ سـ ، أ = $\frac{1}{2}$ ب }



(أ) أُكتب $ع_1$ بذكر العناصر ومثِّلها بمخطّط بياني ، ثمّ ابحث فيما إذا كانت $ع_1$ علاقة متناظرة أم لا مع ذكر السبب .

$ع_1$ = { (١ ، ٦) ، (٢ ، ٥) ، (٣ ، ٤) ، (٤ ، ٣) ، (٥ ، ٢) ، (٦ ، ١) }

العلاقة $ع_1$: (١ ، ٦) ∈ $ع_1$ ، (٦ ، ١) ∈ $ع_1$ ،

(٢ ، ٥) ∈ $ع_1$ ، (٥ ، ٢) ∈ $ع_1$ ،

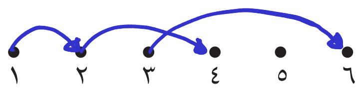
(٣ ، ٤) ∈ $ع_1$ ، (٤ ، ٣) ∈ $ع_1$

∴ $ع_1$ علاقة متناظرة لأنّ لكلّ (أ ، ب) ∈ $ع_1$ ، فإنّ (ب ، أ) ∈ $ع_1$

(ب) أُكتب $ع_2$ بذكر العناصر ومثِّلها بمخطّط سهمي ، ثمّ ابحث فيما إذا كانت $ع_2$ علاقة متناظرة أم لا مع ذكر السبب .

$ع_2$ = { (١ ، ٢) ، (٢ ، ٤) ، (٣ ، ٦) }

$ع_2$ علاقة ليست متناظرة لأنّ (١ ، ٢) ∈ $ع_2$ ولكن (٢ ، ١) ∉ $ع_2$



عبِّر عن فهمك (٣)

يقول فايز : إذا كانت ع علاقة متناظرة ، فإنّ عدد عناصر العلاقة لا بدّ أن يكون عددًا زوجيًّا .

هل توافقه الرأي ؟ فسِّر إجابتك .

لا ، ممكن أن يكون بعنصر وحيد مثل (١،١) وبالتالي يكون عدد فردي

ثالثًا : خاصّية التعدّي

إذا كانت منارة المسجد الحرام أطول من منارة المسجد النبوي ، ومنارة المسجد النبوي أطول من منارة المسجد الأقصى ، فإنّ منارة المسجد الحرام أطول من منارة المسجد الأقصى .

مثل هذه العلاقة تُسمّى علاقة « متعدّية » .

معلومة مفيدة :

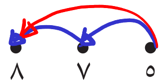
عن أبي هريرة رضي الله عنه أنّ النبي ﷺ قال :

« لا تُشدّ الرحال إلّا إلى ثلاثة مساجد : المسجد الحرام ، ومسجدي هذا ، والمسجد الأقصى »

– رواه البخاري ومسلم .

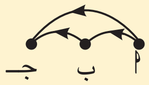
حُلّ وناقِش (٣)

إذا كانت س = { ٥ ، ٧ ، ٨ } ، وكانت ع علاقة معرَّفة على س حيث
ع = { (ا ، ب) : ا ، ب ∈ س ، ا < ب } . اكتب ع بذكر العناصر .
ع = { (٥ ، ٧) ، (٥ ، ٨) ، (٧ ، ٨) .... }
مثِّل ع بمخطّط سهمي .



لاحِظ أنّ :
(٥ ، ٧) ∈ ع و (٧ ، ٨) ∈ ع كذلك (٥ ، ٨) ∈ ع
هذه العلاقة تُسمّى علاقة « متعدّية » .

لاحِظ أنّ



تكون العلاقة متعدّية إذا وُجد سهم موجَّه من ا إلى ب وسهم آخر موجَّه من ب إلى جـ ، فإنّه يلزم وجود سهم موجَّه من ا إلى جـ .

تُسمّى العلاقة ع المعرَّفة على المجموعة س علاقة **متعدّية** إذا وفقط إذا كان
لكلّ (ا ، ب) ∈ ع و (ب ، جـ) ∈ ع ، فإنّ (ا ، جـ) ∈ ع .

مثال (٤) :

لتكن س = { ٠ ، ١ ، ٢ } ، ع علاقة معرَّفة على س
حيث ع = { (٠ ، ١) ، (١ ، ٢) ، (٠ ، ٢) }
اِختبِر ما إذا كانت العلاقة ع متعدّية أم لا مع ذكر السبب .

الحلّ :

∵ (٠ ، ١) ∈ ع و (١ ، ٢) ∈ ع ، (٠ ، ٢) ∈ ع
∴ ع علاقة متعدّية لأنّ لكلّ (ا ، ب) ∈ ع و (ب ، جـ) ∈ ع ، فإنّ (ا ، جـ) ∈ ع .

لاحِظ أنّ

(١ ، ٢) ∈ ع
(٠ ، ٢) ∈ ع
لا يوجد زوج مرتَّب مسقطه الأوّل يساوي ٢ ، إذًا لا يوجد ما ينفي شرط التعدّي .

مثال (٥) :

لتكن س = { -١ ، ٢ } ، ع علاقة معرَّفة على س
حيث ع = { (-١ ، ٢) ، (٢ ، -١) ، (-١ ، -١) ، (٢ ، ٢) }
اِختبِر ما إذا كانت العلاقة ع متعدّية أم لا مع ذكر السبب .

الحلّ :

∵ (-١ ، ٢) ∈ ع و (٢ ، -١) ∈ ع ، (-١ ، -١) ∈ ع
∵ (٢ ، -١) ∈ ع و (-١ ، ٢) ∈ ع ، (٢ ، ٢) ∈ ع
∵ (٢ ، -١) ∈ ع و (-١ ، -١) ∈ ع ، (٢ ، -١) ∈ ع
∵ (-١ ، -١) ∈ ع و (-١ ، ٢) ∈ ع ، (-١ ، ٢) ∈ ع
∵ (٢ ، ٢) ∈ ع و (٢ ، -١) ∈ ع ، (٢ ، -١) ∈ ع
∵ (-١ ، ٢) ∈ ع و (٢ ، ٢) ∈ ع ، (-١ ، ٢) ∈ ع
∴ العلاقة ع متعدّية لأنّ لكلّ (ا ، ب) ∈ ع و (ب ، جـ) ∈ ع ، فإنّ (ا ، جـ) ∈ ع .

لا يلزم كتابة هذه الخطوات .
لماذا ؟

ملاحظة :

- وجود العنصر (أ ، أ) في ع ، لا يؤثّر على خاصّية التعدّي .
- لبحث علاقة التعدّي ، نختبر كلّ الأزواج المرتّبة المختلفة المساقط .
- إذا وُجد العنصر (أ ، ب) في ع ، ولم يوجد العنصر (ب ، جـ) في ع ، فلا يوجد ما ينفي شرط التعدّي .

مثال (٦) :

إذا كانت سـ = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ } ، ع علاقة معرَّفة على سـ حيث
ع = { (١ ، ٢) ، (٢ ، ٣) ، (١ ، ٣) ، (٣ ، ٤) ، (٤ ، ١) } ، فهل ع علاقة متعدّية ؟ ولماذا ؟

الحلّ :

(٢ ، ٣) ∈ ع و (٣ ، ٤) ∈ ع ، ولكن (٢ ، ٤) ∉ ع

∴ العلاقة ع ليست متعدّية .

ملاحظة :

تكون العلاقة ع ليست متعدّية إذا وُجد (أ ، ب) ∈ ع و (ب ، جـ) ∈ ع ، ولكن (أ ، جـ) ∉ ع .

عبِّر عن فهمك (٤)

إذا كانت سـ = { ١ ، ٣ ، ٥ ، ٦ } ، ع علاقة معرَّفة على سـ حيث ع = { (١ ، ٣) ، (٥ ، ٦) } .
ترى مريم أنّ العلاقة ع هي علاقة ليست متعدّية ، بينما ترى نورا أنّ ع علاقة متعدّية ،
أيّ منهما على صواب ؟ فسِّر إجابتك . نورا على صواب

لأنه عدم وجود (أ ، ب) ∈ ع و (ب ، جـ) ∈ ع هذا لا ينفي أنها علاقة متعدية

دورك الآن (٣)

إذا كانت سـ = { ٠ ، ٢ ، ٤ } ، ع علاقة معرَّفة على سـ حيث ع = { (٠ ، ٢) ، (٢ ، ٤) ، (٠ ، ٤) } .
هل ع علاقة متعدّية ؟ ولماذا ؟

∵ (...٠... ، ...٢...) ∈ ع و (...٢... ، ...٤...) ∈ ع ، (...٠... ، ...٤...) ∈ ع

∴ ع علاقة ...متعدية...

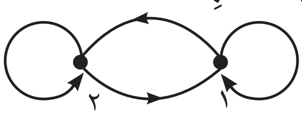
لأنّ لكلّ (أ ، ب) ∈ ع و (...ب... ، ...جـ...) ∈ ع ، فإنّ (أ ، جـ) ∈ ع .

رابعًا : خاصّية التكافؤ

حُلّ وناقِش (٤)

لتكن س = { ١ ، ٢ } ، ع علاقة معرَّفة على س موضَّحة في المخطّط السهمي المقابِل :

أجِب عن الأسئلة الآتية :



ع = {(١،١)،(٢،٢)،(١،٢)،(٢،١)}

(أ) هل ع علاقة انعكاسية ؟ ولماذا ؟

انعكاسية لأنه {(أ،ب) : أ، ب ∈ س ، (أ،أ) ∈ ع

(ب) هل ع علاقة متناظرة ؟ ولماذا ؟

نعم ، لأنه لكل (أ،ب) ∈ ع ، فإن (ب،أ) ∈ ع

(ج) هل ع علاقة متعدّية ؟ ولماذا ؟

نعم ، لأنه لكل (أ،ب) ∈ ع و (ب،ج) ∈ ع ، فإن (أ،ج) ∈ ع

∴ العلاقة ع تُسمّى « علاقة تكافؤ » .

تكون العلاقة ع المعرَّفة على مجموعة س علاقة تكافؤ إذا كانت انعكاسية ومتناظرة ومتعدّية .

مثال (٧) :

إذا كانت س = { ١ ، ٢ ، ٣ } ، ع علاقة معرَّفة على س حيث

ع = { (أ ، ب) : أ ، ب ∈ س ، أ + ب = عددًا زوجيًّا }

(أ) أُكتب ع بذكر العناصر .

(ب) اِختبِر العلاقة ع من حيث كونها انعكاسية ، متناظرة ، متعدّية ، تكافؤ .

الحلّ :

(أ) ع = { (١ ، ١) ، (١ ، ٣) ، (٢ ، ٢) ، (٣ ، ١) ، (٣ ، ٣) }

(ب) ∵ ١ ∈ س ، (١ ، ١) ∈ ع

٢ ∈ س ، (٢ ، ٢) ∈ ع

٣ ∈ س ، (٣ ، ٣) ∈ ع

∴ ع علاقة انعكاسية ، لأنّ لكلّ أ ∈ س يكون (أ ، أ) ∈ ع

الدرس الأوّل

∵ (١ ، ٣) ∈ ع ، (٣ ، ١) ∈ ع

∴ ع علاقة متناظرة ، لأنّ لكلّ (أ ، ب) ∈ ع فإنّ (ب ، أ) ∈ ع

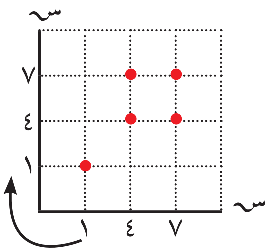
∵ (١ ، ٣) ∈ ع و (٣ ، ١) ∈ ع ، (١ ، ١) ∈ ع
(٣ ، ١) ∈ ع و (١ ، ٣) ∈ ع ، (٣ ، ٣) ∈ ع

∴ ع علاقة متعدّية لأنّ لكلّ (أ ، ب) ∈ ع و (ب ، جـ) ∈ ع فإنّ (أ ، جـ) ∈ ع .

∴ ع علاقة تكافؤ لأنّها علاقة انعكاسية ومتناظرة ومتعدّية .

دورك الآن (٤)

إذا كانت س = { ١ ، ٤ ، ٧ } ، ع علاقة معرَّفة على س
كما هو موضَّح في المخطّط البياني المقابِل ،
فاختبِر ما إذا كانت ع علاقة تكافؤ .



ع = {(١،١)، (٤،٤)، (٤،٧)، (٧،٤)، (٧،٧)}

∵ ١ ∈ س ، (١،١) ∈ ع

٤ ∈ س ، (٤،٤) ∈ ع

٧ ∈ س ، (٧،٧) ∈ ع

∴ ع علاقة انعكاسية لأنه لكل أ ∈ س ، فإنه (أ،أ) ∈ ع

∵ (٤،٧) ∈ ع ، (٧،٤) ∈ ع

∴ ع علاقة متناظرة لأنه لكل (أ،ب) ∈ ع ، فإنه (ب،أ) ∈ ع

∵ (٤،٧) ∈ ع و (٧،٤) ∈ ع فإنه (٤،٤) ∈ ع

∴ ع علاقة متعدية لأنه لكل (أ،ب) ∈ ع و (ب،جـ) ∈ ع ، فإنه (أ،جـ) ∈ ع

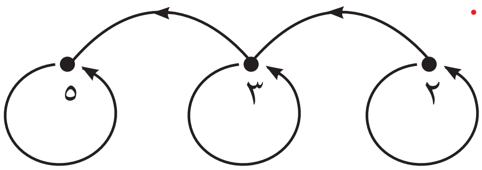
∴ ع علاقة تكافؤ لأنها علاقة انعكاسية ومتناظرة ومتعدية .

ملاحظة :

تكون العلاقة ع ليست تكافؤًا إذا لم تكن ع (انعكاسية أو متناظرة أو متعدّية) .

مثال (٨) :

في الشكل المقابِل : س = { ٢ ، ٣ ، ٥ } ، ع علاقة معرَّفة على س .
اِختبِر ع من حيث كونها انعكاسية ، متناظرة ، متعدّية ،
تكافؤ مع ذكر السبب .



الحلّ :

ع = { (٢ ، ٢) ، (٢ ، ٣) ، (٣ ، ٣) ، (٣ ، ٥) ، (٥ ، ٥) }

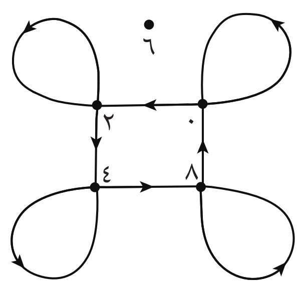
∵ ٢ ∈ س ، (٢ ، ٢) ∈ ع
٣ ∈ س ، (٣ ، ٣) ∈ ع
٥ ∈ س ، (٥ ، ٥) ∈ ع

∴ ع علاقة انعكاسية ، لأنّ لكلّ أ ∈ س يكون (أ ، أ) ∈ ع .
ع علاقة ليست متناظرة لأنّ (٢ ، ٣) ∈ ع ولكن (٣ ، ٢) ∉ ع .
ع علاقة ليست متعدّية لأنّ (٢ ، ٣) ∈ ع و (٣ ، ٥) ∈ ع ولكن (٢ ، ٥) ∉ ع .
∴ ع علاقة ليست تكافؤًا لأنّ ع ليست متناظرة (أو لأنّها ليست متعدّية) .

تمارين ذاتية :

١ فيما يلي مجموعة من المخطّطات السهمية لعدّة علاقات على س = { ٠ ، ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ } .
أُكتب كلّ علاقة بذكر العناصر ، ثمّ اختبِر إذا كانت العلاقة انعكاسية أم لا مع ذكر السبب .

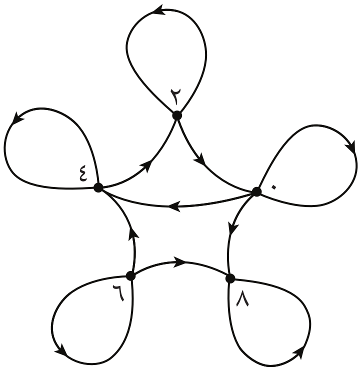
أ



ع = { (٠،٠)، (٢،٢)، (٤،٤)، (٨،٨)،
(٠،٢)، (٢،٤)، (٤،٨)، (٨،٠) }

∴ ع علاقة ليست انعكاسية
لأنه ٦ ∈ س و (٦،٦) ∉ ع

ب



ع = { (٠،٠)، (٢،٢)، (٤،٤)، (٦،٦)،
(٨،٨)، (٠،٤)، (٠،٨)، (٢،٠)، (٢،٤)،
(٤،٢)، (٦،٤)، (٦،٨) }

∴ ع علاقة انعكاسية لأنه
لكل أ ∈ س ، فإن (أ،أ) ∈ ع

٢ إذا كانت س = { ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٦ } ، وكانت ع = { (أ ، ب) : أ ، ب ∈ س ، أ عامل من عوامل ب } .

أ) أُكتب ع بذكر العناصر . ع = {(٢ ، ٢) ، (٣ ، ٣) ، (٥ ، ٥) ، (٦ ، ٦) ، (٢ ، ٦) ، (٣ ، ٦)}

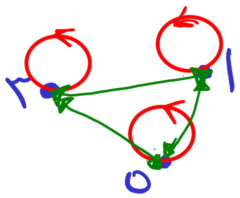
ب) تحقَّق من أنّ العلاقة ع انعكاسية .

ع علاقة انعكاسية لأنه لكل أ ∈ س ، فإنه (أ ، أ) ∈ ع

٣ أُكتب كلّ علاقة ممّا يأتي بذكر العناصر ، ومثّلها بمخطّط سهمي ، ثمّ اختبِر الخاصّية الانعكاسية .

أ) س = { ١ ، ٣ ، ٥ }

ع = { (أ ، ب) : أ ، ب ∈ س ، أ + ب = عددًا زوجيًّا }



ع = {(١ ، ١) ، (١ ، ٣) ، (١ ، ٥) ، (١ ، ١) ، (٣ ، ١) ، (٣ ، ٣) ،
(٣ ، ٥) ، (٥ ، ١) ، (٥ ، ٣) ، (٥ ، ٥)}

∴ ع علاقة انعكاسية لأنه لكل أ ∈ س
فإنه (أ ، أ) ∈ ع

ب) ل = { −٢ ، ١ ، −١ }

ع = { (أ ، ب) : أ ، ب ∈ ل ، أ^{٢} = ب^{٢} }

ع = {(١ ، ١) ، (١ ، −١) ، (−١ ، ١) ، (−١ ، −١)}

∴ ع علاقة ليست انعكاسية لأنه (−٢) ∈ س و (−٢ ، −٢) ∉ ع

ج) م = { −١ ، ٠ ، ٣ }

ع = { (أ ، ب) : أ ، ب ∈ م ، أ ≤ ب }

ع = {(٣ ، ٣) ، (٣ ، ٠) ، (٣ ، −١) ، (٠ ، ٠) ،
(٠ ، −١) ، (−١ ، −١)}

ع علاقة انعكاسية لأنه لكل أ ∈ س ، فإنه (أ ، أ) ∈ ع

٤ أُكتب كلّ علاقة ممّا يأتي بذكر العناصر ، ثمّ اختبِر من حيث كونها متناظرة أم لا مع ذكر السبب .

أ) العلاقة ع معرَّفة على س = { ٣ ، ٤ ، ٥ }

حيث ع = { (أ ، ب) : أ ، ب ∈ س ، أ + ب = ٨ }

ع = {(٣ ، ٥) ، (٥ ، ٣)}

∵ (٣ ، ٥) ∈ ع ، (٥ ، ٣) ∈ ع

∴ ع علاقة متناظرة لأنه لكل (أ ، ب) ∈ ع ، فإنه (ب ، أ) ∈ ع .

ب ع علاقة « ≥ » معرَّفة على سـ = { ٢ ، ٤ ، ٦ }

ع = {(٢،٢)، (٢،٤)، (٢،٦)، (٤،٤)، (٤،٦)، (٦،٦)}

∴ ع علاقة متناظرة لأنه لكل (أ،ب) ∈ ع ، فإنه (ب،أ) ∈ ع .

ج ع علاقة « ضعف » معرَّفة على سـ = { ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ }

ع = {(٢،١)}

∴ ع علاقة ليست متناظرة لأنه (٢،١) ∈ ع و (١،٢) ∉ ع

د العلاقة ع معرَّفة على سـ = { -٢ ، -١ ، ٠ ، ١ ، ٢ }

حيث ع = { (أ ، ب) : أ ، ب ∈ سـ ، أ + ب = صفرًا }

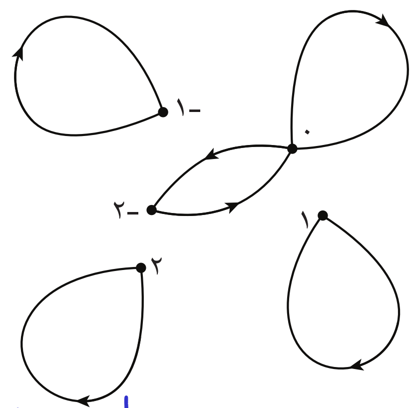
ع = {(-٢،٢)، (-١،١)، (٠،٠)، (١،-١)، (٢،-٢)}

∴ ع علاقة متناظرة لأنه لكل (أ،ب) ∈ ع ، فإنه (ب،أ) ∈ ع .

٥ **فيما يلي مخطّطات سهمية وبيانية لعلاقات معرَّفة على سـ = { -٢ ، -١ ، ٠ ، ١ ، ٢ } .**

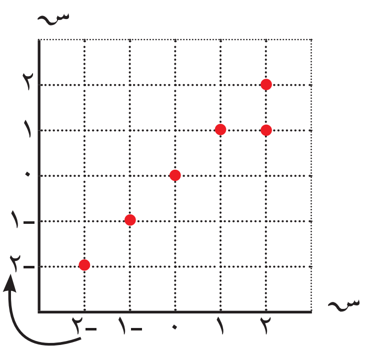
اِختبِر خاصّية التناظر لكلّ شكل ممّا يلي :

أ



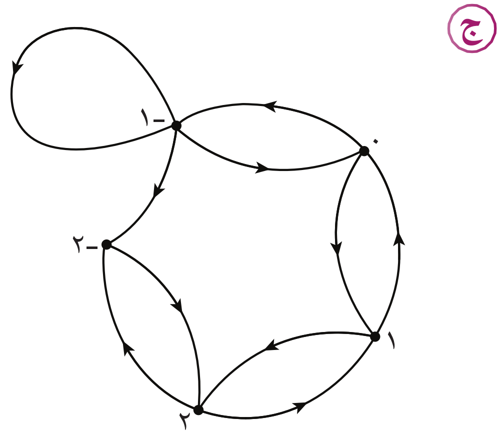
∴ ع علاقة متناظرة لأنه
(-٢،٠) ∈ ع و (٠،-٢) ∈ ع

ب



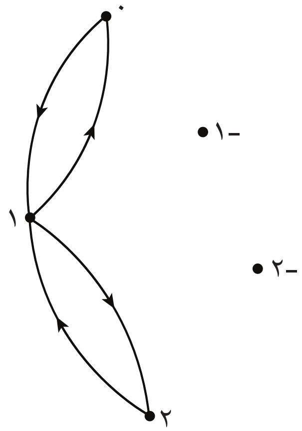
ع ليست متناظرة لأنه
(٢،١) ∈ ع و (١،٢) ∉ ع

ج



ع علاقة ليست متناظرة لأنه (-١ ، -٢) ∈ ع و (-٢ ، -١) ∉ ع

د



ع علاقة متناظرة لأنه لكل (أ ، ب) ∈ ع فإن (ب ، أ) ∈ ع

٦ **العلاقات الآتية معرَّفة على المجموعة س = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ } . أيّ منها هو علاقة متعدّية ؟ وأيّها غير متعدّية ؟ مع ذكر السبب .**

ع١ = { (١ ، ٢) ، (٢ ، ٣) ، (١ ، ٣) }

∴ ع علاقة متعدية لأنه (١ ، ٢) ∈ ع و (٢ ، ٣) ∈ ع فإن (١ ، ٣) ∈ ع .

ع٢ = { (١ ، ١) ، (٢ ، ٢) ، (٣ ، ٣) ، (٤ ، ٤) }

ع علاقة متعدية لأنه وجود (أ ، ب) ∈ ع و (ب ، جـ) ∉ ع ليس كافيًا لإثبات أنها غير متعدية .

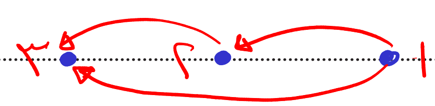
ع٣ = { (١ ، ٢) ، (٢ ، ١) ، (٢ ، ٣) ، (٣ ، ٤) ، (٢ ، ٤) ، (١ ، ١) }

∴ ع علاقة متعدية لأنه لكل (أ ، ب) ∈ ع و (ب ، جـ) ∈ ع فإن (أ ، جـ) ∈ ع .

٧ اِعتبِر س = { ١ ، ٢ ، ٣ } ، ع = { (أ ، ب) : أ ، ب ∈ س ، أ < ب }

أ) أُكتب ع بذكر العناصر ، ثمّ مثِّلها بمخطّط سهمي .

ع = { (١ ، ٢) ، (١ ، ٣) ، (٢ ، ٣) }



ب اِختبِر ع من حيث كونها متعدّية أم لا مع ذكر السبب .

نعم ، ع علاقة متعدية لأنه

(١ ، ٢) ∈ ع و (٢ ، ٣) ∈ ع ، فإنه (١ ، ٣) ∈ ع

٨ إذا كانت س = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ } ، وكانت ع = { (س ، ص) : س ، ص ∈ س ، س ≠ ص } ، اُكتب ع بذكر العناصر ، ثمّ ادرس خواصّ العلاقة ع من حيث كونها انعكاسية ، متناظرة ، متعدّية ، تكافؤ .

ع = { (١ ، ٢) ، (١ ، ٣) ، (١ ، ٤) ، (١ ، ٥) ، (٢ ، ١) ، (٢ ، ٣) ، (٢ ، ٤) ، (٢ ، ٥) ، (٣ ، ١) ، (٣ ، ٢) ، (٣ ، ٤) ، (٣ ، ٥) ، (٤ ، ١) ، (٤ ، ٢) ، (٤ ، ٣) ، (٤ ، ٥) ، (٥ ، ١) ، (٥ ، ٢) ، (٥ ، ٣) ، (٥ ، ٤) }

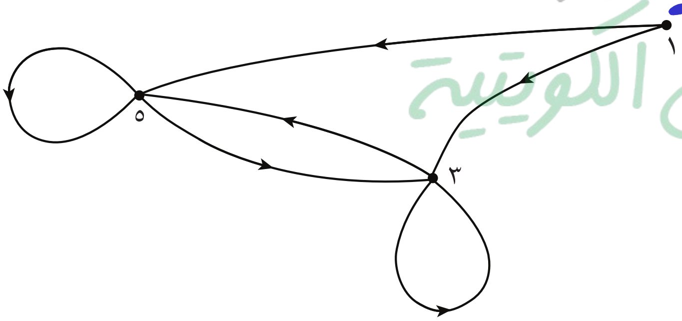
∵ ع علاقة ليست انعكاسية لأنه لكل م ∈ س ، فإنه (م ، م) ∉ ع .

∵ ع علاقة متناظرة لأنه لكل (م ، ب) ∈ ع فإنه (ب ، م) ∈ ع

∵ ع علاقة غير متعدية لأنه (١ ، ٢) ∈ ع و (٢ ، ١) ∈ ع ، (١ ، ١) ∉ ع

∵ ع علاقة ليست تكافؤ لأنها غير انعكاسية

٩ في المخطّط السهمي المقابِل ع علاقة معرَّفة على س = { ١ ، ٣ ، ٥ } .



ع = { (١ ، ٣) ، (١ ، ٥) ، (٣ ، ٣) ، (٣ ، ٥) ، (٥ ، ٣) ، (٥ ، ٥) }

اُدرس خواصّ العلاقة ع من حيث كونها انعكاسية ، متناظرة ، متعدّية ، تكافؤ .

∵ ع ليست انعكاسية لأنه ١ ∈ س و (١ ، ١) ∉ ع

∵ ع علاقة غير متناظرة لأنه لكل (م ، ب) ∈ ع فإنه (ب ، م) ∉ ع .

∵ ع علاقة متعدية لأنه لكل (م ، ب) ∈ ع و (ب ، ج) ∈ ع فإنه (م ، ج) ∈ ع

∵ ع علاقة ليست تكافؤ لأنها علاقة غير متناظرة .

مهارات تفكير عليا :

١٠ إذا كانت ع علاقة معرَّفة على ط ، حيث ط هي مجموعة الأعداد الكلّية ،
وكانت ع = { (س ، ص) : س ، ص ∈ ط ، س = ٦ - ص } ،
فاختبِر كون العلاقة ع انعكاسية ، متناظرة ، متعدّية ، تكافؤ .

ط = { ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ..... }

∵ ع = { (٦ ، ٠) ، (٥ ، ١) ، (٤ ، ٢) ، (٣ ، ٣) ، (٢ ، ٤) ، (١ ، ٥) ، (٠ ، ٦) }

∴ ع علاقة ليست انعكاسية لأنه كل س ∈ ط ، فإنه (س ، س) ∉ ع

∴ ع علاقة متناظرة لأنه لكل (س ، ص) ∈ ع ، فإنه (ص ، س) ∈ ع

∴ ع علاقة غير متعدية لأنه (٦ ، ٠) ∈ ع و (٠ ، ٦) ∈ ع ولكن (٦ ، ٦) ∉ ع

∴ ع علاقة ليست تكافؤاً لأنها علاقة غير متعدية .

٥ - ٢ التطبيق (الدالّة) Function

سوف تتعلّم : التطبيق ومكوِّناته (المجال ، المجال المقابِل ، قاعدة الاقتران) .

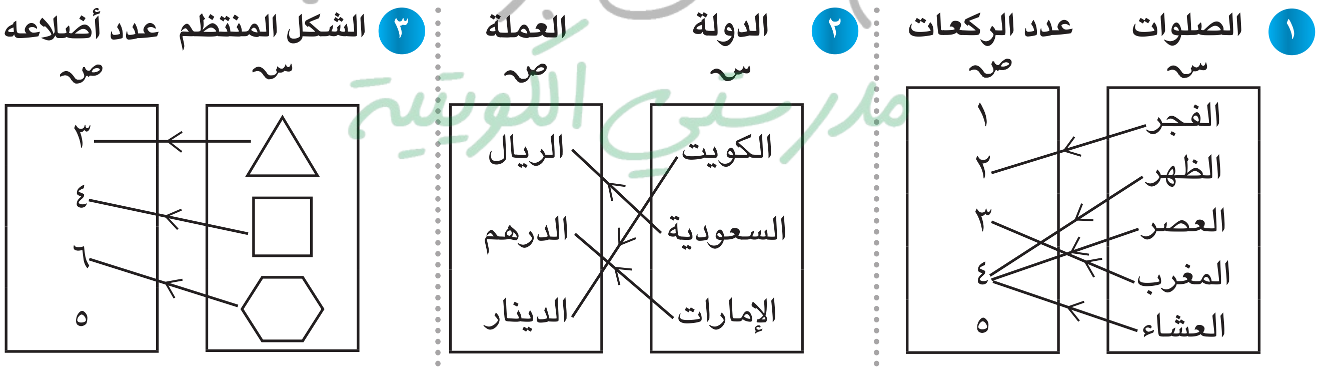
العبارات والمفردات :

التطبيق (الدالّة)	Function	المجال المقابِل	Codomain
المجال	Domain	المدى	Range

تعلّمت سابقًا أنّ ع علاقة من س إلى ص عندما تكون ع مجموعة جزئية من الحاصل الديكارتي س × ص ،
أي أنّ ع ⊇ س × ص

حُلّ وناقِش (١)

توضّح المخطّطات السهمية التالية علاقات من س إلى ص ، من خلال هذه العلاقات أجِب عمّا يلي :



أ) هل جميع عناصر س مرتبطة بعناصر من ص ؟

نعم

ب) بكم عنصرًا من ص ارتبط كلّ عنصر من عناصر س ؟

عنصر واحد فقط

من العلاقات ١ ، ٢ ، ٣ نلاحظ أنّ :

كلّ عنصر من عناصر المجموعة الأولى س يرتبط بعنصر واحد فقط من عناصر المجموعة الثانية ص .

معلومة مفيدة :

في يوم ٢٦ فبراير من عام ١٧٩٧ م ، أُصدرت أوّل عملة ورقية حديثة الشكل في العالم وكانت من فئة الجنيه والجنيهَين ، وقد أحدث ظهور العملات الورقية آنذاك ردّة فعل ضخمة ، ظهرت العملة الورقية ، لتلافي المشكلات المتعلّقة بتخزين النقود المعدنية التي كانت تُصنع من الذهب والفضّة والنحاس .

التطبيق (الدالّة) : هو علاقة من س إلى ص بحيث يرتبط **كلّ** عنصر من عناصر س بعنصر **واحد وواحد فقط** من عناصر ص .

نرمز إلى التطبيق (الدالّة) بأحد الرموز : ت ، د ، هـ ، ن ، ...

إذا كانت ت تطبيق من س إلى ص ، نرمز إلى ذلك ت : س ⟵ ص

ملاحظة :

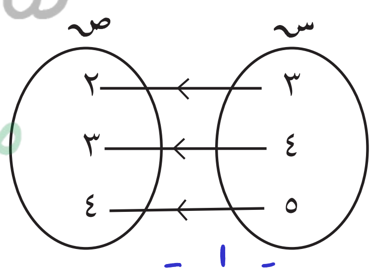
مكوِّنات التطبيق (الدالّة) ت : س ⟵ ص هي :

1. س تُسمّى مجال التطبيق (الدالّة) .
2. ص تُسمّى المجال المقابِل للتطبيق ت .
3. ت هي قاعدة الاقتران .

دورك الآن (١)

. تمثّل المخطّطات السهمية التالية علاقات من س إلى ص ، أيّ منها يمثّل تطبيقًا وأيّها لا يمثّل تطبيقًا مع ذكر السبب ؟

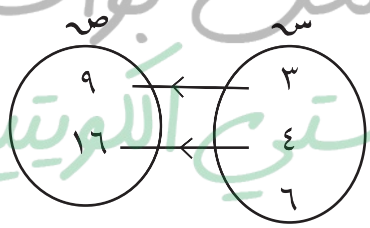
أ



العلاقة : تطبيق

السبب : لأنه كل عنصر من عناصر س ارتبط بعنصر واحد فقط من عناصر ص

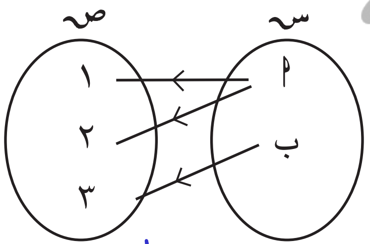
ب



العلاقة : لا يمثل تطبيق

السبب : لأنه عنصر من عناصر س لم يرتبط بعنصر من عناصر ص

ج



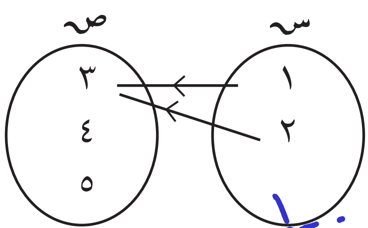
العلاقة : لا يمثل تطبيق

السبب : لأنه عنصر من عناصر س خرج منه سهمان إلى أحد عناصر ص

في المخطّط السهمي الذي يمثّل تطبيقًا : كلّ عنصر من عناصر س يخرج منه سهم واحد فقط إلى أحد عناصر ص .

عبِّر عن فهمك

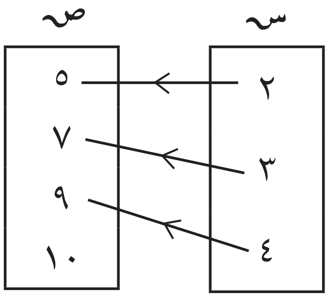
هل تمثّل العلاقة الآتية تطبيقًا من س إلى ص ؟
وضِّح إجابتك .



نعم لأنه كل عنصر من عناصر س ارتبط بعنصر واحد فقط من عناصر ص حتى وإن كان ارتبط بنفس العنصر .

حُلّ وناقِش (٢)

لتكن ت : س ← ص تطبيق مخطّطه السهمي مبيَّن في الشكل المقابِل .



أكمِل :

المجال = { ٢ ، ٣ ، ٤ }

المجال المقابِل = { ٥ ، ٧ ، ٩ ، ١٠ }

مجموعة صور عناصر المجال = { ٥ ، ٧ ، ٩ }

تُسمّى مجموعة صور عناصر المجال بمدى التطبيق .

مدى التطبيق هو مجموعة صور عناصر مجال التطبيق .

نلاحظ أنّ : { ٥ ، ٧ ، ٩ } ⊆ { ٥ ، ٧ ، ٩ ، ١٠ }

ملاحظة :

مدى التطبيق مجموعة جزئية من المجال المقابِل .

إذا كان أ ∈ س والعنصر الذي يرتبط به من ص هو ب ، فإنّنا نعبّر عن ذلك بالصورة ت (أ) = ب وهي قيمة التطبيق (الدالّة) ت عند أ .

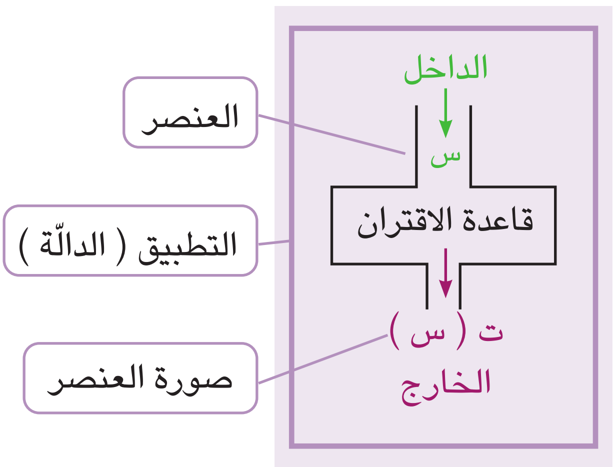
من المخطّط السهمي في « حُلّ وناقِش (٢) » ، أكمِل ما يلي للوصول إلى قاعدة الاقتران للتطبيق ت .

ت (٢) = ٢ × (٢) + ١ = ٥

ت (٣) = ٢ × (٣) + ١ = ٧

ت (٤) = ٢ × (٤) + ١ = ٩

∴ قاعدة الاقتران هي : ت (س) = ٢س + ١

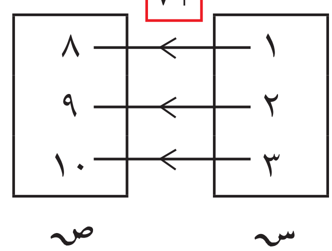


قاعدة الاقتران للتطبيق هي التعبير الرياضي الذي يربط كلّ عنصر في المجال بعنصر واحد فقط في المجال المقابِل .

دورك الآن (٢)

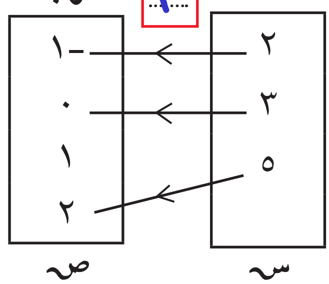
يمثّل كلّ ممّا يلي تطبيقًا من س إلى ص . أُكتب قاعدة الاقتران لكلّ منها .

أ) مدخَلات $\boxed{+٧}$ مخرَجات



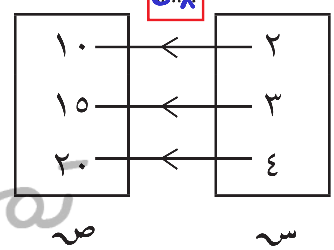
ن (س) = س + ٧

ب) مدخَلات $\boxed{-٣}$ مخرَجات



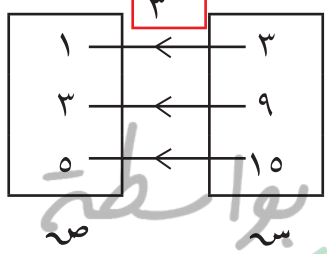
ت (س) = س - ٣

ج) مدخَلات $\boxed{\times ٥}$ مخرَجات



د (س) = ٥ س

د) مدخَلات $\boxed{\times \frac{١}{٣}}$ مخرَجات



هـ (س) = $\frac{١}{٣}$ س

مثال (٢) :

أُكتب كلًّا من العلاقات التالية بذكر العناصر ، ثمّ حدِّد ما إذا كانت كلّ منها تمثّل تطبيقًا أم لا ، مع ذكر السبب ، ثمّ مثّل كلًّا منها بمخطّط سهمي .

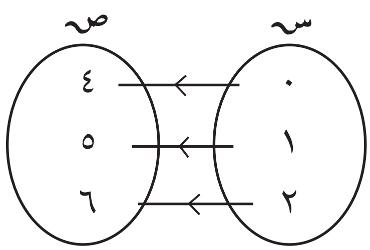
أ) ع$_١$ = { (ا ، ب) : ا ∈ س ، ب ∈ ص ، ب = ا + ٤ } ،
س = { ٠ ، ١ ، ٢ } ، ص = { ٤ ، ٥ ، ٦ }

الحلّ :

ع$_١$ = { (٠ ، ٤) ، (١ ، ٥) ، (٢ ، ٦) }

∵ كلّ عنصر من عناصر س ارتبط بعنصر واحد فقط من عناصر ص .

∴ العلاقة ع$_١$ تمثّل تطبيقًا .



ب ع٢ = { (أ ، ب) : أ ∋ س ، ب ∋ ص ، الجذر التربيعي لـ أ = ب } ،
س = { ٤ ، ٩ } ، ص = { -٢ ، ٠ ، ٢ ، ٣ }

اِنتبِه

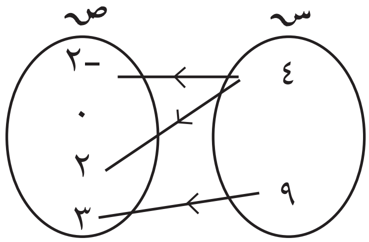
الجذر التربيعي للعدد الموجَب أ هو العدد الذي مربّعه يساوي أ .

الحلّ :

ع٢ = { (٤ ، ٢) ، (٤ ، -٢) ، (٩ ، ٣) }

∵ العنصر ٤ من المجال ارتبط بعنصرَين مختلفَين من المجال المقابِل .

∴ العلاقة ع٢ لا تمثّل تطبيقًا .



في العلاقة التي تمثّل تطبيقًا : كلّ عنصر من عناصر المجال يظهر مرّة واحدة فقط كمسقط أوّل في أحد الأزواج المرتَّبة التي تنتمي إلى العلاقة .

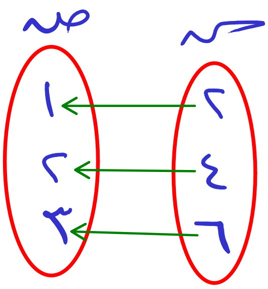
دورك الآن (٣)

ليكن ع علاقة من س إلى ص ، أُكتب ع بذكر العناصر ، وحدِّد ما إذا كانت تمثّل تطبيقًا أم لا ، مع ذكر السبب ، ثمّ مثِّلها بمخطّط سهمي .

ع = { (أ ، ب) : أ ∋ س ، ب ∋ ص ، أ = ٢ ب }

س = { ٢ ، ٤ ، ٦ }

ص = { ١ ، ٢ ، ٣ }



ع = { (٢ ، ١) ، (٤ ، ٢) ، (٦ ، ٣) }

∴ ع تمثل تطبيقاً لأنه كل عنصر من عناصر س ارتبط بعنصر واحد فقط من عناصر ص

مثال (٢) :

إذا كانت سـ = { -٢ ، -١ ، ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ }

وكانت ت : سـ ⟵ ح (مجموعة الأعداد الحقيقية) ، حيث ت (س) = ٣س + ١

(أ) أكمِل الجدول التالي :

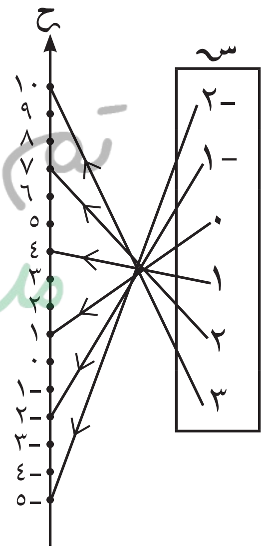
س	-٢	-١	٠	١	٢	٣
٣ س + ١	(٣ × -٢) + ١	(٣ × -١) + ١	(٣ × ٠) + ١	(٣ × ١) + ١	(٣ × ٢) + ١	(٣ × ٣) + ١
ت (س)	-٥	-٢	١	٤	٧	١٠

(ب) مدى ت = { -٥ ، -٢ ، ١ ، ٤ ، ٧ ، ١٠ }

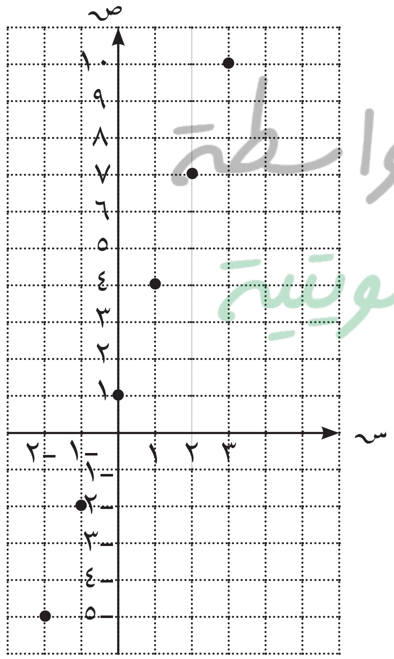
(ج) أُكتب ت كمجموعة من الأزواج المرتَّبة .

ت = { (-٢ ، -٥) ، (-١ ، -٢) ، (٠ ، ١) ، (١ ، ٤) ، (٢ ، ٧) ، (٣ ، ١٠) }

(د) أُرسم مخطّطًا سهميًّا وآخر بيانيًّا في المستوى الإحداثي .



مخطّط سهمي



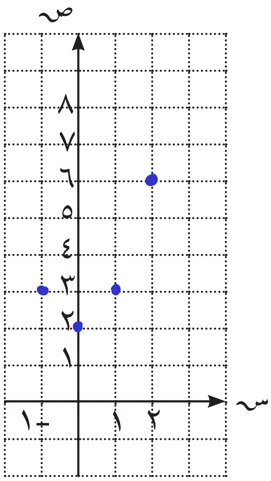
مخطّط بياني

في المخطّط البياني الذي يمثّل تطبيقًا : كلّ خطّ رأسي يمرّ بنقطة واحدة على الأكثر من نقاط التطبيق .

دورك الآن (٤)

إذا كانت س = { −١ ، ٠ ، ١ ، ٢ } ، ح هي مجموعة الأعداد الحقيقية .

ت : س ⟵ ح حيث ت (س) = $س^٢ + ٢$



(أ) أكمِل الجدول التالي ، ثمّ أوجِد مدى التطبيق ت :

س	−١	٠	١	٢
$س^٢ + ٢$	$(−١)^٢ + ٢$	$(٠)^٢ + ٢$	$(١)^٢ + ٢$	$(٢)^٢ + ٢$
ت (س)	٣	٢	٣	٦

مدى التطبيق = { ٢ ، ٣ ، ٦ }

(ب) أُكتب ت كأزواج مرتَّبة .

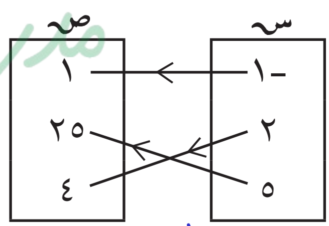
ت = { (−١ ، ٣) ، (٠ ، ٢) ، (١ ، ٣) ، (٢ ، ٦) }

(ج) أُرسم مخطّطًا بيانيًّا في المستوى الإحداثي .

تمارين ذاتية :

١ بيِّن أيًّا من المخطّطات السهمية التالية يمثّل تطبيقًا من س ⟵ ص وأيّها لا يمثّل تطبيقًا ، مع ذكر السبب . إذا كان المخطّط يمثّل تطبيقًا فاذكر المجال والمدى .

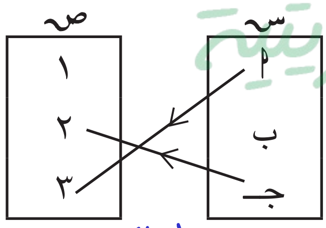
(أ)



نعم يمثل تطبيقًا لأنه كل عنصر من عناصر س ارتبط بعنصر واحد فقط من عناصر ص

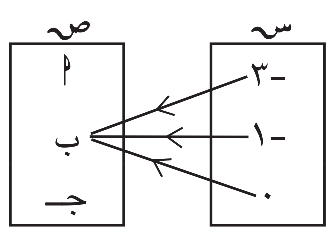
∴ المجال = { −١ ، ٢ ، ٥ } ، المدى = { ١ ، ٤ ، ٢٥ }

(ب)



لا يمثل تطبيقًا لأنه لم يرتبط جميع عناصر س بعناصر ص

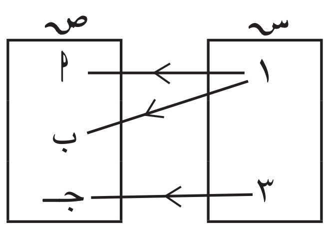
(ج)



نعم يمثل تطبيقًا لأنه كل عنصر من عناصر س ارتبط بعنصر واحد فقط من عناصر ص

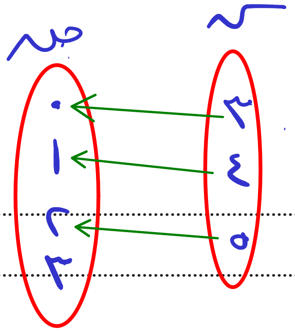
المجال = { ٠ ، −١ ، −٣ } ، المدى = { ب }

(د)



لا يمثل تطبيقًا لأنه عنصر من عناصر س ارتبط بأكثر من عنصر من عناصر ص

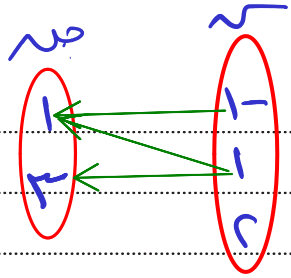
٢ حدِّد ما إذا كانت العلاقات أدناه تمثّل تطبيقًا من س ← ص أم لا ، مع ذكر السبب ، ثمّ مثِّلها بمخطّط سهمي .



أ) $ع_١$ = { (أ ، ب) : أ ∈ س ، ب ∈ ص ، ب = أ − ٣ }
حيث س = { ٣ ، ٤ ، ٥ } ، ص = { ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ }

ع = { (٣ ، ٠) ، (٤ ، ١) ، (٥ ، ٢) }

ع تمثل تطبيقًا من س ← ص لأن كل عنصر من عناصر س ارتبط بعنصر واحد من عناصر ص



ب) $ع_٢$ = { (−١ ، ١) ، (١ ، ١) ، (١ ، ٣) }
حيث س = { −١ ، ١ ، ٢ } ، ص = { ١ ، ٣ }

ع لا تمثل تطبيقًا لأن عنصر من عناصر س خرج منه سهمان إلى أحد عناصر ص

٣ إذا كانت س = { −١ ، ٠ ، ١ } ، ص = { −٣ ، −١ ، ٠ ، ١ } ، وكانت ت تطبيقًا من س ← ص
حيث ت (س) = ٢س − ١

أ) أكمِل الجدول المقابِل :

س	−١	٠	١
٢س − ١	٢×(−١)−١	٢×٠ −١	٢×١ −١
ت (س)	−٣	−١	١

ب) مدى ت = { −٣ ، −١ ، ١ }

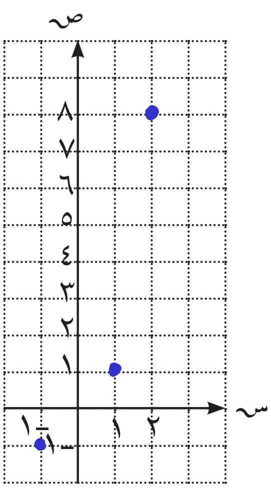
ج) أُكتب ت كمجموعة من الأزواج المرتَّبة .
ت = { (−١ ، −٣) ، (٠ ، −١) ، (١ ، ١) }

د) أُرسم مخطّطًا سهميًّا .

٤ إذا كانت س = { −١ ، ١ ، ٢ } ، ح هي مجموعة الأعداد الحقيقية ، هـ هي تطبيق معرَّف كما يلي :
هـ : س ← ح حيث هـ (س) = $س^٣$

أ) أكمِل الجدول التالي :

س	−١	١	٢
$س^٣$	$(−١)^٣$	$(١)^١$	$(٢)^٣$
هـ (س)	−١	١	٨



ب) مدى هـ = { −١ ، ١ ، ٨ }

ج) أُكتب هـ كمجموعة من الأزواج المرتَّبة .
هـ = { (−١ ، −١) ، (١ ، ١) ، (٢ ، ٨) }

د) أُرسم مخطّطًا بيانيًّا في المستوى الإحداثي .

٥ - ٣ أنواع التطبيق

Types of Functions

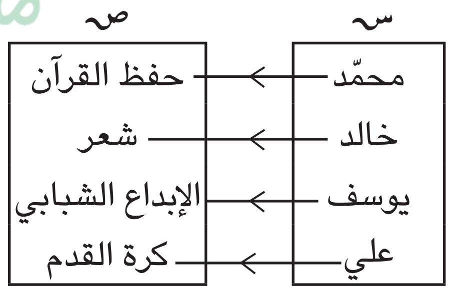
سوف تتعلّم : أنواع التطبيق (الدالّة) .

العبارات والمفردات :

تطبيق شامل	Surjective Function (Onto Function)
تطبيق متباين	Injective Function (One-to-One Function)
تطبيق تقابل	Bijective Function

حُلّ وناقِش

تُقام عدّة مسابقات على مستوى المدارس في دولة الكويت التابعة لوزارة التربية ، منها مسابقات حفظ القرآن والشعر والإبداع الشبابي للرياضيات وكرة القدم . تمثّل المخطّطات السهمية التالية المسابقات التي اشترك فيها المتعلّمون ، حيث س تمثّل أسماء المتعلّمين وص تمثّل نوع المسابقة التي اشترك فيها .



ت : س ⟵ ص

أكمِل كلًّا ممّا يلي :

في التطبيق ت : س ⟵ ص

المجال = { محمد ـ خالد ـ يوسف علي }

المجال المقابِل = { حفظ القرآن ، شعر ، الإبداع الشبابي ، كرة القدم }

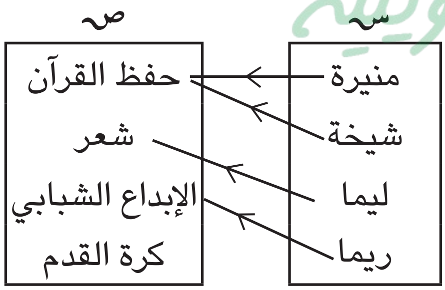
المدى = { حفظ القرآن ـ شعر ـ الابداع الشبابي ـ كرة القدم }

١ هل المدى يساوي المجال المقابِل ؟

نعم

٢ هل اشترك متعلّمان أو أكثر في المسابقة نفسها ؟

لا



ن : س ⟵ ص

أكمِل كلًّا ممّا يلي :

في التطبيق ن : س ⟵ ص

المجال = { شيخة ، منيرة ، ليما ، ريما }

المجال المقابِل = { حفظ القرآن ـ شعر ـ الابداع الشبابي ـ كرة القدم }

المدى = { حفظ القرآن ـ شعر ـ الابداع الشبابي }

١ هل المدى يساوي المجال المقابِل ؟

لا

٢ هل اشتركت متعلّمتان أو أكثر في المسابقة نفسها ؟

نعم

نسمّي التطبيق الذي يكون فيه جميع عناصر المدى هي نفسها عناصر المجال المقابِل (تطبيق شامل) .

من ١ ، إذًا ت تطبيق شامل ، ں تطبيق ليس شاملًا .

التطبيق الذي يتساوى فيه المدى والمجال المقابِل يُسمى « تطبيق شامل » .

نسمّي التطبيق الذي لا يرتبط فيه أيّ عنصرَين من عناصر المجال بالعنصر نفسه في المجال المقابِل (تطبيق متباين) .

من ٢ ، إذًا ت تطبيق متباين ، ں تطبيق ليس متباينًا .

التطبيق الذي لا يرتبط فيه عنصران أو أكثر من المجال بالعنصر نفسه من المجال المقابِل يُسمّى « تطبيق متباين » .

نلاحظ أنّ التطبيق ت شامل ومتباين . لذلك نُطلق عليه اسم تطبيق تقابل ، بينما ں تطبيق ليس تقابلًا لأنّه ليس شاملًا أو لأنّه ليس متباينًا . (عدم تحقّق أحدهما يكفي ليكون التطبيق ليس تقابلًا)

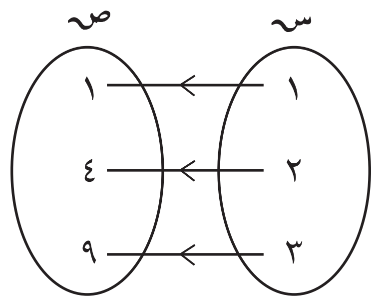
من ١ ، ٢ ، إذًا ت تطبيق تقابل ، ں تطبيق ليس تقابلًا .

التطبيق الشامل والمتباين يُسمّى « تطبيق تقابل » .

مثال (٢) :

بيِّن نوع التطبيقات التالية فيما إذا كانت تطبيقًا شاملًا ، متباينًا ، تقابلًا ، مع ذكر السبب .

أ ت : س ← ص



ت تطبيق شامل

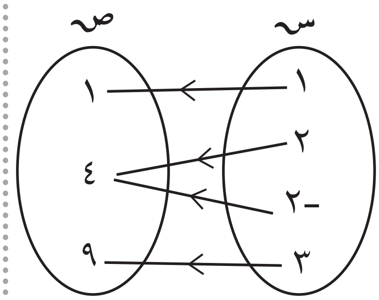
لأنّ المدى = المجال المقابِل

ت تطبيق متباين

لأنّ ت (١) ≠ ت (٢) ≠ ت (٣)

∴ ت تطبيق تقابل لأنّه تطبيق شامل ومتباين .

ب ں : س ← ص



ں تطبيق شامل

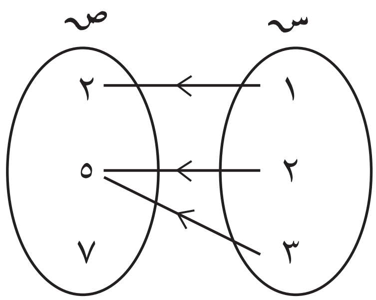
لأنّ المدى = المجال المقابِل

ں تطبيق ليس متباينًا

لأنّ ں (٢) = ں (‎-٢)

∴ ں تطبيق ليس تقابلًا لأنّه تطبيق ليس متباينًا .

ج هـ : س ← ص



هـ تطبيق ليس شاملًا

لأنّ المدى ≠ المجال المقابِل

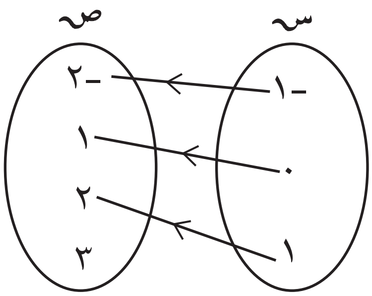
هـ تطبيق ليس متباينًا

لأنّ هـ (٢) = هـ (٣)

∴ هـ تطبيق ليس تقابلًا لأنّه تطبيق ليس شاملًا أو (لأنّه ليس متباينًا) .

دورك الآن (١)

من المخطّط السهمي المقابِل ، بيِّن نوع التطبيق ت : س ← ص فيما إذا كان تطبيقًا شاملًا ، متباينًا ، تقابلًا ، مع ذكر السبب .



المجال = {-١ ، ٠ ، ١}

المجال المقابِل = {-٢ ، ١ ، ٢ ، ٣}

المدى = {-٢ ، ١ ، ٢}

ت تطبيق متباين

السبب : لأنه ت(-١) ≠ ت(٠) ≠ ت(١)

ت تطبيق ليس شاملاً

السبب : لأنه المدى ≠ المجال

ت تطبيق ليس تقابلاً

السبب : لأنه ليس شاملاً .

مثال (٢) :

إذا كانت س = { ١ ، ٠ ، ٢ } ، ص = { ٣ ، -١ ، ٧ }

التطبيق د : س ← ص ، حيث د (س) = ٤س - ١

(أ) أوجِد مدى التطبيق د .

(ب) أُكتب التطبيق د كمجموعة من الأزواج المرتَّبة .

(ج) بيِّن نوع التطبيق د ما إذا كان تطبيقًا شاملًا ، متباينًا ، تقابلًا ، مع ذكر السبب .

(د) مثِّل التطبيق بمخطّط سهمي .

(هـ) مثِّل التطبيق بمخطّط بياني في المستوى الإحداثي .

الحلّ :

(أ) د (س) = ٤س - ١

د (١) = ٤ × ١ - ١ = ٤ - ١ = ٣

د (٠) = ٤ × ٠ - ١ = ٠ - ١ = -١

د (٢) = ٤ × ٢ - ١ = ٨ - ١ = ٧

مدى التطبيق = { ٣ ، -١ ، ٧ }

اِنتبِه

يجب مراعاة ترتيب العمليات الحسابية ، فالضرب والقسمة يسبقان الجمع والطرح .

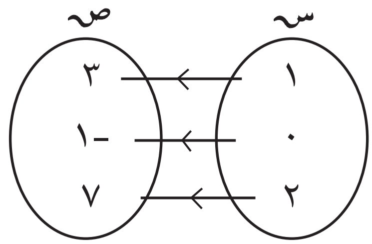
(ب) د = { (١ ، ٣) ، (٠ ، −١) ، (٢ ، ٧) }

(ج) د تطبيق شامل ، لأنّ المدى = المجال المقابِل .

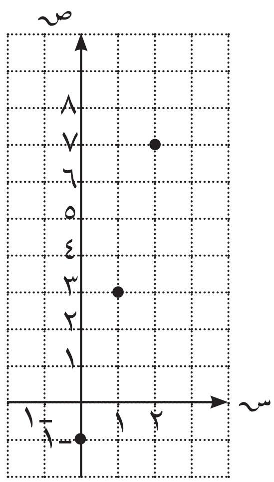
د تطبيق متباين ، لأنّ د (١) ≠ د (٠) ≠ د (٢)

د تطبيق تقابل ، لأنّه شامل ومتباين .

(د)



(هـ)



دورك الآن (٢)

إذا كانت س = { −٢ ، ٠ ، ٢ } ، ص = { −٥ ، ١ ، ٧ }

التطبيق ى : س ⟵ ص ، حيث ى (س) = ٣س + ١

(أ) أوجِد مدى التطبيق ى .

ى (س) = ٣س + ١

ى (−٢) = ٣ × (−٢) + ١ = −٥

ى (٠) = ٣ × ٠ + ١ = ١

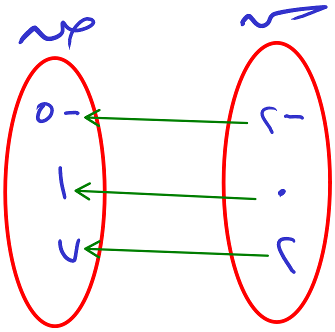
ى (٢) = ٣ × ٢ + ١ = ٧

المدى = { −٥ ، ١ ، ٧ }

(ب) أُكتب التطبيق ى كمجموعة من الأزواج المرتَّبة .

ى = { (−٢ ، −٥) ، (٠ ، ١) ، (٢ ، ٧) }

(ج) مثِّل التطبيق ى بمخطّط سهمي .



(د) بيِّن نوع التطبيق ه من حيث كونه شاملًا ، متباينًا ، تقابلًا ، مع ذكر السبب .

ه تطبيق ..... شامل ..... لأنّ : ..... المدى = المجال المقابل .....

ه تطبيق ..... متباين ..... لأنّ : ..... ه(-٢) ≠ ه(١٠) ≠ ه(٢) .....

ه تطبيق ..... تقابل ..... لأنّه : ..... شامل ومتباين .....

مثال (٣) :

إذا كانت س = { -٢ ، -١ ، ٠ ، ٢ } ، ص = { ٠ ، ٣ ، -١ }

التطبيق ت : س ⟵ ص ، حيث ت (س) = س^{٢} - ١

(أ) أوجِد مدى التطبيق ت .

(ب) مثِّل التطبيق ت بمخطّط بياني في المستوى الإحداثي .

(ج) بيِّن نوع التطبيق ت من حيث كونه شاملًا ، متباينًا ، تقابلًا ، مع ذكر السبب .

الحلّ :

(أ) ت (س) = س^{٢} - ١

ت (-٢) = (-٢)^{٢} - ١ = ٣

ت (-١) = (-١)^{٢} - ١ = ٠

ت (٠) = (٠)^{٢} - ١ = -١

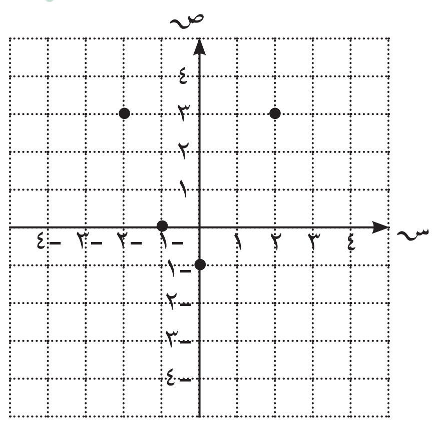
ت (٢) = (٢)^{٢} - ١ = ٣

المدى = { ٠ ، ٣ ، -١ }

تذكَّر

(أ)^{٢} = (-أ)^{٢}

(ب)



(ج) ت تطبيق شامل ، لأنّ المدى = المجال المقابِل .

ت تطبيق ليس متباينًا ، لأنّ ت (-٢) = ت (٢)

∴ ت تطبيق ليس تقابلًا ، لأنّه ليس متباينًا .

عبِّر عن فهمك (٢)

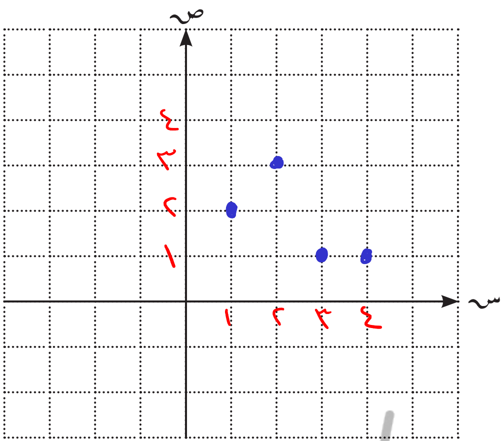
إذا كان التطبيق ه : ط ⟵ ط ، حيث ط هي مجموعة الأعداد الكلّية ،
ه (س) = س^{٢} ، هل التطبيق ه تطبيق متباين ؟ فسِّر إجابتك .

نعم متباين لأن ه(٠) ≠ ه(١) ≠ ه(٢) ------

دورك الآن (٣)

إذا كانت س = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ } ، التطبيق د : س ⟵ س ،
حيث د = { (١ ، ٢) ، (٢ ، ٣) ، (٣ ، ١) ، (٤ ، ١) }

(أ) مثِّل التطبيق د بمخطّط بياني في المستوى الإحداثي .



(ب) أُكتب مدى التطبيق .

المدى = { ١ ، ٢ ، ٣ }

(ج) هل التطبيق د تطبيق تقابل ؟ لماذا ؟

∵ التطبيق د ليس شاملاً لأنه المدى ≠ المجال المقابل

و ليس متباينًا لأنه ه(٣) = ه(٤)

∴ د تطبيق ليس تقابلاً

مثال (٤) :

إذا كانت س = { ٠ ، ١ ، ٢ } ، ص = { ٠ ، ١ ، ٨ } ،
التطبيق د : س ⟵ ص ، حيث د (س) = س^{٣}

(أ) أوجِد مدى التطبيق د .

د (٠) = (٠)^{٣} = ٠

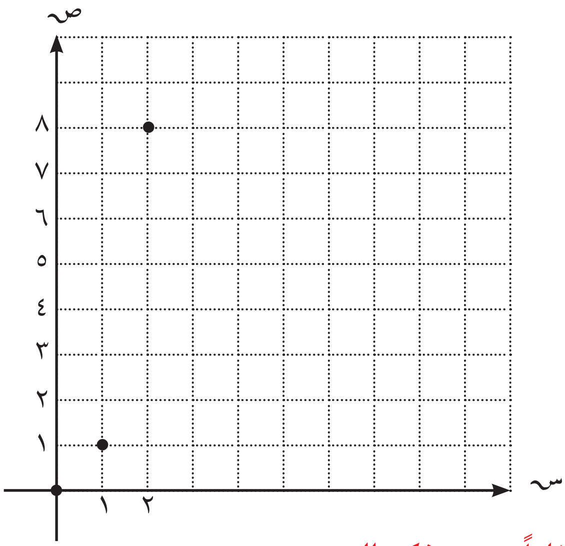
د (١) = (١)^{٣} = ١

د (٢) = (٢)^{٣} = ٨

مدى التطبيق = { ٠ ، ١ ، ٨ }

(ب) أُكتب التطبيق د كمجموعة من الأزواج المرتَّبة .

د = { (٠ ، ٠) ، (١ ، ١) ، (٢ ، ٨) }



ج) مثِّل التطبيق د بمخطّط بياني في المستوى الإحداثي .

د) بيِّن نوع التطبيق د من حيث كونه شاملًا ، متباينًا ، تقابلًا ، مع ذكر السبب .

د : تطبيق شامل ، لأنّ المدى = المجال المقابِل .

د : تطبيق متباين ، لأنّ د (٠) ≠ د (١) ≠ د (٢)

∴ د تطبيق تقابل ، لأنّه شامل ومتباين .

مثال (٥) :

إذا كانت س = { ١ ، ٤ } ، ص = { -٢ ، ١ ، ٢ ، ٣ } ،

التطبيق ت : س ⟵ ص ، حيث ت (س) = $\sqrt{\text{س}}$

اِنتبِه

- $\sqrt{٤}$ = ٢
- الجذر التربيعي للعدد ٤ هو ± ٢

أ) أوجِد مدى التطبيق ت .

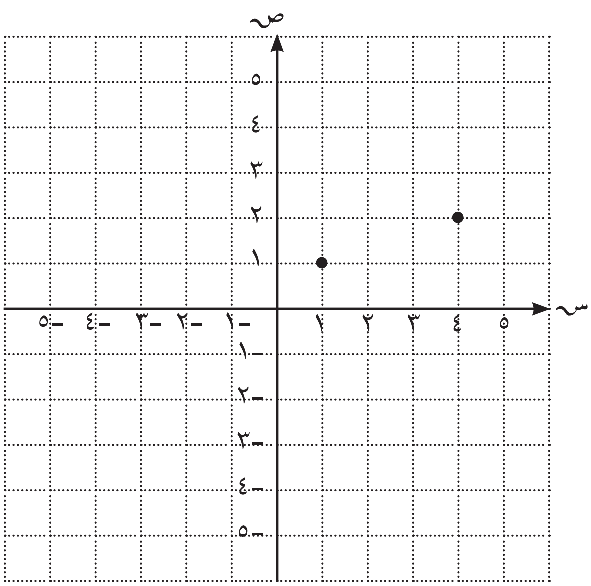
ت (س) = $\sqrt{\text{س}}$

ت (١) = ١

ت (٤) = ٢

المدى = { ١ ، ٢ }

ب) مثِّل التطبيق ت بمخطّط بياني في المستوى الإحداثي.



ج) بيِّن نوع التطبيق ت من حيث كونه شاملًا ، متباينًا ، تقابلًا ، مع ذكر السبب .

ت : تطبيق ليس شاملًا ،

لأنّ المدى ≠ المجال المقابِل .

ت : تطبيق متباين ، لأنّ

ت (١) ≠ ت (٤)

∴ ت تطبيق ليس تقابلًا لأنّه ليس شاملًا .

عبِّر عن فهمك (٢)

ليكن التطبيق ت : صـ ← صـ (صـ هي مجموعة الأعداد الصحيحة) ،
حيث ت (س) = ٢س ، هل التطبيق ت تطبيق تقابل ؟

صح

تمارين ذاتية :

١ إذا كانت سـ = { -١ ، ٠ ، ١ ، ٢ } ، صـ = { -٣ ، ١ ، ٥ ، ٩ }
التطبيق م : سـ ← صـ ، حيث م (س) = ٤س + ١

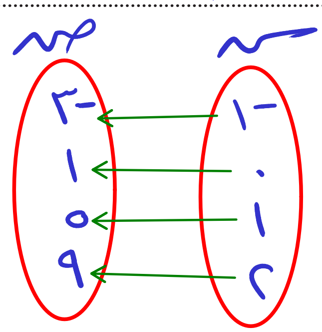
(أ) أوجِد مدى التطبيق م .

م(-١) = ٤×(-١)+١ = -٤+١ = -٣
م(٠) = ٤×٠+١ = ٠+١ = ١
م(١) = ٤×١+١ = ٤+١ = ٥
م(٢) = ٤×٢+١ = ٨+١ = ٩
∴ المدى = {-٣ ، ١ ، ٥ ، ٩}

(ب) أُكتب التطبيق م كمجموعة من الأزواج المرتَّبة .

م = {(-١ ، -٣) ، (٠ ، ١) ، (١ ، ٥) ، (٢ ، ٩)}

(ج) مثِّل التطبيق م بمخطّط سهمي .



(د) بيِّن نوع التطبيق م من حيث كونه شاملًا ، متباينًا ، تقابلًا ، مع ذكر السبب .

م تطبيق شامل لأنه المدى = المجال المقابل

م تطبيق متباين لأنه م(-١) ≠ م(٠) ≠ م(١) ≠ م(٢)
م تطبيق تقابل لأنه شامل ومتباين .

٢ إذا كانت ل = { ١ ، ٢ ، -٢ } ، هـ = { ٢ ، ٤ ، ٥ }

التطبيق ك : ل ⟵ هـ ، **حيث** ك (س) = س^{٢} + ١

أ) أوجِد مدى التطبيق ك .

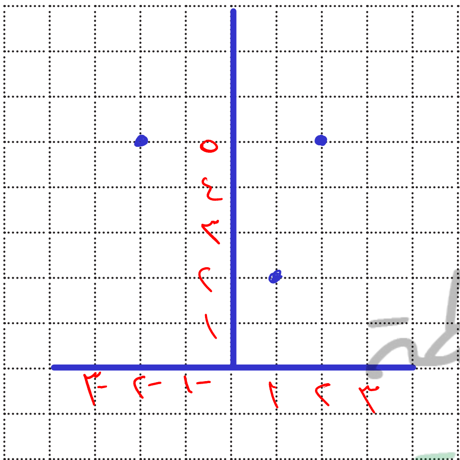
ك(١) = (١)^{٢} + ١ = ٢ ، ك(٢) = (٢)^{٢} + ١ = ٥ ، ك(-٢) = (-٢)^{٢} + ١ = ٥

∴ المدى = { ٢ ، ٥ }

ب) أُكتب التطبيق ك كمجموعة من الأزواج المرتَّبة .

ك = { (١ ، ٢) ، (٢ ، ٥) ، (-٢ ، ٥) }

ج) مثِّل التطبيق ك بمخطّط بياني في المستوى الإحداثي .



د) بيِّن نوع التطبيق ك من حيث كونه شاملًا ، متباينًا ، تقابلًا ، مع ذكر السبب .

ك تطبيق ليس شاملاً لأنه المدى ≠ المجال المقابل

ك تطبيق ليس متباينًا لأنه ك(٢) = ك(-٢)

∴ ك تطبيق ليس تقابلاً لأنه ليس شاملاً ومتباينًا

٣ إذا كانت س = { -٢ ، ٠ ، ١ } ، ص = { -٩ ، -١ ، ٠ ، ١ } ،

التطبيق هـ : س ⟵ ص ، **حيث** هـ (س) = س^{٣} - ١

أ) أوجِد مدى التطبيق هـ .

هـ(-٢) = (-٢)^{٣} - ١ = -٨ - ١ = -٩ ، هـ(٠) = (٠)^{٣} - ١ = -١

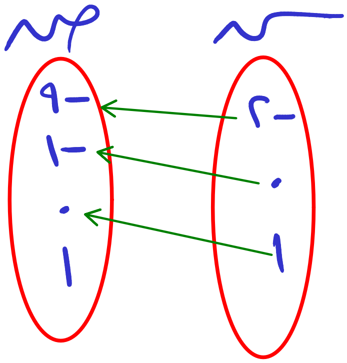
هـ(١) = (١)^{٣} - ١ = ١ - ١ = ٠

∴ المدى = { -٩ ، -١ ، ٠ }

ب) أُكتب التطبيق هـ كمجموعة من الأزواج المرتَّبة .

هـ = { (-٢ ، -٩) ، (٠ ، -١) ، (١ ، ٠) }

(ج) مثِّل التطبيق هـ بمخطّط سهمي .



(د) بيِّن نوع التطبيق هـ من حيث كونه شاملًا ، متباينًا ، تقابلًا ، مع ذكر السبب .

هـ تطبيق ليس شاملاً لأنه المدى ≠ المجال المقابل

هـ تطبيق متباين لأنه هـ(-٢) ≠ هـ(٠) ≠ هـ(١)

هـ تطبيق ليس تقابلاً لأنه ليس شاملاً .

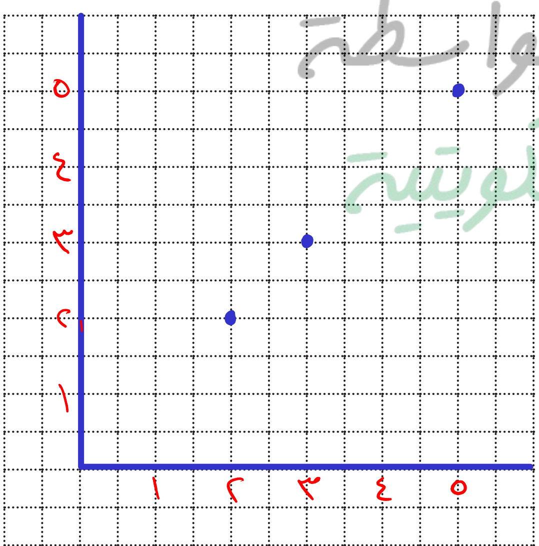
٤ إذا كانت ع = { ٢ ، ٣ ، ٥ }

التطبيق هـ : ع ⟵ ع ، حيث هـ = { (٢ ، ٢) ، (٣ ، ٣) ، (٥ ، ٥) }

(أ) أوجِد مدى التطبيق **هـ** .

المدى = { ٢ ، ٣ ، ٥ }

(ب) مثِّل التطبيق **هـ** بمخطّط بياني في المستوى الإحداثي .



(ج) بيِّن أنّ التطبيق **هـ** هو تطبيق تقابل .

هـ تطبيق شامل لأنه المدى = المجال المقابل

هـ تطبيق متباين لأنه هـ(٢) ≠ هـ(٣) ≠ هـ(٥)

هـ تطبيق تقابل لأنه شامل ومتباين .

٥ **إذا كان التطبيق د : س ⟵ ص ، حيث س = { ١ ، ٤ ، ١٦ } ،**
ص = { ٢ ، ٥ ، ١١ } ، د (س) = ٣ $\sqrt{\text{س}}$ − ١ ، فبيِّن أنّ د تطبيق تقابل .

د(١) = ٣ $\sqrt{١}$ − ١ = ٣ − ١ = ٢
د(٤) = ٣ $\sqrt{٤}$ − ١ = ٣×٢ − ١ = ٥
د(١٦) = ٣ $\sqrt{١٦}$ − ١ = ٣×٤ − ١ = ١١
∴ المدى = { ٢ ، ٥ ، ١١ }

∴ د تطبيق شامل لأنه المدى = المجال المقابل
د تطبيق متباين لأنه د(١) ≠ د(٤) ≠ د(١٦)

∴ د تطبيق تقابل لأنه شامل و متباين .

مهارات تفكير عليا :

اِختر الإجابة الصحيحة :

٦ **ليكن ت تطبيقًا حيث ت : ط ⟵ ط ، ت (س) = ٣**
التطبيق ت هو :

أ شامل وليس متباينًا
ب متباين وليس شاملًا
ج ليس شاملًا وليس متباينًا
د تقابل

٧ **إذا كان التطبيق ت : س ⟵ ص ، تطبيق تقابل وكان عدد عناصر س يساوي ٥ ،**
فإنّ عدد عناصر ص يساوي :

أ ٤
ب ٥
ج ٦
د ٧

٥ ـ ٤ الدالّة الخطّية Linear Function

سوف تتعلّم : الدالّة الخطّية وخطوات رسم بيانها .

العبارات والمفردات :

متغيّر تابع	Dependent Variable
متغيّر مستقلّ	Independent Variable
دالّة خطّية	Linear Function

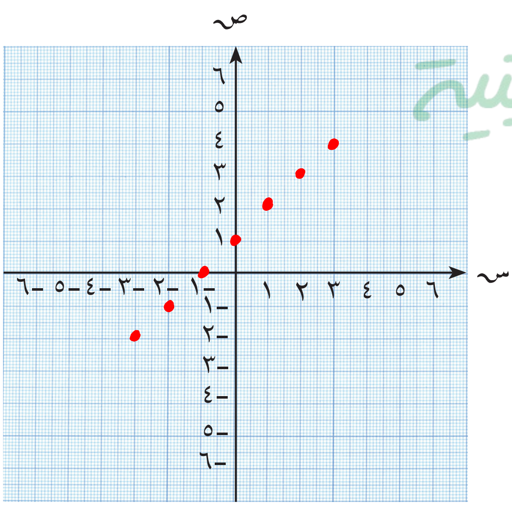
حُلّ وناقِش

اللوازم
ورقة رسم بياني ، مسطرة .

ليكن ن : ص ⟵ ح ، ن (س) = س + ١

١ أكمِل الجدول التالي :

س	٣	٢	١	٠	١-	٢-	٣-
ن (س)	٤	٣	٢	١	٠	١-	٢-



٢ أُرسم المخطّط البياني للتطبيق ن في المستوى الإحداثي .

٣ هل تقع جميع هذه النقاط على استقامة واحدة ؟
(تأكّد باستخدام حافّة مستقيمة) نعم

٤ ليكن ن : ح ⟵ ح ، ن (س) = س + ١
اِختر ثلاثة أعداد حقيقية مختلفة تقع بين العددَين صفر ، ١
ثمّ أكمِل الجدول التالي ومثّل النقاط بيانيًّا في المستوى الإحداثي .

س	١	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	٠
ن (س)	٢	$1\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{3}$	$1\frac{1}{4}$	١

تذكَّر
- كلّ عدد حقيقي يُمثَّل بنقطة على خطّ الأعداد ، وكلّ نقطة على خطّ الأعداد تمثّل عددًا حقيقيًّا .
- كلّ عددَين حقيقيَّين يوجد بينهما عدد حقيقي .

٥ نلاحظ أنّ مجموعة النقاط المكوِّنة للمخطّط البياني تزداد كلّما كبر المجال ، وتظلّ أيضًا على استقامة واحدة ويمكن تمثيلها بخطّ مستقيم .

٦ أُرسم بيان الدالّة ن : ح ⟵ ح ، ن (س) = س + ١

- الدالّة (التطبيق) التي مجالها ومجالها المقابِل مجموعة الأعداد الحقيقية أو مجموعة جزئية منها تُسمّى « **دالّة حقيقية** » .
- الدالّة الحقيقية د : ح ⟵ ح ، د (س) = أ س + ب ، حيث أ ، ب ∈ ح ، أ ≠ ٠ تُسمّى « **دالّة خطّية** » (تطبيقًا خطّيًا) .

ملاحظة :

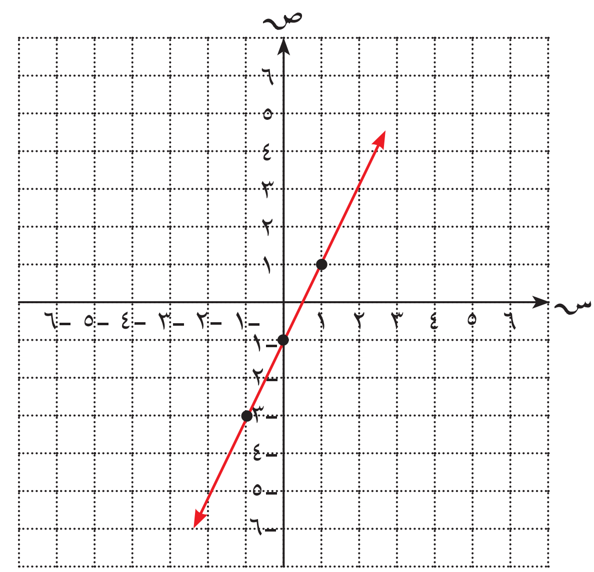
- د (س) = أ س + ب تُسمّى قاعدة الاقتران ويمكن كتابتها على الصورة : **ص = أ س + ب** ويكون بيانها خطًّا مستقيمًا يقطع محور السينات حيث أ ≠ ٠ .
- يُسمّى س **المتغيّر المستقلّ** ، وهو المتغيّر الذي يحدّد قِيَم مخرَجات الدالّة .
- يُسمّى ص **المتغيّر التابع** ، وهو المتغيّر الذي تعتمد قيمته على قِيَم المتغيّر المستقلّ .

مثال (٢) :

أُرسم بيان الدالّة الخطّية : ص = ٢س - ١

الحلّ :

ص = ٢س - ١			
س	١	٠	-١
ص	١	-١	-٣



لاحِظ أنّ

خطوات رسم بيان الدالّة الخطّية

1. نضع الدالّة على الصورة ص = أ س + ب
2. نختار بعض القِيَم للمتغيّر المستقلّ (س) .
3. نوجِد قِيَم المتغيّر التابع (ص) المناظِرة .
4. نمثّل النقاط في مستوى الإحداثيات .
5. نصل بين هذه النقاط بخطّ مستقيم باستخدام المسطرة .

عبِّر عن فهمك (١)

هل النقطة (٤ ، ٧) تنتمي إلى بيان الدالّة ص = ٢س - ١ ؟ فسِّر إجابتك .

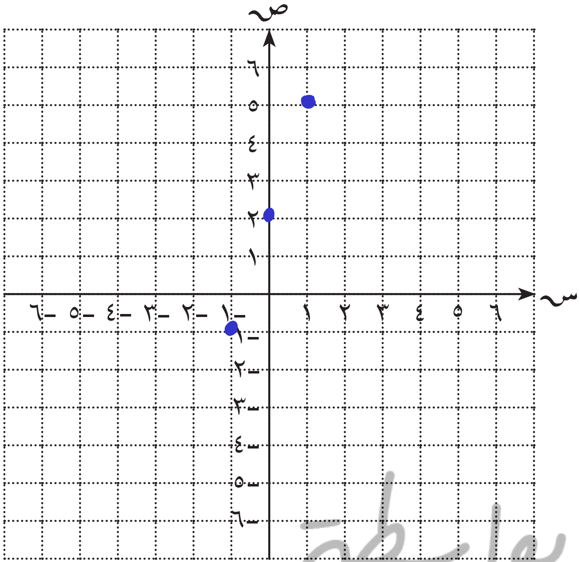
بالتعويض في الدالة ٧ = ٢ × ٤ - ١ = ٧ ∴ ٧ = ٧

∴ نعم النقطة (٤ ، ٧) تنتمي إلى بيان الدالة .

دورك الآن (١)

أُرسم بيان الدالّة الخطّية : ص = ٣س + ٢

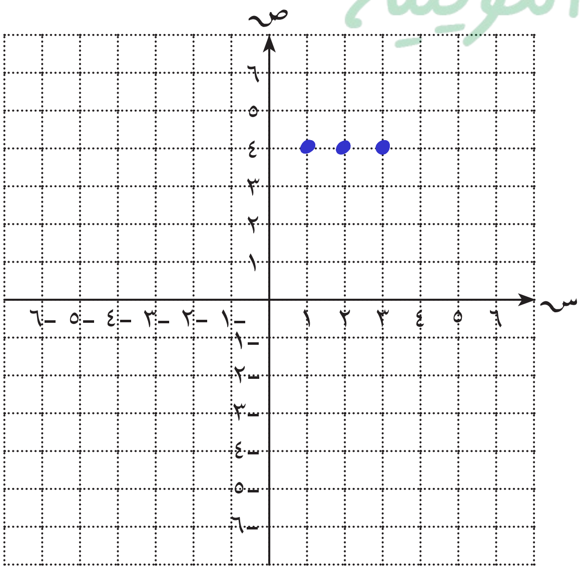
ص = ٣س + ٢			
س	١	٠	-١
ص	٥	٢	-١



دورك الآن (٢)

أُرسم بيان الدالّة الخطّية : ص = ٤

ص = ٤			
س	١	٢	٣
ص	٤	٤	٤



ماذا تلاحظ ؟ بيان الدالّة .... يوازي .... محور السينات .

ملاحظة :

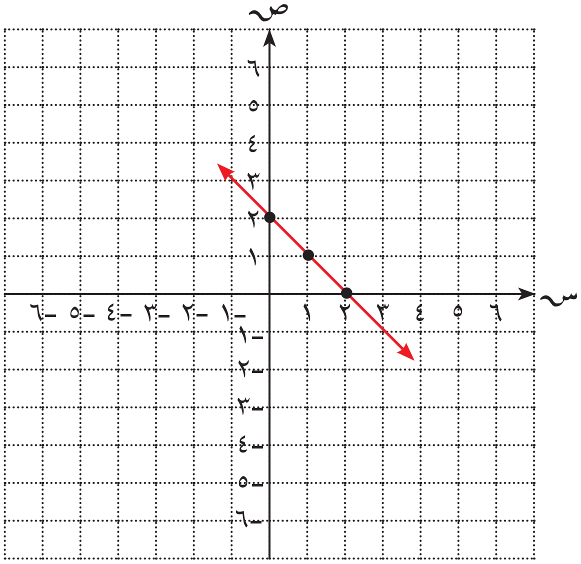
• الدالّة الثابتة د(س) = جـ ، جـ ∈ ح يكون بيانها خطًّا مستقيمًا أفقيًّا (يوازي محور السينات) .

مثال (٢) :

أُرسم بيان الدالّة الخطّية : ص + س = ٢

الحلّ :

ص = − س + ٢			
س	٢	١	٠
ص	٠	١	٢



عبِّر عن فهمك (٢)

هل س = ٤ تمثّل دالّة ؟ فسِّر إجابتك .

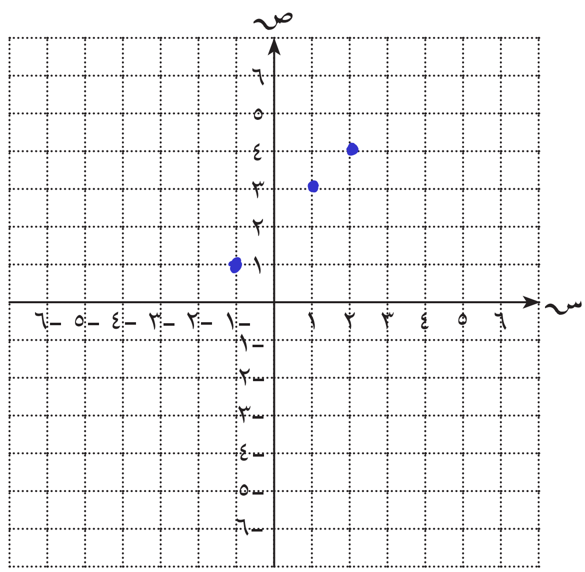
نعم تمثل دالة ثابتة توازي محور الصادات

تمارين ذاتية :

١ أُرسم بيانيًّا كلًّا من الدوالّ الخطّية التالية :

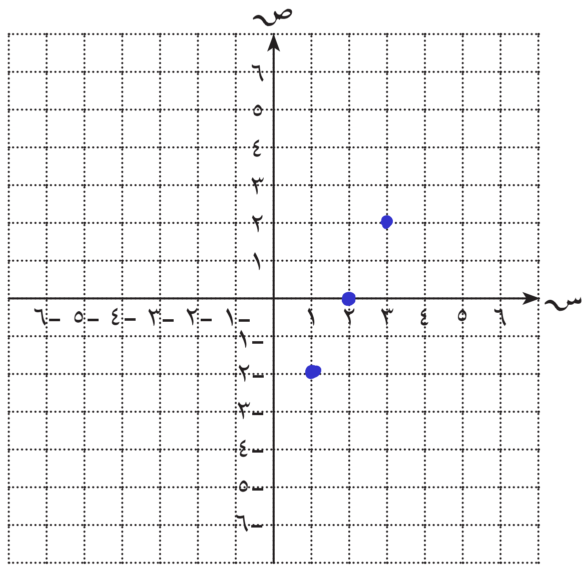
أ ص = س + ٢

ص = س + ٢			
س	١	٢	−١
ص	٣	٤	١



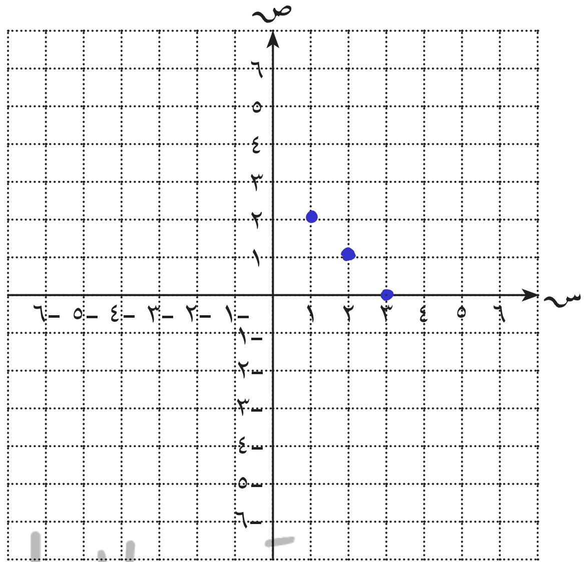
ب ص = ٢س − ٤

ص = ٢س − ٤			
س	١	٢	٣
ص	−٢	٠	٢



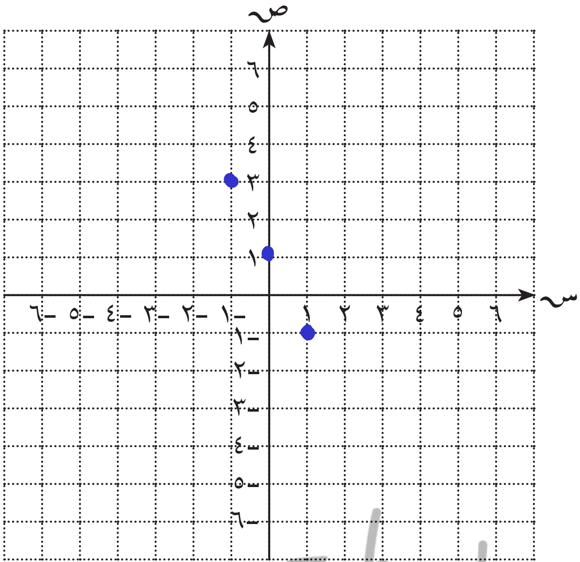
(ج) ص + س = ٣

ص = −س + ٣			
س	١	٢	٣
ص	٢	١	٠



(د) ص = ١ − ٢س

ص = ١ − ٢س			
س	−١	٠	١
ص	٣	١	−١



مهارات تفكير عليا :

اِختر الإجابة الصحيحة :

٢ إذا كان بيان الدالّة الخطّية : ص = ٣س + ب يمرّ بالنقطة (٣ ، ٧) ، فإنّ قيمة ب تساوي :

أ −٢ ب ٢ ج −١٩ د ١٩

٣ إذا كانت النقطة (٢ ، أ) تقع على بيان الدالّة الخطّية : ص = ٣س − ١ ، فإنّ أ يساوي :

أ ١ ب ٤ ج ٥ د ٣

٥ - ٥ الدالّة التربيعية
Quadratic Function

سوف تتعلّم : الدوالّ التربيعية وتمثيلها بيانيًّا .

العبارات والمفردات :

دالّة تربيعية	Quadratic Function	قطع مكافِئ	Parabola

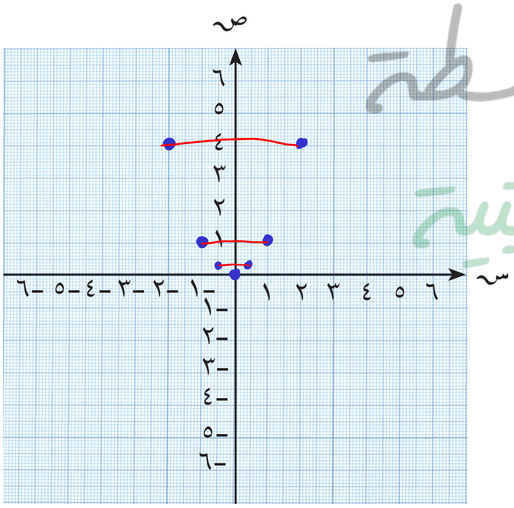
عند رمي كرة السلّة يعتمد اللاعبون على تقدير المسافة وتخيّل شكل مسار الكرة ، فهم يدركون تمامًا أنّ مسار الكرة لن يكون خطًّا مستقيمًا وإنّما منحنى .

اِستكشِف

لتكن الدالّة ن : ح ⟵ ح ، ن (س) = س^{٢}

١ أكمِل الجدول التالي :

س	٣	٢	١	٠,٥	٠	٠,٥-	١-	٢-	٣-
ص	٩	٤	١	٠,٢٥	٠	٠,٢٥-	١	٤	٩



٢ عيِّن النقاط السابقة في المستوى الإحداثي المقابِل .

٣ ماذا تلاحظ ؟ هل النقاط تقع على استقامة واحدة ؟

لا

٤ دون استخدام المسطرة ، صِل بين النقاط السابقة .

٥ نلاحظ من الرسم أنّ (٠ ، ٠) هو رأس المنحنى للدالّة س^{٢} .

الدالّة الحقيقية التي فيها القوّة الأعلى للمتغيّر المستقلّ تساوي ٢ تُسمّى « دالّة تربيعية » .

ويكون الرسم البياني للدالّة التربيعية منحنى على شكل ⋃ أو ⋂ ويُسمّى « قطع مكافِئ » .

الصورة العامّة للدالّة التربيعية هي :

ص = أ س^{٢} + ب س + جـ حيث أ ، ب ، جـ أعداد حقيقية ، أ ≠ ٠

حدّ من الدرجة الثانية — حدّ من الدرجة الأولى — حدّ ثابت

حيث أنّ كلًّا من المجال والمجال المقابِل للدالّة التربيعية هو مجموعة الأعداد الحقيقية .

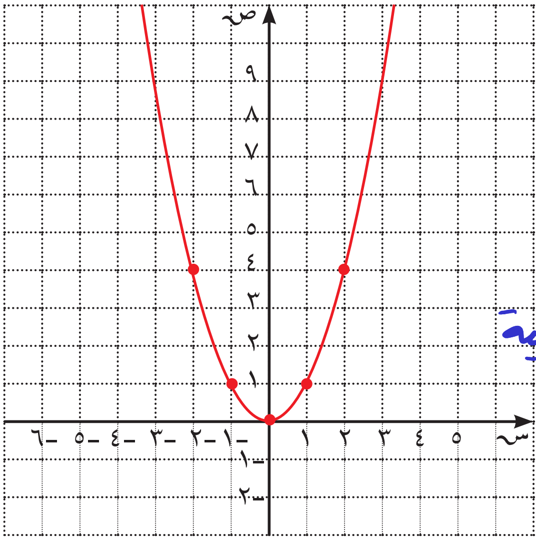
تذكَّر

(١)^{٢} = ١ ⋮ (-١)^{٢} = ١

(٢)^{٢} = ٤ ⋮ (-٢)^{٢} = ٤

حُلّ وناقِش

١ يمثّل الشكل المجاوِر بيان الدالّة : ص = س٢
مثِّل في المستوى الإحداثي نفسه بيان كلّ ممّا يلي :



أ الدالّة : ص = س٢ + ٣

س	٢	١	٠	١−	٢−
ص	٧	٤	٣	٤	٧

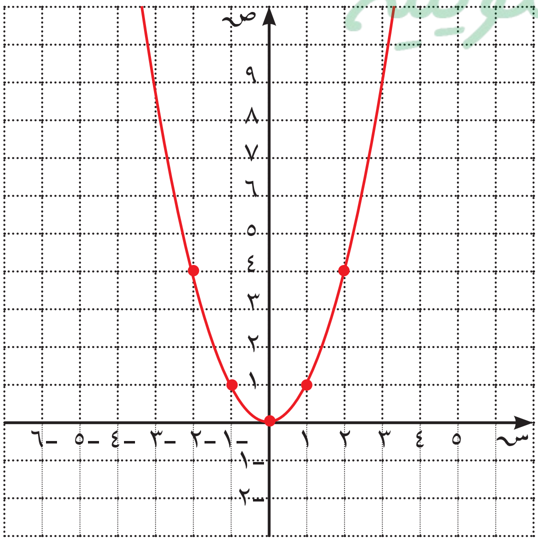
ماذا تلاحظ ؟ بيان الدالّة ص = س٢ + ٣ هو إزاحة رأسية
لبيان الدالّة ص = س٢ ثلاث وحدات إلى الأعلى
رأس المنحنى هو (٠ ، ٣)

ب الدالّة : ص = س٢ − ٢

س	٢	١	٠	١−	٢−
ص	٢	١−	٢−	١−	٢

ماذا تلاحظ ؟ بيان الدالّة ص = س٢ − ٢ هو إزاحة رأسية
لبيان الدالّة ص = س٢ وحدتين إلى الأسفل
رأس المنحنى هو (٠ ، ٢−)

٢ يمثّل الشكل المجاوِر بيان الدالّة : ص = س٢
مثِّل في المستوى الإحداثي نفسه بيان كلّ ممّا يلي :



أ الدالّة : ص = (س − ١)٢

س	٣	٢	١	٠	١−
ص	٤	١	٠	١	٤

ماذا تلاحظ ؟ بيان الدالّة ص = (س − ١)٢ هو
إزاحة أفقية
لبيان الدالّة ص = س٢ وحدة إلى اليمين
رأس المنحنى هو (١ ، ٠)

ب الدالّة : ص = (س + ١)^{٢}

س	١	٠	١−	٢−	٣−
ص	٤	١	٠	١	٤

ماذا تلاحظ ؟ بيان الدالّة ص = (س + ١)^{٢} هو إزاحة أفقية

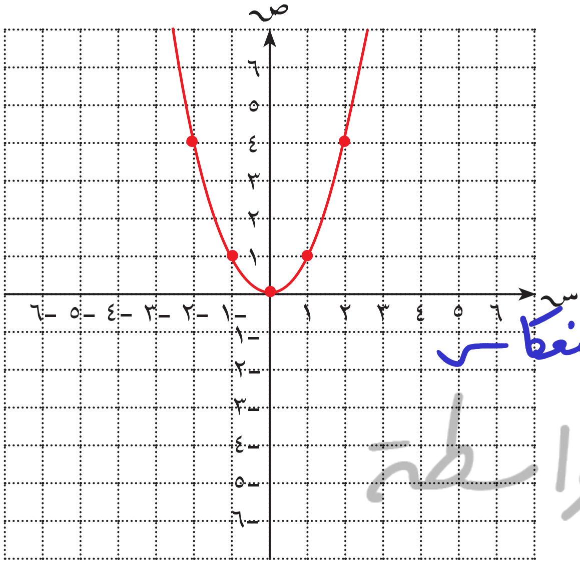
لبيان الدالّة ص = س^{٢} وحدة إلى اليسار

رأس المنحنى هو (١− ، ٠)

٣ **يمثّل الشكل المجاوِر بيان الدالّة : ص = س^{٢}**

مثِّل في المستوى الإحداثي نفسه بيان الدالّة :

ص = ـ س^{٢}



س	٢	١	٠	١−	٢−
ص	٤−	١−	٠	١−	٤−

ماذا تلاحظ ؟ بيان الدالّة ص = ـ س^{٢} هو صورة انعكاس

لبيان الدالّة ص = س^{٢}

في محور س

رأس المنحنى هو (٠ ، ٠)

ملاحظة :

- **الصورة القياسية للدالّة التربيعية :**

  ص = أ (س ـ د)^{٢} + هـ ؛ أ ، د ، هـ ∈ ح ، أ ≠ ٠

- **تقتصر دراستنا في حالة أ = ١ أي على الصورة ص = (س ـ د)^{٢} + هـ**
- **رأس منحنى الدالّة ص = (س ـ د)^{٢} + هـ هو النقطة (د ، هـ) .**

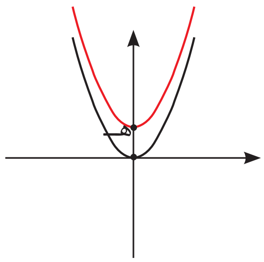
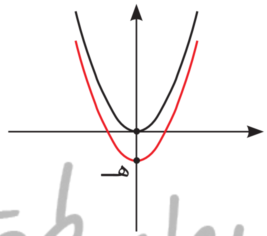
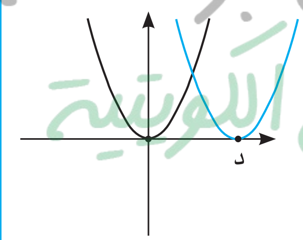
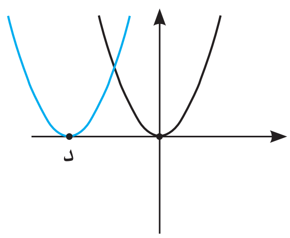
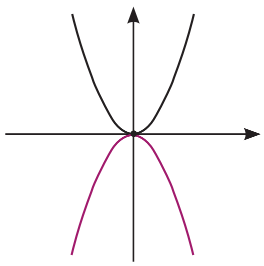
عبِّر عن فهمك (١)

يقول نشمي : بيان الدالّة ص = (س ـ ١)^{٢} + ٣

هو إزاحة أفقية لبيان الدالّة ص = س^{٢} وحدة واحدة إلى اليمين وإزاحة رأسية ٣ وحدات إلى الأعلى . هل توافقه الرأي ؟

نعم

ربط الأفكار

الدالّة التربيعية	التحويلات الهندسية المطبَّقة على التمثيل البياني للدالّة التربيعية ص = س^{٢}	التمثيل البياني	مثال
ص = س^{٢} + هـ	إزاحة رأسية بمقدار | هـ | وحدة إلى الأعلى إذا كانت هـ موجَبة .		ص = س^{٢} + ١
	إزاحة رأسية بمقدار | هـ | وحدة إلى الأسفل إذا كانت هـ سالبة .		ص = س^{٢} ـ ١
ص = (س ـ د)^{٢}	إزاحة أفقية بمقدار | د | وحدة إلى اليمين إذا كانت د موجَبة .		ص = (س ـ ١)^{٢}
	إزاحة أفقية بمقدار | د | وحدة إلى اليسار إذا كانت د سالبة .		ص = (س ـ (ـ١))^{٢} ص = (س + ١)^{٢}
ص = ـ س^{٢}	اِنعكاس في محور السينات .		ص = ـ س^{٢}

مثال (١) :

مثّل بيانيًّا الدالّة ص = س^{٢} + ٢ مستخدِمًا التمثيل البياني للدالّة التربيعية ص = س^{٢}

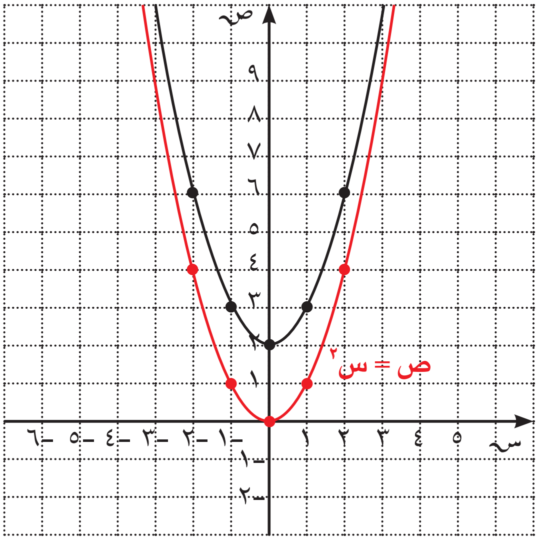
الحلّ :

نرسم بيان الدالّة : ص = س^{٢}

بيان الدالّة ص = س^{٢} + ٢

هو إزاحة رأسية لبيان الدالّة : ص = س^{٢}

وحدتان إلى الأعلى وتُمثَّل كما في الشكل المقابِل .



دورك الآن (١)

مثّل بيانيًّا الدالّة ص = (س − ٣)^{٢} مستخدِمًا التمثيل البياني للدالّة التربيعية ص = س^{٢} .

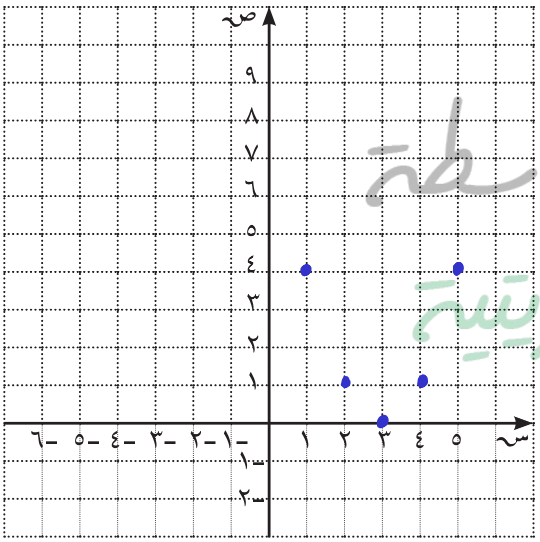
(أ) أُرسم بيان الدالّة : ص = س^{٢}

(ب) بيان الدالّة ص = (س − ٣)^{٢}

هو إزاحة أفقية لبيان الدالّة : ص = س^{٢}

ثلاثة وحدات الى اليمين .

(ج) أُرسم بيان الدالّة : ص = (س − ٣)^{٢}



مثال (٢) :

مثّل بيانيًّا الدالّة ص = − (س − ١)^{٢} مستخدِمًا التمثيل البياني للدالّة التربيعية ص = س^{٢} .

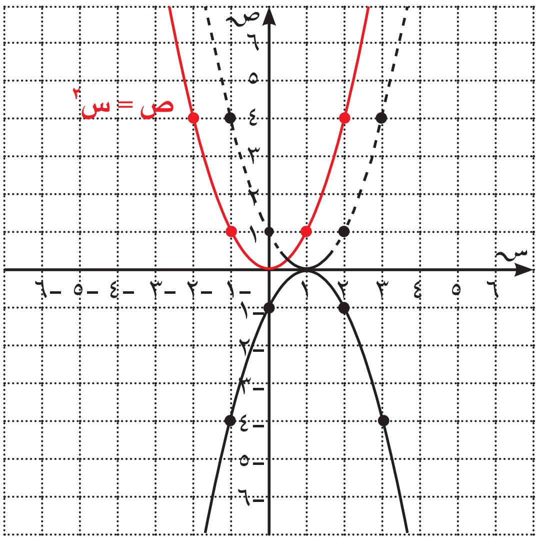
الحلّ :

نرسم بيان الدالّة : ص = س^{٢}

بيان الدالّة ص = − (س − ١)^{٢}

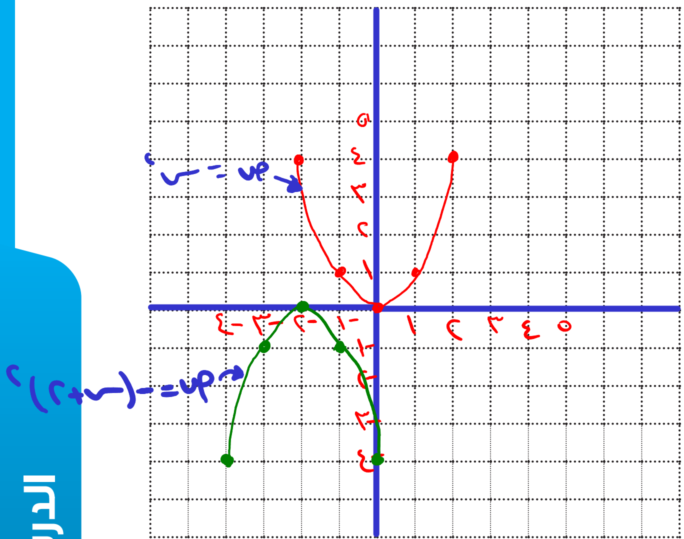
هو إزاحة أفقية لبيان الدالّة : ص = س^{٢}

وحدة واحدة إلى اليمين ، ثمّ الانعكاس في محور السينات .



دورك الآن (٢)

مثِّل بيانيًّا الدالّة ص = - (س + ٢)^{٢} مستخدِمًا التمثيل البياني للدالّة التربيعية ص = س^{٢} .



ص = -(س+٢)^{٢}

س	-١	٠	-٢	-٣	-٤
ص	-١	-٤	٠	-١	-٤

عبِّر عن فهمك (٢)

وصف كلّ من محمّد وبادي بيان الدالّة ص = - (س - ٣)^{٢}

أيّهما على صواب ؟ ولماذا ؟

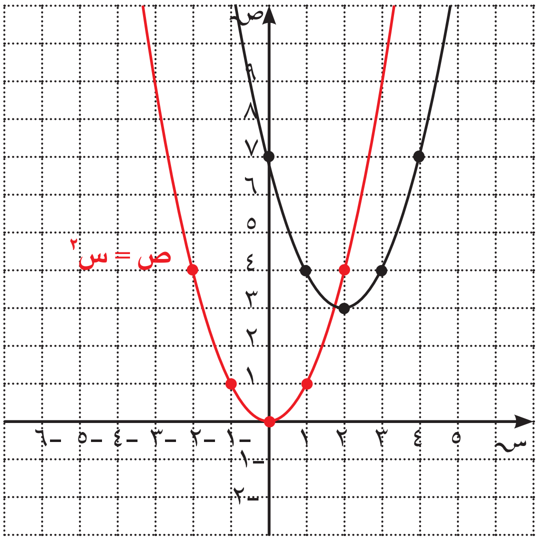
يقول محمّد : بيان الدالّة ص = - (س - ٣)^{٢} هو انعكاس في محور السينات لبيان الدالّة ص = س^{٢} ، ثمّ إزاحة أفقية ٣ وحدات إلى اليمين .

يقول بادي : بيان الدالّة ص = - (س - ٣)^{٢} هو إزاحة أفقية لبيان الدالّة ص = س^{٢} ، ٣ وحدات إلى اليمين ثمّ انعكاس في محور السينات .

بادي على صواب

مثال (٣) :

مثِّل بيانيًّا الدالّة ص = (س − ٢)^{٢} + ٣ مستخدِمًا التمثيل البياني للدالّة التربيعية ص = س^{٢}



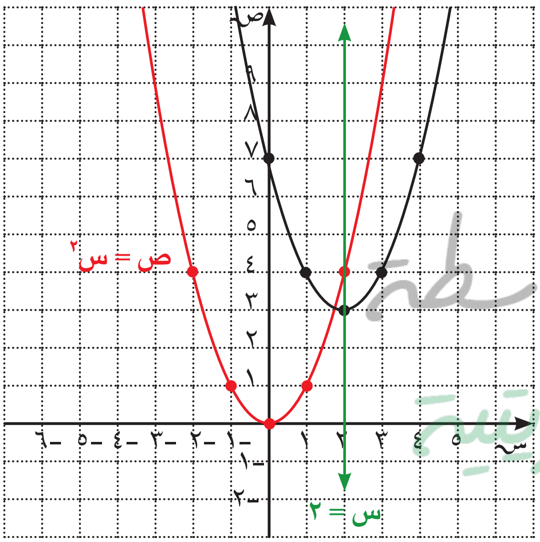
الحلّ :

نرسم بيان الدالّة : ص = س^{٢}

بيان الدالّة ص = (س − ٢)^{٢} + ٣

هو إزاحة أفقية لبيان الدالّة : ص = س^{٢}

وحدتان إلى اليمين ، ثمّ إزاحة رأسية ٣ وحدات إلى الأعلى .



من « **مثال (٣)** » ، **نلاحظ أنّ** :

- المستقيم الذي معادلته س = ٢ هو خطّ التماثل للدالّة التربيعية :

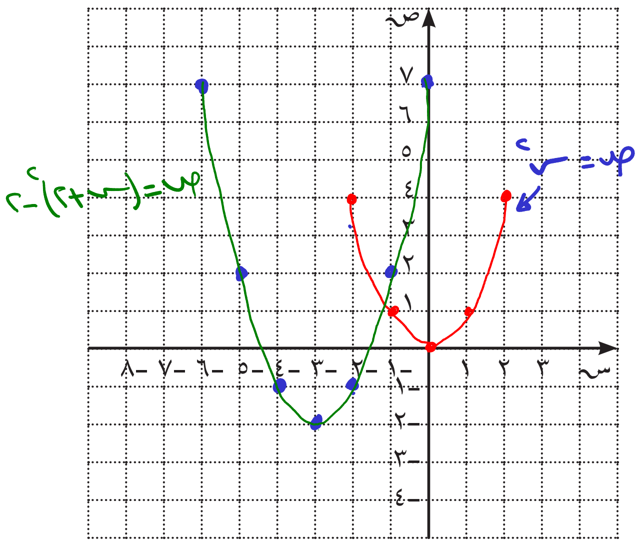
  ص = (س − ٢)^{٢} + ٣
- خطّ التماثل هو مستقيم رأسي يوازي محور الصادات .
- خطّ التماثل يمرّ بنقطة رأس المنحنى (٢ ، ٣) .
- خطّ تماثل الدالّة ص = س^{٢} هو محور الصادات .

ملاحظة :

- خطّ تماثل بيان الدالّة ص = (س − د)^{٢} + هـ هو المستقيم الذي معادلته س = د

دورك الآن (٣)

مثِّل بيانيًّا الدالّة ص = (س + ٣)^{٢} − ٢ مستخدِمًا التمثيل البياني للدالّة التربيعية ص = س^{٢} .

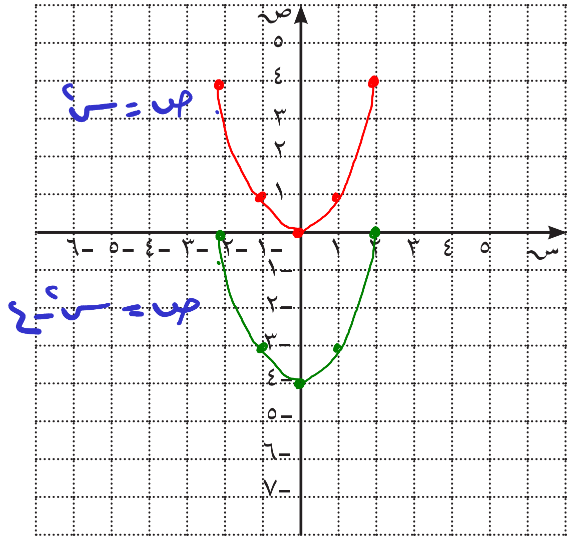


بيان الدالة ص = (س + ٣)^{٢} − ٢
هو إزاحة أفقية لبيان الدالة ص = س^{٢}
ثلاثة وحدات إلى اليسار ، ثم إزاحة رأسية
وحدتين إلى الأسفل .

تمارين ذاتية :

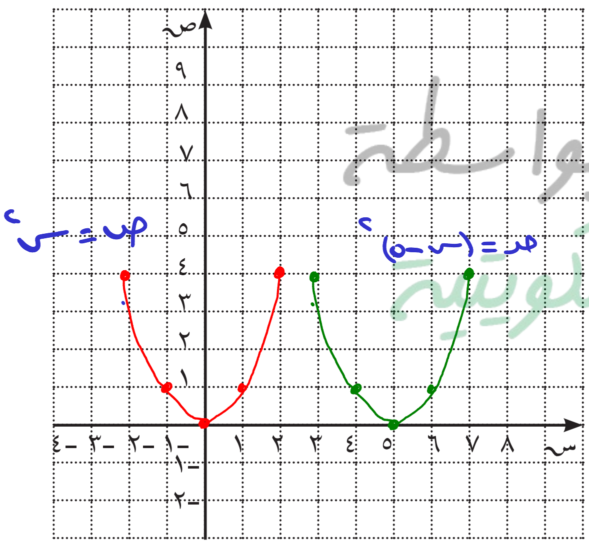
مستخدِمًا التمثيل البياني للدالّة التربيعية ص = $س^2$ ، مثِّل بيانيًّا كلًّا من الدوالّ التالية :

١ ص = $س^2$ - ٤



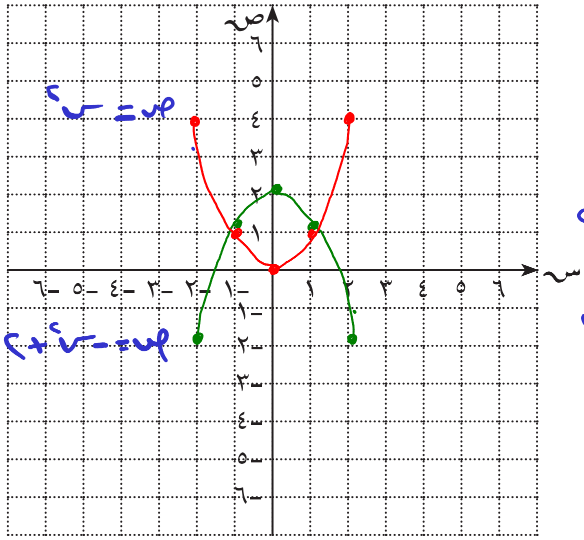
بيان الدالة ص = $س^2$ - ٤ هو إزاحة رأسية لبيان الدالة ص = $س^2$ أربعة وحدات إلى الأسفل

٢ ص = $(س - ٥)^2$



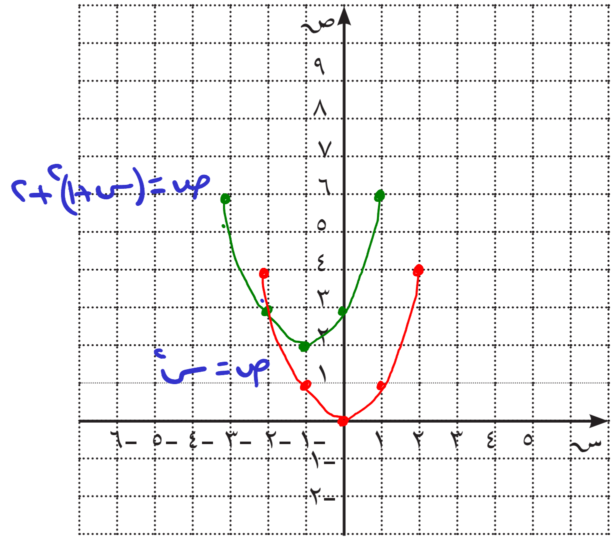
بيان الدالة ص = $(س - ٥)^2$ هو إزاحة أفقية لبيان الدالة ص = $س^2$ خمسة وحدات إلى اليمين

٣ ص = - $س^2$ + ٢



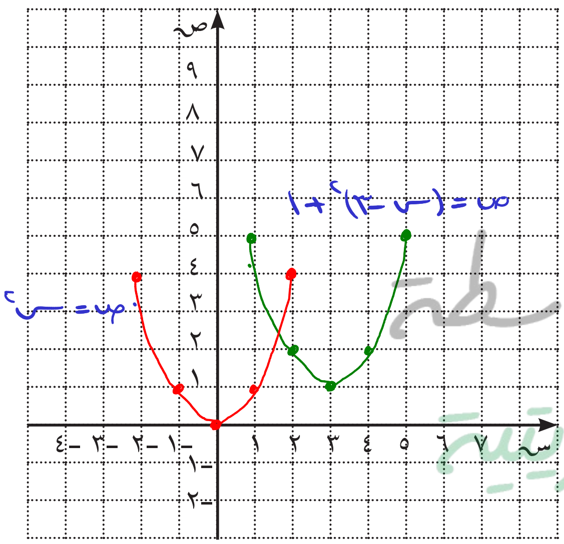
بيان الدالة ص = - $س^2$ + ٢ هو انعكاس لبيان الدالة ص = $س^2$ ثم إزاحة رأسية وحدتين إلى الأعلى

الدرس الخامس



④ ص = (س + ١)^{٢} + ٢

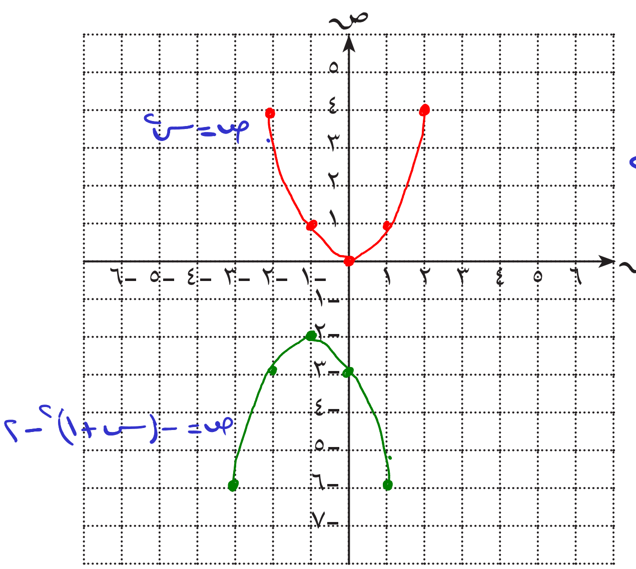
بيان الدالة ص = (س + ١)^{٢} + ٢
هو إزاحة أفقية لبيان الدالة ص = س^{٢}
وحدة إلى اليسار ثم إزاحة رأسية
وحدتين إلى الأعلى



⑤ ص = (س − ٣)^{٢} + ١

بيان الدالة ص = (س − ٣)^{٢} + ١
هو إزاحة أفقية لبيان الدالة
ص = س^{٢} ثلاثة وحدات إلى اليمين
ثم إزاحة رأسية وحدة إلى الأعلى

مهارات تفكير عليا :

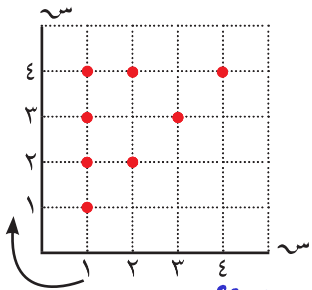


⑥ ص = − (س + ١)^{٢} − ٢

بيان الدالة ص = −(س + ١)^{٢} − ٢ هو
صورة انعكاس لبيان الدالة ص = س^{٢}
ثم إزاحة أفقية وحدة إلى اليسار
ثم إزاحة رأسية وحدتين إلى الأسفل

أوّلًا : البنود المقالية

١ يوضّح المخطّط البياني المقابِل العلاقة ع المعرَّفة على المجموعة س = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ }



(أ) أُكتب العلاقة ع بذكر العناصر .

ع = {(١،١)، (١،٢)، (١،٣)، (١،٤)، (٢،٢)، (٢،٤)
(٣،٣)، (٤،٤)}

(ب) اِختبِر العلاقة ع من حيث كونها انعكاسية ، متناظرة ، متعدّية ، تكافؤ .

ع علاقة انعكاسية لأنه لكل أ ∈ س فإنه (أ،أ) ∈ ع

ع علاقة ليست متناظرة لأنه (١،٢) ∈ ع و (٢،١) ∉ ع

ع علاقة متعدية لأنه لكل (أ،ب) ∈ ع و (ب،ح) ∈ ع فإنه (أ،ح) ∈ ع

∴ ع علاقة ليست تكافؤ لأنها ليست متناظرة.

٢ إذا كانت ع علاقة معرَّفة على س = { ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩ } ،
ع = { (٣ ، ٣) ، (٥ ، ٥) ، (٣ ، ٥) ، (٧ ، ٧) ، (٥ ، ٩) ، (٩ ، ٩) ، (٣ ، ٩) }
فاختبِر العلاقة ع من حيث كونها انعكاسية ، متناظرة ، متعدّية ، تكافؤ .

ع علاقة انعكاسية لأنه لكل أ ∈ س فإنه (أ،أ) ∈ ع

ع علاقة ليست متناظرة لأنه (٣،٥) ∈ ع و (٥،٣) ∉ ع

ع علاقة متعدية لأنه لكل (أ،ب) ∈ ع و (ب،ح) ∈ ع فإنه (أ،ح) ∈ ع

∴ ع علاقة ليست تكافؤ لأنها ليست متناظرة.

٣ إذا كانت س = { ١ ، ٢ ، ٣ } ، ص = { ٠ ، ٣ ، ٦ }
وكانت ت تطبيق من س إلى ص حيث ت (س) = ٣س - ٣

أ) أكمِل الجدول المقابِل :

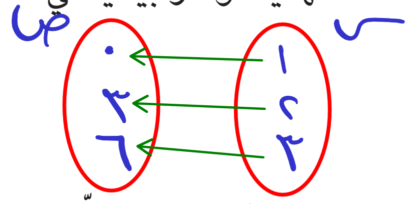
س	١	٢	٣
٣س - ٣	٣×١-٣	٣×٢-٣	٣×٣-٣
ت (س)	٠	٣	٦

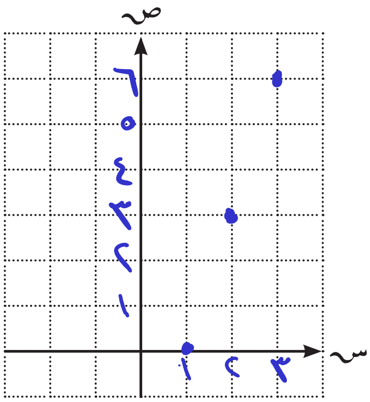
ب) مدى ت = {٠ ، ٣ ، ٦}

ج) أُكتب ت كمجموعة من الأزواج المرتَّبة :

ت = {(١ ، ٠) ، (٢ ، ٣) ، (٣ ، ٦)}

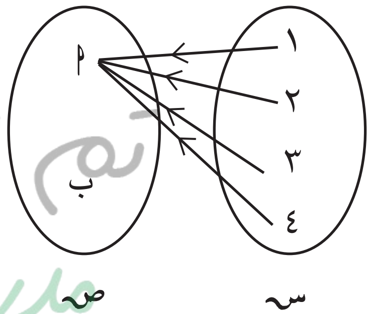
د) أُرسم مخطّطًا سهميًّا ، وآخر بيانيًّا في المستوى الإحداثي .





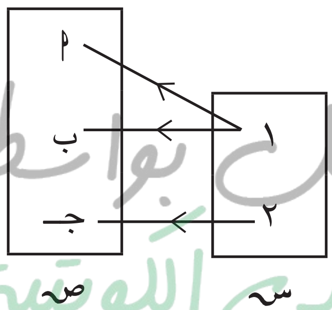
٤ أيّ من المخطّطات السهميّة التالية يمثّل تطبيقًا ؟ ولماذا ؟

أ)



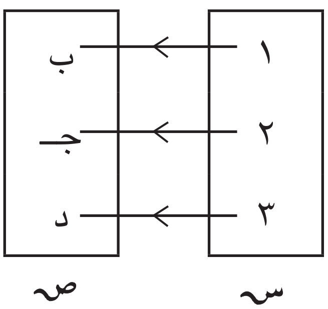
يمثل تطبيقاً لأنه كل عنصر من عناصر س ارتبط بعنصر واحد من عناصر ص

ب)



لا يمثل تطبيقاً لأنه عنصر من عناصر س خرج منه سهمان إلى أحد عناصر ص

ج)



يمثل تطبيقاً لأنه كل عنصر من عناصر س ارتبط بعنصر واحد فقط من عناصر ص

٥ إذا كان التطبيق د : س ← ص ، حيث س = { ٠ ، ١ ، ٢ } ، ص = { -٤ ، ٠ ، ٤ } ،
د (س) = ٤س - ٤

أ) أوجِد مدى التطبيق د .

د(٠) = ٤ × ٠ - ٤ = -٤

د(١) = ٤ × ١ - ٤ = ٠

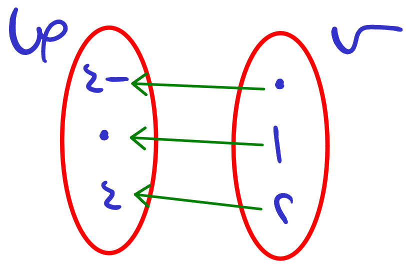
د(٢) = ٤ × ٢ - ٤ = ٤

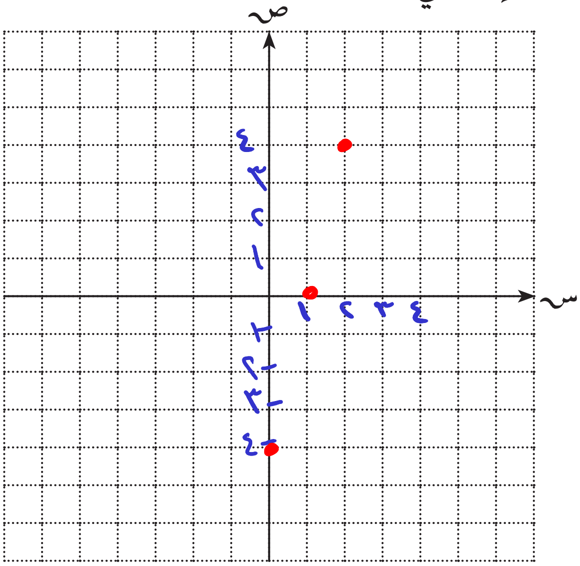
∴ المدى = {-٤ ، ٠ ، ٤}

ب) أُكتب د كمجموعة من الأزواج المرتَّبة .

د = {(٠ ، -٤) ، (١ ، ٠) ، (٢ ، ٤)}

ج) مثِّل التطبيق د بمخطّط سهمي وآخر بياني في المستوى الإحداثي .





د) بيِّن نوع التطبيق د من حيث كونه شاملًا ، متباينًا ، تقابلًا ، مع ذكر السبب .

د التطبيق شامل لأنه المدى = المجال المقابل

د التطبيق متباين لأنه د(٠) ≠ د(١) ≠ د(٢)

∴ د التطبيق تقابل لأنه شامل ومتباين .

٦ **إذا كان التطبيق ع : س ← ص ، حيث س = { -١ ، ٠ ، ١ } ، ص = { ١ ، ٢ } ،**
ع (س) = ٢ - $س^٢$ ، فبيِّن نوع التطبيق ع من حيث كونه شامل ، متباين ، تقابل مع ذكر السبب .

ع(-١) = ٢ - $(-١)^٢$ = ١

ع(٠) = ٢ - $(٠)^٢$ = ٢

ع(١) = ٢ - $(١)^٢$ = ١

∴ المدى = { ١ ، ٢ }

∴ ع التطبيق شامل لأنه المدى = المجال المقابل

ع التطبيق ليس متباينًا لأنه ع(-١) = ع(١)

ع التطبيق ليس تقابلًا لأنه ليس متباينًا .

٧ إذا كانت س = { ١ ، ٩ } ، ص = { ٢ ، ٣ ، ٤ } ، والتطبيق ت : س ← ص ، حيث
ت (س) = $\sqrt{س}$ + ١

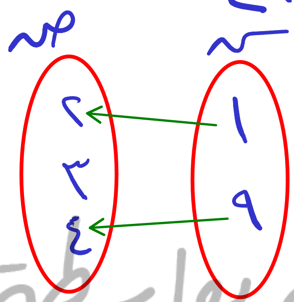
أ) أوجِد مدى التطبيق ت .

ت(١) = $\sqrt{١}$ + ١ = ١+١ = ٢
ت(٩) = $\sqrt{٩}$ + ١ = ٣+١ = ٤
∴ المدى = {٢، ٤}

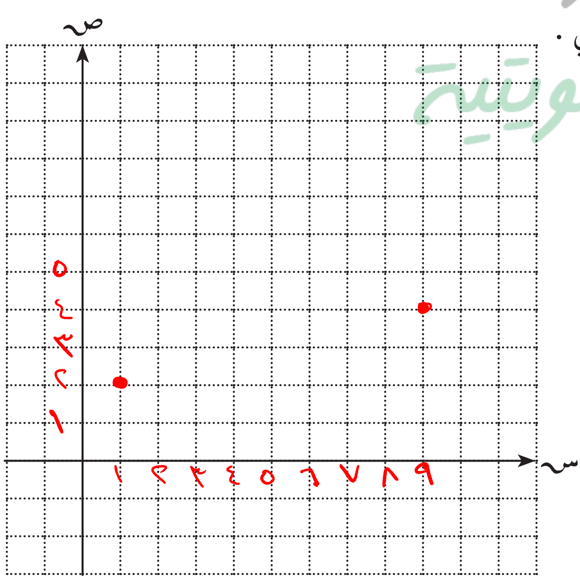
ب) أُكتب التطبيق ت كمجموعة من الأزواج المرتَّبة .

ت = {(١، ٢) ، (٩، ٤)}

ج) مثِّل التطبيق ت بمخطّط سهمي .



د) مثِّل التطبيق ت بمخطّط بياني في المستوى الإحداثي .

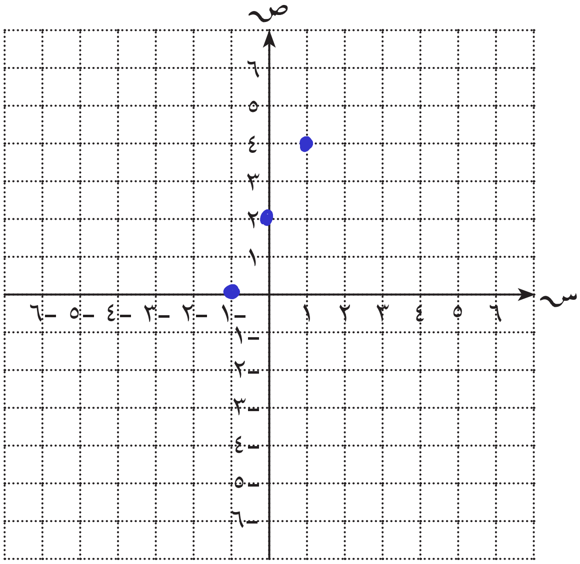


هـ) بيِّن نوع التطبيق ت من حيث كونه شاملًا ، متباينًا ، تقابلًا ، مع ذكر السبب .

ت التطبيق ليس شاملاً لأنه المدى ≠ المجال المقابل
∴ التطبيق متباين لأنه ت(١) ≠ ت(٩)
∴ التطبيق ليس تقابلاً لأنه ليس شاملاً

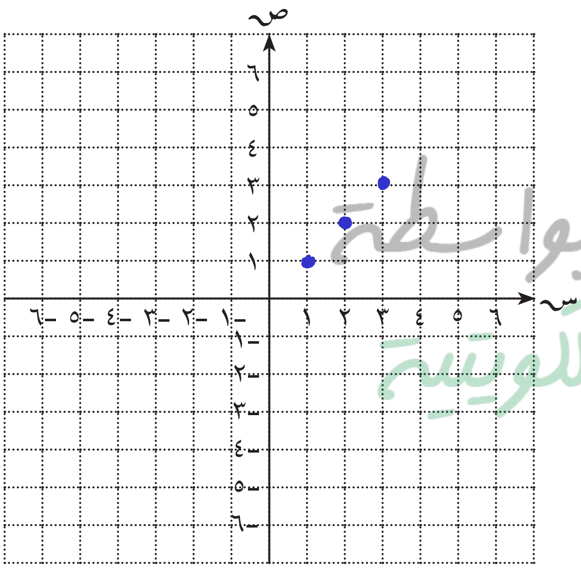
٨ أُرسم بيان الدالّة الخطّية : ص - ٢س = ٢

ص = ٢س + ٢			
س	-١	٠	١
ص	٠	٢	٤

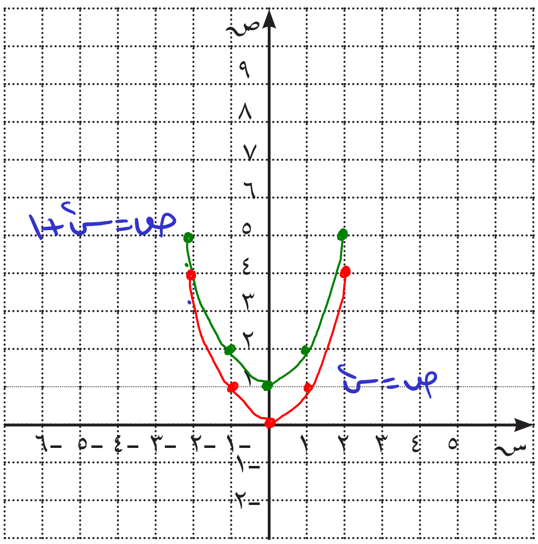


٩ أُرسم بيان الدالّة الخطّية : ص = س

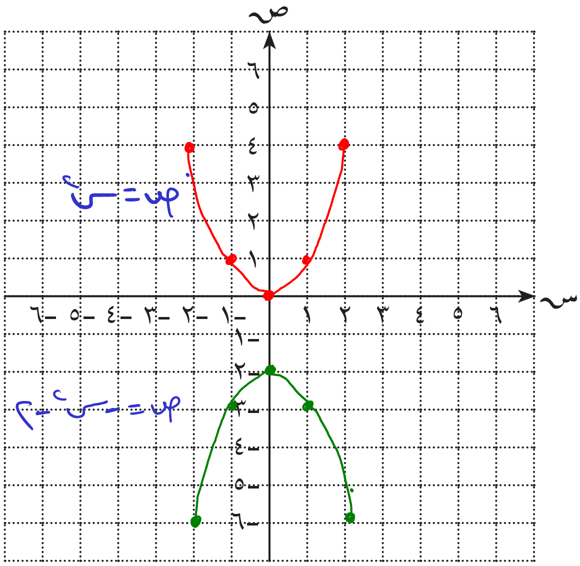
ص = س			
س	١	٢	٣
ص	١	٢	٣



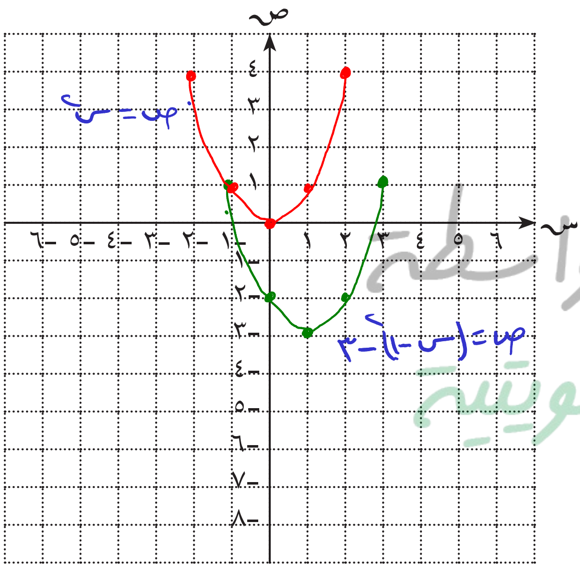
١٠ مثِّل بيانيًّا : ص = س^{٢} + ١ مستخدِمًا التمثيل البياني للدالّة التربيعية ص = س^{٢}



(١١) مثِّل بيانيًّا : ص = - س^{٢} - ٢ مستخدِمًا التمثيل البياني للدالّة التربيعية ص = س^{٢}



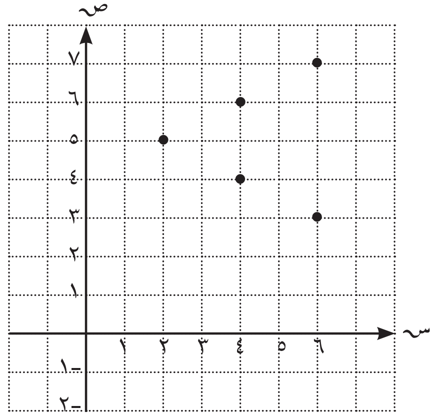
(١٢) مثِّل بيانيًّا : ص = (س - ١)^{٢} - ٣ مستخدِمًا التمثيل البياني للدالّة التربيعية ص = س^{٢}



ثانيًا : البنود الموضوعية

في البنود (١ - ٨) ، ظلِّل أ إذا كانت العبارة صحيحة ، وظلِّل ب إذا كانت العبارة غير صحيحة .

(١) إذا كانت ع علاقة تكافؤ على س = { ٣ ، ٥ ، ٦ } ، ع = { (٣ ، ٣) ، (س ، ص) ، (٥ ، ٥) ، (٥ ، ٦) ، (٦ ، ٦) } فإنّ (س ، ص) = (٦ ، ٥)	أ	ب
(٢) علاقة أكبر من أو يساوي على مجموعة أعداد هي علاقة متناظرة .	أ	ب
(٣) علاقة التطابق على مجموعة مثلّثات هي علاقة تكافؤ .	أ	ب

٤ لتكن ع : { ٢ ، ٤ ، ٦ } ⟵ { ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ } فإنّ العلاقة ع الممثّلة في المستوى الإحداثي المقابِل تمثّل تطبيقًا . 	أ	ب
٥ لتكن س = { -١ ، ٠ ، ١ } ، ص = { -١ ، ٠ ، ١ ، ٢ } التطبيق ت : س ⟵ ص ، حيث ت (س) = $س^{٣}$ ، فإنّ ت تطبيق شامل وليس متباينًا .	أ	ب
٦ إذا كانت النقطة (٣ ، ٢) هي رأس منحنى الدالّة التربيعية ، فإنّ معادلة خطّ التماثل للدالّة هي س = ٣ .	أ	ب
٧ لتكن س = { ٥ ، ٦ ، ٧ } ، إذا كان التطبيق ت : س ⟵ ص ، (ص هي مجموعة الأعداد الصحيحة) ، حيث ت (س) = س ، فإنّ ت تطبيق ليس تقابلًا .	أ	ب
٨ النقطة (١ ، ١) تنتمي إلى بيان الدالّة ص = -٢س + ٣	أ	ب

في البنود (٩ - ٢٣) ، لكلّ بند أربعة اختيارات ، واحد فقط منها صحيح ، ظلّل الإجابة الصحيحة .

٩ إذا كانت ع علاقة معرَّفة على س = { ٣ ، ٤ ، ٥ } ، ع = { (٤ ، ٤) } ، فإنّ ع تكون :

أ اِنعكاسية — ب متناظرة وليست متعدّية

ج متناظرة ومتعدّية — د علاقة تكافؤ

١٠ إذا كانت ع علاقة معرَّفة على س = { أ ، ب } ، ع = { (أ ، ب) ، (ب ، أ) } ، فإنّ :

أ ع علاقة متناظرة فقط — ب ع علاقة متناظرة ومتعدّية

ج ع علاقة انعكاسية فقط — د ع علاقة تكافؤ

١١ علاقة التوازي على مجموعة مستقيمات هي :

أ علاقة انعكاسية فقط — ب علاقة متناظرة فقط

ج علاقة انعكاسية ومتعدّية — د علاقة تكافؤ

١٢ لتكن سـ = { ١ ، ٤ ، ٢٥ } ، إذا كان التطبيق ت : سـ ← صـ ،
(صـ هي مجموعة الأعداد الصحيحة) ، حيث ت (س) = $\sqrt{س}$ ، فإنّ ت تطبيق :

أ شامل ومتباين
ب ليس شاملًا وليس متباينًا
ج شامل وليس متباينًا
د متباين وليس شاملًا

١٣ لتكن سـ = { ١ ، ٠ ، -١ } ، التطبيق ن : سـ ← سـ ، حيث ن (س) = $س^٢$ - ١، فإنّ ن تطبيق :

أ متباين وليس شاملًا
ب شامل ومتباين
ج ليس شاملًا وليس متباينًا
د شامل وليس متباينًا

١٤ إذا كانت سـ = { ١ ، ٢ } ، ت : سـ ← سـ ، فإنّ التطبيق التقابل فيما يلي هو :

أ { (١ ، ١) ، (٢ ، ١) }
ب { (١ ، ١) ، (٢ ، ٢) }
ج { (١ ، ٢) ، (٢ ، ٢) }
د ليس أيّ ممّا سبق صحيحًا .

١٥ إذا كان التطبيق ن : صـ ← { ٣ } ، حيث (صـ هي مجموعة الأعداد الصحيحة) ،
ن (س) = ٣ ، فإنّ ن تطبيق :

أ شامل ومتباين
ب ليس شاملًا وليس متباينًا
ج شامل وليس متباينًا
د متباين وليس شاملًا

١٦ إذا كان التطبيق ن : ط ← ط ، حيث (ط هي مجموعة الأعداد الكلّية) ،
ت (س) = ٢س ، فإنّ ت تطبيق :

أ ليس شاملًا وليس متباينًا
ب متباين وليس شاملًا
ج شامل وليس متباينًا
د تقابل

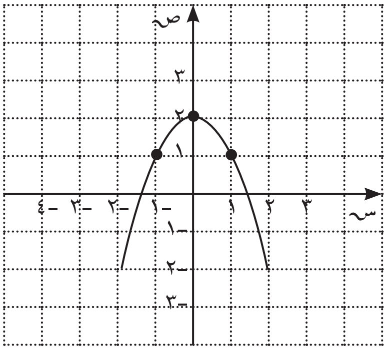
١٧ ليكن التطبيق ت : ح ← ح ، حيث ت (س) = ٢ + ٥س . إذا كان ت (ا) = ٢ ، فإنّ ا تساوي :

أ ٥
ب صفر
ج ٧
د ٣

١٨ إذا كانت النقطة (-٢ ، ١) تنتمي إلى بيان الدالّة : ص = ا س + ٣ ، فإنّ ا تساوي :

أ ١
ب -١
ج ٢
د -٢

١٩ يمثّل الشكل المقابِل بيان الدالّة :



أ ص = س^{٢} + ٢

ب ص = ـ س^{٢} + ٢

ج ص = ـ (س^{٢} + ٢)

د ص = س^{٢} ـ ٢

٢٠ بيان الدالّة ص = (س ـ ٢)^{٢} ـ ٤ ، يمثّل بيان الدالّة ص = س^{٢} تحت تأثير :

أ إزاحة أفقية بمقدار ٢ وحدة إلى اليسار ، وإزاحة رأسية بمقدار ٤ وحدات إلى الأسفل .

ب إزاحة أفقية بمقدار ٢ وحدة إلى اليمين ، وإزاحة رأسية بمقدار ٤ وحدات إلى الأسفل .

ج إزاحة أفقية بمقدار ٤ وحدات إلى اليسار ، وإزاحة رأسية بمقدار ٢ وحدة إلى الأعلى .

د إزاحة أفقية بمقدار ٢ وحدة إلى اليمين ، وإزاحة رأسية بمقدار ٤ وحدات إلى الأعلى .

٢١ معادلة خطّ التماثل لمنحنى الدالّة د : د (س) = س^{٢} هي ....

أ س = ١ ب س = ٠ ج ص = ١ د ص = ٠

٢٢ معادلة خطّ التماثل لمنحنى الدالّة د : د (س) = (س ـ ٢)^{٢} هي ....

أ س = ٠ ب س = ٢ ج س = ٢- د س = ٤-

٢٣ نقطة رأس منحنى الدالّة : ص = ـ (س ـ ٣)^{٢} + ٤ هي ....

أ (٣- ، ٤) ب (٣ ، ٤-) ج (٣ ، ٤) د (٣- ، ٤-)

في البنود (٢٤ ـ ٢٥) ، اِختر من القائمة (٢) ما يناسب كلّ بند من القائمة (١) لتحصل على عبارة صحيحة .

القائمة (١)	القائمة (٢)
٢٤ إذا كان التطبيق ت : ص ⟵ ص (مجموعة الأعداد الصحيحة) ، ت (س) = س^{٢} ، فإنّ ت ج	أ شامل وليس متباينًا .
	ب متباين وليس شاملًا .
٢٥ إذا كان التطبيق ت : { ٢- ، ٠ ، ٢ } ⟵ { ١- ، ٠ ، ١ } حيث ت (س) = $\frac{١}{٢}$ س ، فإنّ ت د	ج ليس شاملًا وليس متباينًا .
	د تطبيق تقابل .

الوحدة التعليمية
السادسة

المعادلات الخطّية والمتباينات الخطّية

المنحدرات « هندسة مدن الكويت ... رياضيات على أرض الواقع ! »

عند تخطيط المدن الجديدة في الكويت مثل مدينة المطلاع ومدينة صباح الأحمد ، يراعي المهندسون أن تكون الطرق ليست مستوية تمامًا ، بل فيها ميل بسيط يسمح بانسياب مياه الأمطار نحو المصارف بدلًا من تجمّعها في الشوارع .

كما تُصمَّم الطرق الصاعدة والنازلة عند الجسور أو الأنفاق بدرجات ميل محدَّدة حتّى تكون القيادة فيها مريحة وآمنة .

وتُرسم الشوارع بشكل منظَّم ومتوازٍ ، بحيث تلتقي بطرق أخرى بزوايا متعامدة لتسهيل حركة السير وتنظيم المرور .

المجال	معايير المنهج	مؤشر الأداء
العدّ والجبر	إِستخدام إستراتيجيات متنوّعة لوصف وتحليل العلاقات والتغيّرات .	التذكّر - التعرّف - الفهم - التمثيل - التعاون - العمل الجَماعي - الاستكشاف والتقصّي - الوسائط - المقارنة والتمييز - التعليل - الاستدلال - الاستنتاج - القوانين - حلّ المشكلات - العلاقات - التحليل والتركيب
	إِستخدام المعادلات والنماذج الرياضية لحلّ المسائل .	
	تمثيل وتحليل المواقف والبنى الرياضية باستخدام الرموز الجبرية .	

مخطّط تنظيمي للوحدة التعليمية السادسة

هل أنت مستعدّ ؟

١ أوجِد ناتج ما يلي :

أ) −١٢ + ٤ = −٨

ب) −٢ − ٣ = −٥

ج) ٧ − ٨ = −١

د) ٠ − (−٧) = ٧

هـ) −٤ − (−٥) = ١

و) ٠ + (−٨) = −٨

٢ ضَع كلًّا من المعادلات التالية في صورة ص = أس + ب ، ثمّ حدِّد أ ، ب في كلّ منها :

أ) ص + س = ٥

ص = − س + ٥

أ = −١ ، ب = ٥

ب) س − ص = −٤

−ص = − س − ٤

ص = س + ٤

أ = ١ ، ب = ٤

ج) ٢ س − ٤ ص − ٧ = ٠

ص = $\frac{١}{٢}$ س − $\frac{٧}{٤}$

أ = $\frac{١}{٢}$ ، ب = −$\frac{٧}{٤}$

د) ٤ ص − ٣ س = ٩

ص = $\frac{٣}{٤}$ س + $\frac{٩}{٤}$

أ = $\frac{٣}{٤}$ ، ب = $\frac{٩}{٤}$

هـ) ص + ٢ س = ٠

ص = −٢ س

أ = −٢ ، ب = ٠

و) −ص + ٣ س = ٠

ص = ٣ س

أ = ٣ ، ب = ٠

٣ أوجِد قيمة ص في الحالات التالية :

أ) ص = ٣ س − ٥
عندما س = ١

ص = ٣ × ١ − ٥

ص = −٢

ب) ص = س − ٣
عندما س = ٠

ص = ٠ − ٣

ص = −٣

ج) ٤ س − ص = ٤
عندما س = ٠

٤ × ٠ − ص = ٤

− ص = ٤

ص = −٤

د) س − ٤ ص = ٦
عندما س = ٢

٢ − ٤ ص = ٦

−٤ ص = ٤

ص = −١

٤ أجِب بنعم أم لا في كلّ ممّا يلي :

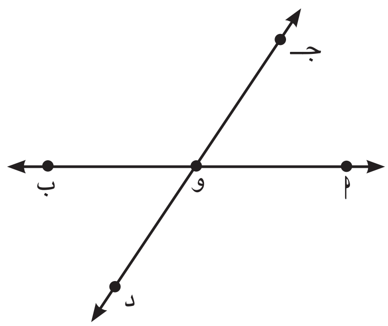
(أ) هل النقطة (٠ ، ٢) هي حلّ للمعادلة : ص = ٣ س + ٢ ؟ نعم

(ب) هل النقطة (٢ ، ٤) هي حلّ للمعادلة : ص = ٢ س + ١ ؟ لا

(ج) هل النقطة (١ ، -١) هي حلّ للمعادلة : ص = - ٣ س + ١ ؟ لا

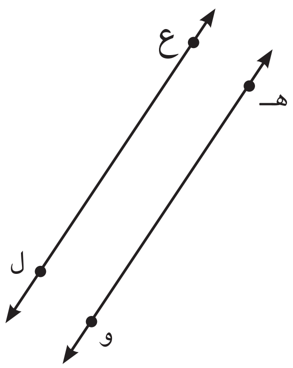
٥ أكمِل ما يلي :

(أ)



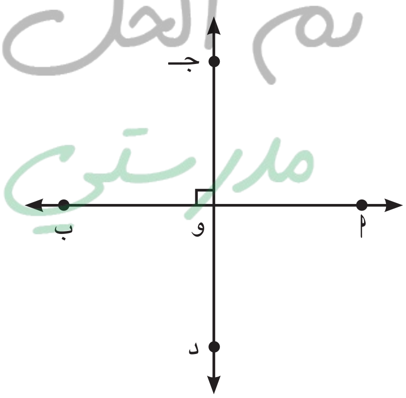
$\overleftrightarrow{\text{أب}} \cap \overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ = و

(ب)



$\overleftrightarrow{\text{هـ و}} \cap \overleftrightarrow{\text{ع ل}}$ = ∅

(ج)



$\overleftrightarrow{\text{أب}} \cap \overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ = و

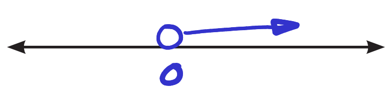
ق (أ $\hat{\text{و}}$ جـ) = ٩٠

٦ حُلّ كلًّا من المتباينات التالية في ح ، ومثّل مجموعة الحلّ على خطّ الأعداد .

(أ) س + ٢ > ٧

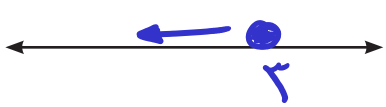
س > ٧ - ٢

س > ٥



(ب) س - ٣ ≤ ٠

س ≤ ٣



٦ - ١ الميل Slope

سوف تتعلّم : كيفية إيجاد ميل خطّ مستقيم .

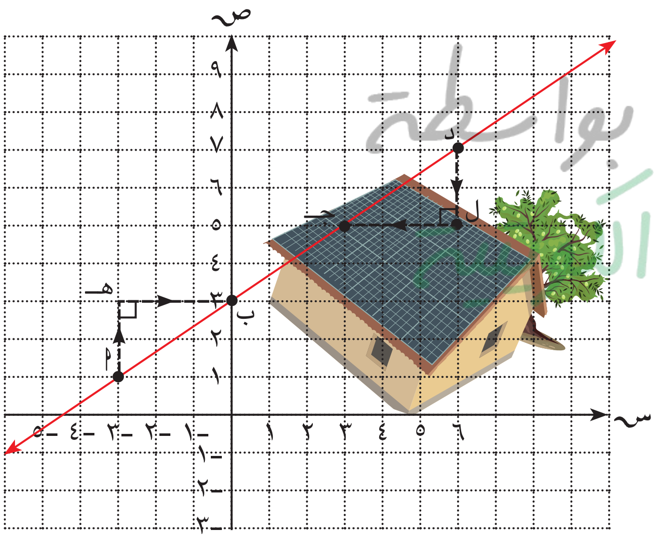
العبارات والمفردات :

الميل	Slope	ميل موجَب	Positive Slope
التغيّر الأفقي	Horizontal Change	ميل سالب	Negative Slope
التغيّر الرأسي	Vertical Change		

اِستكشِف (١)

أراد أحمد وهو مهندس كهربائي تصميم سقف لبيت في مزرعته يتميّز بدرجة انحدار مناسِبة لتركيب ألواح شمسية تهدف إلى توفير الطاقة الكهربائية المستهلَكة داخل مزرعته .

هيّا نساعد أحمد في حساب الانحدار المناسِب للسقف .



١ أكمِل ما يلي :

أ لحساب الانحدار المناسِب للمستقيم المارّ بالنقطتَين د ، جـ ، يمكن التحرّك من النقطة د إلى النقطة ل رأسيًّا إلى الأسفل ، ثمّ من النقطة ل إلى النقطة جـ أفقيًّا إلى اليسار .

التغيّر الرأسي من د إلى ل = ٥ − ٧ = −٢ (وحدتان إلى الأسفل)

التغيّر الأفقي من ل إلى جـ = ٣ − ....٦.... = ...٣....

(٣ وحدات إلى اليسار)

$\therefore \dfrac{\text{التغيّر الرأسي}}{\text{التغيّر الأفقي}} = \dfrac{....٢....}{....٣....}$

معلومة مفيدة :

تتكوّن الألواح الشمسية من مجموعة من الخلايا الشمسية التي تحوّل ضوء الشمس إلى كهرباء . تكون زاوية الميل المثالية للألواح الشمسية في الكويت من ٢٥° إلى ٣٥° تقريبًا نحو الجنوب وتتغيّر من فصل إلى آخر .

(ب) وبالمثل يمكن حساب الانحدار المناسِب بأخذ أيّ نقطتَين مثل أ ، ب لحساب الانحدار المناسِب للمستقيم المارّ بالنقطتَين أ ، ب يمكن التحرّك من النقطة أ إلى النقطة هـ رأسيًّا إلى الأعلى ، ثمّ من النقطة هـ إلى النقطة ب أفقيًّا إلى اليمين .

التغيّر الرأسي من أ إلى هـ = ٣ - ١ = ٢ (وحدتان إلى الأعلى)

التغيّر الأفقي من هـ إلى ب = ٠ - (‎-٣) = ٣ (٣ وحدات إلى اليمين)

∴ $\frac{\text{التغيّر الرأسي}}{\text{التغيّر الأفقي}} = \frac{٢}{٣}$

• **ماذا تلاحظ ؟** التغير الرأسي على التغير الأفقي متطابقه في (أ) ، (ب)

نسمّي $\frac{\text{التغيّر الرأسي}}{\text{التغيّر الأفقي}}$ بميل $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، وبالتالي يحدّد درجة الانحدار المطلوبة للسقف .

∴ الميل = $\frac{\text{التغيّر الرأسي}}{\text{التغيّر الأفقي}}$

لاحِظ أنّ : التغيّر الرأسي هو التغيّر في الإحداثي الصادي $ص_٢ - ص_١$

التغيّر الأفقي هو التغيّر في الإحداثي السيني $س_٢ - س_١$

(٢) أكمِل ما يلي :

(أ) د (٦ ، ٧) ، جـ (٣ ، ٥)

$\frac{\text{التغيّر في الإحداثي الصادي}}{\text{التغيّر في الإحداثي السيني}} = \frac{٧ - ٥}{٦ - ٣} = \frac{٢}{٣} = \frac{٢}{٣}$

(ب) أ (‎-٣ ، ١) ، ب (٠ ، ٣)

$\frac{\text{التغيّر في الإحداثي الصادي}}{\text{التغيّر في الإحداثي السيني}} = \frac{٣ - ١}{٠ - (-٣)} = \frac{٢}{٣}$

• قارِن بين الناتجَين في (أ) ، (ب) ماذا تلاحظ ؟ ....

نلاحظ أنّ : ميل المستقيم ثابت لأيّ نقطتَين عليه .

إذا كانت أ ($س_١$ ، $ص_١$) ، ب ($س_٢$ ، $ص_٢$) نقطتَين مختلفتَين في المستوى الإحداثي ، فإنّ :

ميل $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ = $\frac{\text{التغيّر الرأسي}}{\text{التغيّر الأفقي}} = \frac{\text{التغيّر في الإحداثي الصادي}}{\text{التغيّر في الإحداثي السيني}}$

م = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$ حيث $س_٢ \neq س_١$

اِنتبِه

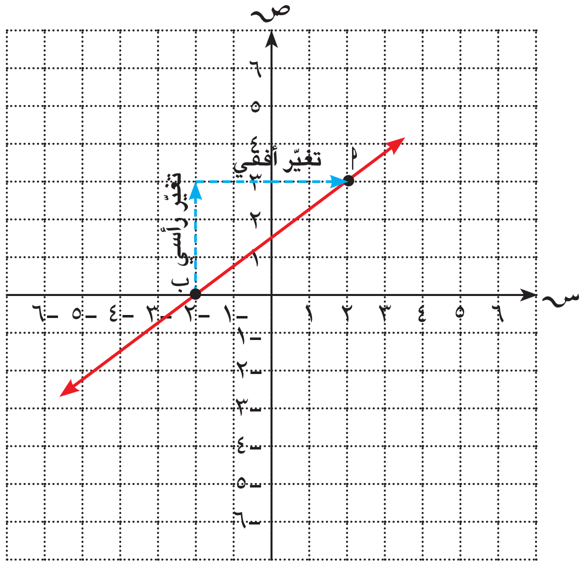
إذا كان أ ∈ ح - { ٠ } ، فإنّ

• $\frac{٠}{\text{أ}} = ٠$

• $\frac{\text{أ}}{٠}$ كمّية غير معرَّفة

لاحِظ أنّ :

أ

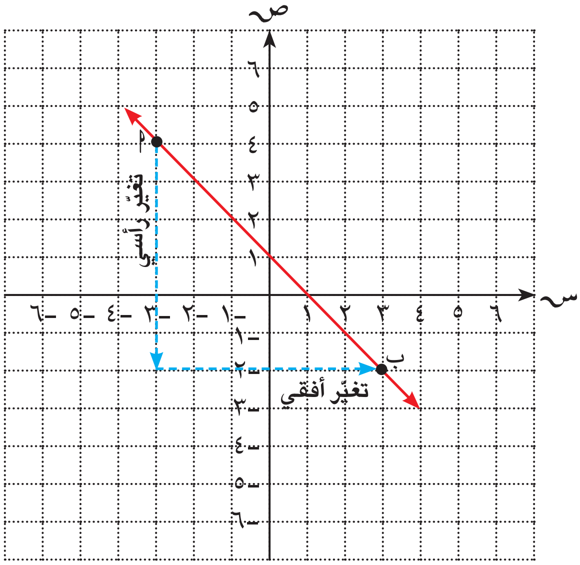


ميل $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ = ...

نلاحظ (ص تزداد بزيادة س)

∴ ميل المستقيم موجَب

ب

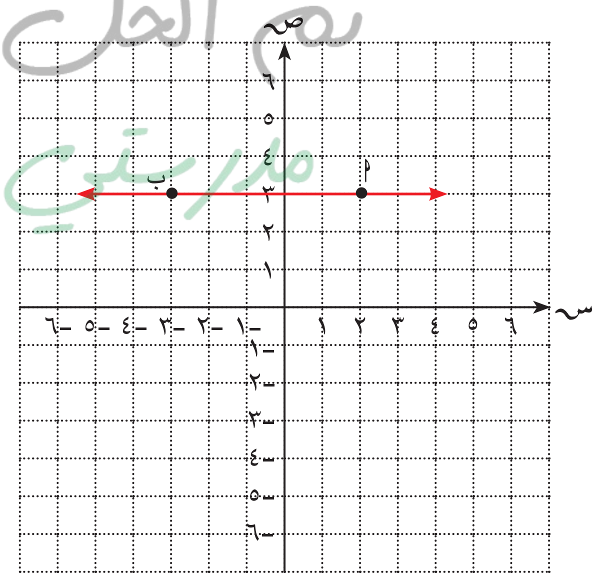


ميل $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ = ...

نلاحظ (ص تقلّ بزيادة س)

∴ ميل المستقيم سالب

ج



ميل $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ = ... = ...

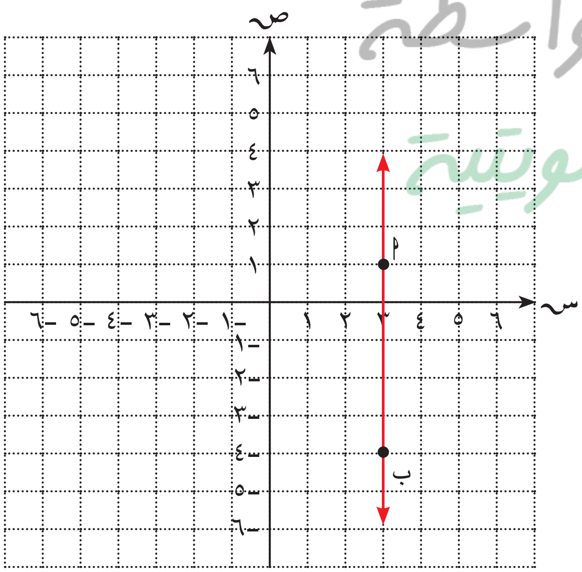
نلاحظ (المستقيم أفقي فيه ص ثابتة)

المستقيم $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ // محور ....

∴ ميل المستقيم الأفقي يساوي صفرًا .

بيان ص = ٣ هو خطّ مستقيم أفقي يوازي محور السينات .

د



لا نستطيع حساب الميل لأنّ تعريف الميل يشترط وجود تغيّر في الإحداثي السيني .

نلاحظ (المستقيم رأسي فيه س ثابتة)

المستقيم $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ // محور ....

∴ المستقيم الرأسي ليس له ميل .

بيان س = ٣ هو خطّ مستقيم رأسي يوازي محور الصادات .

مثال (٢):

أوجِد ميل المستقيم الذي يمرّ بالنقطتَين أ (−٣ ، ١) ، ب (٤ ، ٦)

الحلّ :

$$\text{ميل } \overleftrightarrow{\text{أ ب}} = \frac{\text{ص}_٢ - \text{ص}_١}{\text{س}_٢ - \text{س}_١}$$

$$= \frac{٦ - ١}{٤ - (-٣)}$$

$$= \frac{٥}{٤ + ٣} = \frac{٥}{٧}$$

لاحِظ أنّ

$$\text{م} = \frac{\text{ص}_٢ - \text{ص}_١}{\text{س}_٢ - \text{س}_١} = \frac{\text{ص}_١ - \text{ص}_٢}{\text{س}_١ - \text{س}_٢}$$

حيث $\text{س}_٢ \neq \text{س}_١$

دورك الآن (١)

أوجِد ميل $\overleftrightarrow{\text{هـ ك}}$ حيث هـ (٥ ، ٢) ، ك (−٢ ، ٣) .

$$\text{ميل هـ ك} = \frac{٣ - ٢}{-٢ - ٥} = \frac{١}{-٧} = \frac{-١}{٧}$$

عبِّر عن فهمك (١)

أوْجَدَ عامر ميل المستقيم المارّ بالنقطتَين (−٢ ، ٣) ، (٥ ، ٧)

كما يلي : $\frac{٧ - ٣}{(-٢) - ٥} = \frac{٤}{-٧} = -\frac{٤}{٧}$

$$\frac{\text{ص}_٢ - \text{ص}_١}{\text{س}_٢ - \text{س}_١} = \frac{٧ - ٣}{٥ - (-٢)} = \frac{٤}{٧}$$

هل عامر على صواب ؟ وضِّح إجابتك .

لا ، لأنه يجب الترتيب إما $\frac{\text{ص}_٢ - \text{ص}_١}{\text{س}_٢ - \text{س}_١}$ أو $\frac{\text{ص}_١ - \text{ص}_٢}{\text{س}_١ - \text{س}_٢}$

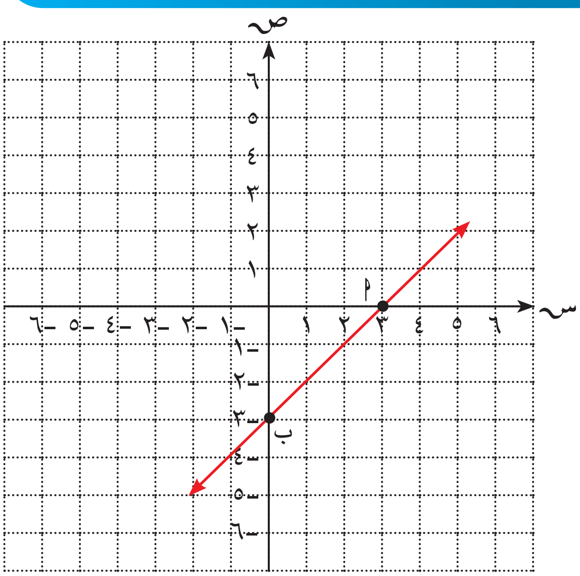
دورك الآن (٢)

في الشكل المقابِل :

أوجِد ميل $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$.

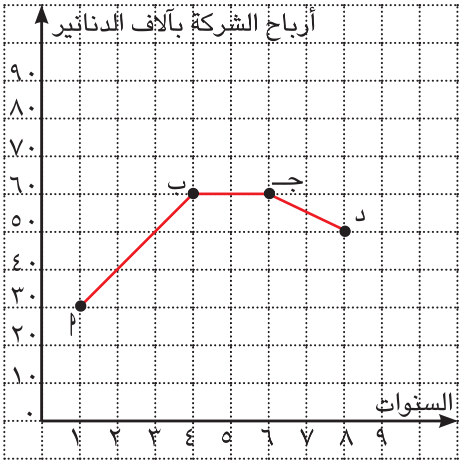
أ (٣ ، ٠) ، ب (٠ ، −٣)

$$\frac{-٣ - ٠}{٠ - ٣} = \frac{-٣}{-٣} = ١$$



مثال (٢) :

يوضّح الشكل المقابِل تغيّر أرباح شركة خلال ٨ سنوات بآلاف الدنانير . أوجِد ميل كلّ من $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$. ما دلالة كلّ منها ؟



الحلّ :

ميل $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ = $\frac{٦٠ - ٣٠}{٤ - ١}$ = $\frac{\cancel{٣٠}^{١٠}}{\cancel{٣}_{١}}$ = ١٠ وهو يعبّر عن تزايد أرباح الشركة خلال السنوات الأربع الأولى بمعدَّل ١٠ آلاف دينار .

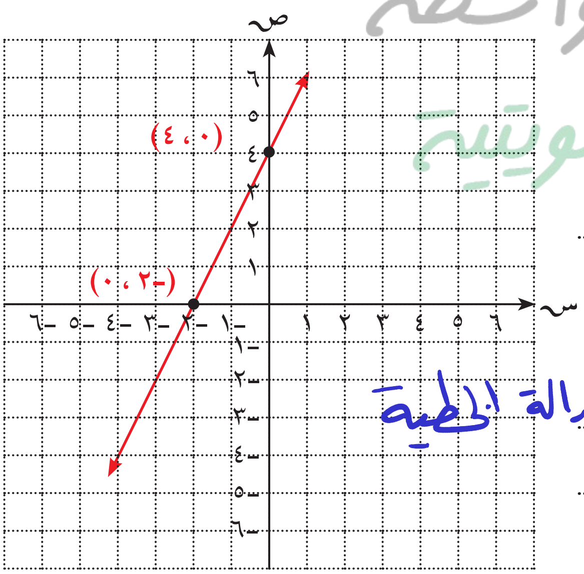
ميل $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ = $\frac{٦٠ - ٦٠}{٦ - ٤}$ = $\frac{\text{صفر}}{٢}$ = صفر وهو يعني أنّ أرباح الشركة كانت ثابتة خلال السنتَين الخامسة والسادسة .

ميل $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ = $\frac{٥٠ - ٦٠}{٨ - ٦}$ = $\frac{\cancel{-١٠}^{-٥}}{\cancel{٢}_{١}}$ = -٥ وهو يعبّر عن تناقص أرباح الشركة خلال السنتَين الأخيرتَين بمعدَّل ٥ آلاف دينار .

اِستكشِف (٢)

يمثّل الشكل المقابِل بيان الدالّة الخطّية :

ص = ٢ س + ٤



من الرسم ، أكمِل ما يلي :

١ (أ) ميل المستقيم = $\frac{٤ - ٠}{٠ - (-٢)}$ = $\frac{٤}{٢}$ = ٢

(ب) ما العلاقة بين ميل المستقيم ومعامل س في الدالّة الخطّية ؟

ميل المستقيم هو معامل س في الدالة الخطية

٢ (أ) الجزء المقطوع من محور الصادات هو ٤

وهو الإحداثي الصادي لنقطة تقاطع المستقيم مع محور الصادات ، أي عندما يساوي الإحداثي السيني صفرًا .

ما العلاقة بين الحدّ الثابت في الدالّة الخطّية والجزء المقطوع من محور الصادات ؟

الحد الثابت في الدالة الخطية = الجزء المقطوع من محور الصادات

(ب) الجزء المقطوع من محور السينات هو -٢

وهو الإحداثي السيني لنقطة تقاطع المستقيم مع محور السينات ، أي عندما يساوي الإحداثي الصادي صفرًا .

المستقيم الذي ميله م والجزء المقطوع من محور الصادات ب تكون معادلته على الصورة :
ص = م س + ب (تُسمّى الصورة القياسية لمعادلة المستقيم)

أمّا الصورة العامّة لمعادلة مستقيم فهي : ﺃ س + ب ص + جـ = ٠ حيث ﺃ ، ب ، جـ ∈ ح ؛
ﺃ ، ب لا يساويان الصفر معًا .

ملاحظة :

إذا كانت معادلة المستقيم على الصورة : ص = م س + ب
فإنّ :

- ميل المستقيم = م (معامل س)
- الجزء المقطوع من محور الصادات = ب (الحدّ الثابت)
- لإيجاد الجزء المقطوع من محور السينات ، نضع ص = ٠ ، ونوجد قيمة س

مثال (٣) :

أوجِد الميل والجزء المقطوع من محور الصادات والجزء المقطوع من محور السينات للمستقيم الذي معادلته : ص = ٢ س − ٥

الحلّ :

ص = ٢ س − ٥

المعادلة على الصورة : ص = م س + ب

∴ الميل (م) = ٢

الجزء المقطوع من محور الصادات (ب) = −٥

لإيجاد الجزء المقطوع من محور السينات نضع ص = ٠ في المعادلة ص = ٢ س − ٥

∴ ٢ س − ٥ = ٠ نحلّ المعادلة

٢ س − ٥ + ٥ = ٠ + ٥

$\cancel{٢}$ س × $\frac{١}{\cancel{٢}}$ = ٥ × $\frac{١}{٢}$

س = $\frac{٥}{٢}$

إذًا الجزء المقطوع من محور السينات = $\frac{٥}{٢}$

مثال (٤) :

أوجِد الميل والجزء المقطوع من محور الصادات للمستقيم الذي معادلته : ٤ س + ٢ ص = ٦

الحلّ :

نضع المعادلة على الصورة : ص = م س + ب

٢ ص = − ٤ س + ٦

ص = − ٢ س + ٣

∴ الميل (م) = − ٢

الجزء المقطوع من محور الصادات (ب) = ٣

اِنتبِه

لإيجاد الميل (م) والجزء المقطوع من محور الصادات (ب) ،
ضَع معادلة المستقيم على الصورة القياسية : ص = م س + ب

مثال (٥) :

أوجِد الميل والجزء المقطوع من محور الصادات للمستقيم الذي معادلته :
ص = ٢

الحلّ :

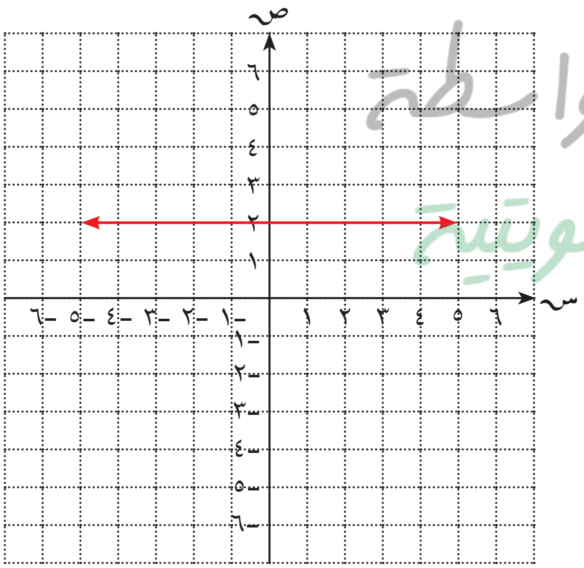
المعادلة : ص = ٢

على الصورة : ص = م س + ب

∴ الميل (م) = ٠ (يوازي محور السينات)

الجزء المقطوع من محور الصادات (ب) = ٢

للتحقّق بيانيًّا



عبِّر عن فهمك (٢)

هل المستقيم الذي معادلته س = ٥ يقطع محور الصادات ؟

فسِّر إجابتك . لا يقطع محور الصادات لأنه يوازيه .

لاحِظ أنّ

- س = ٠ هي معادلة محور الصادات .
- ص = ٠ هي معادلة محور السينات .

ملاحظة :

إذا كان أ ، ب ∈ ح ، فإنّ :

- المستقيم س = أ هو مستقيم رأسي (ليس له ميل) ويوازي محور الصادات .
- المستقيم ص = ب هو مستقيم أفقي (ميله يساوي صفرًا) ويوازي محور السينات .

دورك الآن (٣)

أوجِد الميل والجزء المقطوع من محور الصادات والجزء المقطوع من محور السينات للمستقيم الذي معادلته :

أ ص = ٥ س + ٣

الميل = ٥

الجزء المقطوع من محور الصادات = ٣

الجزء المقطوع من محور السينات = $\frac{-٣}{٥}$

ب ص = ٢ - ٣ س

الميل = -٣

الجزء المقطوع من محور الصادات = ٢

الجزء المقطوع من محور السينات = $\frac{٢}{٣}$

ج ٤ ص = - ٧ س

الميل = $\frac{-٧}{٤}$

الجزء المقطوع من محور الصادات = ٠

الجزء المقطوع من محور السينات = ٠

د ٣ س + ص = ٦

الميل = -٣

الجزء المقطوع من محور الصادات = ٦

الجزء المقطوع من محور السينات = ٢

عبِّر عن فهمك (٣)

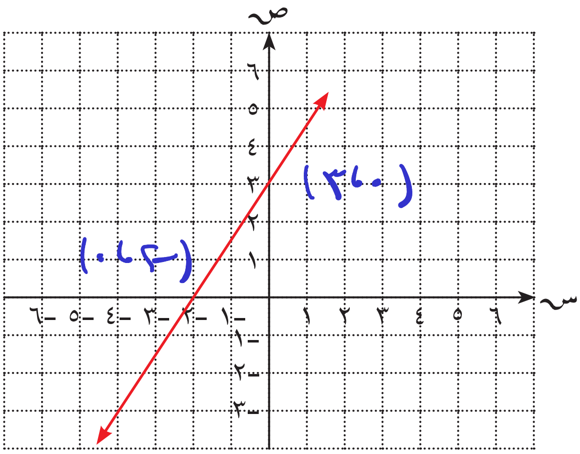
أعطِ مثالًا لمعادلة مستقيم يكون فيه الجزء المقطوع من محور الصادات يساوي صفرًا .

ص = ٢ س

تمارين ذاتية :

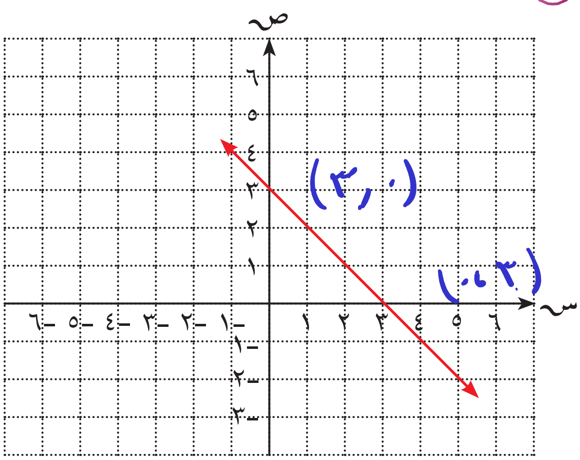
١ أوجِد ميل كلّ من المستقيمات التالية إن أمكن ذلك :

أ



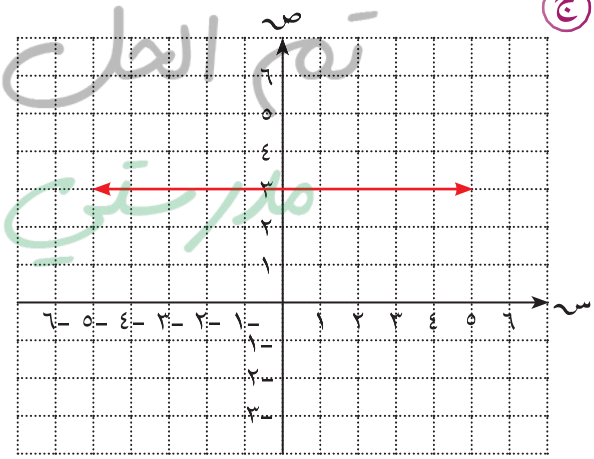
$\frac{٣-٠}{٠-(-٢)} = \frac{٣}{٢}$

ب



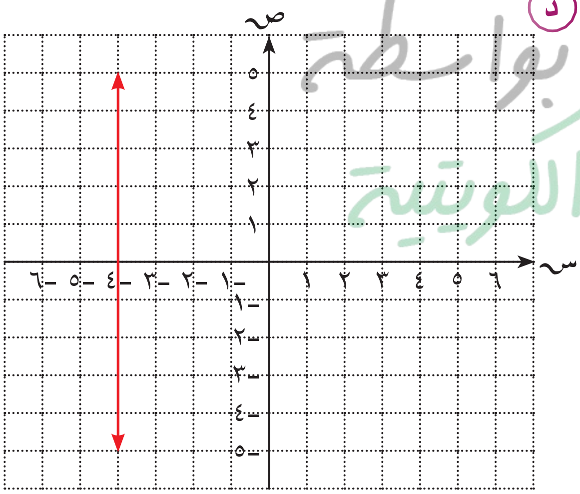
$\frac{٠-٣}{٣-٠} = \frac{-٣}{٣} = -١$

ج



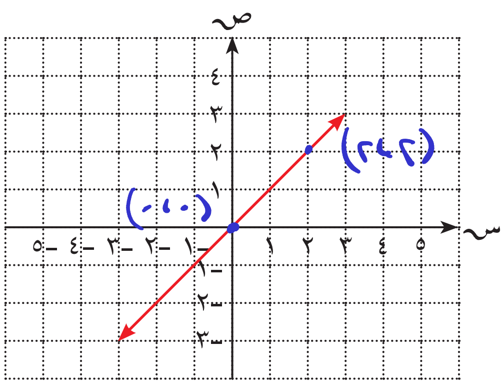
ص = ٣

د



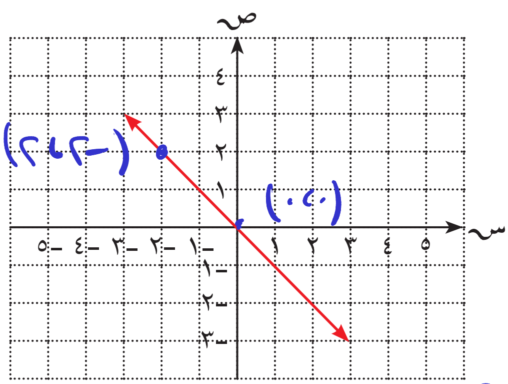
س = −٤

ه



$\frac{٢-٠}{٢-٠} = \frac{٢}{٢} = ١$

و



$\frac{٢-٠}{-٢-٠} = \frac{٢}{-٢} = -١$

٢ أوجِد ميل المستقيم المارّ بالنقطتَين في كلّ ممّا يلي :

أ) أ (٢ ، ١) ، ب (٣ ، ٥)

= $\frac{٥ - ١}{٣ - ٢}$ = $\frac{٤}{١}$ = ٤

ب) س (−١ ، ٧) ، ص (٣ ، ٤)

= $\frac{٧ - ٤}{-١ - ٣}$ = $\frac{٣}{-٤}$ = $\frac{-٣}{٤}$

ج) ع (−٥ ، ٠) ، ل (٠ ، ٤)

= $\frac{٤ - ٠}{٠ - (-٥)}$ = $\frac{٤}{٥}$

د) هـ (٢ ، ٤) ، ل (−٥ ، ٤)

= $\frac{٤ - ٤}{٢ - (-٥)}$ = صفر

يوازي محور الصادات

٣ أوجِد الميل والجزء المقطوع من محور الصادات والجزء المقطوع من محور السينات للمستقيم الذي معادلته :

أ) ص = ٤ س + ٥

الميل = ٤

الجزء المقطوع من محور الصادات = ٥

الجزء المقطوع من محور السينات = $\frac{-٥}{٤}$

ب) ص = ٢ − ٥ س

الميل = −٥

الجزء المقطوع من محور الصادات = ٢

الجزء المقطوع من محور السينات = $\frac{٢}{٥}$

٤ أوجِد الميل والجزء المقطوع من محور الصادات للمستقيم الذي معادلته :

أ) ص = ٢ س

الميل = ٢

الجزء المقطوع من محور الصادات = ٠

ب) ٣ س + ص = ٧

الميل = −٣

الجزء المقطوع من محور الصادات = ٧

ج) ٢ ص − ٥ س + ٣ = ٠

ص = $\frac{٥}{٢}$ س − $\frac{٣}{٢}$

الميل = $\frac{٥}{٢}$

الجزء المقطوع من محور الصادات = $\frac{-٣}{٢}$

د) ٣ ص = ٣ س + ٦

ص = س + ٢

الميل = ١

الجزء المقطوع من محور الصادات = ٢

هـ) − ص + س + ٨ = ٠

ص = س + ٨

الميل = ١

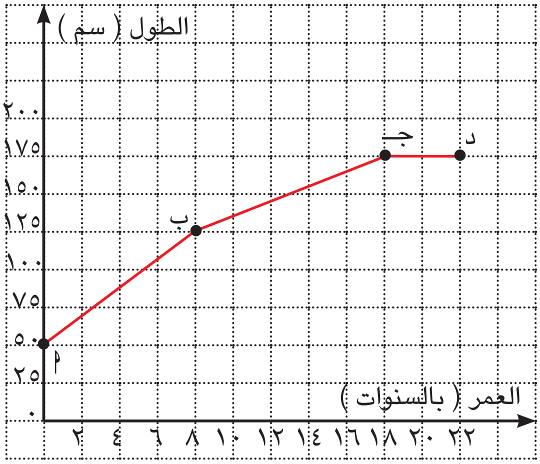
الجزء المقطوع من محور الصادات = ٨

و) ص = ٤

يوازي محور السينات

الميل = صفر

الجزء المقطوع من محور الصادات = ٤



٥ يوضّح الشكل المقابِل العلاقة بين طول شخص (بالسنتيمتر) وعمره بالسنوات .
أوجِد ميل كلّ من $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$.
ما دلالة كلّ منها ؟

ميل أ ب = $\frac{١٢٥ - ٥٠}{٨ - ٠} = \frac{٧٥}{٨} = ٩\frac{٣}{٨}$

وهو يعبر عن تزايد طول الأشخاص بمعدل $٩\frac{٣}{٨}$ خلال هذه السنوات

ميل ب جـ = $\frac{١٧٥ - ١٢٥}{١٨ - ٨} = \frac{٥٠}{١٠} = ٥$

وهو يعبر عن تزايد طول الأشخاص بمعدل ٥ خلال الأعمار من ٨ إلى ١٨ سنة

ميل جـ د = $\frac{١٧٥ - ١٧٥}{٢٢ - ١٨} = \frac{٠}{٤} = ٠$ ، وهو يعبر عن أن طول الأعمار يكون ثابتاً خلال الأعمار من ١٨ إلى ٢٢

مهارات تفكير عليا :

٦ هل المستقيم المارّ بالنقطتَين (٢ ، ٤) ، (٤ ، ٥) أكثر انحدارًا من المستقيم المارّ بالنقطتَين (١ ، ٤) ، (٤ ، ٥) ؟ وضِّح إجابتك .

أولاً ميل المستقيم المار بالنقطتين (٢، ٤)، (٤، ٥)

الميل = $\frac{٥ - ٤}{٤ - ٢} = \frac{١}{٢}$ ← (١)

ثانياً ميل المستقيم المار بالنقطتين (١، ٤)، (٤، ٥)

الميل = $\frac{٥ - ٤}{٤ - ١} = \frac{١}{٣}$ ← (٢)

∴ من (١)، (٢) يتضح أن المستقيم الأول أكثر انحداراً من المستقيم الثاني.

٧ إذا كان ميل المستقيم الذي يمرّ بالنقطتَين (- ٣ ، ٤) ، (١ ، ك) هو ٢ ، فأوجِد قيمة ك .

ميل = ٢ ∴ $\frac{ك - ٤}{١ - (-٣)} = ٢$

$\frac{ك - ٤}{١ + ٣} = ٢$ ، $\frac{ك - ٤}{٤} = ٢$ ، ك - ٤ = ٨

∴ ك = ١٢

٦ ـ ٢

المستقيمات المتوازية والمستقيمات المتعامدة
Parallel Lines and Perpendicular Lines

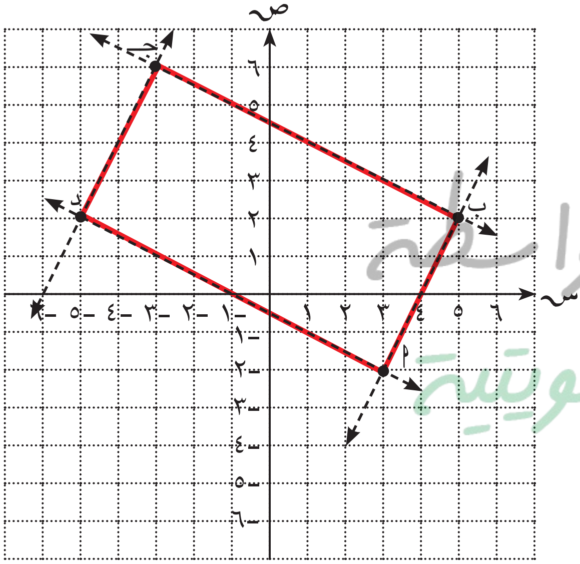
سوف تتعلّم : المستقيمات المتوازية والمستقيمات المتعامدة والعلاقة بينها .

العبارات والمفردات :

المستقيمات المتوازية Parallel Lines

المستقيمات المتعامدة Perpendicular Lines

إستكشِف



في الشكل المقابِل : أ ب جـ د مستطيل .

∴ أد // ب جـ ، أب // د جـ ،

د جـ ⊥ ب جـ ، أد ⊥ أب

أوجِد ميل كلّ من المستقيمات التالية :

ميل أد = $\frac{٢ - (-٢)}{-٥ - ٣}$ = $\frac{٤}{-٨}$ = $-\frac{١}{٢}$

ميل ب جـ = $\frac{٦ - ٢}{-٣ - ٥}$ = $\frac{٤}{-٨}$ = $-\frac{١}{٢}$

ميل د جـ = $\frac{٦ - ٢}{-٣ + ٥}$ = $\frac{٤}{٢}$ = ٢

ميل أب = $\frac{٢ + ٢}{٥ - ٣}$ = $\frac{٤}{٢}$ = ٢

أكمِل ما يلي :

١ أد // ب جـ
ميل أد = ميل ب جـ

٢ أب // د جـ
ميل أب = ميل د جـ

ماذا تلاحظ ؟ المستقيم الأول يوازي المستقيم الثاني إذا كان ميل الأول = ميل الثاني.

٣ ب جـ ⊥ د جـ
ميل ب جـ × ميل د جـ
= $-\frac{١}{٢}$ × ٢ = −١

٤ أد ⊥ أب
ميل أد × ميل أب
= $-\frac{١}{٢}$ × ٢ = −١

ماذا تلاحظ ؟ المستقيم الأول عمودي على المستقيم الثاني إذا كان ميل الأول × ميل الثاني = −١

تذكّر

المستطيل هو متوازي أضلاع إحدى زواياه قائمة .

ليكن $م_1$ هو ميل $\overleftrightarrow{ل_1}$ ، $م_2$ هو ميل $\overleftrightarrow{ل_2}$:

- $م_1 = م_2 \Leftarrow \overleftrightarrow{ل_1} \,//\, \overleftrightarrow{ل_2}$ (والعكس صحيح $\overleftrightarrow{ل_1} \,//\, \overleftrightarrow{ل_2} \Leftarrow م_1 = م_2$ ما لم يوازِ أحدهما محور الصادات)
- $م_1 \times م_2 = -1 \Leftarrow \overleftrightarrow{ل_1} \perp \overleftrightarrow{ل_2}$ (والعكس صحيح $\overleftrightarrow{ل_1} \perp \overleftrightarrow{ل_2} \Leftarrow م_1 \times م_2 = -1$ ما لم يوازِ أحدهما أيًّا من المحورَين)

دورك الآن (١)

أكمِل الجدول الآتي :

ميل $\overleftrightarrow{ل}$	ميل المستقيم الموازي له	ميل المستقيم العمودي عليه
٣	٣	$-\frac{١}{٣}$
$-\frac{١}{٢}$	$-\frac{١}{٢}$	٢
$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٤}$	-٤
$\frac{٢}{٥}$	$\frac{٢}{٥}$	$-\frac{٥}{٢}$
٠	٠	ليس له ميل .

مثال (٢) :

إذا كان $\overleftrightarrow{ل}$ يمرّ بالنقطتَين ٲ (-٤ ، ٣) ، ب (-٣ ، ٥)

وكان $\overleftrightarrow{م}$ يمرّ بالنقطتَين ع (٨ ، ٥) ، ك (٩ ، ٧)

فأثبِت أنّ $\overleftrightarrow{ل} \,//\, \overleftrightarrow{م}$

الحلّ :

$\because$ $\overleftrightarrow{ل}$ يمرّ بالنقطتَين ٲ (-٤ ، ٣) ، ب (-٣ ، ٥)

$\therefore$ ميل $\overleftrightarrow{ل} = \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1}$

$= \frac{٥ - ٣}{-٣ - (-٤)} = \frac{٢}{١} = ٢$

اِنتبِه

إذا بدأت الطرح في البسط بالإحداثي الصادي للنقطة ب ، يجب أن تبدأ في المقام بالإحداثي السيني للنقطة ب أيضًا .

∵ $\overleftrightarrow{م}$ يمرّ بالنقطتَين ع (٨ ، ٥) ، ك (٩ ، ٧)

∴ ميل $\overleftrightarrow{م}$ $= \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٧ - ٥}{٩ - ٨} = \frac{٢}{١} = ٢$

∵ ميل $\overleftrightarrow{ل}$ = ميل $\overleftrightarrow{م}$

∴ $\overleftrightarrow{ل}$ // $\overleftrightarrow{م}$

دورك الآن (٢)

إذا كان ميل $\overleftrightarrow{أب}$ هو ٣ ، $\overleftrightarrow{جـد}$ يمرّ بالنقطتَين جـ (٣ ، - ١) ، د (١ ، - ٧) .

فأثبِت أنّ $\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{جـد}$ متوازيان .

ميل $\overline{جـد}$ $= \frac{-١ + ٧}{٣ - ١} = \frac{٦}{٢} = ٣$

∵ ميل أب = ميل جـد = ٣ ∴ أب // جـد

مثال (٢) :

إذا كان $\overleftrightarrow{هـ}$ يمرّ بالنقطتَين أ (٣ ، ٤) ، ب (٩ ، ٧)

وكانت معادلة $\overleftrightarrow{ك}$: ص = $\frac{١}{٢}$ س + ٥

فأثبِت أنّ $\overleftrightarrow{هـ}$ // $\overleftrightarrow{ك}$

الحلّ :

∵ $\overleftrightarrow{هـ}$ يمرّ بالنقطتَين أ (٣ ، ٤) ، ب (٩ ، ٧)

∴ ميل $\overleftrightarrow{هـ}$ $= \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٧ - ٤}{٩ - ٣} = \frac{\cancel{٣}^{١}}{\cancel{٦}_{٢}} = \frac{١}{٢}$

∵ معادلة $\overleftrightarrow{ك}$: ص = $\frac{١}{٢}$ س + ٥ المعادلة على الصورة ص = م س + ب

∴ ميل $\overleftrightarrow{ك}$ = $\frac{١}{٢}$

∵ ميل $\overleftrightarrow{هـ}$ = ميل $\overleftrightarrow{ك}$

∴ $\overleftrightarrow{هـ}$ // $\overleftrightarrow{ك}$

دورك الآن (٣)

إذا كان ميل $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ هو -٥ ، وكان $\overleftrightarrow{\text{ل ع}}$ معادلته :

٥ س + ص = ٢ ، فأثبِت أنّ $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ // $\overleftrightarrow{\text{ل ع}}$.

ص = ٢ - ٥ س

∴ ميل لع = -٥

∴ ميل أب = ميل لع = -٥

∴ أب // لع

اِنتبِه

ضَع المعادلة على الصورة القياسية ص = م س + ب قبل إيجاد الميل .

عبِّر عن فهمك (١)

هل المستقيم الذي معادلته س = ٣ والمستقيم الذي معادلته س = - ٢ متوازيان ؟ فسِّر إجابتك .

نعم ، لأنه كليهما يوازيا محور الصادات .

مثال (٣) :

إذا كان $\overleftrightarrow{\text{ك}}$ يمرّ بالنقطتَين جـ (٣ ، ٤) ، د (٥ ، ٧)

وكانت معادلة $\overleftrightarrow{\text{ل}}$: ٣ ص + ٢ س - ٣ = ٠ ،

فأثبِت أنّ $\overleftrightarrow{\text{ك}}$ ⊥ $\overleftrightarrow{\text{ل}}$

الحلّ :

∵ $\overleftrightarrow{\text{ك}}$ يمرّ بالنقطتَين جـ (٣ ، ٤) ، د (٥ ، ٧)

∴ ميل $\overleftrightarrow{\text{ك}}$ = $\frac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1}$ = $\frac{7 - 4}{5 - 3}$ = $\frac{3}{2}$

معادلة $\overleftrightarrow{\text{ل}}$: ٣ ص + ٢ س - ٣ = ٠

∴ معادلة $\overleftrightarrow{\text{ل}}$: ص = $\frac{-2}{3}$ س + ١ المعادلة على الصورة ص = م س + ب

∴ ميل $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ = $\frac{-2}{3}$

∵ ميل $\overleftrightarrow{\text{ك}}$ × ميل $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ = $\frac{3}{2} \times \frac{-2}{3}$ = - ١

∴ $\overleftrightarrow{\text{ك}}$ ⊥ $\overleftrightarrow{\text{ل}}$

دورك الآن (٤)

أ إذا كان ميل أب هو $\frac{١}{٤}$ ، جـ د يمرّ بالنقطتَين جـ (٥ ، ٦) ، د (٤ ، ١٠) ، فأثبِت أنّ أب ⊥ جـ د .

ميل جـ د = $\frac{١٠ - ٦}{٤ - ٥}$ = −٤

∴ ميل أب × ميل جـ د = $\frac{١}{٤}$ × (−٤) = −١

∴ أب ⊥ جـ د

ب إذا كان ميل جـ د هو −٣ ، أب معادلته : $\frac{١}{٢}$ ص − $\frac{١}{٦}$ س − ٣ = ٠ ، فابحث فيما إذا كان جـ د ، أب متوازيين أو متعامدَين .

معادلة أب ← $\frac{١}{٢}$ ص = $\frac{١}{٦}$ س + ٣ ، ص = $\frac{١}{٣}$ س + ٦

∴ ميل أب = $\frac{١}{٣}$

∴ ميل أب × ميل جـ د = $\frac{١}{٣}$ × (−٣) = −١

∴ أب // جـ د

عبِّر عن فهمك (٢)

هل كلّ مستقيمَين متعامدَين حاصل ضرب ميلَيهما يساوي −١ ؟ فسِّر إجابتك .

لا ، حيث أنه حاصل ضرب مستقيم يوازي محور السينات والآخر محور الصادات لا يساوي (−١)

تمارين ذاتية :

١ إذا كان ميل أب هو −٢ ، جـ د يمرّ بالنقطتَين جـ (٣ ، ١٠) ، د (٥ ، ٦) ، فأثبِت أنّ أب // جـ د .

ميل جـ د = $\frac{١٠ - ٦}{٣ - ٥}$ = $\frac{٤}{-٢}$ = −٢

∴ ميل أب = ميل جـ د = −٢ ∴ أب // جـ د

٢ إذا كان ميل $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ هو ٤ ، ومعادلة $\overleftrightarrow{\text{ك}}$: ص − ٤ س − ٦ = ٠ ، فأثبِت أنّ المستقيمَين متوازيان .

معادلة ك ← ص = ٤ س + ٦

∴ ميل ك = ٤

∴ ميل ل = ميل ك = ٤

∴ ل // ك

٣ إذا كانت معادلة $\overleftrightarrow{\text{هـ}}$: ص = ٩ س + ٥ ومعادلة $\overleftrightarrow{\text{ن}}$: ٢ ص − ١٨ س − ١ = ٠ ،
فأثبِت أنّ المستقيمَين متوازيان .

ميل هـ = ٩

معادلة ن ← ص = ٩ س + $\frac{١}{٢}$

∴ ميل هـ = ميل ن = ٩

∴ هـ // ن

٤ إذا كان $\overleftrightarrow{\text{ك}}$ يمرّ بالنقطتَين (٤ ، ٧) ، (٩ ، ٤) ، ومعادلة $\overleftrightarrow{\text{ل}}$: ٥ س − ٣ ص − ٦ = ٠ ،
فأثبِت أنّ المستقيمَين متعامدان .

ميل ك = $\frac{٧ - ٤}{٤ - ٩}$ = $\frac{٣}{-٥}$ = − $\frac{٣}{٥}$

معادلة ل ← ٣ ص = ٥ س − ٦ ، ص = $\frac{٥}{٣}$ س − ٢

∴ ميل ل = $\frac{٥}{٣}$

∴ ميل ك × ميل ل = ($-\frac{٣}{٥}$) × $\frac{٥}{٣}$ = −١ ∴ ك ⊥ ل

٥ إذا كان $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ يمرّ بالنقطتَين أ (٢ ، ٥) ، ب (٣ ، ٥) ،
$\overleftrightarrow{\text{جـد}}$ يمرّ بالنقطتَين جـ (٣ ، ٦) ، د (٨ ، ٦) فأثبِت أنّ $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ // $\overleftrightarrow{\text{جـد}}$.

ميل أب = $\frac{٥ - ٥}{٣ - ٢}$ = صفر

ميل جـد = $\frac{٦ - ٦}{٨ - ٣}$ = صفر

∴ ميل أب = ميل جـد = صفر ∴ أب // جـد

٦ إذا كان $\overleftrightarrow{هـ}$ يمرّ بالنقطتَين (٣ ، -٧) ، (٥ ، ٧) ،

$\overleftrightarrow{ل}$ يمرّ بالنقطتَين (٢ ، ٦) ، (٩ ، ٥) ،

فأثبِت أنّ $\overleftrightarrow{هـ} \perp \overleftrightarrow{ل}$.

ميل هـ = $\frac{٧ + ٧}{٥ - ٣} = \frac{١٤}{٢} = ٧$

ميل ل = $\frac{٥ - ٦}{٩ - ٢} = \frac{-١}{٧}$

∴ ميل هـ × ميل ل = ٧ × $(\frac{-١}{٧})$ = -١

∴ هـ ⊥ ل

مهارات تفكير عليا :

اِختر الإجابة الصحيحة .

٧ إذا كان $\overleftrightarrow{ل_١}$ ميله $\frac{أ}{٤}$ ، $\overleftrightarrow{ل_٢}$ ميله $\frac{-ب}{٣}$ ، حيث أ ≠ ٠ ، ب ≠ ٠ وكان $\overleftrightarrow{ل_١} \perp \overleftrightarrow{ل_٢}$ ،

فإنّ أ ب = ...

(أ) ١٢ (ب) -١٢ (ج) $\frac{٣}{٤}$ (د) $-\frac{٣}{٤}$

٨ في المستوى الإحداثي إذا كانت أ (١ ، ٧) ، ب (٢ ، ٤) ، جـ (٥ ، ص) ، تمثّل رؤوس مثلّث قائم الزاوية في ب ، فإنّ قيمة ص تساوي :

(أ) -٥ (ب) -٣ (ج) ٥ (د) ٣

٦ ـ ٣ حلّ معادلتَين خطّيتَين في متغيّرَين آنيًّا

Solving Two Linear Equations in Two Variables Simultaneously

سوف تتعلّم : حلّ معادلتَين خطّيتَين (من الدرجة الأولى) في متغيّرَين آنيًّا .

العبارات والمفردات :

معادلة خطّية Linear Equation آنيًّا Simultaneous

الصورة العامّة لمعادلة مستقيم هي : ﺃ س + ب ص + جـ = ٠ حيث ﺃ ، ب ، جـ ∈ ح ؛ ﺃ ، ب لا يساويان الصفر معًا .

أوّلًا : حلّ معادلتَين خطّيتَين آنيًّا بيانيًّا

حُلّ وناقِش

تعلم أنّ حلّ المعادلة هو إيجاد قِيَم المتغيّر التي تحقّق صحّة المعادلة .

أكمِل الجدول التالي :

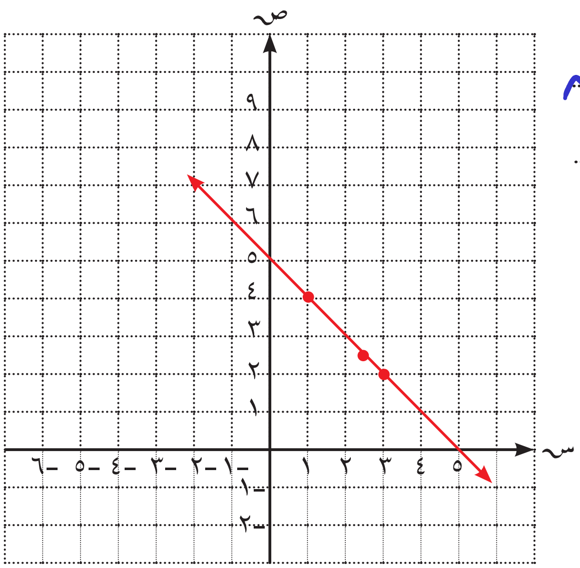
المعادلة	نوعها	عدد الحلول
س + ٢ = ٧	معادلة من الدرجة الأولى في متغيّر واحد	حلّ وحيد
س^{٢} − ٤ = ٠	معادلة من الدرجة الثانية في متغيّر واحد	حلان

لتكن المعادلة : ص + س = ٥

- **ما نوعها ؟** معادلة من الدرجة الأولى في متغيرين
- **كم تتوقّع عدد الحلول لها ؟** عدد لا نهائي
- **أُذكر بعض هذه الحلول :** (٣ ، ٢) ، (٤ ، ١) ، (٢$\frac{١}{٢}$ ، ٢$\frac{١}{٢}$) ، (٢ ، ٣)

يوضّح الشكل المقابِل بيان الدالّة الخطّية : ص + س = ٥

لاحِظ أنّ جميع النقاط الواقعة على بيان الخطّ المستقيم هي حلول للمعادلة : ص + س = ٥



- على الشبكة البيانية نفسها من الصفحة السابقة ،
أُرسم بيان الدالّة الخطّيّة : ص = س + ١

ص = س + ١			
س	−١	٠	٢
ص	٠	١	٣

لاحِظ أنّ الأزواج المرتَّبة (س ، ص) في الجدول هي
بعض حلول المعادلة : ص = س + ١
وهي النقاط التي تساعدنا على رسم بيان الدالّة الخطّيّة .

- **هل يوجد حلّ مشترَك يحقّق المعادلتَين معًا ؟** نعم

الحلّ الذي يحقّق المعادلتَين في آن واحد هو : (٢ ، ٣) وهو نقطة تقاطع المستقيمَين .

- حلّ معادلتَين خطّيتَين من الدرجة الأولى في متغيّرَين آنيًّا بيانيًّا هو الحلّ المشترَك (س ، ص) وهو نقطة تقاطع بيانَي الدّالتَين الخطّيتَين .

وبالتالي تكون { (٢ ، ٣) } هي مجموعة الحلّ التي تحقّق المعادلتَين في **آن واحد** .

مثال (١) :

أوجِد مجموعة حلّ المعادلتَين آنيًّا بيانيًّا :

ص − س + ٣ = ٠ ص + س = ٥

الحلّ :

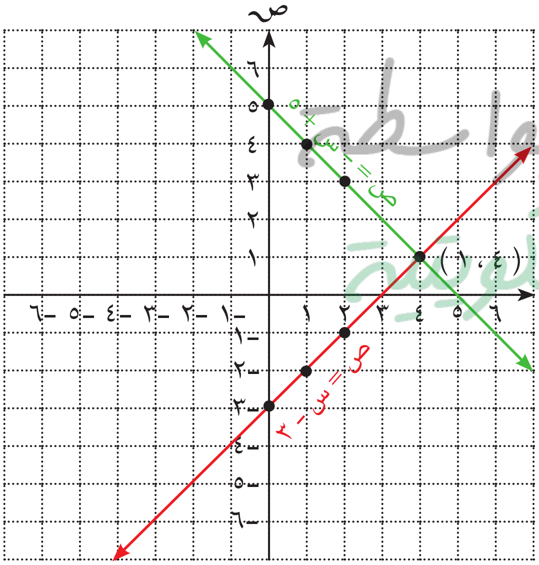
- نكتب معادلتَي المستقيمَين على الصورة :

ص = س − ٣ ص = − س + ٥

- نرسم بيان المستقيمَين :

ص = س − ٣			
س	٠	١	٢
ص	−٣	−٢	−١

ص = − س + ٥			
س	٠	١	٢
ص	٥	٤	٣



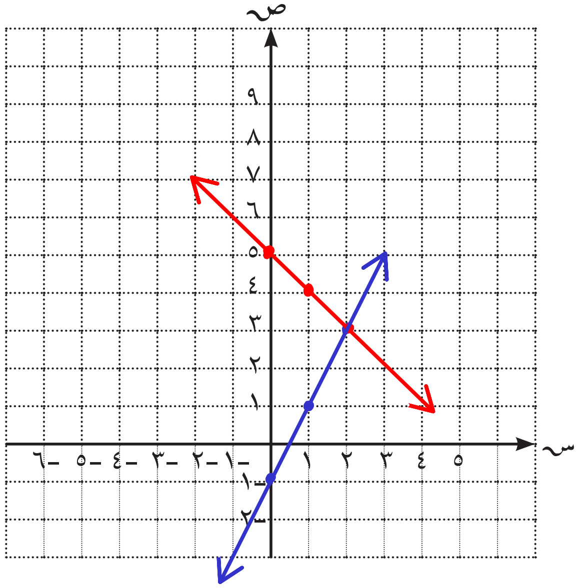
نلاحظ أنّ المستقيمَين تقاطعا في النقطة (٤ ، ١) (تحقَّق بالتعويض في كلّ من معادلتَي المستقيم)

∴ مجموعة الحلّ = { (٤ ، ١) }

دورك الآن (١)

أوجِد مجموعة حلّ المعادلتَين آنيًّا بيانيًّا :

ص = ٢ س − ١ ، ص = − س + ٥



ص = ٢ س − ١			
س	٠	١	٢
ص	١−	١	٣

ص = − س +٥			
س	٠	١	٢
ص	٥	٤	٣

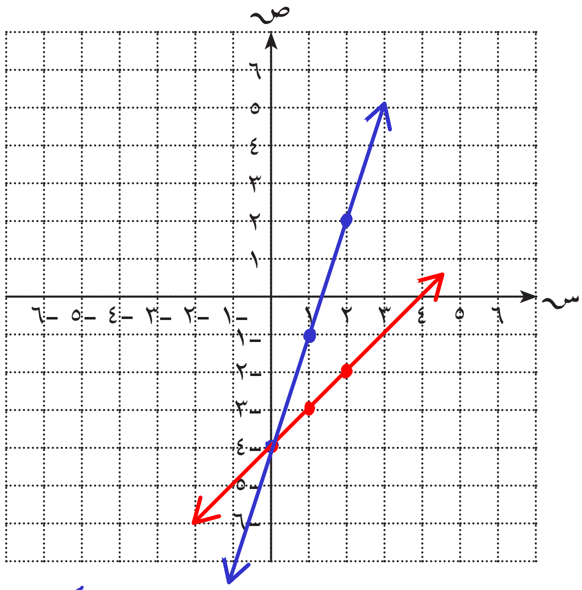
∴ مجموعة الحلّ = { (٢ ، ٣) }

تحقَّق بالتعويض في كلّ من معادلتَي المستقيمَين .

دورك الآن (٢)

أوجِد مجموعة حلّ المعادلتَين آنيًّا بيانيًّا :

ص − ٣ س + ٤ = ٠ ، ص − س = −٤



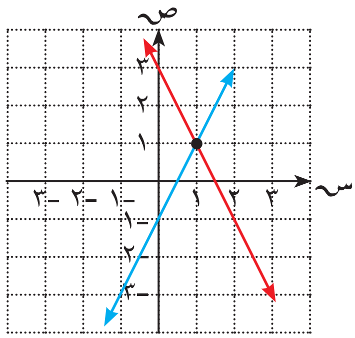
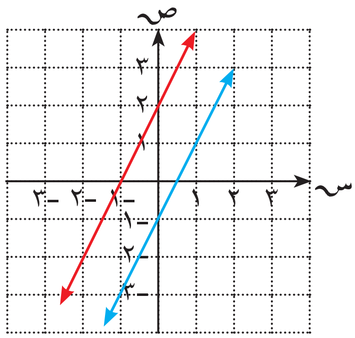
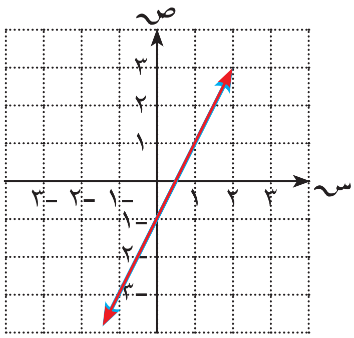
ص = ٣س −٤			
س	٠	١	٢
ص	٤−	١−	٢

ص = س −٤			
س	٠	١	٢
ص	٤−	٣−	٢−

∴ مجموعة الحلّ = { (٠ ، ٤−) }

تحقَّق بالتعويض في كلّ من معادلتَي المستقيمَين .

ربط الأفكار

المثال	$\begin{cases} ص = ٢ س - ١ \\ ص = -٢ س + ٣ \end{cases}$	$\begin{cases} ص = ٢ س - ١ \\ ص = ٢ س + ٢ \end{cases}$	$\begin{cases} ص = ٢ س - ١ \\ ٢ ص = ٤ س - ٢ \end{cases}$
التمثيل البياني			
وضع المستقيمَين	متقاطعان	متوازيان وغير منطبقَين	منطبقان
مجموعة الحلّ	{(١ ، ١)}	∅	جميع نقاط المستقيم
الملاحظات	الميلان مختلفان الجزء المقطوع من محور الصادات مختلف	الميلان متساويان الجزء المقطوع من محور الصادات مختلف	الميلان متساويان (لماذا) ؟ الجزء المقطوع من محور الصادات متساوٍ (لماذا) ؟
عدد الحلول	حلّ وحيد	صفر	عدد لا نهائي من الحلول

عبِّر عن فهمك

تقول ساره : « إذا كان للمعادلتَين قيمة الجزء المقطوع نفسه من محور الصادات ، يكون للمعادلتَين عدد لا نهائي من الحلول » هل هي على صواب ؟ وضِّح إجابتك .

لا ، حيث يجب أيضًا أن يكون ميلا المعادلتين متساوٍ

ثانيًّا : حلّ معادلتَين خطّيتَين آنيًّا جبريًّا

يمكن حلّ معادلتَين خطّيتَين آنيًّا جبريًّا بطريقتَين (الحذف أو التعويض) .

• **طريقة الحذف**

مثال (٢) :

اِستخدِم طريقة الحذف لإيجاد مجموعة حلّ المعادلتَين آنيًّا :

ص − س + ٣ = ٠ ، ص + س = ٥

الحلّ :

ص − س = −٣ (١) رتِّب المعادلتَين

ص + س = ٥ (٢)

اِجمع المعادلتَين (١) ، (٢)

٢ ص = ٢

$\frac{1}{\cancel{2}} \times \cancel{2}$ ص $= \cancel{2} \times \frac{1}{\cancel{2}}$

$\boxed{\text{ص} = ١}$

ص + س = ٥ اِختر إحدى المعادلتَين ولتكن المعادلة (٢)

١ + س = ٥ عوِّض عن ص بالعدد ١

١ − ١ + س = ٥ − ١

$\boxed{\text{س} = ٤}$

∴ مجموعة الحلّ = { (٤ ، ١) } (تحقَّق من صحّة الحلّ)

تحقَّق من الحلّ بيانيًّا بالرجوع إلى «مثال (١)» السابق صفحة ١٠٣ .

لاحِظ أنّ

تعتمد طريقة الحذف على : حذف أحد المتغيّرَين وحساب قيمة الآخر .

لاحِظ أنّ

معاملات المتغيّر س في المعادلتَين أحدهما معكوس جمعي للآخر ، إذًا نجمع المعادلتَين .

اِنتبِه

يجب كتابة الإحداثي السيني أوّلًا في مجموعة الحلّ { (س ، ص) }

دورك الآن (٣)

اِستخدِم طريقة الحذف لإيجاد مجموعة حلّ المعادلتَين آنيًّا :

٢ س + ٣ ص = ١١ ، −٢ س + ٤ ص = ١٠

٢س + ٣ص = ١١

−٢س + ٤ص = ١٠ بجمع المعادلتين :

٠ + ٧ص = ٢١ ∴ ص = ٢١/٧ = ٣

بالتعويض في المعادلة ٢س + ٣ص = ١١ ∴ ٢س + ٩ = ١١ ، س = ١

∴ مجموعة الحل = { (١ ، ٣) }

مثال (٣) :

أوجِد مجموعة الحلّ للمعادلتَين الخطّيتَين آنيًّا جبريًّا باستخدام طريقة الحذف :

٨ س + ٣ ص = ٥ ، ٢ س + ص - ١ = ٠

الحلّ :

٨ س + ٣ ص = ٥ (١)
٢ س + ص = ١ (٢)
نرتّب المعادلتَين

٨ س + ٣ ص = ٥
٦ س + ٣ ص = ٣
الضرب في العدد ٣

٨ س + ٣ ص = ٥
− ٦ س + ٣ ص = ٣
―――――――
٢ س = ٢

نلاحظ تساوي معاملات المتغيّر ص ، إذًا نطرح المعادلتَين .

$\frac{1}{\cancel{2}} \times \cancel{2}$ س $= \cancel{2} \times \frac{1}{\cancel{2}}$
حلّ المعادلة

$\boxed{\text{س} = 1}$

بالتعويض بقيمة س في المعادلة (٢)

٢ س + ص = ١

٢ × (١) + ص = ١

٢ - ٢ + ص = ١ - ٢

$\boxed{\text{ص} = -1}$

∴ مجموعة الحلّ = { (١ ، -١) } (تحقَّق من صحّة الحلّ)

لاحِظ أنّ

معاملات المتغيّر س مختلفة في المعادلتَين وكذلك معاملات المتغيّر ص . لذا ، نحتاج إلى إجراء عملية الضرب لتوحيد معاملات أحد المتغيّرَين .

اِنتبِه

عملية الطرح هي عملية جمع المعكوس الجمعي .

• **طريقة التعويض**

مثال (٤) :

حُلّ المعادلتَين الخطّيتَين آنيًّا جبريًّا بطريقة التعويض :

ص − س = −٣ ، ص + س = ٥

الحلّ :

ص − س = −٣ (١)
ص + س = ٥ (٢)

من المعادلة (١)

ص = س − ٣ (٣) أُكتب ص بدلالة س

بالتعويض عن قيمة ص في المعادلة (٢)

(س − ٣) + س = ٥ اِجمع الحدود المتشابهة

٢ س − ٣ = ٥

٢ س − ٣ + ٣ = ٥ + ٣ حلّ المعادلة

١/~~٢~~ × ~~٢~~ س = ~~٨~~ ٤ × ١/~~٢~~

$\boxed{\text{س = ٤}}$

بالتعويض عن قيمة س في المعادلة (٣)

ص = ٤ − ٣

$\boxed{\text{ص = ١}}$

∴ مجموعة الحلّ = { (٤ ، ١) } (تحقَّق من صحّة الحلّ)

تحقَّق من الحلّ بيانيًّا بالرجوع إلى «مثال (١)» السابق صفحة ١٠٣

لاحِظ أنّ

تعتمد طريقة التعويض على إيجاد متغيّر بدلالة الآخر من إحدى المعادلتَين .

ملاحظة : يمكنك إيجاد مجموعة حلّ معادلتَين خطّيتَين آنيًّا بعدّة طرق منها :

١ بيانيًّا
٢ جبريًّا
أ الحذف
ب التعويض

(اِلتزِم بالطريقة التي تُحدَّد لك في رأس السؤال) .

مثال (٥) :

إِستخِدم طريقة التعويض لحلّ المعادلتَين الخطّيتَين آنيًا :

ص − ٣ س + ٤ = ٠ ، ص − س = −٤

الحلّ :

ص − ٣ س + ٤ = ٠ (١)
ص − س = −٤ (٢)

ص = س − ٤ (٣) أُكتب ص بدلالة س من المعادلة (٢)

بالتعويض عن قيمة ص في المعادلة (١)

(س − ٤) − ٣ س + ٤ = ٠ إِجمع الحدود المتشابهة

−٢ س = ٠

س = ٠

عوِّض عن قيمة س بالعدد ٠ بالمعادلة (٣)

ص = ٠ − ٤

ص = −٤

∴ مجموعة الحلّ = { (٠ ، −٤) } (تحقّق من صحّة الحلّ)

دورك الآن (٤)

إِستخدِم طريقة التعويض لحلّ المعادلتَين الخطّيتَين آنيًا : س − ٢ ص = ٣ ، ٥ ص − ٤ س = ٦

س − ٢ ص = ٣ ـــ(١) بالضرب في ٤
∴ ٤ س − ٨ ص = ١٢
−٤ س + ٥ ص = ٦ بجمع المعادلتين
−٣ ص = ١٨ ∴ ص = −٦
بالتعويض عن قيمة ص في المعادلة (١)
∴ س − ٢ × (−٦) = ٣ ، س + ١٢ = ٣ ، س = −٩
∴ مجموعة الحل = { (−٩ ، −٦) }

الدرس الثالث

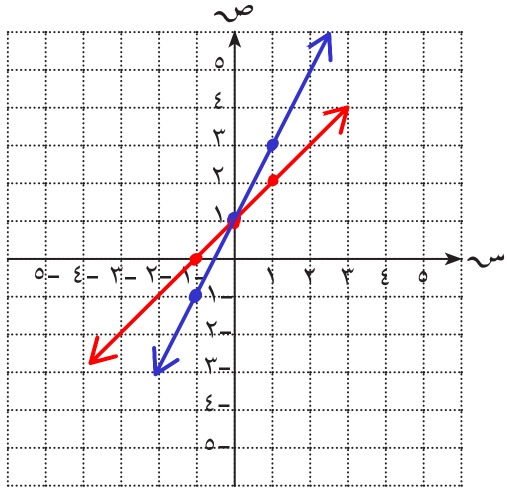
تمارين ذاتية :

١ أوجِد مجموعة حلّ المعادلتَين آنيًّا بيانيًّا :

ص = ٢ س + ١ ، ص = س + ١

ص = ٢س + ١			
س	١	٠	١-
ص	٣	١	١-

ص = س + ١			
س	١	٠	١-
ص	٢	١	٠



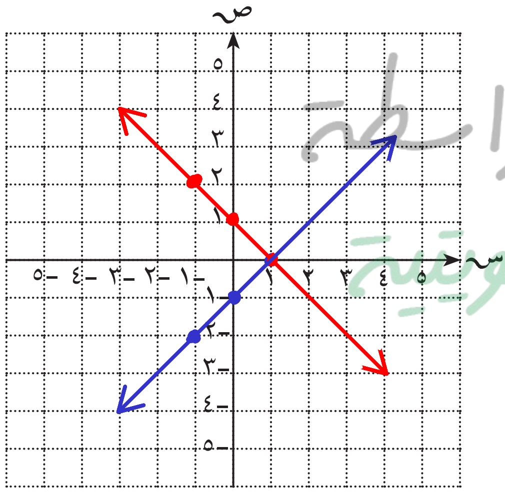
مجموعة الحل = {(٠ ، ١)}

٢ أوجِد مجموعة حلّ المعادلتَين آنيًّا بيانيًّا :

ص = س - ١ ، ص = - س + ١

ص = س - ١			
س	١	٠	١-
ص	٠	١-	٢-

ص = - س + ١			
س	١	٠	١-
ص	٠	١	٢



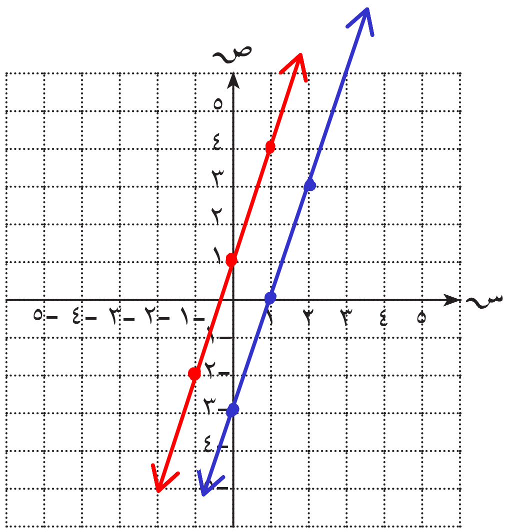
مجموعة الحل = {(١ ، ٠)}

٣ أوجِد مجموعة حلّ المعادلتَين آنيًّا بيانيًّا :

ص = ٣ س - ٣ ، ص = ٣ س + ١

ص = ٣س - ٣			
س	٠	١	٢
ص	٣-	٠	٣

ص = ٣س + ١			
س	٠	١	١-
ص	١	٤	٢-



مجموعة الحل = ϕ

المستقيمان متوازيان

٣ أوجِد مجموعة حلّ المعادلتَين آنيًّا جبريًّا بطريقة الحذف :

س + ص = ٤ ، س − ص = ٢

س + ص = ٤ ← (١)

س − ص = ٢ ← (٢)

بجمع (١)، (٢)

٢س = ٦

∴ س = ٣

بالتعويض بقيمة س في المعادلة (١)

∴ ٣ + ص = ٤

∴ ص = ٤ − ٣ = ١

∴ مجموعة الحل = {(٣، ١)}

٤ أوجِد مجموعة حلّ المعادلتَين آنيًّا جبريًّا بطريقة الحذف :

س + ٥ ص = ٢ ، ٢ س − ٣ ص = − ٩

س + ٥ص = ٢ بالضرب × (−٢)

−٢س − ١٠ص = −٤ ← (١)

٢س − ٣ص = −٩ ← (٢)

بجمع (١)، (٢)

٠ − ١٣ص = −١٣

∴ ص = ١

بالتعويض بقيمة ص في معادلة (٢)

∴ ٢س − ٣ × ١ = −٩

٢س = −٩ + ٣

٢س = −٦

∴ س = −٣

∴ مجموعة الحل = {(−٣، ١)}

٥ أوجِد مجموعة حلّ المعادلتَين آنيًّا جبريًّا بطريقة التعويض :

س = ص ، س + ٢ ص = ٦

س = ص

- س + ص = ٠ ← (١)

س + ٢ص = ٦ ← (٢)

بجمع (١)،(٢)

٠ + ٣ص = ٦

∴ ص = ٢

بالتعويض بقيمة ص في معادلة (١)

∴ - س + ٢ = ٠

∴ س = ٢

∴ مجموعة الحل = {(٢، ٢)}

٦ أوجِد مجموعة حلّ المعادلتَين آنيًّا جبريًّا بطريقة التعويض :

س + ص = ٧ ، ٣ س - ٢ ص = ٦

س + ص = ٧ بالضرب × ٢

∴ ٢س + ٢ص = ١٤

٣س - ٢ص = ٦

بجمع المعادلتين

٥س + ٠ = ٢٠

∴ س = $\frac{٢٠}{٥}$ = ٤

بالتعويض بقيمة س في معادلة

س + ص = ٧

∴ س + ٤ = ٧

س = ٧ - ٤ = ٣

∴ مجموعة الحل = {(٣، ٤)}

اِختر الإجابة الصحيحة لكلّ ممّا يلي :

٧ لتكن المعادلتان : س - $\frac{١}{٢}$ ص = ٤ ، ٢ س - ص = ٢ ، فإنّ عدد حلول المعادلتَين آنيًّا هو :

أ حلّ وحيد ب حلّان ج عدد لا نهائي د صفر

٨ إذا كان المستقيمان الممثِّلان للمعادلتَين : س + ٣ ص = ٤ ، س + ٲ ص = ٧ متوازيَين ،
فإنّ : ٲ = ...

أ ٣ ب ٣- ج $\frac{١}{٣}$ د - $\frac{١}{٣}$

مهارات تفكير عليا :

٩ أوجِد قِيَم ٲ ، جـ التي تجعل للمعادلتَين : ص = ٲ س + ٤ ، ٣ ص = ٣ س + جـ
عددًا لا نهائيًّا من الحلول .

لكي يكون حل المعادلتين لها عدد لا نهائي من الحلول ،

يجب أن يكون المستقيمان متوازيين

∴ ص = ٲ س + ٤ ← (١)

٣ص = ٣ س + جـ بالقسمة على ٣

∴ ص = س + $\frac{جـ}{٣}$ ← (٢)

بمقارنة المعادلة (١) ، (٢)

∴ ٲ = ١

∴ $\frac{جـ}{٣}$ = ٤ ، جـ = ٣ × ٤ = ١٢

∴ ٲ = ١ ، جـ = ١٢

٦ - ٤

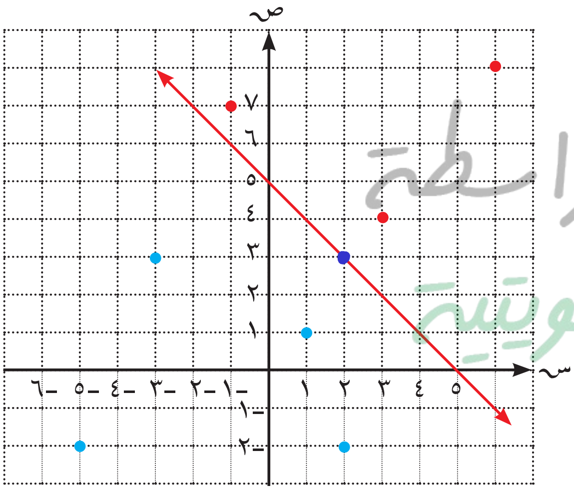
المتباينات الخطّية (منطقة الحلّ المشترَك)
The Graph of Linear Inequalities

سوف تتعلّم : تمثيل منطقة حلّ متباينة ومنطقة الحلّ المشترَك لمتباينتَين من الدرجة الأولى في متغيّرَين بيانيًّا .

العبارات والمفردات :

متباينة خطّية	Linear Inequality	خطّ فاصل (خطّ الحدود)	Boundary Line

حُلّ وناقِش (١)



يوضّح الشكل المقابِل بيان الدالّة الخطّية : س + ص = ٥

سبق وأن علمت أنّ جميع نقاط المستقيم تمثّل حلًّا للمعادلة :
س + ص = ٥

لاحِظ المتباينة س + ص ≤ ٥

- **ما نوعها ؟** متباينة من الدرجة الأولى في متغيرين

١ **هل النقاط في المستوى الإحداثي التي باللون الأزرق تحقّق صحّة المتباينة ؟** لا

٢ **هل النقاط في المستوى الإحداثي الواقعة على الخطّ المستقيم تحقّق صحّة المتباينة ؟** نعم

٣ **هل النقاط في المستوى الإحداثي التي باللون الأحمر تحقّق صحّة المتباينة ؟** نعم

٤ **إِختر نقاطًا أخرى تحقّق صحّة المتباينة ومثّلها في المستوى الإحداثي .** (٢ ، ٣)

نلاحظ أنّ جميع نقاط المستوى الإحداثي الواقعة جهة النقاط الحمراء تحقّق صحّة المتباينة وكذلك جميع نقاط الخطّ المستقيم تحقّق صحّة المتباينة ، ونسمّي ذلك « منطقة الحلّ » لمتباينة من الدرجة الأولى في متغيّرَين .

لاحِظ أنّ المستقيم الذي معادلته س + ص = ٥ قسّم المستوى الإحداثي إلى منطقتَين .

٥ ظلّل المنطقة التي تمثّل حلّ المتباينة : س + ص ≤ ٥

تُعرف منطقة الحلّ لمتباينة من الدرجة الأولى في متغيّرَين على أنّها جميع النقاط (س ، ص) في المستوى الإحداثي التي تحقّق المتباينة .

- إذا كانت المتباينة س + ص > ٥ ، فهل النقاط الواقعة على الخطّ المستقيم تحقّق صحّة المتباينة ؟ لا

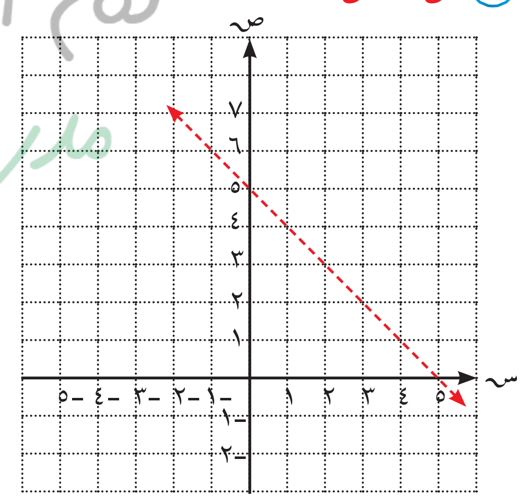
عند إيجاد منطقة الحلّ لمتباينة من الدرجة الأولى في متغيّرَين ، سوف نحتاج إلى رسم خطّ مستقيم يُسمّى خطّ الحدود (أو الخطّ الفاصل) . إذا كانت المتباينة على الصورة :

- أ س + ب ص ≥ جـ أو أ س + ب ص ≤ جـ ، نرسم خطّ الحدود (متّصل)
- أ س + ب ص > جـ أو أ س + ب ص < جـ ، نرسم خطّ الحدود (متقطّع)

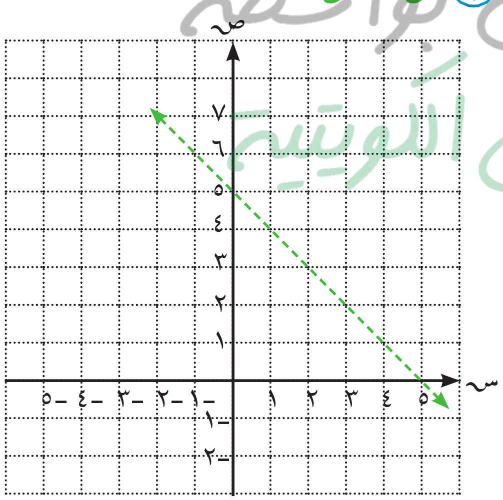
(حيث أ ، ب ، جـ ∈ ح ؛ أ ، ب لا يساويان الصفر معًا)

- ظلّل منطقة الحلّ في كلّ ممّا يلي :

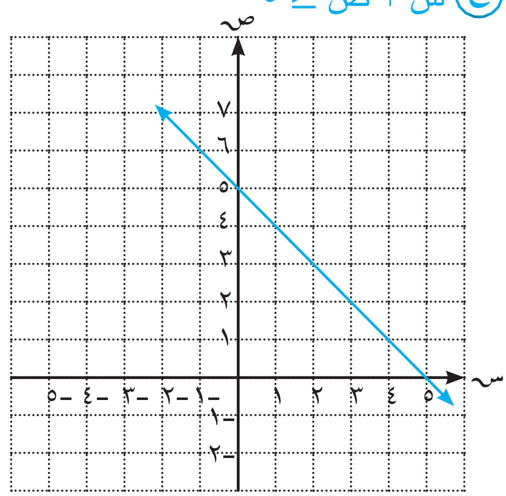
أ س + ص > ٥



ب س + ص < ٥



ج س + ص ≥ ٥



الدرس الرابع

مثال (٢) :

مثِّل بيانيًّا منطقة حلّ المتباينة : ص > ٢ س + ١

الحلّ :

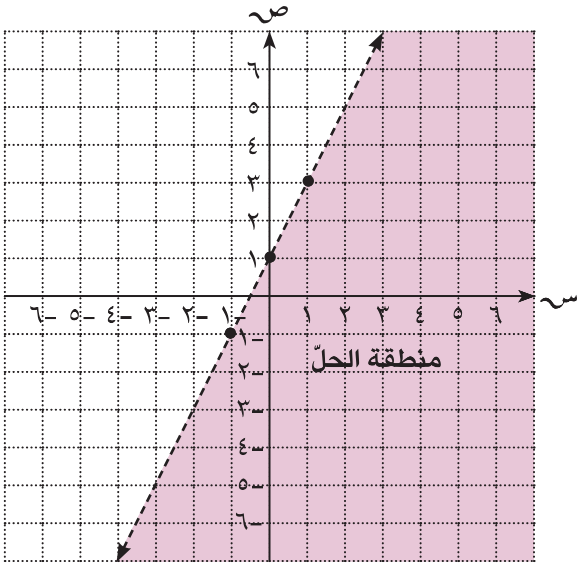
- المعادلة المناظِرة (معادلة خطّ الحدود) هي :
ص = ٢ س + ١
- نكوّن جدولًا لِقِيَم المعادلة المناظِرة :

ص = ٢س + ١			
س	١	٠	١−
ص	٣	١	١−

- نرسم خطّ الحدود (متقطّع)
- نختار نقطة لا تنتمي إلى خطّ الحدود ، ولتكن نقطة الأصل (٠ ، ٠) ونعوّض بها في المتباينة .
- ص > ٢ س + ١
٠ > ١ (عبارة صحيحة)
- إذًا (٠ ، ٠) ∋ منطقة الحلّ
- نظلّل المنطقة التي تنتمي إليها نقطة الأصل ، فتكون منطقة حلّ المتباينة هي جميع النقاط التي تنتمي إلى المنطقة المظلّلة .

لاحِظ أنّ

معادلة خطّ الحدود للمتباينة تُسمّى « المعادلة المناظِرة للمتباينة »



خطوات إيجاد منطقة الحلّ لمتباينة من الدرجة الأولى في متغيّرَين بيانيًّا :

١ نكتب المعادلة المناظِرة للمتباينة (معادلة خطّ الحدود) .

٢ نرسم خطّ الحدود للمتباينة باستخدام الخطّ المتّصل في حالة : ≥ أو ≤ والخطّ المتقطّع في حالة : > أو < .

٣ نختار أيّ نقطة لا تنتمي إلى خطّ الحدود ونعوّض بها في المتباينة ، إذا نتج عبارة صحيحة يكون هذا الجانب هو جانب منطقة الحلّ ، وإذا نتج عبارة غير صحيحة يكون الجانب الآخر هو جانب منطقة الحلّ .

٤ في حالة ≥ ، ≤ تكون منطقة الحلّ هي مجموعة نقاط خطّ الحدود اتّحاد مجموعة نقاط جانب منطقة الحلّ ، وفي حالة > ، < تكون منطقة الحلّ هي مجموعة نقاط جانب منطقة الحلّ فقط .

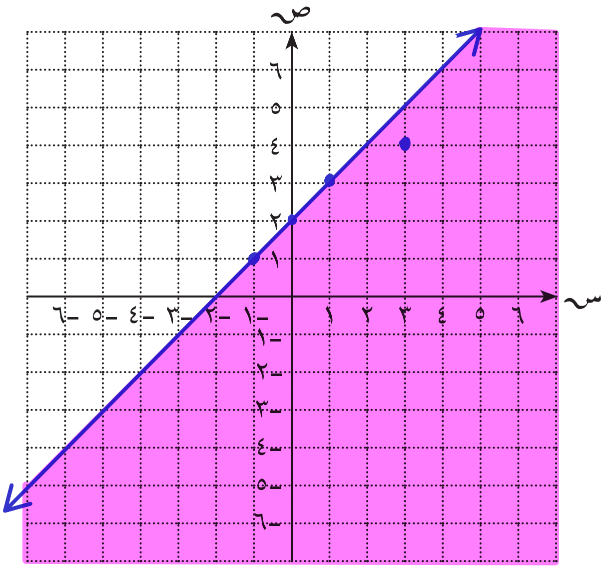
٥ نظلّل المنطقة التي تمثّل منطقة حلّ المتباينة .

لاحِظ أنّ

خطّ الحدود يقسم المستوى الإحداثي إلى منطقتَين .

دورك الآن (١)

مثِّل بيانيًّا منطقة حلّ المتباينة : ص ≥ س + ٢



- **المعادلة المناظِرة : ص =** س + ٢
- **جدول القِيَم :**

ص = س + ٢			
س	١	٠	١−
ص	٣	٢	١

- **أُرسم خطّ الحدود (** متصل **) .**
- **اِختر النقطة (** ٣ **،** ٤ **) لا تنتمي إلى خطّ الحدود .**

عوِّض في المتباينة ص ≥ س + ٢

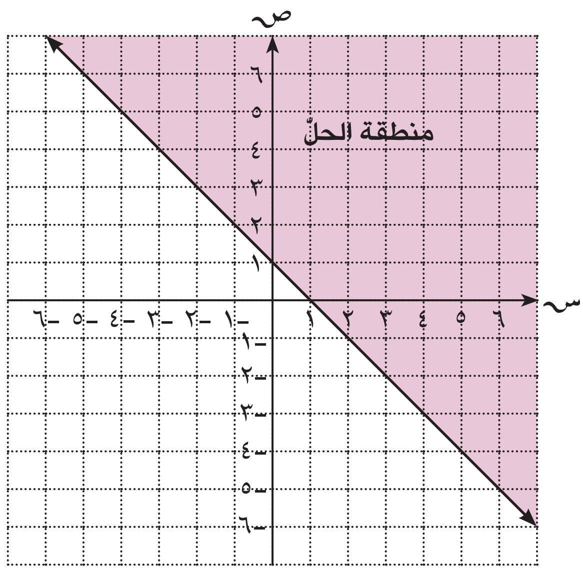
٤ ≥ ٥ **(عبارة** صحيحة **)**

- **ظلِّل منطقة حلّ المتباينة .**

مثال (٢) :

مثِّل بيانيًّا منطقة الحلّ للمتباينة : س + ص ≥ ١

الحلّ :



- المعادلة المناظِرة : ص = ١ − س
- جدول القِيَم :

ص = ١ − س			
س	١	٠	١−
ص	٠	١	٢

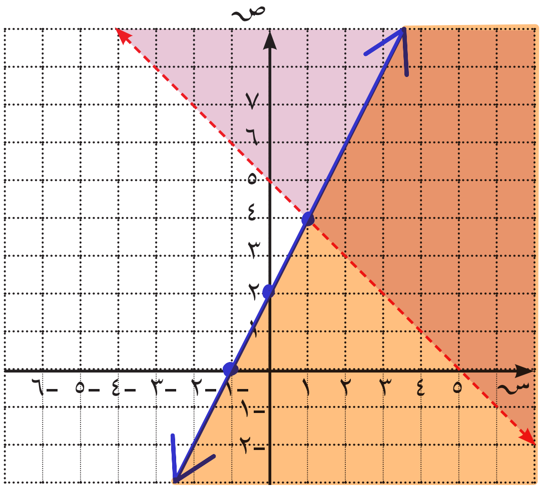
- أُرسم خطّ الحدود (متّصل)
- اِختر النقطة (٠ ، ٠) لا تنتمي إلى خطّ الحدود .

عوِّض في المتباينة ص ≥ ١ − س

٠ ≥ ١ (عبارة غير صحيحة)

- إذًا (٠ ، ٠) ∌ منطقة الحلّ
- ظلِّل منطقة حلّ المتباينة وهي المنطقة التي لا تنتمي إليها النقطة (٠ ، ٠) وجميع نقاط خطّ الحدود .

حُلّ وناقِش (٢)



في الشكل المقابِل : المنطقة المظلَّلة تمثّل حلّ المتباينة :
س + ص > ٥ بيانيًّا

- **على المستوى الإحداثي المقابِل نفسه ، مثِّل بيانيًّا منطقة الحلّ للمتباينة : ص ≥ ٢ س + ٢**
- **المعادلة المناظِرة (معادلة خطّ الحدود) هي :**
  ص = ٢س + ٢
- **كوِّن جدولًا لِقِيَم المعادلة المناظِرة :**

ص = ٢ س + ٢			
س	١	٠	١-
ص	٤	٢	٠

- **أُرسم خطّ الحدود (متصل) .**
- **اِختر النقطة (٠ ، ٠) لا تنتمي إلى خطّ الحدود وعوِّض بها في المتباينة ص ≥ ٢ س + ٢**
- **ظلِّل منطقة حلّ المتباينة : ص ≥ ٢ س + ٢**
  ماذا تلاحظ ؟ هل هناك حلول مشترَكة بين المتباينتَين ؟ نعم

المنطقة التي تمثّل منطقة الحلّ هي تقاطع منطقتَي الحلّ للمتباينتَين (منطقة الحلّ المشترَك)

- **عيِّن على المستوى الإحداثي منطقة الحلّ المشترَك للمتباينتَين .**

تُعرف منطقة الحلّ المشترَك لمتباينتَين من الدرجة الأولى في متغيّرَين بيانيًّا على أنّها : جميع النقاط (س ، ص) في المستوى الإحداثي والتي تحقّق المتباينتَين معًا .

خطوات إيجاد منطقة الحلّ المشترَك لمتباينتَين من الدرجة الأولى في متغيّرَين بيانيًّا :

١ نرسم خطّ الحدود لكلّ متباينة في المستوى الإحداثي نفسه .

٢ نظلّل منطقة الحلّ لكلّ متباينة .

٣ نعيّن منطقة الحلّ المشترَك والتي تتكوّن من جميع النقاط (س ، ص) التي تنتمي إلى منطقة تقاطع منطقتَي حلّ المتباينتَين .

مثال (٣) :

مثِّل بيانيًّا منطقة الحلّ المشترَك للمتباينتَين التاليتَين :

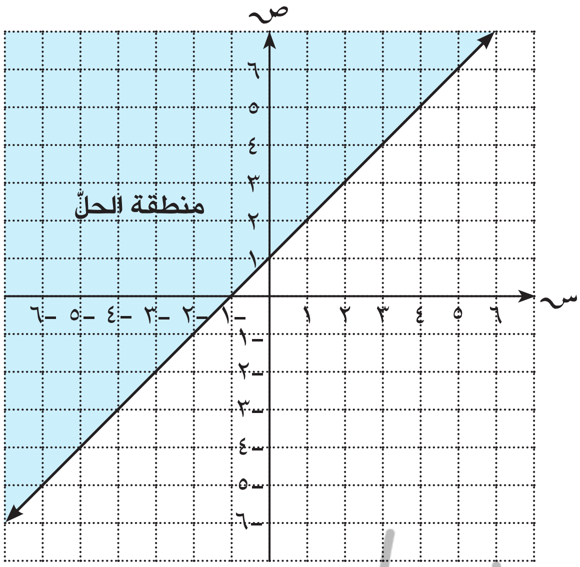
ص ≤ س + ١

ص > ٢ - س

الحلّ :

أوّلًا : مثِّل منطقة حلّ المتباينة ص ≤ س + ١ بيانيًّا

المعادلة المناظِرة ص = س + ١



كوِّن جدول القِيَم :

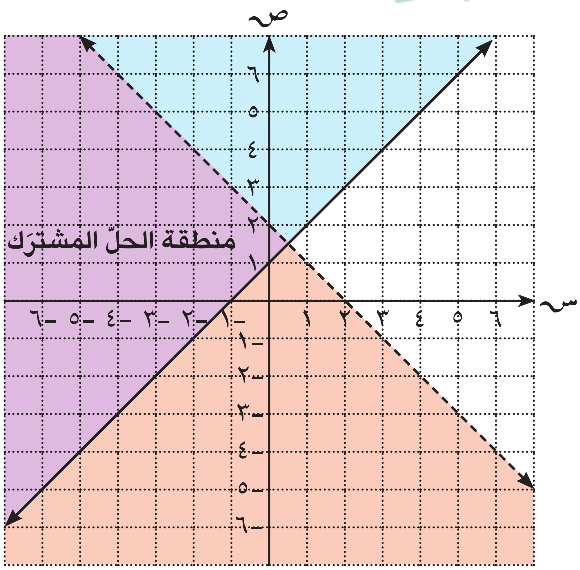
س	١	٠	-١
ص	٢	١	٠

- أُرسم خطّ الحدود متّصلًا
- اِختر نقطة لا تنتمي إلى خطّ الحدود ولتكن نقطة الأصل (٠ ، ٠)
  ونعوّض بها في المتباينة ٠ ≤ ٠ + ١
  ٠ ≤ ١ (عبارة غير صحيحة) ، إذًا (٠ ، ٠) ∉ منطقة الحلّ

لذلك ، ظلِّل الجانب الآخر من الرسم والذي يمثّل منطقة حلّ المتباينة .

ثانيًا : مثِّل منطقة حلّ المتباينة ص > ٢ - س بيانيًّا

المعادلة المناظِرة ص = ٢ - س



كوِّن جدول القِيَم :

س	١	٠	-١
ص	١	٢	٣

- أُرسم خطّ الحدود متقطّعًا .
- اِختر نقطة لا تنتمي إلى خطّ الحدود ، ولتكن نقطة الأصل (٠ ، ٠) ونعوّض بها في المتباينة ٠ > ٢ - ٠
  ٠ > ٢ (عبارة صحيحة)
- إذًا (٠ ، ٠) ∈ منطقة الحلّ

لذلك ، ظلِّل الجانب الذي يحوي نقطة الأصل والذي يمثّل منطقة حلّ المتباينة .

المنطقة التي تمثّل منطقة الحلّ هي تقاطع منطقتَي الحلّ للمتباينتَين (منطقة الحلّ المشترَك)

دورك الآن (٢)

مثِّل بيانيًّا منطقة الحلّ المشترَك للمتباينتَين :

ص > ٣ س − ١

• المعادلة المناظِرة

ص = ٣س − ١

• جدول القِيَم :

ص = ٣س − ١			
س	١	٠	−١
ص	٢	−١	−٤

• أُرسم خطّ الحدود (متقطع) .

• عوِّض بالنقطة (٢ ، ٤)

٤ < ٥

عبارة صحيحة

ص > س − ١

• المعادلة المناظِرة

ص = س − ١

• جدول القِيَم :

ص = س − ١			
س	١	٠	−١
ص	٠	−١	−٢

• أُرسم خطّ الحدود (متقطع) .

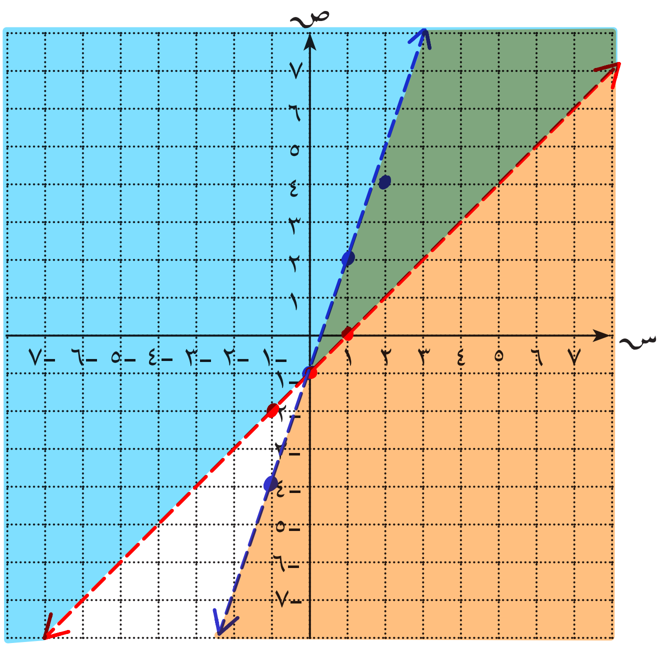
• عوِّض بالنقطة (٢ ، ٤)

٤ < ١

عبارة صحيحة

• ظلِّل منطقة الحلّ لكلّ من المتباينتَين .

• عيِّن على الرسم منطقة الحلّ المشترَك .



دورك الآن (٣)

مثِّل بيانيًّا منطقة الحلّ المشترَك للمتباينتَين :

ص > س ، ص ≤ ٤

ص > س

المعادلة المناظرة ← ص = س

ص = س			
س	١	٠	١-
ص	١	٠	١-

خط الحدود متقطع

نعوض بالنقطة (٢ ، ٣)

٣ > ٢

العبارة غير صحيحة

∴ النقطة (٢، ٣) ∉ منطقة الحل

ص ≤ ٤

المعادلة المناظرة ← ص = ٤

ص = ٤			
س	١	٠	١-
ص	٤	٤	٤

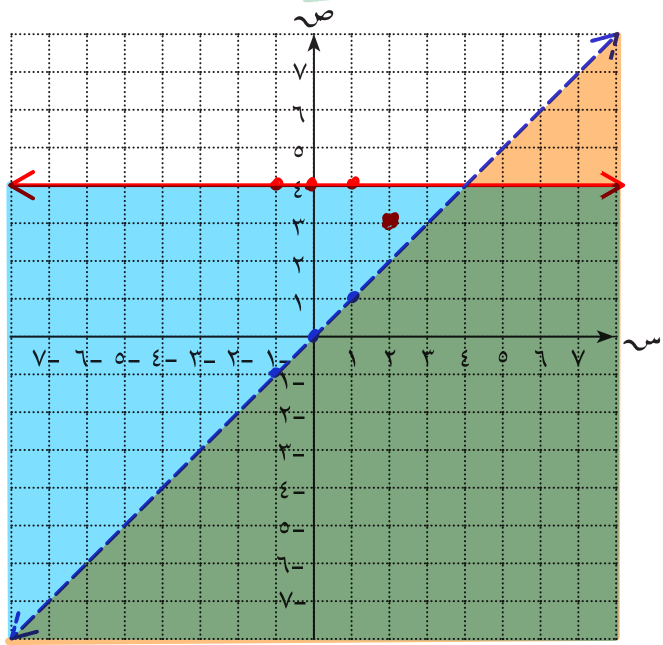
خط الحدود متصل

نعوض بالنقطة (٢ ، ٣)

٣ ≤ ٤

العبارة صحيحة

∴ النقطة (٢، ٣) ∈ منطقة الحل.



عبِّر عن فهمك

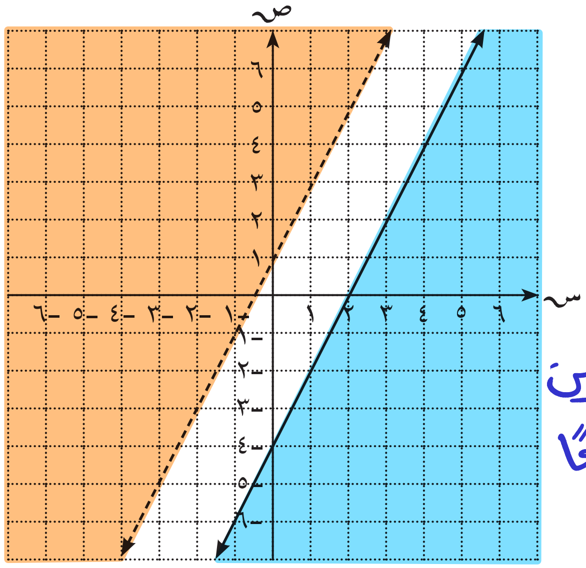
ظلِّل في الشكلِ المقابِل منطقة الحلّ لكلّ من المتباينتَين :

ص > ٢ س + ١

ص ≥ ٢ س − ٤

ماذا تلاحظ ؟

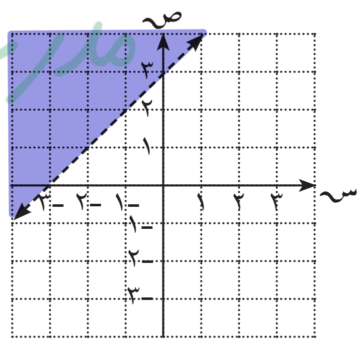
ألاحظ أن منطقة حل المتباينتين تساوي ∅ لأنهما يتقاطعا معًا



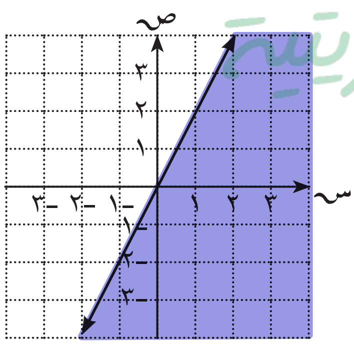
تمارين ذاتية :

١ ظلِّل منطقة حلّ كلّ متباينة في ما يلي :

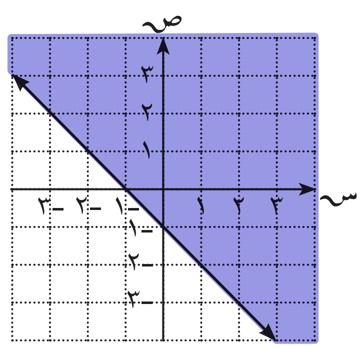
أ ص > س + ٣



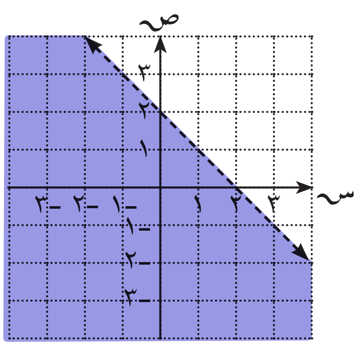
ب ص ≥ ٢ س

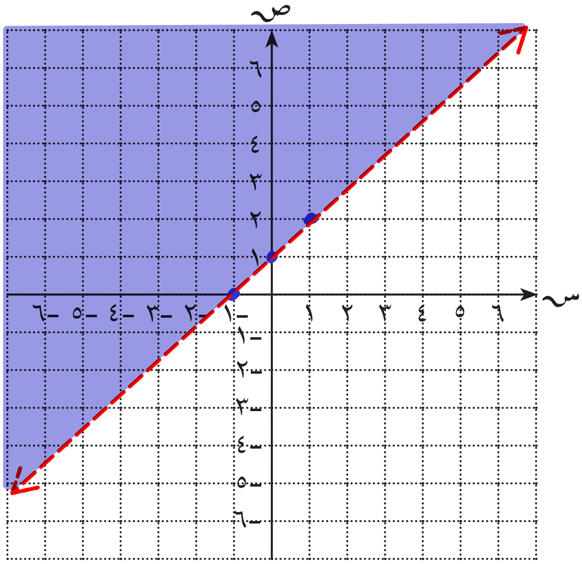


ج ص ≤ − س − ١



د ص < ٢ − س





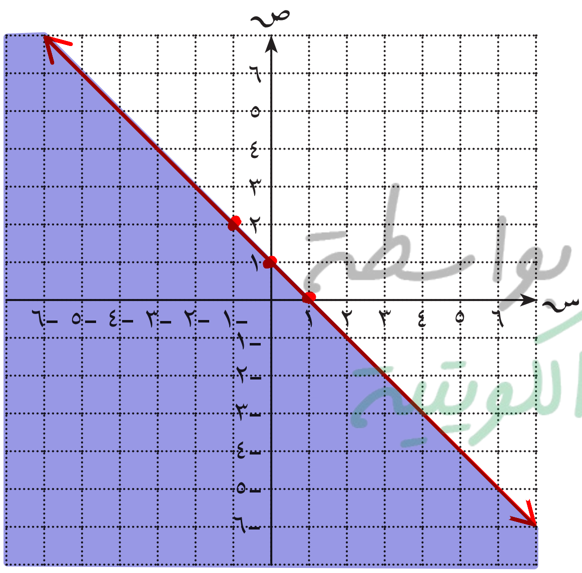
٢ مثِّل بيانيًّا منطقة الحلّ للمتباينة :

ص > س + ١

المعادلة المناظرة ← ص = س + ١

ص = س + ١			
س	١	٠	-١
ص	٢	١	٠

خط الحدود متقطع



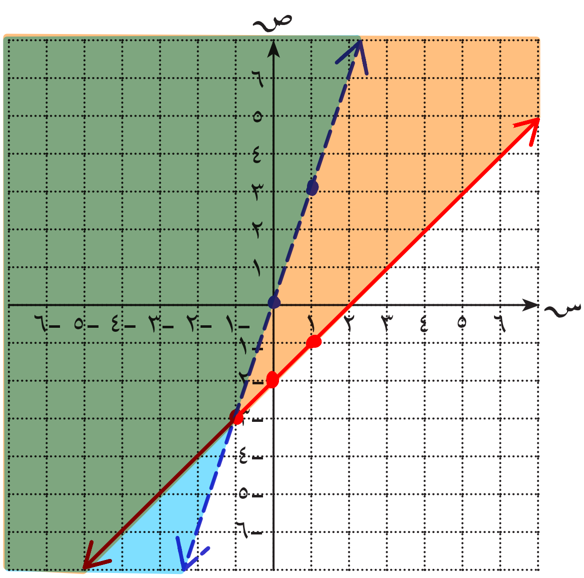
٣ مثِّل بيانيًّا منطقة الحلّ للمتباينة :

ص ≥ ١ - س

المعادلة المناظرة ← ص = ١ - س

ص = ١ - س			
س	١	٠	-١
ص	٠	١	٢

خط الحدود متصل



٤ مثِّل بيانيًّا منطقة الحلّ المشترَك للمتباينتَين :

ص > ٣س ، ص ≤ س - ٢

ص = ٣س

ص = ٣س			
س	١	٠	-١
ص	٣	٠	-٣

خط الحدود متقطع

ص = س - ٢

ص = س - ٢			
س	١	٠	-١
ص	-١	-٢	-٣

خط الحدود متصل

٥ مثِّل بيانيًّا منطقة الحلّ المشترَك للمتباينتَين :

ص > ٢ س - ١ ، ص ≤ -١

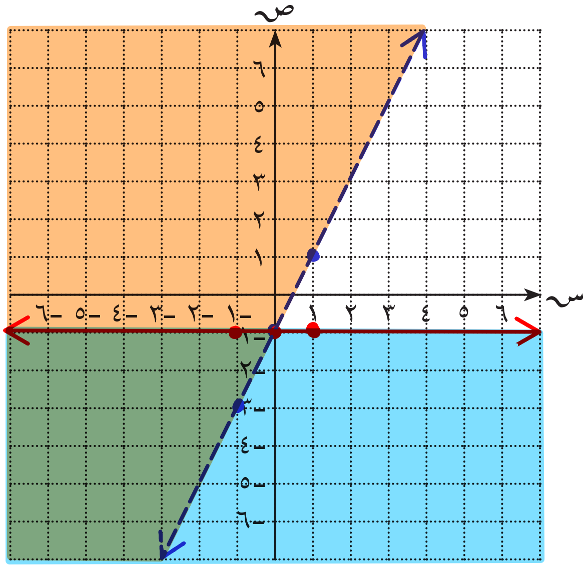
ص = ٢ س - ١ | ص = -١

ص = ٢ س - ١			
س	١	٠	-١
ص	١	-١	-٣

خط الحدود متقطع

ص = -١			
س	١	٠	-١
ص	-١	-١	-١

خط الحدود متصل



٦ مثِّل بيانيًّا منطقة الحلّ المشترَك للمتباينتَين :

ص ≥ ٢ س - ٣ ، ص < ٢ س + ١

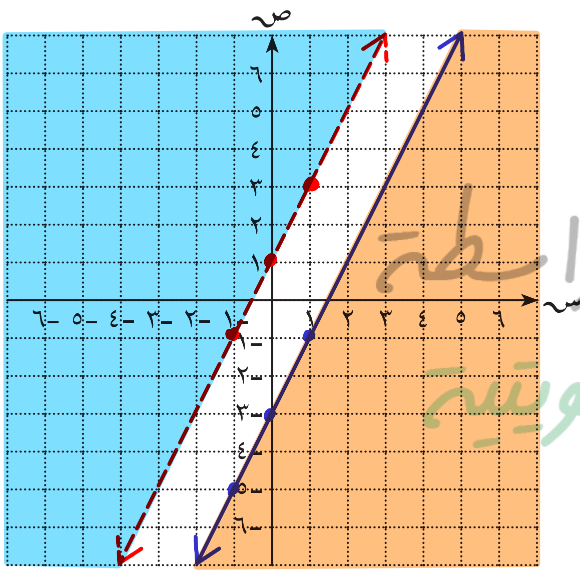
ص = ٢ س - ٣ | ص = ٢ س + ١

ص = ٢ س - ٣			
س	١	٠	-١
ص	-١	-٣	-٥

خط الحدود متصل

ص = ٢ س + ١			
س	١	٠	-١
ص	٣	١	-١

خط الحدود متقطع



٧ مثِّل بيانيًّا منطقة الحلّ المشترَك للمتباينتَين :

ص ≤ -س + ١ ، ص ≥ ٣ س + ١

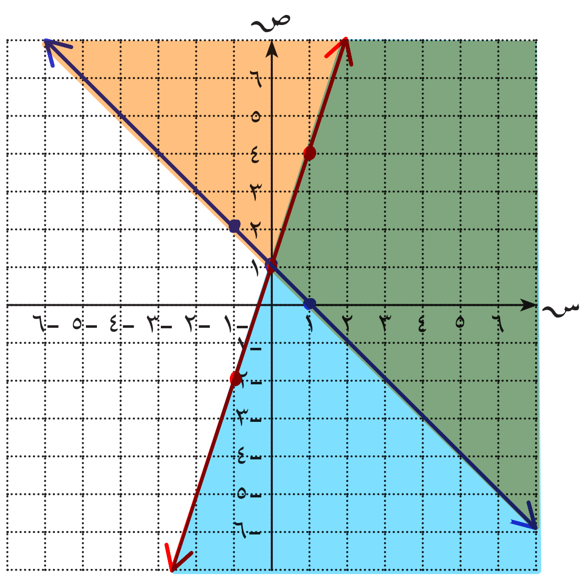
ص = -س + ١ | ص = ٣ س + ١

ص = - س + ١			
س	١	٠	-١
ص	٠	١	٢

خط الحدود متصل

ص = ٣ س + ١			
س	١	٠	-١
ص	٤	١	-٢

خط الحدود متصل



أوّلاً : البنود المقالية

١ أوجِد ميل المستقيم المارّ بالنقطتَين في كلّ من الحالات التالية :

أ (٢ ، ٥) ، (٣ ، −٤)

الميل = $\frac{٥+٤}{٢-٣}$ = $\frac{٩}{-١}$ = −٩

ب (−٣ ، ٦) ، (٥ ، ٠)

الميل = $\frac{٦-٠}{-٣-٥}$ = $\frac{٦}{-٨}$ = $-\frac{٣}{٤}$

ج (٢ ، ٤) ، (٥ ، ٤)

الميل = $\frac{٤-٤}{٥-٢}$ = $\frac{٠}{٣}$ = ٠

يوازي محور الصادات

د (−٣ ، ٠) ، (٠ ، −٤)

الميل = $\frac{٠+٤}{-٣-٠}$ = $-\frac{٤}{٣}$

٢ أوجِد الميل والجزء المقطوع من محور الصادات والجزء المقطوع من محور السينات لكلّ من المستقيمات التالية :

أ ص = ٤ س + ٩

الميل = ٤

الجزء المقطوع من محور الصادات = ٩

الجزء المقطوع من محور السينات = $-\frac{٩}{٤}$

ب ٢ ص = ٤ س + ٥

الميل = ٢

الجزء المقطوع من محور الصادات = $\frac{٥}{٢}$

الجزء المقطوع من محور السينات = $-\frac{٥}{٤}$

ج ٣ س + ٥ ص = ١

الميل = $-\frac{٣}{٥}$

الجزء المقطوع من محور الصادات = $\frac{١}{٥}$

الجزء المقطوع من محور السينات = $\frac{١}{٣}$

د ٥ س + ٦ ص − ٢ = ٠

الميل = $-\frac{٥}{٦}$

الجزء المقطوع من محور الصادات = $\frac{١}{٣}$

الجزء المقطوع من محور السينات = $\frac{٢}{٥}$

٣ حدِّد المستقيمات المتوازية والمستقيمات المتعامدة في كلّ من الحالات التالية :

أ $\overleftrightarrow{\text{هـ}}$ الذي يمرّ بالنقطتَين (٢ ، ٤) ، (٥ ، ١٠)

$\overleftrightarrow{\text{و}}$ الذي معادلته : ٢ ص − ٤ س + ٥ = ٠

ميل هـ = $\frac{\text{١٠ − ٤}}{\text{٥ − ٢}}$ = $\frac{\text{٦}}{\text{٣}}$ = ٢

ميل و = $\frac{\text{٤}}{\text{٢}}$ = ٢

∴ ميل هـ = ميل و ∴ هـ // و (المستقيمان متوازيان)

ب $\overleftrightarrow{\text{ك}}$ الذي يمرّ بالنقطتَين (٢ ، ٤) ، (٥ ، ٧)

$\overleftrightarrow{\text{ل}}$ الذي يمرّ بالنقطتَين (٣ ، ٥) ، (٢ ، ٦)

ميل ك = $\frac{\text{٧ − ٤}}{\text{٥ − ٢}}$ = $\frac{\text{٣}}{\text{٣}}$ = ١

ميل ل = $\frac{\text{٦ − ٥}}{\text{٢ − ٣}}$ = $\frac{\text{١}}{\text{−١}}$ = −١

∴ ميل ك × ميل ل = −١ ∴ ك ⊥ ل (المستقيمان متعامدان)

٤ أوجِد مجموعة حلّ المعادلتَين آنيًّا جبريًّا :

ص = س − ٣ ، ص − ٢ س = −٣

ص − س = −٣ ← (١)

ص − ٢ س = −٣ ← (٢)

بطرح (٢) من (١)

∴ ٠ − − س = ٠

∴ س = ٠

بالتعويض في معادلة (١)

∴ ص − ٠ = −٣

∴ ص = −٣

∴ مجموعة الحل = {(٠ ، −٣)}

٥ أوجِد مجموعة حلّ المعادلتَين آنيًّا جبريًّا :

ص + ٢ س − ٤ = ٠ ، ص − س = −٢

ص + ٢ س = ٤ ← (١)

ص − س = −٢ ← (٢)

بطرح (٢) من (١)

∴ ٠ + ٣ س = ٦

∴ س = $\frac{\text{٦}}{\text{٣}}$ = ٢

بالتعويض في معادلة (٢)

∴ ص − ٢ = −٢

∴ ص = ٢ − ٢ = ٠

∴ مجموعة الحل = {(٢ ، ٠)}

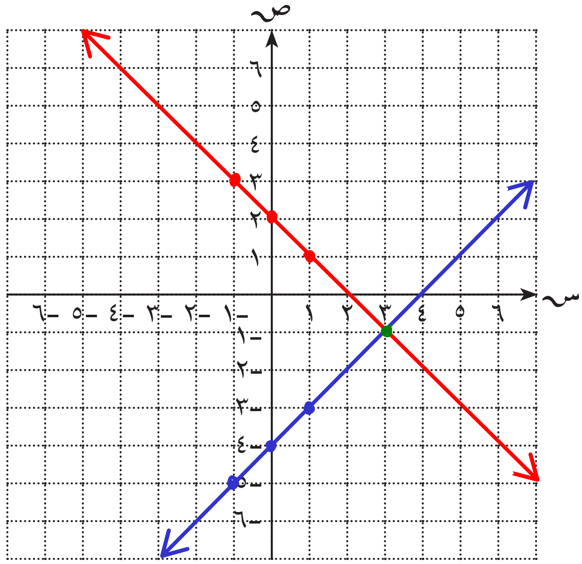
٦ أوجِد مجموعة حلّ المعادلتَين آنيًّا بيانيًّا :

ص = س - ٤ ‏ ‏ ‏ ‏ ص = - س + ٢

ص = س - ٤			
س	١	٠	-١
ص	-٣	-٤	-٥

ص = - س + ٢			
س	١	٠	-١
ص	١	٢	٣

∴ مجموعة الحل من الرسم = {(٣ ، -١)}



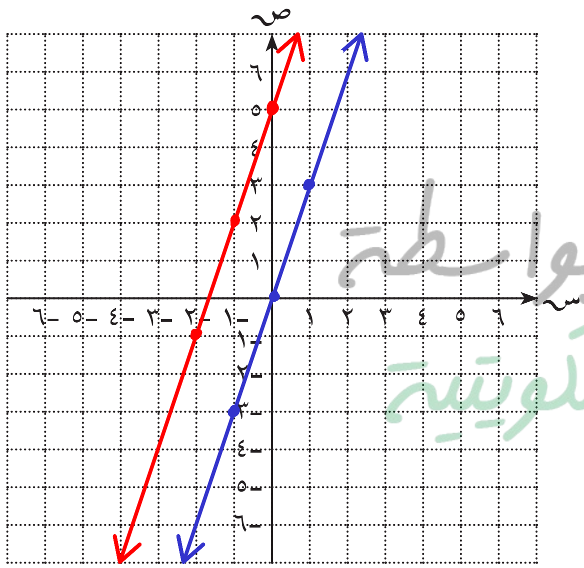
٧ أوجِد مجموعة حلّ المعادلتَين آنيًّا بيانيًّا :

ص - ٣ س = ٠ ‏ ‏ ‏ ‏ ص = ٣ س + ٥

ص = ٣ س			
س	١	٠	-١
ص	٣	٠	-٣

ص = ٣ س + ٥			
س	٠	-١	-٢
ص	٥	٢	-١

∴ من الرسم
مجموعة الحل = ϕ
لأنهما مستقيمان متوازيان.



٨ أوجِد مجموعة حلّ المعادلتَين آنيًّا بيانيًّا :

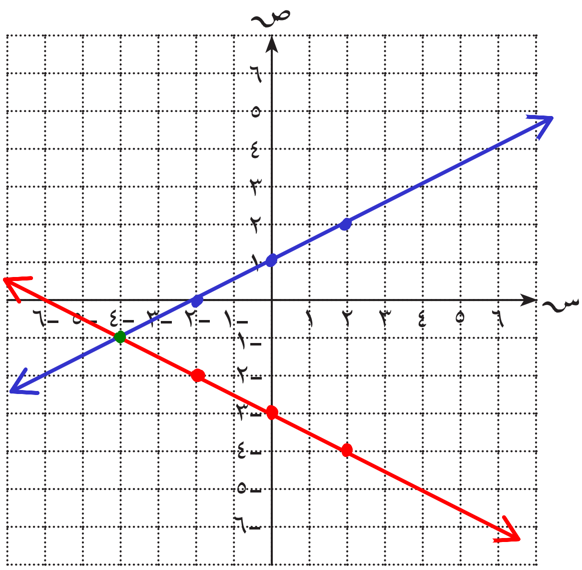
ص = $\frac{1}{2}$ س + ١ ‏ ‏ ‏ ‏ ص = - $\frac{1}{2}$ س - ٣

ص = $\frac{1}{2}$ س + ١			
س	٢	٠	-٢
ص	٢	١	٠

ص = - $\frac{1}{2}$ س - ٣			
س	٢	٠	-٢
ص	-٤	-٣	-٢

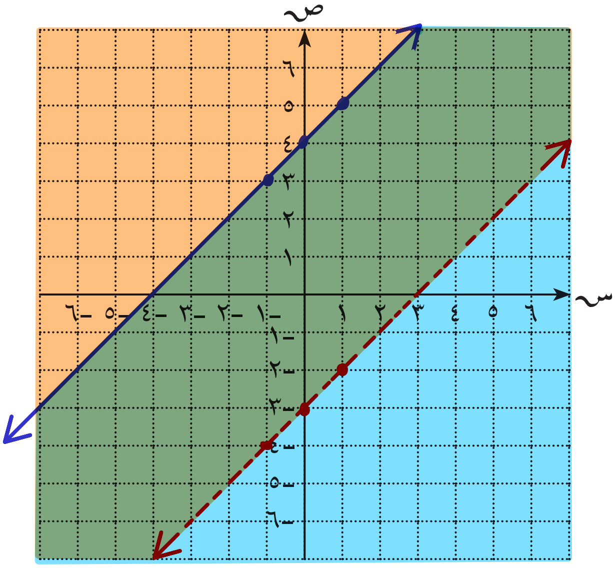
∴ من الرسم

مجموعة الحل = {(-٤ ، -١)}



٩ مثِّل بيانيًّا منطقة الحلّ المشترَك للمتباينتَين :

ص ≥ س + ٤ ، ص > س - ٣



ص ≥ س + ٤
المعادلة المناظرة
ص = س + ٤

ص = س + ٤			
س	١	٠	-١
ص	٥	٤	٣

خط الحدود
متصل

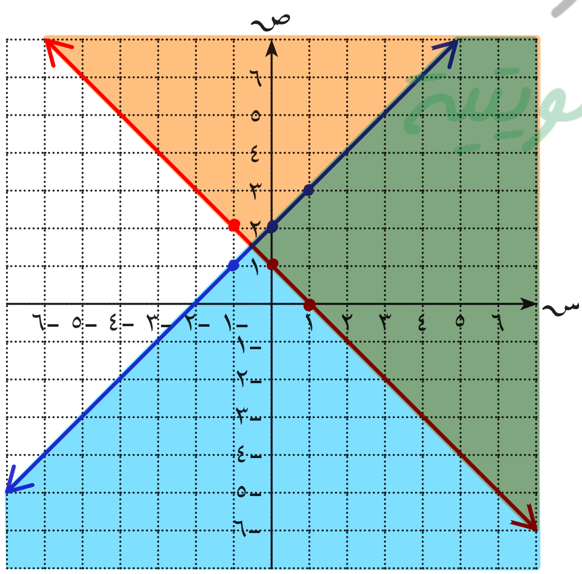
ص > س - ٣
المعادلة المناظرة
ص = س - ٣

ص = س - ٣			
س	١	٠	-١
ص	-٢	-٣	-٤

خط الحدود
متقطع

١٠ مثِّل بيانيًّا منطقة الحلّ المشترَك للمتباينتَين :

ص - س - ٢ ≤ ٠ ، ص ≥ ١ - س



ص - س - ٢ ≤ ٠
ص ≤ س + ٢

ص = س + ٢			
س	١	٠	-١
ص	٣	٢	١

خط الحدود
متصل

ص ≥ ١ - س

ص = ١ - س			
س	١	٠	-١
ص	٠	١	٢

خط الحدود
متصل

ثانيًا : البنود الموضوعية

في البنود (١ – ١٠) ، ظلِّل أ إذا كانت العبارة صحيحة ، وظلِّل ب إذا كانت العبارة غير صحيحة .

١ ميل المستقيم الأفقي يساوي صفرًا .	**أ**	ب
٢ ميل المستقيم الموازي لمحور الصادات يساوي صفرًا .	أ	**ب**
٣ الجزء المقطوع من محور الصادات للمستقيم الذي معادلته : ٣ س + ٣ ص = ١ هو ١	أ	**ب**
٤ إذا كان المستقيمان اللذان ميلاهما $\frac{-٢}{٣}$ ، $\frac{٦}{ك}$ متعامدَين ، فإنّ ك تساوي ٤ .	**أ**	ب
٥ المستقيم الذي معادلته ص = ٥ ليس له ميل .	أ	**ب**
٦ المستقيمان ص = ٢ س + ٣ ، ٢ ص = ٤ س – ١ متوازيان .	**أ**	ب
٧ المستقيم الذي معادلته ص = ٣ والمستقيم الذي معادلته س = ٢ مستقيمان متعامدان .	**أ**	ب
٨ إذا كان ميل $\overleftrightarrow{ع_{١}}$ هو ٣ ، فإنّ ميل $\overleftrightarrow{ع_{٢}}$ العمودي عليه $\frac{-١}{٣}$	**أ**	ب
٩ النقطة (٢ ، ٠) هي أحد حلول المتباينة ص $\leq$ ٣ س – ٢	أ	**ب**
١٠ مجموعة حلّ المعادلتَين ص = ٣ س – ٢ ، ص = ٢ س + ٢ هي { (٤ ، ١٠) }	**أ**	ب

في البنود (١١ - ١٨) ، لكلّ بند أربعة اختيارات ، واحد فقط منها صحيح ، ظلّل الإجابة الصحيحة .

١١ الجزء المقطوع من محور الصادات للمستقيم الذي معادلته :

٣ ص - س + ١ = ٠ هو :

أ) -1 ب) $+1$ ج) $\frac{-1}{3}$ د) $\frac{1}{3}$

١٢ ميل المستقيم المتعامد مع المستقيم : ٢ ص = -٤ س + ٣ هو :

أ) ٢ ب) $\frac{1}{2}$ ج) ١ د) $\frac{-1}{2}$

١٣ مجموعة حلّ المعادلتَين :

ص = ٣ س - ١ ، ص = ٢ س + ١ هي :

أ) { (٠ ، -١) } ب) { (٢ ، ٥) }

ج) { (٠ ، ١) } د) ∅

١٤ النقطة التي تنتمي إلى منطقة الحلّ المشترَك للمتباينتَين

س + ص < ٣ ، ٢ س - ص > ٣ هي :

أ) (-٢ ، ١) ب) (٣ ، ١)

ج) (٢ ، ٢) د) (٤ ، ١)

١٥ المستقيم الموازي للمستقيم : ٣ ص = ٦ س + ٢ هو :

أ) ص = ٢ س + ٥ ب) ٢ ص = ٣ س - ٢

ج) ٣ ص = س + ٢ د) ص = ٣ س + ٢

١٦ إذا كان المستقيمان اللذان ميلاهما $\frac{-2}{3}$ ، $\frac{ك}{2}$ متوازيَين ، فإنّ ك تساوي :

أ) $-\frac{3}{4}$ ب) $\frac{1}{3}$ ج) ٣ د) $-\frac{4}{3}$

١٧ أ ب جـ د مربّع قطراه $\overline{\text{أ جـ}}$ ، $\overline{\text{ب د}}$ حيث أ (٥ ، ٤) ، جـ (-٢ ، ٣) فإنّ ميل $\overleftrightarrow{\text{ب د}}$ يساوي :

أ ٧ ب -٧ ج $\frac{١}{٧}$ د $-\frac{١}{٧}$

١٨ إذا كان $م_١$ ، $م_٢$ ميلَي مستقيمَين متوازيَين وغير رأسيَّين ، فإنّ :

أ $م_١ + م_٢ = ٠$ ب $م_١ - م_٢ = ٠$

ج $م_١ \times م_٢ = ٠$ د $م_١ - م_٢ \neq ٠$

تقويم الوحدة التعليمية السادسة